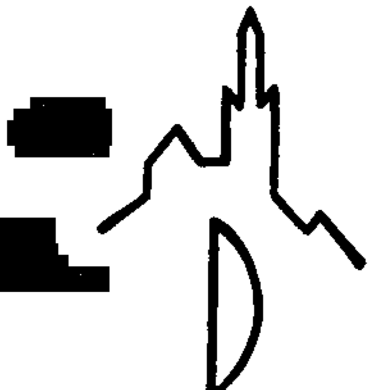
information mathématique



académie d'aix-marseille

irem

Académie d'AIX - MARSEILLE

INFORMATION

MATHEMATIQUE

RESPONSABLE DE LA PUBLICATION

Gilles THOMAS

INSTITUT DE RECHERCHE
SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES
I. R. E. M.
70, route Léon Lachamp
13288 - MARSEILLE Cedex 2
Tél. 41.01.40 poste 32.10/41.39.40

INFORMATION MATHEMATIQUE

N° 13 Octobre 1979

SOMMAIRE

Dépôt légal 4ème trimestre 1979.

PRESENTATION DES ACTIVITES
1979 - 1980

* *
*

Pour définir l'orientation de ses activités cette année, l'I.R.E.M. devait tenir compte de deux facteurs :

- la suppression des décharges de service pour les stagiaires,
- la réduction des moyens matériels mis à sa disposition.

Il nous fallait également ne pas interrompre des actions entamées les années précédentes et dont l'achèvement ne pouvait s'envisager dans l'immédiat.

Dans ces conditions nous avons choisi de mettre l'accent sur une recherche plus fondamentale des activités mathématiques dans les classes : c'est dans cette perspective que se situent la plupart des activités des GROUPES dont on trouvera la description dans les pages suivantes.

Il nous fallait également ne pas perdre contact avec l'ensemble des enseignants de l'Académie. Dans ce but, l'I.R.E.M. se propose d'organiser tout au cours de l'année des actions ponctuelles notamment en ce qui concerne le premier Cycle, la sensibilisation aux techniques audio-visuelles et l'apprentissage de l'informatique.

Ces actions consisteraient en des rencontres avec les enseignants de tel ou tel secteur géographique autour d'un thème bien déterminé.

Il faut souligner, à ce sujet, que si de telles rencontres ne peuvent donner lieu pour les enseignants qui y participeraient à des décharges de service, elles donnent lieu au remboursement des frais de déplacement, ainsi qu'à la couverture administrative en cas d'accident.

Par ailleurs, l'I.R.E.M. continuera à publier à raison de deux numéros au moins par an, le bulletin Information Mathématique avec des suppléments éventuels ainsi que des brochures dont le contenu est élaboré dans les groupes de recherche.

A ce sujet, il nous parait impératif aussi bien en ce qui concerne la diffusion des publications ou informations que l'établissement d'un dialogue avec les enseignants, d'avoir des correspondants I.R.E.M. dans tous les Collèges et Lycées de l'Académie. Nous lançons donc un pressant appel dans ce sens :

M. Mme, Melle : ....
(Nom, Prénom) ....

Discipline enseignée : ....

accepte d'être CORRESPONDANT I.R.E.M. de l'Etablissement :

Intitulé : ....

Adresse : ....

....

à adresser à : M. le Directeur de l'I.R.EM.
70, route Léon Lachamp
13009 - MARSEILLE

ROLE DES PROBLEMES NUMERIQUES DANS L'ENSEIGNEMENT DE L'ANALYSE

OBJECTIFS DU GROUPE

Il s'agit de rédiger des textes assez courts destinés à l'ensemble des collègues de l'Académie.

Ces textes ne supposent pas de connaissances préalables sur l'emploi des calculatrices ou sur l'informatique. Ils mettront en évidence l'intérêt des problèmes numériques dans l'enseignement de l'analyse ; ces problèmes, suivant les cas, nécessitent des calculs à la main, sur calculatrice de poche, ou sur ordinateur.

THEMES RETENUS

Chaque texte est centré :

- soit autour d'un problème mathématique ,
- soit autour d'un problème lié à la mise en oeuvre de calculs.

THEMES PREVUS CETTE ANNEE

- analyse de la notion de performance (cas des calculs à la main, à la machine) ;
- analyse des différents types d'erreurs qui entrent dans l'exécution d'un calcul
- exemples de travaux à effectuer en multiprécision (calcul d'inverses, de racines carrées...) ;
- choix des algorithmes et choix de l'initialisation ;
- résolution des équations numériques par la méthode du point fixe (mise en oeuvre des calculs : description de l'algorithme, organigramme de calcul) ;
- participation à la rédaction de documents ;
- participation à la diffusion des travaux.

ORGANISATION DU TRAVAIL

Les réunions ont lieu le Jeudi de 14 h 30 à 16 h 30 tous les quinze jours dans les locaux de l'IREM, 70, route Léon Lachamp - 13009 Marseille (Bât. 4, 3ème étage).

Responsable : J. L. OVAERT

La première réunion a eu lieu le Jeudi 4 Octobre 1979.

TRAITEMENT NUMERIQUE EN ARITHMETIQUE ET EN ALGEBRE LINEAIRE

Le groupe a pour but l'étude de divers algorithmes utilisés en arithmétique et en algèbre linéaire. Il mènera de pair :

- une étude théorique, pour justifier ces algorithmes, comparer leur efficacité, étudier leurs limites ;
- et un travail pratique en écrivant les programmes correspondants.

D'autre part le groupe aura pour souci d'appliquer les concepts et les algorithmes étudiés à des domaines autres que celui des mathématiques.

ARITHMETIQUE

Thèmes abordés :

- factorisation d'un nombre en produit de nombres premiers, test de la primarité d'un nombre, construction de grands nombres premiers,...

Application à la cryptographie :

- rôle important que jouent les algorithmes cités ci-dessus ainsi que certain résultats élémentaires de l'arithmétique, dans l'élaboration de codes pratiquement indéchiffrables, et exemples.

ALGEBRE LINEAIRE

Thèmes abordés :

- calcul de déterminant, inversion de matrices, résolution de système d'inéquations à n inconnues,...

Application à la recherche opérationnelle :

- étude de la méthode du Simplexe et exemples.

ORGANISATION DU TRAVAIL

Les réunions ont lieu le Jeudi de 14 h 30 à 16 h 30 tous les quinze jours dans les locaux de l'IREM, 70, route Léon Lachamp - 13009 Marseille (Bât. 4, 3ème étage).

Responsable : F. DIDIER

La première réunion a eu lieu le Jeudi 11 Octobre 1979.

APPROCHE D'UN ENSEIGNEMENT PROGRAMMÉ DE L.S.E.

OBJECTIF

Examiner la possibilité d'implanter un enseignement programmé du langage L S E sur un microprocesseur 64 K.

METHODE PROPOSEE

- S'informer sur les réalisations actuelles en BASIC et FORTRAN.
- Tenter d'évaluer les contraintes en place mémoire et en temps d'exécution pour L S E, en fonction des divers langages de programmation utilisables sur un microprocesseur 64 K, à savoir, BASIC, L S E, PASCAL, PROLOG.
- Dans le cas de perspectives encourageantes dessiner la structure générale d'un tel enseignement.

ORGANISATION DU TRAVAIL

Les dates des réunions seront fixées lorsque toutes les personnes intéressées seront connues (écrire ou téléphoner au secrétariat de l'IREM, Tél. n° 41.39.40.

TABLE TRAÇANTE

Ce groupe envisage d'appliquer les tables traçantes à la géométrie au niveau de la classe de 4ème.

Il se réunira à GAP.

Les personnes intéressées peuvent contacter M. NEPOTE, Lycée Dominique Villard à GAP.

Matériel utilisé :

- Calculateur programmable H P 9820
- Table traçante.

DIDACTIQUE DES ACTIVITES NUMERIQUES

Le texte d'orientation ci-après a été élaboré lors de la première réunion de travail des animateurs de l'I.R.E.M., qui s'est tenue au Pradet les 10 et 11 septembre 1979.

STATUTS ET FONCTIONS DU "LITTERAL" EN 4e - 3e

1. Le groupe de recherche "Didactique des activités numériques" prend pour champ d'étude le domaine des interactions entre numérique et algébrique en classe de 4e - 3e.

2. Les perspectives de recherches sont fixées par une analyse d'ensemble faite d'hypothèses sur l'objet étudié, hypothèses dont la mise en oeuvre, l'approfondissement, l'affinement, le rejet ou les modifications éventuelles constituent les voies, théoriques et pratiques, de l'avancée de cette recherche.

3. Les moyens correspondants sont, en termes de méthodologie, les moyens, devenus usuels en didactique, de l'analyse didactique et de la construction de situations didactiques appropriées : observations de classes, observations d'élèves hors classe, entretiens avec des élèves, entretiens avec des professeurs, questionnaires, tests, étude du discours de et sur l'enseignement, analyses mathématiques, analyses historiques et épistémologiques, conception et réalisation de situations didactiques, etc.

4. L'analyse de départ, mentionnée en 2., sur laquelle prend appui ce projet, est issue pour partie de recherches antérieures, menées notamment dans le cadre du Troisième Cycle de Didactique des Mathématiques de l'IREM d'Aix-Marseille, et a reçu de ce fait une première mise à l'épreuve et une validation au moins partielle.

5. L'analyse en question peut être esquissée à grands traits par les formulations suivantes :

a) La classe de 4e est un lieu de rupture dans l'enseignement des mathématiques, en ce qui concerne l'introduction, l'usage et le statut des calculs littéraux, des manipulations formelles, de l'algébrique en général.

b) Cette rupture répond en écho déformé (transposition didactique) au changement intervenu, dans l'histoire des mathématiques occidentales, vers le XVIe siècle en Europe avec l'introduction (symbolisée pour la plupart des historiens par le nom de François Viète (1540-1603)) de l'usage systématique et réglé des lettres notamment dans l'étude des équations numériques. Quoiqu'il en soit des incertitudes de datation (liées en particulier aux phénomènes d'oubli et de reprise), on peut considérer que le passage est accompli avec Descartes, dans le premier livre de La Géométrie (1637) : la leçon désormais ne sera plus oubliée.

c) Cette introduction paraît historiquement soutenue, d'une part par des raisons d'économie des formulations par généralisation (raisons historiquement évidentes : que l'on songe à Tartaglia et l'équation du 3e degré...), d'autre part par l'accroissement de la capacité de contrôle autorisée par la prise en charge du numérique par le littéral.

d) Ces conditions (d'économie et de contrôle) ne semblent guère présentes dans la transposition didactique réalisée dans l'enseignement actuel de 4e. Le statut de l'algébrique est moins lié, dans l'enseignement, aux possibilités de position et de résolution de problèmes qu'il autorise, qu'à des contraintes imposées par la transposition didactique à ce niveau (cf. infra e) f) g) h)).

e) Jusqu'en 4e, et pendant une bonne partie de cette classe, le littéral apparaît d'abord comme une simple sténographie permettant seulement le décalque et la représentation de manipulations directements numériques. A ce stade ne s'est pas produit le "décollage" de l'algébrique par rapport au numérique, décollage qui est condition de la création d'une dialectique entre numérique et algébrique.

f) La rupture et l'autonomisation soudaine se produisent avec l'introduction aux nombres réels (plutôt que des nombres réels). Alors, au contraire de ce qui était fait pour $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$ et $\mathbb{Q}$, le calcul direct sur des nombres n'étant guère praticable, le littéral intervient massivement, mais comme théâtre d'ombres représentant une structure absente : l'algébrique fonctionne pour masquer la non-construction des réels.

g) De même que le statut de simple sténographie (mentionné en e ci-dessus), le statut d'autonomie par rapport à un numérique "absent" (qui pourrait être présent en termes de problèmes, cf. les travaux du groupe Analyse), interdit la mise en place d'une interaction entre numérique et algébrique qui justifierait l'effort d'investissement demandé à l'élève autrement que par la nécessité (pour le système) d'avoir une présentation "propre" (mais non une construction) des nombres réels.

h) De la même manière que l'intervention de l'algèbre à ce niveau est hypothéquée par l'insuffisance du développement du numérique, ce qui en retour (dialectique !) stérilise les possibilités mêmes d'action sur ce numérique, de même on peut montrer (cf. mémoire de DEA de J. Tonnelle, IREM d'Aix-Marseille, 1979) que l'autre grand absent dans l'enseignement des mathématiques à ce niveau, la notion de polynôme (qui est un concept "préconstruit" mais non construit, cf. J. Tonnelle, op. cit.) pèse sur la fécondité des procédures algébriques en restreignant fortement leurs conditions d'emploi (par exemple, l'élève utilisera en 4e le schème de factorisation $a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$, mais non le schème $a-b = (\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})$, qu'il pourrait alors "illégalement" appliquer à l'"expression" X^3-4, sortant ainsi du domaine des polynômes.

6. Cette recherche envisage donc d'étudier les conditions didactiques de la création et du développement d'une dialectique entre numérique et algébrique, l'algébrique dégageant sa signification à partir des problèmes du numérique, et constituant en retour un outil puissant d'approfondissement de celui-ci (par une approche des réels, et non un évitement).

Responsable : Y. CHEVALLARD

Ce groupe se réunit le vendredi après-midi de 14 h 30 à 18 h 30 dans les locaux de l'I.R.E.M. - 70, route Léon Lachamp - 13009 Marseille (Bât. 4, 3ème étage).

G E O M E T R I E

OBJECTIFS

a) Conduire une réflexion théorique sur l'enseignement de la géométrie à partir d'une analyse scientifique et épistémologique des activités géométriques, d'une analyse des objectifs attendus d'un enseignement de la géométrie, et d'une analyse de l'état actuel de l'enseignement de la géométrie dans le 2ème cycle des lycées. Cette réflexion fera l'objet de rapports.

b) Produire des documents qui, prenant en compte les conclusions de ces rapports proposeront des activités de géométrie se situant à des niveaux d'approfondissement variés du 2ème cycle des lycées, à travers quelques thèmes choisis en fonction d'une triple critère : intérêt du thème auprès des élèves, intérêt du thème par son investissement dans une culture scientifique, intérêt du thème par les approfondissements et les prolongements qu'il permet. Ce travail devrait apporter une contribution à l'élaboration d'une conception globale de l'enseignement de la géométrie dans le second cycle des lycées et, en particulier, préciser ce que pourrait être un enseignement de la géométrie dans une classe de Seconde indifférenciée.

ORGANISATION DU TRAVAIL

Les réunions ont lieu le premier et le troisième mercredi du mois de 14 h 30 à 16 h 30 dans les locaux de l'IREM, 70, route Léon Lachamp - 13009 - Marseille (Bât. 4, 3ème étage).

Responsable : J. MARION

La première réunion a eu lieu le Mercredi 3 Octobre 1979.

PREMIER CYCLE

Malgré des conditions matérielles qui, cette année, ne sont pas toujours favorables et dans le but de consolider les liens qui l'attachen aux enseignants de mathématiques du 1er Cycle, le groupe de recherche IREM-1er Cycle organise "des" mardi après-midi "quelques" rencontres décentralisées dans un secteur géographique situé entre Aix et Avignon.

Le centre d'intérêt de ces rencontres est le nouveau programme de 4ème.

Les professeurs qui seraient intéressés peuvent se faire connaître à l'I.R.E.M. - 70, route Léon Lachamp - 13009 - Marseille (Bât. 4, 3ème étage), pour que celui-ci les prévienne du calendrier prévu pour ces réunions.

Responsable : C. RAMBAUD.

L. E. P.

Il s'agit dans ce groupe de déterminer et de mettre au point un certain nombre d'activités mathématiques ; certaines de ces activités seront plus spécialement en rapport avec les disciplines professionnelles.

Les sujets prévus sont :

- activités géométriques en liaison avec les machines de l'atelier ;
- activités mathématiques en liaison avec les problèmes financiers (et particulier les traitements numériques de ces problèmes).

Responsables : A. et R. ROLLAND.

Ce groupe se réunit le vendredi après-midi au Lycée St Charles à Marseille.

RECHERCHE MATH-PHYSIQUE

GROUPES DE TRAVAIL

"BINOMES MATH-PHYSIQUE"

Le "binôme Math-Physique" était formé, à l'origine, d'un professeur de mathématiques et d'un professeur de physique enseignant dans le même établissement, ayant au moins une classe en commun, et stagiaires à l'I.R.E.M. dans l'un des groupes M P.

Il s'agit cette année pour ces binômes Math-Physique de poursuivre le travail commencé au sein des groupes M P :

- Harmonisation et actualisation des connaissances et du langage des professeurs de mathématiques et de physique dans l'enseignement de ces deux disciplines ;

- Coordination au niveau des programmes et, plus particulièrement depuis l'année scolaire dernière, étude des difficultés soulevées par l'introduction des nouveaux programmes de physique ;

- Rédaction de documents présentant des thèmes de travail pour les classes et destinés à une large publication.

Trois groupes "Binômes Math-Physique" sont constitués :

AVIGNON, animateur J.M. VERNET, Ecole Normale	Mardi après-midi
BRIANÇON, animateur D. BUES, Lycée d'Altitude	" "
MARSEILLE, animateur G. THOMAS, Lycée St Charles	Vendredi après-midi

AUDIO - VISUEL

Une première activité de ce groupe va consister à essayer de dresser un bilan des activités antérieures : chercher comment - et peut-être pourquoi - la forme des productions a évolué depuis une dizaine d'années, activité qui pourra déboucher sur la publication d'un document.

Une seconde partie du travail du groupe sera consacré à une nouvelle expérimentation du film sur "LES ESPACES VECTORIELS" qui devrait aboutir d'une part à la rédaction d'un document récapitulatif, d'autre part à une refonte, à la lumière des expériences, du film lui-même.

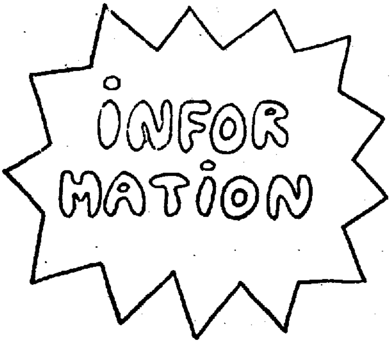
Enfin le groupe envisage de déterminer les apports - pour les élèves et pour le professeur - de l'utilisation du rétroprojecteur en cours de mathématiques. Ce média semblerait s'intégrer beaucoup plus facilement que le film dans les perspectives pédagogiques actuelles en mathématiques.

Parallèlement à ces diverses activités, les films, que les stagiaires de Marseille ou d'Aix n'avaient pu achever au cours de leur deuxième année de stage, seront terminés.

Des difficultés réelles apparaissent dans l'utilisation par un professeur d'un document audio-visuel qu'il n'a pas lui-même produit. Le groupe Audio-Visuel tentera d'analyser et de résoudre ces problèmes.

L'initiation à l'utilisation des appareils tels que les magnétoscopes est envisageable sous forme d'un stage groupé de trois jours par exemple. Il paraît, en effet, important, devant le développement considérable et peut-être anarchique que va prendre ce média dans les années à venir, que les professeurs de mathématiques puissent maîtriser cet outil.

Ce groupe se réunit le vendredi après-midi dans les locaux de l'IREM, 70, route Léon Lachamp - 13009 - Marseille (Bât. 4, 3ème étage).



REGIONALE A.P.M.E.P.
D'AIX-MARSEILLE
ACTIVITES DU
PREMIER TRIMESTRE
1979-1980

Toutes les réunions se tiendront au Lycée St Charles
45, bd Camille Flammarion - Marseille
(salle 51) à 14 h 45

<u>24 octobre</u>

"Histoire des Mathématiques".
La construction des concepts de l'analyse.
Le passage au numérique. Fourier, Cauchy, Bolzano.

(J.L. OVAERT)

<u>21 novembre</u>

Présentation de la brochure :
"Activités mathématiques en 4ème et 3ème". (Débat)

<u>12 décembre</u>

"Une représentation géométrique de l'ensemble des matrices 2 x 2".

(Mme PECAUT)

Pour la brochure "Activités mathématiques en 4ème et 3ème, Publication de l'A.P.M.E.P., voir bulletin n° 320 du mois de septembre 1979.

EN DIRECT
DU SERVICE
DES PUBLICATIONS

★ ★
★

Comme nous l'avons annoncé dans les précédents numéros du bulletin "information mathématique", nous vous proposons, en ce début d'année scolaire, deux brochures dans la série

monographies de l'irem d'aix-marseille

Il s'agit d'une publication du groupe de Recherche sur l'Enseignement du Calcul des Probabilités et d'une publication du groupe de Recherche sur l'Enseignement de l'Analyse.

Depuis la rentrée 1977 des diminutions successives des crédits affectés aux I.R.E.M. ont entraîné de sérieuses difficultés de fonctionnement en particulier en ce qui concerne l'une des missions confiées aux I.R.E.M. : l'élaboration et la diffusion de documents. Si nous sommes encore en mesure de vous adresser gratuitement et aussi régulièrement que les années précédentes le bulletin "information mathématique", nous nous voyons par contre obligés de mettre en vente ces brochures au prix coûtant.

Le lecteur trouvera dans les pages suivantes une présentation détaillée de ces deux brochures, les titres des derniers bulletins INTER IREM ainsi qu'un bulletin de commande à nous adresser.

N'hésitez pas à nous faire part de vos critiques comme de vos suggestions concernant les publications de l'I.R.E.M. ; nous rappelons que la rubrique "Tribune libre" de ce bulletin est à votre disposition.

G.T.

calcul des probabilités et arithmétique

INDEPENDANCE ET MULTIPLICATIVITE RESTREINTE.

(Groupe de Recherche sur l'Enseignement du Calcul des Probabilités de l'I.R.E.M. d'Aix-Marseille)

32 pages – PRIX : 2,50 F.

Dans cette brochure, on utilise les propriétés les plus élémentaires d'indépendance d'évènements et de variables aléatoires pour démontrer certaines propriétés algébriques des fonctions d'entiers.

Les démonstrations probabilistes qui sont présentées devraient éclairer d'un jour nouveau le comportement des entiers vis à vis de la division euclidienne et la nature de certaines propriétés telles la multiplicativité restreinte, qui est étudiée en détails pour l'indicateur d'Euler, et la somme des puissances des diviseurs d'un nombre.

Cette interaction entre deux secteurs des mathématiques apparemment éloignés est présentée à un niveau élémentaire évitant ainsi au lecteur d'avoir à consulter de nombreux ouvrages qu'il est parfois difficile de se procurer et souvent difficile de lire.

Enfin ce document non seulement atteste l'efficacité des propriétés d'indépendance mais permet aussi d'illustrer l'intérêt de choisir tel ou tel espace probabilisé suivant la nature du problème et des propriétés que l'on veut démontrer détruisant ainsi le mythe de l'univers à qui l'on fait jouer trop souvent un rôle central, injustifié et néfaste.

TABLE DES MATIERES

analyse 1

(Groupe de Recherche sur l'Enseignement de l'Analyse de l'I.R.E.M. d'Aix-Marseille)

120 pages - PRIX : 6,50 F.

En Septembre 1975, un groupe de recherche sur l'enseignement de l'analyse s'est constitué à l'I.R.E.M. de Marseille, réunissant des enseignants du second degré et du supérieur. Il s'est d'abord fixé pour tâche de dégager quelques grandes orientations pour l'enseignement de l'Analyse, en tenant compt

- des indices fournis par l'état actuel de cet enseignement.
- d'une étude scientifique et épistémologique des concepts fondamentaux de l'analyse.
- du rôle joué par ces concepts dans une formation scientifique.

Ces orientations sont regroupées non autour de concepts théoriques, mais à partir des quelques grands problèmes de l'analyse qu'il nous a paru utile d'étudier dans l'enseignement secondaire. Cela ne signifie en aucun cas un abandon de l'approfondissement théorique des concepts de l'analyse, bien au contraire. Les études historiques et épistémologiques, aussi bien que les réflexions d'ordre didactique et génétique nous ont montré que c'est à travers leur fonctionnement dans la résolution de problèmes que ces concepts peuvent être progressivement approfondis. Les problèmes ont été choisis en fonction de cet objectif, de l'intérêt qu'ils peuvent susciter chez les élèves, de leur importance pour la construction d'une culture scientifique, et des interconnexions qu'ils présentent avec d'autres secteurs des mathématiques, de l'informatique scientifique, des sciences physiques et technologiques...

Pour illustrer ces grandes orientations, de nombreux documents ont été produits, des expérimentations s'inspirant de ces documents ont été réalisées ou sont en cours de réalisation et feront l'objet d'autres documents.

Des travaux analogues, abordant des aspects complémentaires, ont été engagés par d'autres I.R.E.M. Un groupe national inter-I.R.E.M. permet des échanges structurés entre ces groupes.

PLAN DE LA BROCHURE

Bulletin

inter.I.R.E.M.

N° 15 SPECIAL AUDIO-VISUEL
56 pages - PRIX : 6 F.

N° 16 SPECIAL COPIRELEM
(Commission Permanente des IREM sur l'Enseignement Elémentair
47 pages - PRIX : 7 F.

N° 17 LES I.R.E.M. : MISSIONS ET ACTIVITES
56 pages - PRIX : 7 F.

N° 18 HISTOIRE DES MATHEMATIQUES ET EPISTEMOLOGIE
66 pages - PRIX : 7 F.

BULLETIN DE COMMANDE

N O M : .... Prénom ....

ETABLISSEMENT :

intitulé exact : ....

....

Adresse : ....

....

Commande les ouvrages suivants :

☐ CALCUL DES PROBABILITES ET ARITHMETIQUE :

Indépendance et multiplicativité restreinte

Prix 2,50 F nombre d'exemplaires ☐

☐ ANALYSE 1

Prix 6,50 F nombre d'exemplaires ☐

☐ BULLETIN INTER-IREM

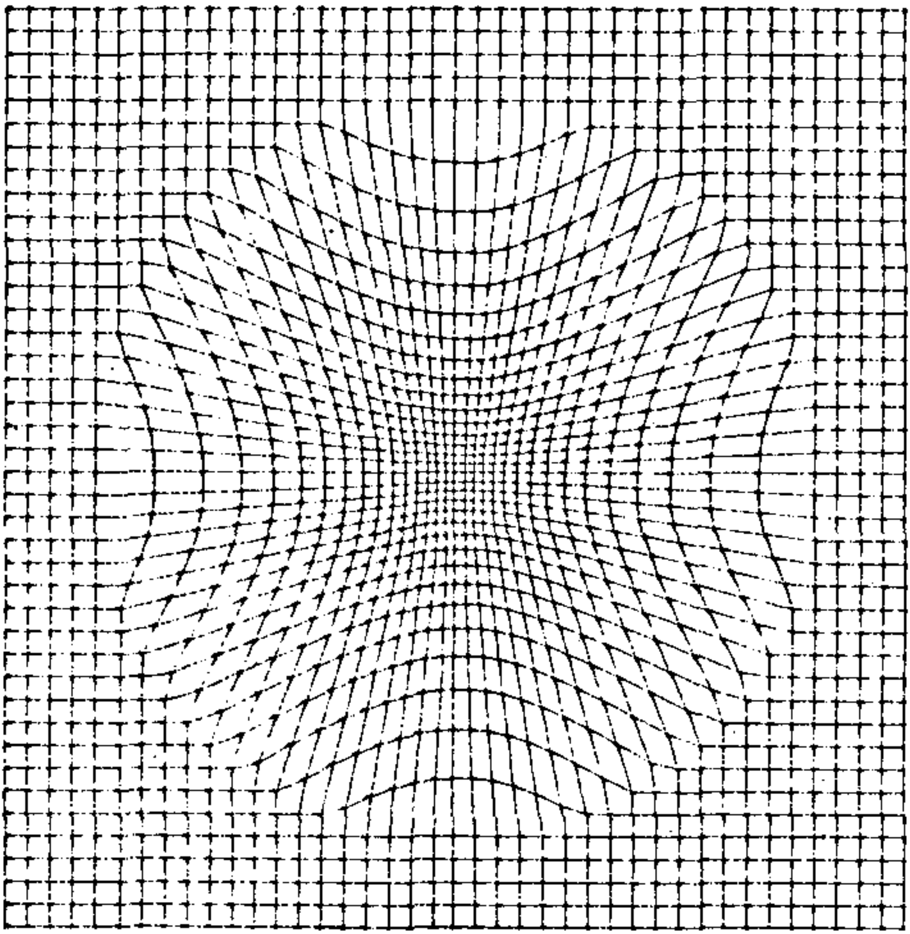
numéro :	15 ☐	16 ☐	17 ☐	18 ☐
nombre d'exemplaires :	☐	☐	☐	☐

Ci-joint Chèque bancaire ☐ / Chèque postal ☐ de .... F.

à l'ordre de : M. l'Agent Comptable de l'Université d'Aix-Marseille II

à adresser à : M. le Directeur de l'I.R.E.M.
Service des Publications
70, route Léon Lachamp
13288 - MARSEILLE CEDEX 2

Date : .... Signature :



dessin réalisé à la table traçante

groupe informatique – Gap

PROBLEME DU PASSAGER EJECTE ET DU BALLOT BALADEUR

★ ★
★

Michel EYRAUD & Raymond RAYNAUD
Groupe Math-Physique de Digne

L'expérience courante nous confronte aux "forces d'inertie" et en particulier à la fameuse "force centrifuge" qui est souvent mal comprise par nos élèves.

Les "forces d'inertie" apparaissent quand on veut écrire les lois d'un mouvement dans un "mauvais référentiel", c'est-à-dire un référentiel non galiléen. Ce ne sont pas des actions exercées sur le système étudié par le monde environnant, c'est pourquoi on les appelle des "forces fictives". Mais le passager d'une voiture qui prend un virage rapidement EST dans le "mauvais référentiel" ; il faut qu'il raisonne et qu'il se raisonne pour juger fictive la "force" qui le tire vers l'extérieur du virage. Cette expérience journellement vécue, ainsi que des lectures mal comprises expliquent sans doute le penchant qu'ont nos apprentis physiciens à assaisonner de "force centrifuge" tout mouvement circulaire, serait-il étudié dans le meilleur des référentiels !

Nous espérons que le travail dont nous rendons compte a aidé nos élèves à se faire des idées plus claires sur la question. En même temps il leur a fait résoudre un problème de cinématique à racines réelles, qui s'est révélé très motivant. Enfin il les a conduits à imaginer un dispositif réalisable au laboratoire permettant l'étude expérimentale du problème physique proposé. Le club photo de l'établissement a été mis à contribution et envisage des développements dont nous parlerons le cas échéant.

NB En ce qui concerne les forces et les forces fictives, le langage utilisé est celui du cours de mécanique de Brousse (AC - collection U).

En mathématique la cinématique du point a été traitée, ainsi qu'en physique la dynamique du point. On sait que ...

... lorsqu'un point est en repos ou en mouvement rectiligne uniforme dans un référentiel galiléen, la force totale qui lui est appliquée est nulle, et réciproquement.

... lorsqu'un point est en mouvement circulaire uniforme dans un référentiel galiléen, la force totale qui lui est appliquée est centripète et d'intensité constante.

A - DIALOGUE EN CLASSE DE PHYSIQUE (P : professeur, E : élèves)

P - L'auto prend un virage rapide vers la gauche ; le passager, à côté du conducteur, est calé contre la portière, à quelles forces est-il soumis ?

E - A son poids.

- Aux réactions de la portière, du dossier, de la banquette, du plancher.
- A la force centrifuge(1).

P - J'enregistre. Je pose une autre question : La portière s'ouvre brusquement. Que se passe-t-il ?

E - Le passager est éjecté.

P - Comment ?

E - Brutalement.

- Suivant la tangente.
- Non ! suivant l'axe de la banquette.
- Non ! entre les deux, plutôt en avant.
- Non ! plutôt en arrière.

P - Ma question est suffisamment vague pour qu'on réponde un peu n'importe quoi. Mais ces deux avis : "Suivant la tangente" et "Suivant l'axe de la banquette" ne sont-ils pas contradictoires ?

(1) Le mot n'a jamais encore été prononcé, ni en mathématique, ni en physique.

E - Si !

- Pas forcément ! ça dépend du point de vue.

P - Précise.

E - Ca dépend si on regarde de la route ou de l'auto.

P - Très bien ! Et en langage scientifique...

E - Ca dépend du référentiel choisi.

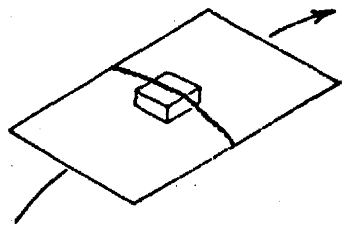
P - Voilà !Et les forces évoquées il y a un instant, dépendent-elles du point de vue ?

E - Non, bien sûr !

P - Même cette force centrifuge dont quelqu'un a parlé ?

E - ...

P - On y reviendra. Je transforme le problème pour qu'on puisse mieux l'analyser :



Un camion tourne sur une place horizontale à vive allure. Le centre de la plate-forme est animé d'un mouvement circulaire uniforme de centre 0, de rayon R et de vitesse angulaire ω. Au centre de la plate-forme, supposée bien lisse pour qu'on puisse négliger les frottements en première approximation, est arrimé un ballot de masse m au moyen d'une corde. Arrive un instant où la corde casse.

Quel est le mouvement du centre d'inertie G du ballot, immédiatement avant la rupture, puis immédiatement après... 1°) par rapport à la place considérée comme référentiel galiléen, 2°) par rapport à la plate-forme, et quelles sont les forces qui causent ce mouvement ?

Nous désignerons par $\vec{v}$ et $\vec{\gamma}$ le vecteur vitesse et le vecteur accélération de G dans son mouvement par rapport à la place, par $\vec{V}$ et $\vec{\Gamma}$ le vecteur vitesse et le vecteur accélérateur de G dans son mouvement par rapport à la plate-forme.

1) Commençons par le mouvement par rapport à la place.

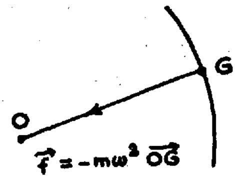
★ <u>Avant la rupture</u>

E - Le mouvement de G est <u>circulaire uniforme</u>
- Son accélération est centripète $\vec{\gamma} = \omega^2 . \overrightarrow{OG}$

P - Oui, si l'on confond G et le centre de la plate-forme ; et par quelle force totale agissant sur G expliquez-vous ce mouvement ?

E - Par la force totale $\vec{f} = m\vec{\gamma}$, d'après le principe fondamental de la dynamique dans un référentiel galiléen.

$\vec{f} = -m\omega^2 \overrightarrow{OG}$, c'est une force centripète.



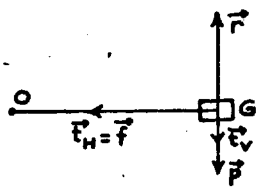
P - Oui. Et quelles sont les actions constituant $\vec{f}$?

E - Le poids $\vec{p}$ du ballot, la réaction $\vec{r}$ de la plate-forme ; l'action $\vec{t}$ de la corde.
- La force centrifuge.

P - D'accord pour $\vec{p}$, $\vec{r}$ et $\vec{t}$. Mais cette force centrifuge peut-on me la montrer, me dire ce qui l'exerce sur le ballot, et comment ?

E - ...

P - On a beau chercher, on est obligé de conclure que les seules actions exercées sur le ballot par le monde extérieur sont $\vec{p}$, $\vec{r}$ et $\vec{t}$.
Aucune place dans ce bilan pour votre fameuse force centrifuge.
D'ailleurs $\vec{t}$ se décompose en une force verticale $\vec{t}_V$, qui s'ajoute à $\vec{p}$, et une force horizontale $\vec{t}_H$.
En outre, si l'on suppose que le contact du ballot sur la plate-forme a lieu sans frottement, $\vec{r}$ est verticale ; et comme $\vec{\gamma}$ n'a pas de composante verticale, il faut conclure que
$\vec{p} + \vec{t}_V + \vec{r} = \vec{0}$, et il reste $\boxed{\vec{f} = \vec{t}_H}$



★ <u>Examinons maintenant la situation après la rupture</u>

E - $\vec{t}$ disparaît, $\vec{t}_H$ et $\vec{t}_V$ avec ; $\vec{p}$ et $\vec{r}$ s'annulent puisque le ballot reste sur la plate-forme et qu'il n'y a pas frottement. Donc $\boxed{\vec{f} = \vec{0}}$
- Donc $\vec{\gamma} = \vec{0}$ et le mouvement de G par rapport à la place est maintenant <u>rectiligne uniforme.</u>

P - Parfaitement ! Et quel est son vecteur vitesse ?

E - C'est le vecteur vitesse $\vec{v}$ du mouvement circulaire de G à l'instant de la rupture

P - Oui. Voilà la question élucidée dans le référentiel galiléen.

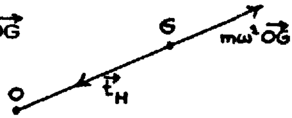
2) Examinons maintenant le mouvement de G par rapport à la plate-forme

★ Avant la rupture ...

E - Avant la rupture G est immobile relativement à la plate-forme.
$\vec{V} = \vec{\Gamma} = \vec{O}$

P - Oui. Et quelle est la force totale agissant sur G ?

E - C'est comme tout à l'heure $\vec{f} = \vec{t}_H = -m\omega^2 . \overrightarrow{OG}$



P - Exactement. Et si l'on veut expliquer le mouvement de G sur la plate-forme, ou plutôt son immobilité, en appliquant le théorème fondamental de la dynamique dans le référentiel tournant, on peut interpréter l'égalité

$$\vec{t}_H + m\omega^2 OG = \vec{\Gamma} = \vec{O} \quad \text{comme suit :}$$

A l'action centripète $\vec{t}_H$ de la corde s'oppose la "force fictive" $m\omega^2 \overrightarrow{OG}$

Voilà la fameuse "force centrifuge" dont il a été question. Ce n'est pas une action exercée sur le ballot par le monde extérieur, c'est une "force fictive" que nous inventons pour expliquer par le principe fondamental le mouvement du ballot dans un référentiel non galiléen. Et cette "force fictive" dépend du référentiel adopté.

★ Il reste à examiner ce qui se passe après la rupture.

A l'instant où la corde se rompt, $\vec{t}_H$ s'annule, G n'est plus soumis, dans le référentiel plate-forme, qu'à la "force fictive" $m\omega^2 \overrightarrow{OG}$, et l'on comprend que, dans la fraction de seconde qui suit, G va s'ébranler sur la plate-forme d'un mouvement centrifuge.
Mais après ?

E - Après, le ballot glisse sur la plate-forme.

P - Oui, bien sûr, mais quel est son mouvement sur cette plate-forme ?

E - On pourrait le déterminer à partir de la "force fictive".

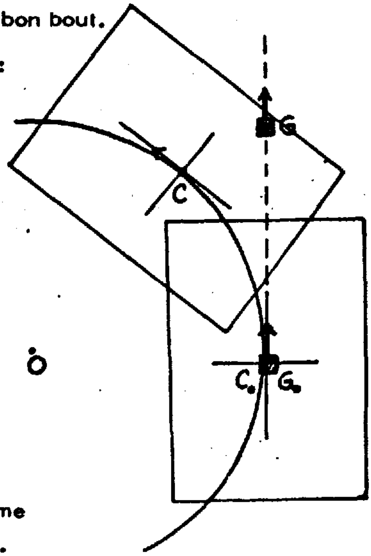
P - Quelle "force fictive" ? Nous ne sommes plus dans la situation où G était immobile sur la plate-forme. La connaissez-vous cette "force fictive" d'où l'on déduirait le mouvement ?

E - Non .

P - Alors on ne prendrait pas les choses par le bon bout.

Réfléchissons donc avec un dessin à l'appui :

pendant que la ballot file par rapport à la place d'un mouvement rectiligne uniforme, dont le vecteur vitesse est celui du mouvement circulaire qu'avait le ballot à l'instant où la corde a cassé, la plate-forme tourne sous le ballot d'un mouvement circulaire uniforme.
On connaît les mouvements par rapport à la place de la plate-forme et du ballot, il faut en déduire le mouvement du ballot par rapport à la plate-forme.

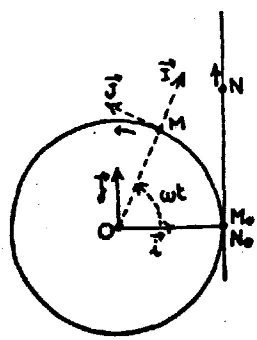


Après discussion on s'entend sur un programme naturel que traduit l'énoncé P qui va suivre.

Et l'on observe que lorsque le mouvement sera connu, on pourra toujours l'expliquer, si cela nous fait plaisir, par une "force fictive" $\vec{\Phi}$ agissant dans le référentiel plate-forme et définie à chaque instant par $\vec{\Phi} = m\,\vec{\gamma}$.

B - PROBLEME DE CINEMATIQUE P

Dans le plan euclidien orienté rapporté à un repère othonormé de sens direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, un point M est animé d'un mouvement circulaire uniforme de vitesse angulaire ω strictement positive sur un cercle (C) de centre O et de rayon R.
On désigne à chaque instant par $\vec{I}$ le vecteur unitaire de la demi-droite [OM] et par $\vec{J}$ le vecteur unitaire directement perpendiculaire à $\vec{I}$.



A l'instant origine l'angle polaire de $\overrightarrow{OM}$ est nul et, un point N qui coïncidait jusque là avec M s'en détache et prend la tangente suivant un mouvement rectiligne de vecteur vitesse $\overrightarrow{v_o}$ égal au vecteur vitesse de M à cet instant.
On s'intéresse au mouvement de N après l'instant origine dans le nouveau référentiel dont $(M, \vec{I}, \vec{J})$ est un repère.

1. t étant un réel positif, calculer les coordonnées x et y de N à l'instant de date t dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, puis ses coordonnées X et Y au même instant dans le repère $(M, \vec{I}, \vec{J})$.
2. A l'instant de date t le point N a un vecteur vitesse. $\vec{V}$ et un vecteur accélération $\vec{\Gamma}$ dans son mouvement par rapport au nouveau référentiel. Calculer les coordonnées de $\vec{V}$ et de $\vec{\Gamma}$ dans le repère $(M, \vec{I}, \vec{J})$ à l'instant considéré.
3. Construire la trajectoire (T) de N dans le nouveau référentiel, depuis l'instant de séparation des deux mobiles jusqu'à l'instant où M a accompli un tour complet sur G après la séparation. Préciser la tangente en M à (T).
4. Revenir au problème physique qui a motivé ce problème de cinématique. Comment le conducteur voit-il fuir son passager dans la seconde qui suit l'éjection ?

<u>Solution du problème</u>

Pas de difficulté. A part deux élèves qui n'ont pas compris qu'en dérivant tout simplement les fonctions $t \mapsto X$ et $t \mapsto Y$ on obtient les coordonnées de $\vec{V}$, les autres proposent, en gros, ce qui suit.

.1. A l'instant de date t :

$$\begin{cases} x = R \\ y = R\omega t \end{cases} \qquad \left.\begin{cases} \vec{I} = \vec{i}\cos\omega t - \vec{J}\sin\omega t \\ \vec{j} = \vec{I}\sin\omega t + \vec{J}\cos\omega t \end{cases}\right\| \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}$$

D'une part $\overrightarrow{ON} = x\vec{i} + y\vec{j} = (x\cos\omega t + y\sin\omega t)\vec{I} + (-x\sin\omega t + y\cos\omega t)\vec{J}$

D'autre part $\overrightarrow{ON} = (R + X).\vec{I} + Y.\vec{J}$

D'où $$\begin{cases} X = R[-1 + \cos\omega t + \omega t\sin\omega t] \\ Y = R[\quad - \sin\omega t + \omega t\cos\omega t] \end{cases}$$

2. A l'instant de date t :

les coordonnées de $\vec{V}$ sont $\begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = R\omega^2 t.\cos\omega t \\ \dfrac{dY}{dt} = -R\omega^2 t.\sin\omega t \end{cases}$ notons que $\|\vec{V}\| = R\omega^2 t.$

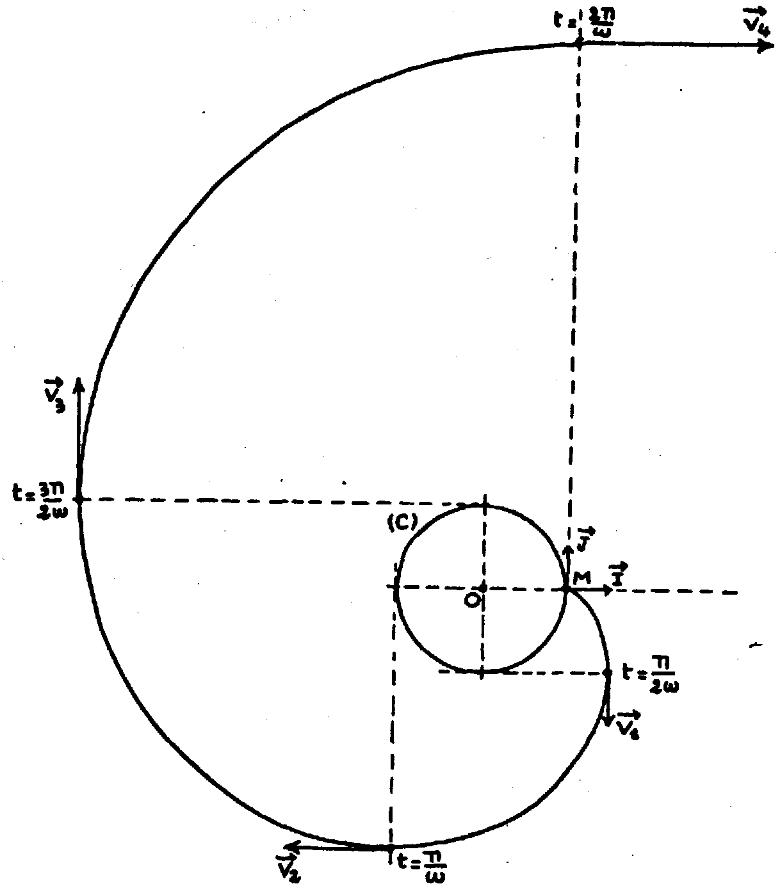
et celles de $\vec{\Gamma}$ $\begin{cases} \dfrac{d^2X}{dt^2} = R\omega^2[\cos\omega t - \omega t \sin\omega t] \\ \dfrac{d^2Y}{dt^2} = R\omega^2[-\sin\omega t - \omega t \cos\omega t] \end{cases}$

3.

t	0		$\frac{\pi}{2\omega}$		$\frac{\pi}{\omega}$		$\frac{3\pi}{2\omega}$		$\frac{2\pi}{\omega}$
ωt	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$\frac{dX}{dt}$	0	$+$	0	$-$	$-R\omega\pi$	$-$	0	$+$	$R\omega 2\pi$
$\frac{dY}{dt}$	0	$-$	$-R\omega\frac{\pi}{2}$	$-$	0	$+$	$3R\omega\frac{\pi}{2}$	$+$	0
X	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}R-R$	$\searrow$	$-2R$	$\searrow$	$-\frac{3\pi}{2}R-R$	$\nearrow$	0
Y	0	$\searrow$	$-R$	$\searrow$	$-\pi R$	$\nearrow$	R	$\nearrow$	$2\pi R$

La construction de la trajectoire (T) résulte du tableau de variation de X et Y en fonction de t.

Lorsqu'à l'instant origine N est en M, son vecteur vitesse $\vec{V}_o$ est nul. Mais, comme on l'a vérifié dans plusieurs exercices présentant une situation analogue, la tangente en M à (T) est dirigée par $\vec{\Gamma}_o \begin{pmatrix} R\omega^2 \\ 0 \end{pmatrix}$, vecteur accélérateur de N à cet instant. Cette tangente est donc la droite (OM).



4. Le conducteur voit donc fuir le passager suivant l'axe de la banquette, puis en arrière. Et la mise en branle n'a rien de brutal comme il avait ét[é] dit dans le dialogue, puisqu'à l'instant de la séparation $\vec{V}_o = \vec{0}$.

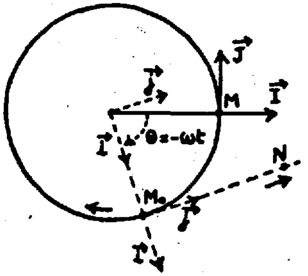
B' - REPRISE DU PROBLEME - APRES CORRECTION

P - Regardez bien la première figure : M_oN = mes $\widehat{M_oN} = R\omega t$. Immobilise[z] par la pensée le repère $(M, \vec{I}, \vec{J})$ et imaginez que M_o recule sur (C) avec la vitesse angulaire $-\omega$. Ne voyez-vous pas apparaître un procédé mécanique simple fournissant un tracé continu de (T) ?

E - ..... ?

P - Eh bien ! vous y réfléchirez en étudiant cette seconde version du problème

Problème P'



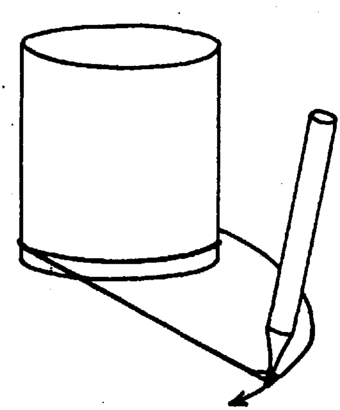
La figure ci-contre reproduit celle du problème P, les éléments considérés maintenant comme fixes étant représentés en traits continus, et les éléments mobiles en pointillé.

1. Proposer un procédé simple de tracé continu de la trajectoire (T) de N relativement au référentiel dont $(M, \vec{I}, \vec{J})$ est un repère.

2. Par des calculs vectoriels directs, sans recours aux coordonnées, déterminer le vecteur vitesse $\vec{V}$ de N à l'instant de date t dans le mouvement de ce point relativement au référentiel dont $(M, \vec{I}, \vec{J})$ est un repère ; et constater qu'il est orthogonal à $\overrightarrow{M_oN}$.

3. Déterminer de même le vecteur accélération $\vec{\Gamma}$ de N à l'instant de date t dans le même mouvement. Quelles sont ses composantes tangentielle et normale ? Soit N' la position du mobile sur (T) à un instant de date t' voisine de t. *Les normales en N et N' à (T) se coupent en un point dont* la position limite quand N' tend vers N et M_o. M_o est appelé le centre de courbure de (T) en N et $\rho = NM_o$ son rayon de courbure. Exprimer la composante normale de $\vec{\Gamma}$ en fonction de $\mathcal{V}^2$ et de ρ.

Solution



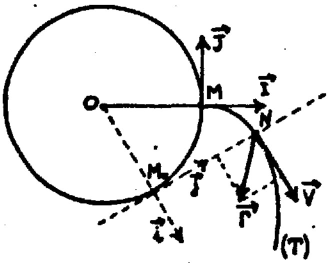
1. Tous les élèves proposent le tracé de (T) suggéré par l'énoncé, au moyen d'un fil enroulé sur un cylindre - sauf deux d'entre eux qui prétendent avoir utilisé une punaise (!) -

2. Les dérivations par rapport au temps étant faites dans le repère $(M, \vec{I}, \vec{J})$ considéré comme fixe, on obtient sans difficulté :

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{ON}}{dt} = \frac{d(\overrightarrow{OM_o} + \overrightarrow{M_oN})}{dt} = \frac{dR\vec{i}}{dt} + \frac{dR\omega t\vec{j}}{dt} = \frac{Rd\vec{i}}{dt} + R\omega\vec{j} + R\omega t\,\frac{d\vec{j}}{dt}$$

or $\begin{cases} \dfrac{d\vec{i}}{dt} = \dfrac{d\vec{i}}{d\theta} \cdot \dfrac{d\theta}{dt} = -\omega\vec{j} \\[2ex] \dfrac{d\vec{j}}{dt} = \dfrac{d\vec{j}}{d\theta} \cdot \dfrac{d\theta}{dt} = -\omega(-\vec{i}) = \omega\vec{i} \end{cases}$

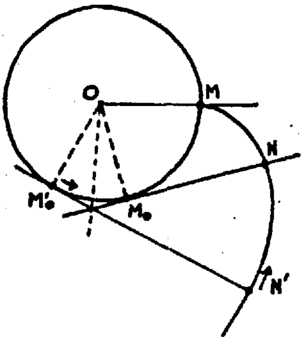
d'où $\boxed{\vec{V} = R\omega^2 t.\vec{i}}$



Ce qui montre que la normale en N à (T) est (NM_o)

Les normales à (T) sont les tangentes à (C)

3. $\boxed{\vec{\Gamma} = R\omega^2\vec{i} - R\omega^3 t\vec{j}}$



Compte tenu que $\vec{V}^2 = R^2\omega^4 t^2$

et $\rho = M_oN = R\omega t$

On constate que $R\omega^3 t = \dfrac{\vec{V}^2}{\rho}$.

C - ETUDE EXPERIMENTALE DU PROBLEME AU LABORATOIRE DE PHYSIQUE

Après compte rendu, en classe de mathématique, du problème de cinématique, le professeur de physique propose la recherche d'un dispositif simple permettant l'étude expérimentale au laboratoire du problème du ballo glissant sur la plate-forme du camion.

Les idées ne manquent pas :

1) Le plateau animé d'un mouvement circulaire uniforme sera réalisé par la platine d'un tourne-disque, ou par une roue de vélo lancée portant un disque en bois.

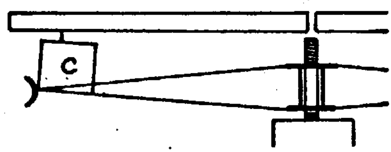
2) Le ballot sera n'importe quel palet assez glissant ; pourquoi pas un glaçon ? Et on photographiera le mouvement en stroboscopie avec un appareil lié à l'axe de rotation... pas commode !

Et pourquoi n'utiliserait-on pas un palet qui tracerait sa trajectoire sur le plateau ? comment ? Avec un morceau de craie ? Avec un crayon fixé à un objet assez lourd ? ... à essayer.

3) Et comment réaliser sans choc la libération sur le plateau du palet d'abord entraîné par ce plateau ? On pourra relier le palet au centre du plateau par un fil fin qu'on brûlera le moment venu.

Voici le dispositif retenu après plusieurs essais, qui a permis d'obtenir les trajectoires dont on verra une photo en dernière page.

1) Un carré de 80 cm de côté a été découpé dans un contreplaqué de 10 mm, et on en a fait, par quatre coups de scie, un octogone régulier qu'on a calé sur une roue de vélo dont l'axe est fixé verticalement dans un étau.

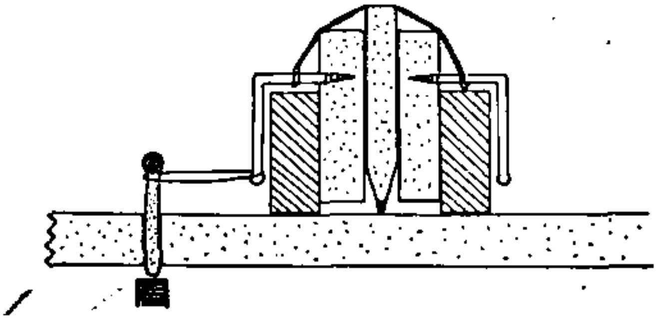


La cale en bois C est coïncée entre deux rayons et repose sur un troisième, elle porte une pointe sans tête affutée.

2) Le palet traceur est un écrou de 40 mm dans lequel est vissé un noyau cylindrique en bois que l'on a percé suivant son axe avec une mèche de 7 mm. Dans l'évidement est enfilé un crayon gras 6B, qui exercera une légère pression sur le plateau grâce à un élastique.

3) Enfin l'entraînement et le décrochage du palet sont réalisés comme il a été dit.

1, 2, 3) Voici un croquis du dispositif :



On lance la rotation du plateau avec un doigt appuyé dessus, à une vingtaine de centimètres du centre, jusqu'à atteindre environ 2 tours par seconde.

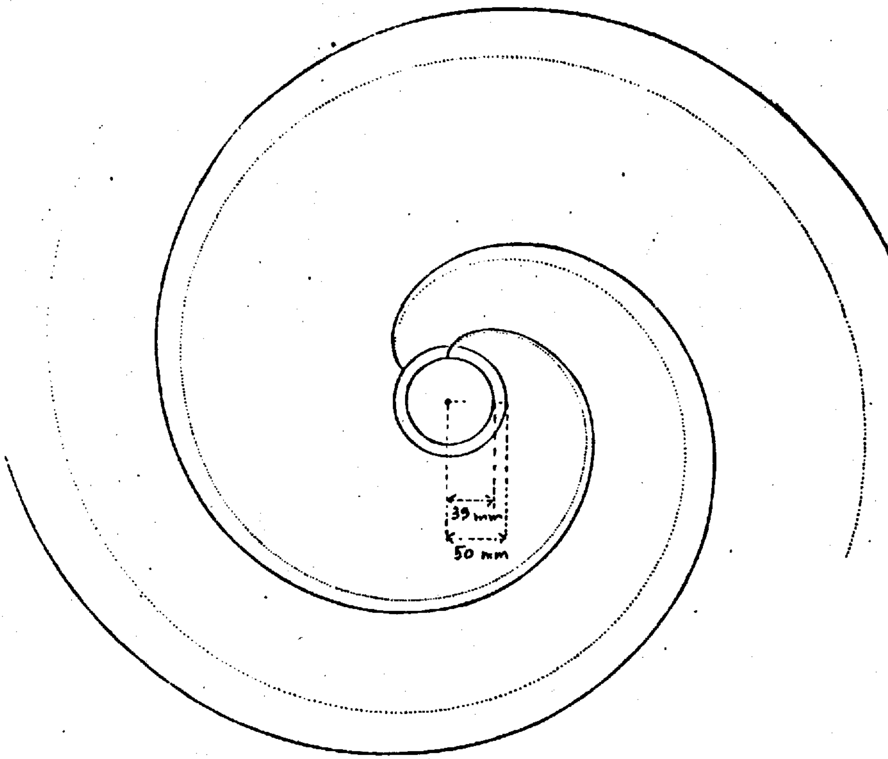
Le palet, retenu par un fil à l'allumette fichée au centre du plateau, reste solidaire du plateau jusqu'au moment où, la rotation étant lancée, on enflamme cette allumette.

Le palet libéré par la rupture du fil a dès lors, jusqu'à sa chute, quand il franchit le bord du plateau, <u>le mouvement du ballot sur la plate-forme du camion</u> ; <u>et il trace fidèlement sa trajectoire.</u>

On a diminué les frottements en cirant le plateau, et en glaçant le fond du palet avant lancement.

On trouvera ci-jointe une reproduction d'une photo de deux des trajectoires obtenues, préalablement relevées par transparance sur papier blanc. A côté de chacune d'elles est dessinée en pointillé la développante de cercle qu'aurait tracée le palet si les frottements avaient pu être complètement éliminés.

Le problème de physique ayant été fortement idéalisé, il serait souhaitable d'apporter un prolongement à cette étude en tenant compte des frottements.



35 mm
50 mm

QUELQUES PROLONGEMENTS DE L'INEGALITE DE CAUCHY - SCHWARZ

* * *

Jean MARION

I - INTRODUCTION

On sait le rôle fondamental que joue l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans la théorie des espaces préhilbertiens, tant du point de vue de la géométrie que de nombreux secteurs de l'analyse.

Lorsque $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel réel doté d'un produit scalaire $(\ , \ )$ et dont la norme associée est notée $\| \ \|$, cette inégalité peut se formuler de la manière suivante :

> quels que soient les éléments A, B de $\mathcal{E}$ on a :
> $-\|A\|.\|B\| \leq (A,B) \leq \|A\|.\|B\|$, l'égalité, à droite ou à gauche ayant lieu si et seulement si il existe 2 réels λ, μ non simultanément nuls tels que $\lambda A = \mu B$.

Sous cette forme elle s'interprète comme un réponse à un problème simple d'optimalisation : celui de $\sup \big((A,X)\big)$ ou $\inf \big((A,X)\big)$, A étant un vecteur donné, avec la contrainte $\|X\| \leq 1$.

On peut alors se poser le problème suivant : A et B étant 2 vecteurs donnés de $\mathcal{E}$, optimaliser la forme quadratique $X \longmapsto (X,A).(X,B)$ avec la contrainte $\|X\| \leq 1$. La résolution de ce type de problème est, dans le cas d'une forme quadratique quelconque, pas du tout triviale ; elle fait appel à un théorème de type KUHN-TUCKER ; les lecteurs lisant le roumain trouveront une information complète sur ce sujet dans [1]. En ce qui concerne le cas de la forme $X \longmapsto (X, A).(X, B)$, on résoud facilement le problème si l'on connaît l'inégalité dite de RICHARD.

II - L'INEGALITE DE RICHARD

Elle se formule de la manière suivante :

$\mathcal{E}$ étant un espace vectoriel réel euclidien, quels que soient les vecteurs X, A, B, de $\mathcal{E}$ on a :

$$\frac{(A,B) - \|A\|.\|B\|}{2}\|X\|^2 \leq (X,A).(X,B) \leq \frac{(A,B) + \|A\|.\|B\|}{2}\|X\|^2 .$$

Assez curieusement cette inégalité apparaît dans la littérature scientifique, pour la première fois semble-t-il, en 1972 ([2]) ; la démonstration donnée par RICHARD dans [2] utilise le fait (connu des mathématiciens, mais hors niveau de l'enseignement secondaire) que pour tout opérateur auto-adjoint $\Gamma : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ ayant seulement 2 valeurs propres $\lambda_1 \leq \lambda_2$ on a : $\lambda_1\|X\|^2 \leq (\Gamma X, X) \leq \lambda_2\|X\|^2$, pour tout vecteur X de $\mathcal{E}$. Il suffit alors d'appliquer ce résultat à l'opérateur $\Gamma : X \longmapsto (X, A)\, B + (X, B)\, A$, dont on montre qu'il est autoadjoint et qu'il possède 2 valeurs propres seulement : $(A, B) \pm \|A\| . \|B\|$, pour avoir l'inégalité de Richard.

Notons que si, dans l'inégalité de Richard on prend $X = A$, on obtient comme cas particulier l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

En fait on peut établir l'inégalité de Richard, et même une inégalité beaucoup plus générale de manière élémentaire, c'est-à-dire n'exigeant que la connaissance de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, en caractérisant de plus les conditions d'égalité. En particulier, tout ce qui suit ne fait appel qu'à des connaissances du niveau de première - Terminale.

III - UNE GENERALISATION DE L'INEGALITE DE CAUCHY-SCHWARZ

<u>Lemme</u>

Pour tout couple (U, V) de vecteurs de $\mathcal{E}$ tels que $U \neq 0$ on a l'égalité :

$$\left\| 2\frac{(U,V)}{\|U\|^2}\, U - V \right\| = \|V\|$$

<u>Preuve</u> : Cherchons les solutions réelles x de l'équation

$\|x U - V\| = \|V\|$; on a :

$\|x U - V\| = \|V\| \iff \|x U - V\|^2 = \|V\|^2$

$\iff x^2 \|U\|^2 + \|V\|^2 - 2x\,(U, V) = \|V\|^2$

$\iff x(x \|U\|^2 - 2\,(U,V)\,) = 0$;

l'assertion résulte alors du fait que $x = \dfrac{2(U,V)}{\|U\|^2}$ est solution.

C.Q.F.D.

<u>Théorème</u>

Quels que soient les vecteurs A, B, X, Y de $\mathcal{E}$ avec X et Y non nuls on a les inégalités :

$$\frac{(A,B)-\|A\|.\|B\|}{2} \leq \frac{(X,A).(X,B)}{\|X\|^2} + \frac{(Y,A).(Y,B)}{\|Y\|^2} - 2\frac{(X,A).(Y,B).(X,Y)}{\|X\|^2.\|Y\|^2} \leq \frac{(A,B)+\|A\|.\|B\|}{2}.$$

En outre l'égalité a lieu, à droite ou à gauche, si et seulement si il existe 2 réels λ, μ non tous deux nuls tels que :

$$\lambda \frac{(X,A)}{\|X\|^2}\, X + \mu \frac{(Y,B)}{\|Y\|^2}\, Y = \frac{1}{2}\, [\lambda A + \mu B].$$

Preuve

a) Considérons les vecteurs $Z_1 = 2\dfrac{(X,A)}{\|X\|^2}X - A$ et $Z_2 = B - 2\dfrac{(Y,B)}{\|Y\|^2}Y$.

Compte tenu du lemme on a : $\|Z_1\| = \|A\|$ et $\|Z_2\| = \|-Z_2\| = \|B\|$; par suite l'inégalité de Cauchy-Schwarz permet d'affirmer que $-\|A\|.\|B\| \leq (Z_1, Z_2) \leq \|A\|.\|B\|$ $(\star)$, l'égalité étant atteinte, à droite ou à gauche, si et seulement si il existe 2 réels λ et μ non tous deux nuls, tels que $\lambda Z_1 = \mu Z_2$.

b) L'inégalité $(\star)$ est équivalente à l'inégalité :

$$\frac{(A,B) - \|A\|.\|B\|}{2} \leq \frac{1}{2}\left[(Z_1, Z_2) + (A,B)\right] \leq \frac{(A,B) + \|A\|.\|B\|}{2}.$$

Or $(Z_1, Z_2) = \left(2\dfrac{(X,A)}{\|X\|^2}X - A,\ B - 2\dfrac{(Y,B)}{\|Y\|^2}Y\right) =$

$$-4\frac{(X,A)\,(Y,B)\,(X,Y)}{\|X\|^2.\|Y\|^2} + 2\frac{(X,A)(X,B)}{\|X\|^2} - (A,B) + 2\frac{(Y,B)\,(Y,A)}{\|Y\|^2}.$$

Par suite :

$$\frac{1}{2}\left[(Z_1, Z_2) + (A,B)\right] = \frac{(X,A).(X,B)}{\|X\|^2} + \frac{(Y,A).(Y,B)}{\|Y\|^2} - 2\frac{(X,A).(Y,B).(X,Y)}{\|X\|^2.\|Y\|^2}$$

ce qui établit l'inégalité annoncée ; en outre l'égalité a lieu, à droite ou à gauche si et seulement si il existe 2 réels λ, μ tels que

$$2\lambda\frac{(X,A)}{\|X\|^2}X - \lambda A = \mu B - 2\mu\frac{(Y,B)}{\|Y\|^2}Y,$$

c'est-à-dire, si et seulement si $\lambda\dfrac{(X,A)}{\|X\|^2}X + \mu\dfrac{(Y,B)}{\|Y\|^2}Y = \dfrac{1}{2}(\lambda A + \mu B)$.

Nous appellerons cette inégalité : l'inégalité fondamentale.

IV - QUELQUES CONSEQUENCES DE L'INEGALITE FONDAMENTALE

Proposition 1 (Inégalité de Richard)

Soient A, B, X trois vecteurs quelconques de $\mathcal{E}$; on a les inégalités :

$$\frac{(A,B)-\|A\|.\|B\|}{2}\|X\|^2 \leq (X,A).(X,B) \leq \frac{(A,B)+\|A\|.\|B\|}{2}\|X\|^2 .$$

En outre l'égalité est atteinte, à droite ou à gauche, si et seulement si il existe 2 réels λ, μ non tous deux nuls tels que :

$$2\lambda\,(X,A)\,X = (\lambda A + \mu B)\,\|X\|^2$$

Preuve : Si X est nul l'assertion est évidente. Supposons maintenant X non nul, et soit Y un vecteur non nul orthogonal à B ; l'inégalité fondamentale s'écrit alors :

$$\frac{(A,B)-\|A\|.\|B\|}{2} \leq \frac{(X,A).(X,B)}{\|X\|^2} \leq \frac{(A,B)+\|A\|.\|B\|}{2} ,$$

l'égalité, à droite ou à gauche, ayant lieu si et seulement si

$$\lambda\frac{(X,A)}{\|X\|^2}\,X = \frac{1}{2}(\lambda A + \mu B) .$$

On en déduit le corollaire suivant, de manière évidente :

Corollaire : Soient A et B deux vecteurs de $\mathcal{E}$:

$$\sup_{\|X\|=1}\left[(X,A).(X,B)\right] = \frac{1}{2}\left[(A,B)+\|A\|.\|B\|\right]$$

$$\inf_{\|X\|=1}\left[(X,A).(X,B)\right] = \frac{1}{2}\left[(A,B)-\|A\|.\|B\|\right] ,$$

l'égalité étant atteinte dans un cas ou dans l'autre si et seulement s'il existe 2 réels λ, μ non tous deux nuls tels que $2\lambda(X,A)X = \lambda A + \mu B$.

EXEMPLE

Soient A et B deux vecteurs non nuls, de même norme, et tels que $B \neq -A$.

On vérifie aisément que pour $X_0 = \dfrac{A+B}{\|A+B\|}$

a) $\|X_0\| = 1$

b) $(X_0, A).(X_0, B) = \dfrac{[\|A\|^2 + (A,B)]^2}{2(\|A\|^2 + (A,B))} = \dfrac{\|A\|.\|B\| + (A,B)}{2}$;

par suite $X_0 = \dfrac{A+B}{\|A+B\|}$ maximalise la forme quadratique $X \mapsto (X,A).(X,B)$

sur $\{X/\|X\| = 1\}$.

Mais on est loin d'avoir toutes les solutions maximales.

Notons d'abord, quitte à remplacer A par $\dfrac{1}{\|A\|}A$ et B par

$\dfrac{1}{\|B\|}B = \dfrac{1}{\|A\|}.B$, que l'on peut supposer A et B unitaires ; pour tout vecteur unitaire X on a alors $\dfrac{(A,B)-1}{2} \leq (X,A).(X,B) \leq \dfrac{(A,B)+1}{2}$;

l'égalité, à droite ou à gauche, implique d'après le corollaire que pour les 2 réels λ, μ qui interviennent $\lambda \neq 0$; l'égalité, à droite ou à gauche a lieu si et seulement si il existe un réel t tel que :

$$2(X,A)X = A + tB \text{ , en posant } t = \mu/\lambda$$

Examinons alors le cas $\mathcal{E} = R^2$; on peut écrire

$A = \begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix}\cos\alpha'\\ \sin\alpha'\end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}$ optimalisera $(X,A)(X,B)$

si et seulement si on peut trouver un réel t tel que :

$$\begin{cases} 2(\cos^2\theta.\cos\alpha + \cos\theta.\sin\theta.\sin\alpha) = \cos\alpha + t\cos\alpha' \\ 2(\cos\theta.\sin\theta.\cos\alpha + \sin^2\theta\sin\alpha) = \sin\alpha + t\sin\alpha', \text{ soit ,} \end{cases}$$

en multipliant les 2 membres de la première équation par $\cos\alpha$, les 2 membr de la deuxième équation par $\sin\alpha$, et en retranchant "membre à membre" :

$$\cos^2\theta = \frac{1 + t\cos(\alpha - \alpha')}{2}$$

Il est clair alors que pour tout réel t tel que $-1 \leq t\cos(\alpha - \alpha') \leq 1$

on aura des solutions optimales ; nous laissons au lecteur le soin d'examiner les différents cas possibles.

Proposition 2

Soit A un vecteur donné de $\mathcal{E}$; quels que soient les vecteurs X, Y non nuls de $\mathcal{E}$ on a :

$$0 \leq \frac{(X,A)^2}{\|X\|^2} + \frac{(Y,A)^2}{\|Y\|^2} - 2\,\frac{(X,A).(Y,A).(X,Y)}{\|X\|^2.\|Y\|^2} \leq \|A\|^2$$

Preuve : Pour obtenir cette inégalité il suffit d'écrire l'inégalité fondamentale en prenant $B = A$.

C. Q F. D.

On a immédiatement le :

Corollaire :

Les données étant celles de la proposition 2, avec A non nul, on a :

$$\cos(X,Y) \geq \frac{1}{2\|A\|^2}\left[\frac{(X,A)}{\|X\|} + \frac{(Y,A)}{\|Y\|}\right]^2 - \frac{3}{2}$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] - V. BARBU, T. PRECUPANU : "Convexitate si optimizare in spatii Banach" - Ed. Acad. R.S.R., Bucarest (1975)

[2] - U. RICHARD : "Sur des inégalités du type Wirtinger et leurs applications aux équations différentielles" Colloque d'Analyse, RIO de Janeiro (1972).

Nota : Ces documents sont malheureusement difficilement procurables. L'exposé étant auto-suffisant, ces documents ne sont pas nécessaires à sa lecture.

INFORMATION

A PROPOS DE LA FORMATION CONTINUE

ACADÉMIE D'AIX-MARSEILLE

INSTITUT DE RECHERCHE
SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES

I. R. E. M.
CASE 901

10, Route Léon-Lachamp
13288 MARSEILLE CEDEX 2
☎ 41.01.40 (Poste 32.10) / 41.39.40

MARSEILLE, le 12 Octobre 1979

N/Réf. 192/79
GR/SL

Monsieur Gérard RAUZY
Directeur de l'IREM

à

Monsieur BERNARD
Inspecteur Pédagogique
Régional en Mathématiques
RECTORAT

Monsieur l'Inspecteur,

Dans une conversation téléphonique du 11 Octobre 1979 vous m'avez informé que la mise en oeuvre d'actions de formation continue des enseignants de collèges, telle qu'elle a été retenue par l'Administration Centrale, comportait l'organisation de réunions faites "par l'intermédiaire des Universités", et vous m'avez demandé si l'IREM acceptait de participer à ces actions.

Je vous remercie de cette proposition, mais constate avec regret que ce type de formation ne satisfait à aucune des exigences fondamentales que doit remplir une véritable formation continue (telles que le rapport ci-joint de la COPREM a pu les formuler).

En ce qui concerne l'enseignement des mathématiques en classe de 4ème, l'IREM a mis en place un groupe de recherche dont le mode de fonctionnement comporte en effet des rencontres, décentralisées dans l'Académie, avec les professeurs de mathématiques enseignant dans ces classes. Il ne m'appartient pas de juger si ce type d'activité correspond au contenu que vous comptez donner aux réunions prévues par la Direction des Collèges. Dans l'hypothèse d'une convergence d'objectifs entre votre projet et les activités organisées par l'IREM, il me semble qu'une discussion avec les animateurs concernés permettrait d'envisager les modalités éventuelles d'une articulation entre des actions de formation qui m'apparaissent cependant relever de conceptions a priori différentes.

Je reste donc à votre disposition pour toute suggestion dans ce sens,

Et vous prie d'agréer, ...

- LA FORMATION CONTINUE DES ENSEIGNANTS : CONDITIONS FONDAMENTALES

...

II-2 : Dialectique avec la recherche et la pratique enseignante

La formation continue ne saurait se borner à un "recyclage" notamment à la suite de changements de programmes, ou de changement de fonction des intéressés. Elle doit intégrer les différents aspects de l'évolution de la discipline enseignée, des sciences de l'éducation, etc.. Plusieurs conditions en découlent :

a) Toute équipe prenant en charge des actions de formation continue doit comporter des enseignants et des chercheurs aux compétences diversifiées ; sa composition doit résulter d'une analyse des problèmes étudiés.

b) Les actions de formation continue, et donc en particulier les personnes qui les animent, doivent tenir compte à la fois des progrès de la connaissance scientifique, de la didactique des disciplines et des sciences de l'éducation.

c). Toute recherche liée à ces actions doit bénéficier d'une certaine sérénité peu compatible avec des délais stricts imposés de l'extérieur, et avec des contraintes financières ou administratives trop rigides.

d) La formation initiale, la préparation au métier d'enseignant, doit être liée à la formation continue ; la prise en charge de petits groupes de futurs enseignants par des équipes de professeurs en exercice, dans le cadre d'une activité de formation continue, doit permettre cette liaison.

...

III- LA FORMATION CONTINUE DES ENSEIGNANTS : ETAT ACTUEL DE LA SITUATION

....

III - 1 : Le système I : Le discours de l'administration centrale

Ce système met en évidence la contradiction entre l'autoformation au niveau des exhortations et l'hyperdirectivité au niveau des actions. Il résulte d'une conception qu'on peut assez bien résumer de la manière suivante : mettre à jour ses connaissances, s'adapter aux changements, réfléchir sur la meilleure manière de "faire passer" les contenus à enseigner, tout cela fait partie des contraintes professionnelles normales à l'enseignant ; il lui appartient de s'informer, de se cultiver, etc..

On s'attend donc à une autoformation didactique ; mais à l'examen des actions entreprises, il n'en est rien. En effet, l'institution scolaire intervient en demandant à l'I.N.R.P., aux C.R.D.P., aux centres de Télé-enseignement, de diffuser des documents épars et à caractère normatif, en demandant à l'Inspection Générale, à l'Inspection Pédagogique Régionale ou Départementale, d'intervenir à la fois comme moyen de pression pour inciter les maîtres à "s'autoformer" et comme moyen d'action par le biais d'organisation de "conférences" ou "journées" pédagogiques. Ce système peut évidemment donner l'illusion d'être efficace s'il est évalué au travers des inspections des maîtres qui débiteront fidèlement - modulo les palliatifs pédagogiques ad hoc - ce qui aura été diffusé par l'I.N.R.P., ou dit par l'Inspecteur lors de précédentes journées pédagogiques. Il est non moins évident que dans ce système :

a) Aucune réflexion collective des maîtres n'est possible tant sur les contenus qu'ils ont à enseigner que sur leurs manières d'enseigner.

b) Le libre arbitre des maîtres dans leur pratique enseignante est quasiment nul, car ce type d'actions de formation continue, loin de libérer le maître du poids de l'institution scolaire, des manuels, des annales des sujets d'examens, etc., ne fait que l'assujettir davantage.

c) Aucune activité de recherche sur l'enseignement de la discipline concernée, aucune réflexion approfondie ne s'intègrent dans ce schéma.

A terme, il en résulte une docilité apparente des enseignants à suivre à la lettre les circulaires, les injonctions de l'Inspection et le manuel en vogue, mais surtout, hélas, une sclérose profonde de l'enseignement.

III-2 : Le système 2 : Le domaine des administrations tutélaires

Ce système exclut de son champ d'action les enseignants dont l'administration centrale considère que le haut niveau de formation initiale (CAPES, Agrégation) dispense de formation continue. Pour les enseignants qui entrent dans son champ d'intervention, la formation continue est assurée par l'institution qui a pris en charge leur formation initiale ; ainsi en est-il des instituteurs, de certains corps de professeurs de l'enseignement technique.

Dans ce système, le contact direct avec la recherche scientifique n'est pas assuré. En outre, la maîtrise d'oeuvre n'est pas assurée par le corps enseignant des institutions visées, mais reste sous le contrôle étroit de l'appareil administratif de ces institutions. Or, il faut bien constater que, le plus souvent, le corps administratif n'a aucune compétence spécifique pour ce type de tâche, et reste attaché à des conceptions hiérarchiques du système éducatif. Il en résulte que, malgré la volonté de nombreux enseignants de ces institutions, les objections a), b) et c) formulées à propos du système I restent valables.

III-3 : Le système 3 : Les I.R.E.M.

...

(Extraits du Rapport de la CO.P.R.E.M. sur la formation continue des enseignants en mathématiques.)

13

I.R.E.M.
Institut de recherche sur
l'enseignement des mathématiques

70,route Léon Lachamp
13288 MARSEILLE cedex 2

tél. 41.39.40. - 41.01.40.