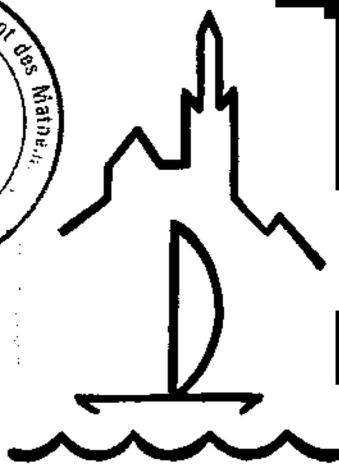
information mathématique



académie d'aix-marseille

irem

Académie d'AIX - MARSEILLE

INFORMATION

MATHEMATIQUE

RESPONSABLE DE LA PUBLICATION

Gilles THOMAS

INSTITUT DE RECHERCHE
SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES

I. R. E. M.

70, route Léon Lachamp

13288 - MARSEILLE Cedex 2

Tél. 41.01.40 poste 32.10 / 41.39.40

INFORMATION MATHEMATIQUE

N° 12 Novembre 1978

SOMMAIRE

EN DIRECT

DU SERVICE

DES PUBLICATIONS

* *
*

Comme nous l'avons annoncé dans les précédents numéros du bulletin "information mathématique", nous vous proposons, en ce début d'année scolaire, deux brochures dans la série

monographies de l'irem d'aix-marseille

il s'agit d'une publication du groupe de Recherche sur l'Enseignement du Calcul des Probabilités et d'une publication du groupe de Recherche sur l'Enseignement de l'Analyse.

Depuis la rentrée 1977 des diminutions successives des crédits affectés aux I.R.E.M. ont entraîné de sérieuses difficultés de fonctionnement en particulier en ce qui concerne l'une des missions confiées aux I.R.E.M. : l'élaboration et la diffusion de documents. Si nous sommes encore en mesure de vous adresser gratuitement et aussi régulièrement que les années précédentes le bulletin "information mathématique", nous nous voyons par contre obligés de mettre en vente ces brochures au prix coûtant.

Le lecteur trouvera dans les pages suivantes une présentation détaillée de ces deux brochures ainsi qu'un bulletin de commande à nous adresser.

N'hésitez pas à nous faire part de vos critiques comme de vos suggestions concernant les publications de l'I.R.E.M. ; nous rappelons que la rubrique "Tribune libre" de ce bulletin est à votre disposition.

G.T.

calcul des probabilités et arithmétique

INDEPENDANCE ET MULTIPLICATIVITE RESTREINTE.

(Groupe de Recherche sur l'Enseignement du Calcul des Probabilités de l'I.R.E.M. d'Aix-Marseille)

32 pages - PRIX : 2,50 F.

Dans cette brochure, on utilise les propriétés les plus élémentaires d'indépendance d'évènements et de variables aléatoires pour démontrer certaines propriétés algébriques des fonctions d'entiers.

Les démonstrations probabilistes qui sont présentées devraient éclairer d'un jour nouveau le comportement des entiers vis à vis de la division euclidienne et la nature de certaines propriétés telles la multiplicativité restreinte, qui est étudiée en détails pour l'indicateur d'Euler, et la somme des puissances des diviseurs d'un nombre.

Cette interaction entre deux secteurs des mathématiques apparemment éloignés est présentée à un niveau élémentaire évitant ainsi au lecteur d'avoir à consulter de nombreux ouvrages qu'il est parfois difficile de se procurer et souvent difficile de lire.

Enfin ce document non seulement atteste l'efficacité des propriétés d'indépendance mais permet aussi d'illustrer l'intérêt de choisir tel ou tel espace probabilisé suivant la nature du problème et des propriétés que l'on veut démontrer détruisant ainsi le mythe de l'univers à qui l'on fait jouer trop souvent un rôle central, injustifié et néfaste.

TABLE DES MATIERES

BROCHURES SUR L'ENSEIGNEMENT DE L'ANALYSE

En Septembre 1975, un groupe de recherche sur l'enseignement de l'analyse s'est constitué à l'I. R. E. M. de Marseille, réunissant des enseignants du second degré et du supérieur. Il s'est d'abord fixé pour tâche de dégager quelques grandes orientations pour l'enseignement de l'Analyse, en tenant compte :

- des indices fournis par l'état actuel de cet enseignement.
- d'une étude scientifique et épistémologique des concepts fondamentaux de l'analyse.
- du rôle joué par ces concepts dans une formation scientifique.

Ces orientations sont regroupées non autour de concepts *théoriques, mais à partir des quelques grands problèmes de l'analyse* qu'il nous a paru utile d'étudier dans l'enseignement secondaire. Cela ne signifie en aucun cas un abandon de l'approfondissement théorique des concepts de l'analyse, bien au contraire. Les études historiques et épistémologiques, aussi bien que les réflexions d'ordre didactique et génétique nous ont montré que c'est à travers leur fonctionnement dans la résolution de problèmes que ces concepts peuvent être progressivement approfondis. Les problèmes ont été choisis en fonction de cet objectif, de l'intérêt qu'ils peuvent susciter chez les élèves, de leur importance pour la construction d'une culture scientifique, et des interconnexions qu'ils présentent avec d'autres secteurs des mathématiques, de l'informatique scientifique, des sciences physiques et technologiques...

Pour illustrer ces grandes orientations, des documents ont été produits, notamment sur les sujets suivants :

- valeurs approchées de fonctions,
- recherche de solutions approchées d'équations numériques par des méthodes diverses et comparaison de l'efficacité de ces méthodes,
- calcul de valeurs approchées d'intégrales,
- aspects divers de l'intervention des dérivées,
- emploi de majorations et d'encadrements,
- interpolation des fonctions,
- différents modes d'introduction de la continuité, des dérivées, des intégrales,
- fonctions transcendantes élémentaires,
- emploi des suites en analyse,
- équations différentielles.

Des expérimentations s'inspirant de ces documents ont été réalisées ou sont en cours de réalisation ; elles feront l'objet d'autres documents.

Des travaux analogues, abordant des aspects complémentaires ont été engagés par d'autres I. R. E. M. Un groupe national inter I. R. E. M. permet des échanges structurés entre ces groupes.

Une première brochure est prête, nous la présentons à la page suivante.

analyse 1

(Groupe de Recherche sur l'Enseignement de l'Analyse
de l'I.R.E.M. d'Aix-Marseille)

120 pages - PRIX : 6,50 F.

Cette brochure comporte :

- un exposé des objectifs et des méthodes de travail ;
- une analyse des grandes orientations ;
- une étude sur les suites, dans la perspective d'une première approche de ce concept ;
- l'exposé de méthodes de résolution des équations numériques ;
- l'exposé de méthodes de calcul approché des intégrales.

Dans ces deux derniers chapitres on trouvera une analyse théorique et expérimentale de l'efficacité comparée des méthodes envisagées, ainsi que des exemples d'activités proposées dans les classes à des niveaux divers, allant de la quatrième à la terminale.

BULLETIN DE COMMANDE

N O M : .... Prénom : ....

Discipline enseignée : ....

ETABLISSEMENT :

intitulé exact : ....

....

Adresse : ....

....

Commande les ouvrages suivants :

☐ CALCUL DES PROBABILITES ET ARITHMETIQUE : Indépendance et multiplicativité restreinte

Prix 2,50 F nombre d'exemplaires ☐

☐ ANALYSE 1

Prix 6,50 F nombre d'exemplaires ☐

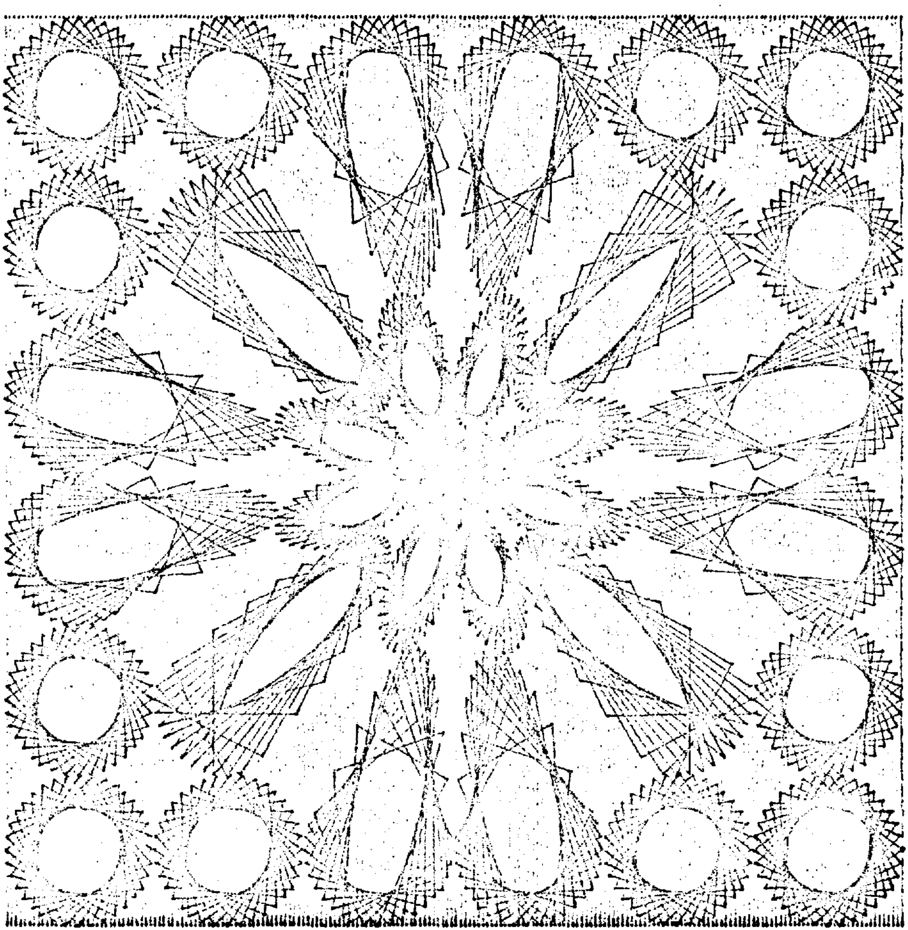
Ci-joint Chèque bancaire ☐ Chèque postal ☐ de .... F.

à l'ordre de : M. l'Agent Comptable de l'Université d'Aix-Marseille II

à adresser à M. le Directeur de l'I.R.E.M.

Service des Publications
70, route Léon Lachamp
13288 - MARSEILLE CEDEX 2

Date : .... Signature :



L'ORIENTATION VERS LES LYCEES D'ENSEIGNEMENT PROFESSIONNEL (ex C.E.T.)

* *

*

Groupe de Travail 1er Cycle

Les membres du Groupe de Travail "1er Cycle" de l'I.R.E.M. d'Aix-Marseille, tous professeurs dans le 1er Cycle et animateurs de groupes de stagiaires enseignant dans le 1er cycle, avaient conscience qu'un grand nombre d'élèves était orienté, soit à la fin de la classe de 5ème, soit à la fin de la classe de 3ème vers l'enseignement technique.

En effet, d'après les statistiques de l'Académie d'Aix-Marseille de Juin 1977, dont nous donnons un résumé en Annexe 1, on constate que 40 % des élèves sont entrés dans des sections techniques.

L'importance du contingent des élèves qui passent dans l'enseignement technique a amené les membres du Groupe à désirer rencontrer des enseignants de mathématiques des Lycées Professionnels (anciens C.E.T.). Leur but étant d'essayer :

- de mieux connaître leurs méthodes et leurs difficultés.
- de rechercher avec eux comment telle présentation du programme du 1er cycle pourrait leur être plus utile que telle autre.
- de rechercher, en particulier, si, plus ou moins consciemment, nous ne privilégions pas certains types d'exercices au détriment de certair autres qui pourraient être plus utiles aux élèves par la suite.

Cette rencontre a été rendue possible par le fait qu'un Groupe I.R.E.M., animé par Albert ROLLAND, est constitué de stagiaires enseignant dans des Lycées Professionnels, il s'agit du Groupe T - C E T.

Lors d'une première réunion, le Groupe 1er Cycle a élaboré un questionnaire que Albert ROLLAND a transmis ensuite aux stagiaires du Groupe T - C E T. Ce questionnaire (présenté en Annexe 2) abordait volontairement des sujets de natures très différentes pour tenter d'avoir une vue générale sur la vie de nos collègues de l'enseignement technique.

Les stagiaires du Groupe T - C E T ayant répondu à ce questionnaire et réfléchi à d'autres questions qui pouvait également se poser, quatre d'entre eux ont participé avec les membres du Groupe 1er Cycle à une séance de travail le 18 janvier 1978. Etaient représentées les branches suivantes : mécanique, électricité, industrie, sanitaire et social.

Lors de cette réunion un rapport a été élaboré en commun, c'est ce document que nous présentons ci-dessous :

FORMATION MATHEMATIQUE SOUHAITEE POUR LES ELEVES ENTRANT EN LYCEE PROFESSIONNEL A L'ISSUE DE LA CLASSE DE 3è

Dans les Lycées Professionnels (anciens C.E.T.), le professeur de Mathématiques est en même temps professeur de sciences.

Il enseigne la physique, la chimie, la biologie s'il s'agit des préparations aux B.E.P. industriels ou sanitaire et social.

Il enseigne les mathématiques financières s'il s'agit des préparations aux B.E.P. commerciaux.

Dans tous les cas, il ne s'agit pas pour lui de faire des mathématiques "in vitro" coupées de toute application, mais bien d'harmoniser théorie et applications pratiques immédiates. L'une ou les autres peuvent venir en premier dans le courant de la classe, selon le degré d'urgence de l'exposé ou la nécessité d'une motivation.

Il semble que les élèves sortant de la classe de 3ème des collèges soient peu rompus à cette dialectique théorie-applications et que ceci soit, en grande partie, imputable autant à l'esprit dans lequel est souvent enseigné le programme qu'à la longueur de ce programme.

Des enseignants de Lycées Professionnels ont fait quelques remarques et suggestions sur ce qu'ils aimeraient voir plus régulièrement acquis par les élèves qui leur sont envoyés à la sortie du collège. Il ne semble pas que ces suggestions, si nous les appliquons, puissent nuire à la formation du futur élève de 2de C, bien au contraire. C'est pourquoi nous nous en faisons l'écho.

Ces remarques ne peuvent être dissociées de réflexions sur l'orientation actuelle des élèves en fin de 3ème. Pour entrer dans un Lycée Professionnel, il ne faut pas être nul en Mathématiques ! Le programme d'algèbre doit être maitrisé pour toutes les sortes de B.E.P. Par contre, le programme de géométrie peut comporter des lacunes, même importantes, s'il s'agit de la préparation aux B.E.P. commerciaux ou sanitaire et social.

Les professeurs de Lycées Professionnels insistent tous sur les points suivants :

- CALCUL NUMERIQUE mental et à la main. Ils déplorent le fait que les élèves trop souvent ne savent pas la table de multiplication par coeur.

  Pratique des quatre opérations : - sur les décimaux

  - sur les fractions

Touteopération devrait être précédée d'un rapide calcul mental donnant un ordre de grandeur du résultat.

Pratique de la racine carrée, ordre de grandeur, approximation.

Notion sur les réels.

Utilisation de tables (de carrés, de cubes...) Interpolation linéaire.

- EXPRESSIONS ALGEBRIQUES. Manipulation des parenthèses.

- MISE EN EQUATIONS D'UN PROBLEME DU PREMIER DEGRE.

C'est un des principaux griefs que l'on fait à l'enseignement du premier cycle : Si les élèves savent, en général, résoudre une équation du premier degré à une inconnue ou même un système de deux équations du premier degré à deux inconnues, ils ne savent à peu près jamais utiliser cet outil mathématique pour résoudre effectivement un problème : c'est-à-dire mettre en équation le problème.

Il semble que la difficulté première soit la mise en équation d'un problème du premier degré à une inconnue. Une fois ce premier pas franchi, les suivants (inéquations, deux équations du premier degré à deux inconnues) coulent, parait-il, quasiment de source.

On nous demande donc beaucoup de problèmes :

- de mélanges
- de trains
- de partages proportionnels
- de partages inégaux
etc.

que les élèves sont tenus de mettre eux-mêmes en équation.

Pour la préparation aux B.E.P. industriels, en plus de ces connaissances d'algèbre, il est indispensable d'avoir des notions de géométrie et d'être capable de "voir dans l'espace à trois dimensions".

- Géométrie du triangle : droites remarquables
cercle circonscrit
cercles inscrits et exinscrits.

- Relations métriques dans le triangle rectangle

  Relations trigonométriques dans le triangle rectangle.

- Longueurs : périmètre des figures usuelles

  Aires des figures simples dont celle du disque

  Mesures et instruments de mesure

  Longueur de la circonférence ; enroulements.

- Solides usuels et leurs sections planes. (Un élève de 3ème pe des idées totalement saugrenues sur la section d'un cube par le pla sant par deux arêtes parallèles opposées !)

La dialectique "espace-plan" permet des problèmes de construction trique qui enseignent à voir dans l'espace et à maîtriser la descript ce que l'on voit.

Rien dans ces suggestions qui sorte du programme et puisse rendre service au futur élève de second C. En particulier, l tude à la mise en équation ou à toute autre mathématisation d'un prob de la vie courante sera vivement appréciée par le professeur de Sci Physiques de seconde C comme par le professeur de Mathématiques classes de seconde et de la classe de première B entre autres.

Pour le groupe 1er Cycle

Colette ALICOT

Annexe 1.

EXTRAIT DES STATISTIQUES DE L'ACADEMIE D'AIX-MARSEILL

Sur 20.913 élèves de 3ème en Juin 1977 dans l'Académie d'Aix-Mar
sont entrés en :

2e A	littéraire	2.105	48,85 %
2e AB	économique	4.382	
2e C	scientifique	3.731	
2e T1	méc.-élec.	1.483	14,1 %
2e T2	B.T.P.	117	
2e T3	laboratoire	303	
2e T4	médico-social	542	
2e T5	musique	14	
B.T.	industriel	424	
B.T.	hôtelier	74	
BEP et CAP	industriel	1.980	25,9 %
BEP et CAP	social	786	
BEP et CAP	hôtelier	201	
BEP et CAP	commercial	2.454	
Enseignement agricole long		166	1,66 %
Enseignement agricole court		184	
Apprentissage		150	0,71 %

Annexe 2.

QUESTIONNAIRE A L'USAGE DES PROFESSEURS DE L.E.P.

REMARQUE PRELIMINAIRE

Ce questionnaire a été élaboré par des animateurs de groupes de 1er cycle de l'I.R.E.M. de Marseille. Ceux-ci ne prétendent pas avoir pensé à toutes les questions auxquelles il serait souhaitable d'avoir une réponse ou sur lesquelles il serait intéressant d'avoir des détails. Ils seraient donc très reconnaissants si les professeurs de C.E.T. concernés voulaient bien compléter ce questionnaire par des questions supplémentaires qui leur paraitraient intéressantes.

L'ordre dans lequel sont énoncées les questions retenues ne doit en aucun cas être considéré comme impératif par les professeurs de C.E.T., il est en partie dû aux hasards de la discussion qui a permis d'élaborer ce questionnaire.

<u>Question 1</u>. Organisation des C.E.T. Imbrication des cours théoriques et des cours pratiques. Y a-t-il plusieurs sortes d'enseignement théorique dispensé par des professeurs différents ? en particulier en Mathématique. Quelles sont les méthodes de travail utilisées ? (Comparaison avec le C.F.A.).

<u>Question 2.</u> Quel est le niveau qui vous paraitrait souhaitable pour les élèves en ce qui concerne le Français, les Mathématiques, les Langues vivantes, les Sciences humaines (Histoire et Géographie)

1° - A leur entrée en C.E.T. ?

2° - A leur sortie du C.E.T. ?

Quel est en fait le niveau atteint au moment du B.E.P. compte tenu du niveau qu'ils ont actuellement à leur sortie de 3ème ?

<u>Question 3.</u> Quelles notions mathématiques acquises dans les classes précédentes utilisez-vous ? en algèbre - en géométrie.

Connaissez-vous la formulation qui leur en a été donnée dans le 1er cycle ?

Si oui, l'utilisez-vous ? Si vous ne l'utilisez pas, pourquoi ? Est-elle utilisable ? Par exemple, utilisez-vous l'énoncé de Thalès en parlant de rapport de projection ou utilisez-vous uniquement des triangles semblables ?

Parmi ces notions aimeriez-vous que les professeurs de 1er cycle insistent plus et fassent manipuler plus souvent certaines d'entre elles ? par exemple Calcul numérique - exercices sur les nombres normaux, les suites de Renard - pourcentages - proportionnalité et/ou règle de trois équations de 1er degré - mise en équations - tracé de figures géométriques usuelles - etc.

<u>Question 4.</u> Dans la formation que vous dispensez, quelle part donnez-vous à la mémoire ? en particulier pour les formules. Quelle importance attachez vous à la démonstration d'une formule soit avant, soit après son utilisation

Dans quelle mesure les formules sont-elles données accompagnées de leur champ d'application ? par exemple avec une évaluation des erreurs relatives, de la tolérance ?

<u>Question 5.</u> Quels sont les B.E.P. qui permettent une insertion dans la vie active

- immédiatement ?
- avec un complément de formation ?

UN CALCUL DE MOMENTS D'INERTIE

CONFIRME PAR UNE EXPERIENCE, EN TERMINALE C

* * *

*

Michel EYRAUD & Raymond RAYNAUD
Groupe Math-Physique de Digne

En application du chapitre sur le calcul intégral, les élèves de Terminale C doivent calculer quelques moments d'inertie, ce qui, en général, ne soulève guère les passions.

Nous leur proposons ici :

- deux calculs de ce type,
- une vérification expérimentale des résultats obtenus.

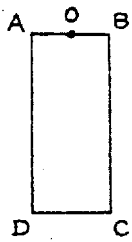
EN MATHEMATIQUES

1 - DIALOGUE (P : professeur, E : élèves)

"P : Imaginons une plaque métallique rectangulaire (A, B, C, D) homogène et d'épaisseur négligeable. Faisons-la osciller

1) autour de la droite (AB) fixée horizontalement,

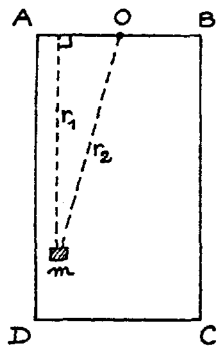
2) autour de la normale Δ au plan de la plaque, en 0 milieu de $[AB]$, fixée elle aussi horizontalement.



Quel est celui des deux mouvements pendulaires qui a la plus grande période ?

E : ....

- Le premier, forcément ! à cause de la résistance de l'air qui est plus grande.
- Pas sûr ; pour les petites oscillations, les mouvements sont lents, la résistance de l'air ne doit pas jouer beaucoup, surtout si la plaque est lourde.
- On n'a qu'à calculer la période : $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{J}{\mathcal{M} g \ell}}$.
- C'est pareil dans les deux cas.
- Non : c'est pareil pour $\mathcal{M} g \ell$, mais pas forcément pour J.
- Il faudrait calculer J_1 et J_2 les moments d'inertie par rapport à (AB) et Δ .



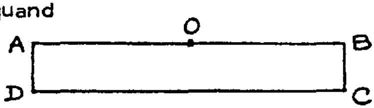
P : Ne peut-on comparer J_1 et J_2 sans les calculer ?

E : ....

P : c'est-à-dire $\sum m r_1^2$ et $\sum m r_2^2$.

E : Oui ! les obliques sont plus longues, J_2 doit être plus grand que J_1 , donc T_2 plus grand que T_1 .

P : N'a-t-on pas l'intuition de ce résultat quand AB est grand par rapport à AD ?



E : .... oui ...... non ......

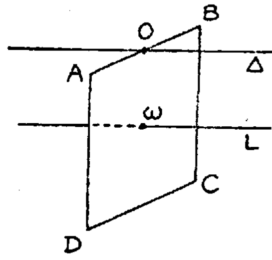
P : Voici un problème sur le sujet. Les données numériques qui y figurent sont les dimensions d'une plaque métallique que vous trouverez au laboratoire de physique, et que vous ferez osciller comme il est dit dans l'énoncé. Vous comparerez les résultats du calcul et ceux de l'expérience."

2 - PROBLEME

Les unités de longueur, de masse et de temps sont le mètre, le kilogramme et la seconde.

Une plaque métallique homogène de masse $\mathcal{M}$, d'épaisseur négligeable a la forme d'un rectangle (A, B, C, D). $AB = a$, $BC = b$.

On appelle L et Δ les normales au plan de la plaque en son centre ω et en 0 milieu de $[AB]$.



I) Calculer les moments d'inertie de la plaque par rapport à la médiatrice de $[AB]$ et $[DC]$, par rapport à la médiatrice de $[AD]$ et $[BC]$, par rapport à la droite L, par rapport à la droite (AB) et par rapport à la droite Δ.

II) Un dispositif permet de faire osciller librement la plaque

1)- autour de la droite (AB) fixée horizontalement,

2)- autour de la droite Δ fixée horizontalement.

Dans les deux cas on impose à la plaque des oscillations de faible amplitude.

Calculer les périodes T_1, T_2 des mouvements pendulaires obtenus, ainsi que le rapport $\frac{T_2}{T_1}$; que vaut ce rapport si $a = 2b$?

Donner des valeurs numériques approchées de T_1 et T_2 dans le cas où $a = 0,30$ et $b = 0,15$.

3 - COMPTE-RENDU

An appliquant la définition des moments d'inertie et le théorème d'Huyghens, les élèves trouvent sans difficulté que les moments de la plaque par rapport à (AB) et Δ sont

$J_1 = \mathcal{M}\,\frac{b^2}{3}$ $\quad J_2 = \mathcal{M}\,\frac{a^2 + 4b^2}{12}$, puis que les périodes des mouvements pendulaires sont $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{2b}{3g}}$ et $T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{a^2+4b^2}{6gb}}$.

Ils en déduisent que $\frac{T_2}{T_1} = \sqrt{1+\frac{a^2}{4b^2}}$ et que $\frac{T_2}{T_1} = \sqrt{2}$ dans le cas où $a = 2b$.

Enfin avec les données numériques $a = 0,30$, $b = 0,15$, ils obtiennent
$T_1 \simeq 0,63$ $T_2 \simeq 0,91$.

Détail des calculs des moments d'inertie :

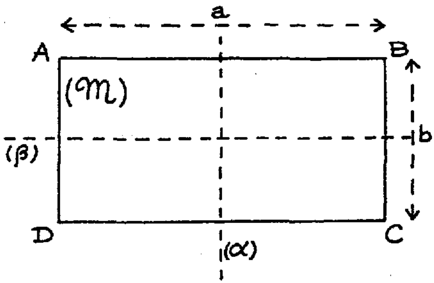
$$J_\alpha = 2\int_0^{\frac{a}{2}} x^2 . \frac{\mathcal{M}}{a}\,dx = 2\,\frac{\mathcal{M}}{a}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{a}{2}} = \frac{\mathcal{M}a^2}{12}$$

$$J_\beta = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{\mathcal{M}b^2}{12}$$

$$J_L = J_\alpha + J_\beta = \mathcal{M}\,\frac{a^2+b^2}{12}.$$

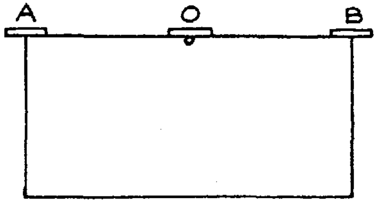
$$J_\Delta = J_L + \mathcal{M}\frac{b^2}{4} = \mathcal{M}\frac{a^2+4b^2}{12}.$$

$$J_{(AB)} = J_\beta + \mathcal{M}\frac{b^2}{4} = \mathcal{M}\frac{b^2}{3}.$$



EN PHYSIQUE

■ La plaque utilisée est en tôle de 3 mm d'épaisseur ; elle a 30 cm de longueur, 15 cm de largeur, et sa masse est 1060 grammes.



Pour permettre les oscillations autour de (AB) et de Δ on a soudé sur le bord [AB]

- deux petites tiges cylindriques en A et B, dont les génératrices inférieures matérialisent (AB) ;

- une pastille en 0 limitant un trou forédans la plaque qui permettra de la suspendre à la tige matérialisant Δ.

Ces additions font évidemment que la plaque réelle manipulée est légèrement différente de la plaque théorique objet des calculs.

■ Voici les résultats expérimentaux obtenus par 8 groupes d'élèves après mesure de la durée de 10 ou 20 oscillations de la plaque.

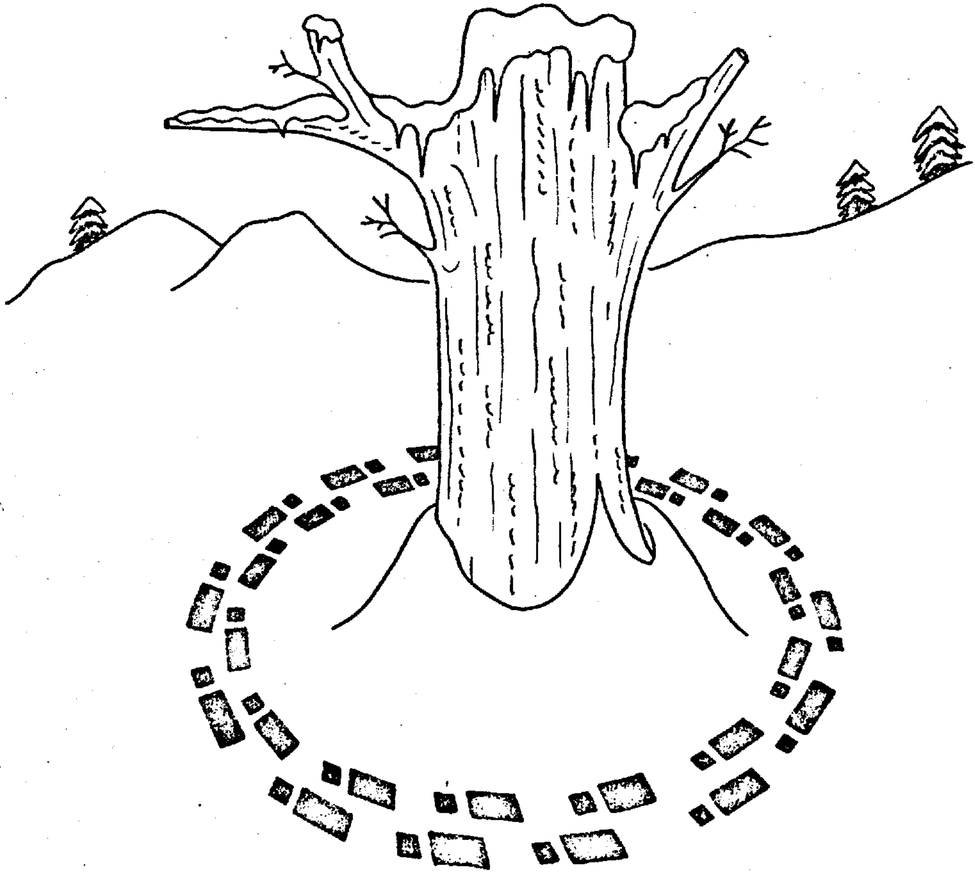
									Moyennes
T_1	0, 66	0, 64	0, 64	0, 66	0, 65	0, 63	0, 64	0, 63	0, 64
T_2	0, 92	0, 90	0, 91	0, 93	0, 93	0, 93	0, 92	0, 93	0, 92

$\frac{0,92}{0,64} \simeq 1,43$

■ Pour T_1 et T_2 les résultats expérimentaux excèdent légèrement les résultats théoriques ; ce qui s'explique peut-être par le fait que les moments d'inertie réels sont légèrement supérieurs aux moments calculés, surtout dans le cas de J_2.

Nous pouvons remarquer que le centre de gravité de la plaque est très légèrement remonté par les ingrédients placés en A, 0, B .

Pour ce qui est de $\frac{T_2}{T_1}$ la différence relative entre le résultat expérimental et le résultat du calcul est inférieure à 0, 02.



Traces de matrices carrées d'ordre 2
constituant un anneau.

ACTIVITES DE TRI ET DE CLASSEMENT

EN 6ème ET 5ème

* *
*

Claude ANSAS et Marie-Thérèse PATALANI, Groupe Informatique

Au cours des diverses activités mathématiques proposées à des enfants de cet âge, l'enseignant est amené à familiariser l'élève avec un certain nombre d'actions ou de démarches qui sont pour la plupart fondamentales dans les processus d'acquisition des connaissances.

A partir d'une situation donnée, souvent concrète, un problème est posé dont la résolution permettra, par des étapes successives d'abstraction et de formalisation, d'acquérir des concepts adaptés au niveau des élèves.

La résolution d'un problème passe en particulier par les étapes suivantes :

1. Connaître le problème posé (lire, comprendre la situation, identifier et choisir des informations, se poser des questions...).

2. Rechercher une méthode et choisir les "outils" adaptés.

3. Déterminer les opérations élémentaires à effectuer et fixer l'ordre dans lequel elles doivent être faites.

4. Exécuter, vérifier.

5. Envisager la classe de problèmes auxquels la méthode pourrait s'appliquer.

Il s'agit là, en fait, de la recherche, de la formalisation et de l'application d'un algorithme. Une telle démarche a l'avantage d'obliger l'élève à utiliser des moyens pour planifier et organiser sa recherche. Décrire une situation, fournir ou choisir des informations, découvrir un procédé, modéliser, représenter par un code ou un dessin sont autant d'actions dont la pratique sera utile dans toutes les activités scolaires de l'élève et, en particulier, en mathématiques. Sa connaissance des mécanismes calculatoires s'en trouvera confortée et son aptitude à résoudre des problèmes plus développée.

Il ne s'agit pas d'apprendre une nouvelle technique, mais de rendre le travail de l'élève plus systématique et plus rigoureux comme l'exemple qui suit va le montrer.

Cet exemple a été choisi pour les raisons suivantes :

- il représente une situation concrète, où l'élève n'est pas seulement observateur mais acteur ;
- le problème posé par cette situation oblige à passer par un certain nombre des étapes citées précédemment ;
- le travail qu'il demande fait référence à des notions mathématiques qu'il sera facile de découvrir, rappeler ou appliquer à ce propos.

I - ENQUETES PREALABLES

Il est important pour des enfants de cet âge de faire référence à des situations de la vie courante ; ceci représente une première familiarisation avec le problème posé.

On pourra donc faire précéder le travail en classe d'une enquête dans des lieux où des classements ou des tris sont effectués, soit manuellement, soit à l'aide de machines (à la poste, à l'école, dans un bureau, etc., classement par ordre alphabétique, par âge, par départements, etc.).

II - PROBLEME POSE

a) Introduction

• On pourra partir d'une situation créée dans l'école : examen blanc, interrogation écrite ou autres sur plusieurs classes (le nombre de copies à classer doit être assez important). Il semble plus intéressant de prévoir une note sur 40 pour avoir un éventail de valeurs de notes assez important.

• Le problème sera ensuite posé en classe : "nous avons n copies à classer par ordre de note, comment procéder ?".

b) Discussion

Une discussion peut s'engager alors avec les élèves pour déterminer une méthode générale de tri :

• On peut choisir une seule méthode pour toute la classe et répartir les tâches par groupes d'élèves ;

• On peut faire une une liste de méthodes possibles, et donner une méthode à chaque groupe d'élèves ;

• On peut distribuer des paquets de copies à chaque équipe qui travaillera de façon autonome et cherchera sa propre méthode.

c) Différentes méthodes de tri possibles

PROCEDES PAR DICHOTOMIE

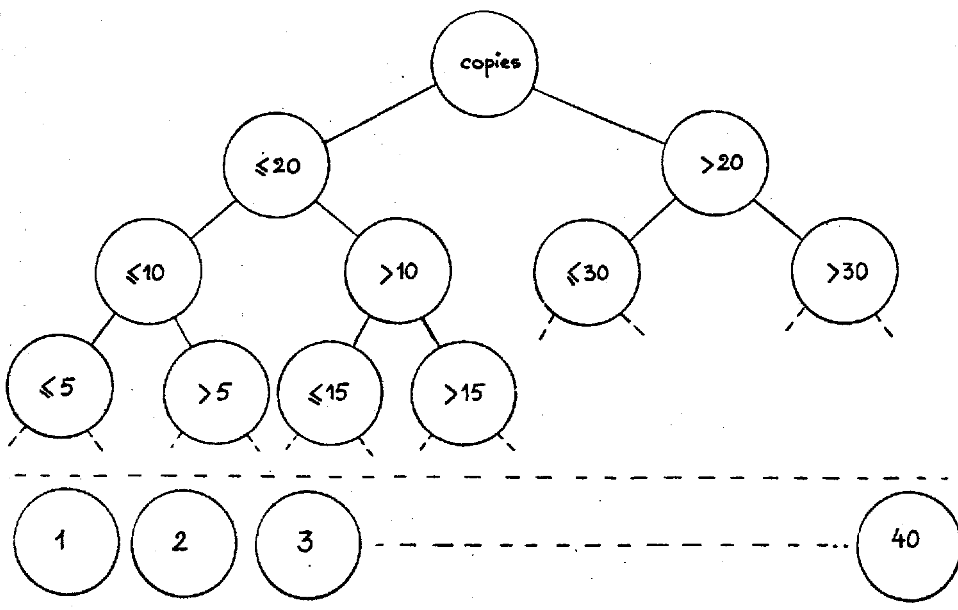
1. Dichotomie suivant les notes

On sépare d'abord les copies en deux paquets : le paquet des notes supérieures à 20 et le paquet des notes inférieures ou égales à 20. Puis on sépare à leur tour ces deux paquets :

- en notes strictement supérieures à 10 et notes inférieures ou égales à 10 pour l'un ;
- en notes inférieures ou égales à 30 et notes strictement supérieures à 30 pour l'autre.

etc. jusqu'à classification totale des notes.

Cette méthode pourra être représentée par un arbre, ce qui a l'intérêt de familiariser les élèves avec la représentation simplifiée d'un procédé (dans ce cas, procédé de tri, de classement).

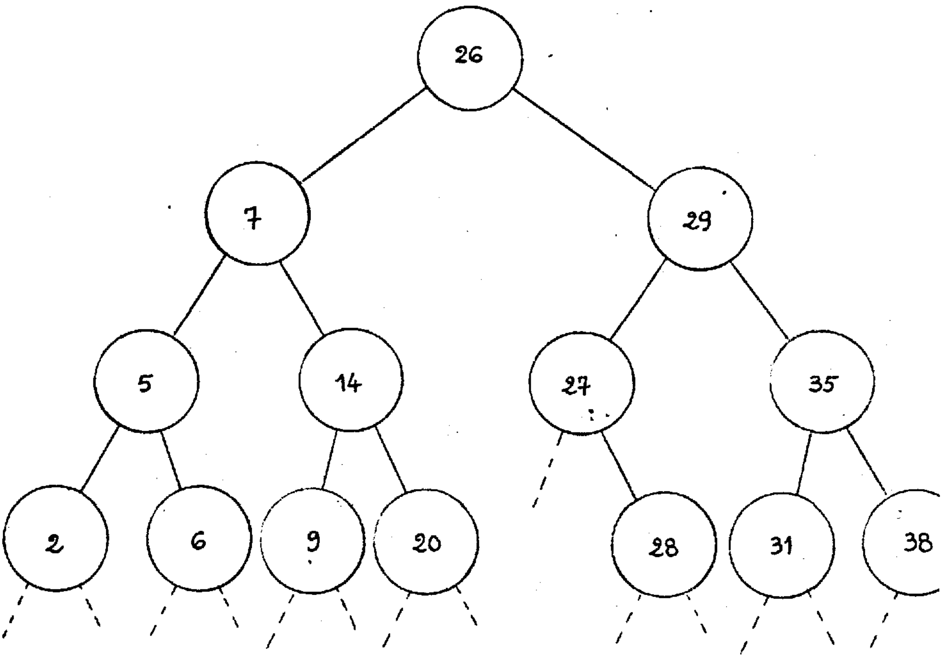


2. Dichotomie qui consiste à répartir les copies en deux paquets par rapport à la première note (par exemple celle qui figure sur la première copie du paquet).

à droite : le paquet des notes supérieures à la première,

à gauche : le paquet des notes inférieures à la première,

... puis à nouveau, partager chaque paquet en deux par comparaison à sa première note, etc.



Le classement terminé, il faut "ramasser" les copies de la façon suivante :

On ramasse les descendants gauches d'un noeud, puis le noeud, puis ses descendants droits, et ceci récursivement.

On place, à chaque fois, le paquet ramassé sur la copie ou le paquet à ramasser.

PROCEDES ITERATIFS

- 1er procédé

On cherche par balayage visuel la plus petite note du paquet que l'on a en main (ce qui sous-entend une première comparaison des notes entre elles pour ne mémoriser que la plus petite) ; on la met de côté, puis on cherche, toujours par balayage visuel, la plus petite note du paquet restant que l'on extrait à son tour pour la placer au-dessus de la précédente ainsi de suite...

On crée ainsi un paquet classé qui s'augmente d'une copie à chaque balayage.

Cette démarche présente un intérêt pour les élèves, car elle s'accompagne d'un processus de comparaison de chaque note à la suivante et de mémorisation successive de la plus petite.

- 2ème procédé

On compare les deux premières notes et on les classe (en les permutant si nécessaire) puis on compare la seconde à la suivante, on les classe, etc. jusqu'à épuisement (des notes) ; puis on recommence depuis le début toujours en comparant les notes deux à deux. L'ensemble des copies est classé lorsqu'il n'y a plus aucune permutation au cours d'un balayage.

- 3ème procédé (Voir III).

III - ETUDE ET EXPLOITATION D'UNE METHODE

C'est un troisième procédé itératif. Sa méthode consiste à comparer chaque note aux notes des copies précédentes déjà rangées et à l'insérer à sa place. Cette démarche peut paraître la plus naturelle aux enfants et s'appuie sur un algorithme de compréhension plus facile.

Il est important de faire précéder la phase de recherche des élèves d'un certain nombre de consignes telles que :

- écrire toutes les actions que l'on fait dans l'ordre ;
- employer un vocabulaire précis qui peut être donné (comparer, placer avant, placer après, numéroter les copies, etc.) ;
- énoncer les problèmes rencontrés (cas des notes égales).

EXPLOITATION DE LA PHASE DE RECHERCHE

1. Compte rendu des activités de groupe :

Chaque groupe est invité à rendre compte de son travail. Le professeur pourra, à ce propos, conduire une discussion entre tous les élèves, en s'efforçant de mettre en évidence les différents problèmes rencontrés, et en particulier celui posé par la répétition des actions. On peut en effet supposer que les enfants auront pris conscience, au bout d'un certain nombre de manipulations, de l'inutilité de répéter par écrit les mêmes actions ; ils pourront alors avoir indiqué "je recommence... je refais la première action...".

C'est ce travail commun d'analyse qui fera apparaître la nécessité d'une écriture plus claire.

2. Ecriture de l'algorithme

Dans un premier temps, on fera écrire l'algorithme aux élèves en langage spontané, puis on affinera progressivement (en énonçant toutes les actions sans les répéter, en respectant l'ordre de manipulation, en précisant les mots, etc.)

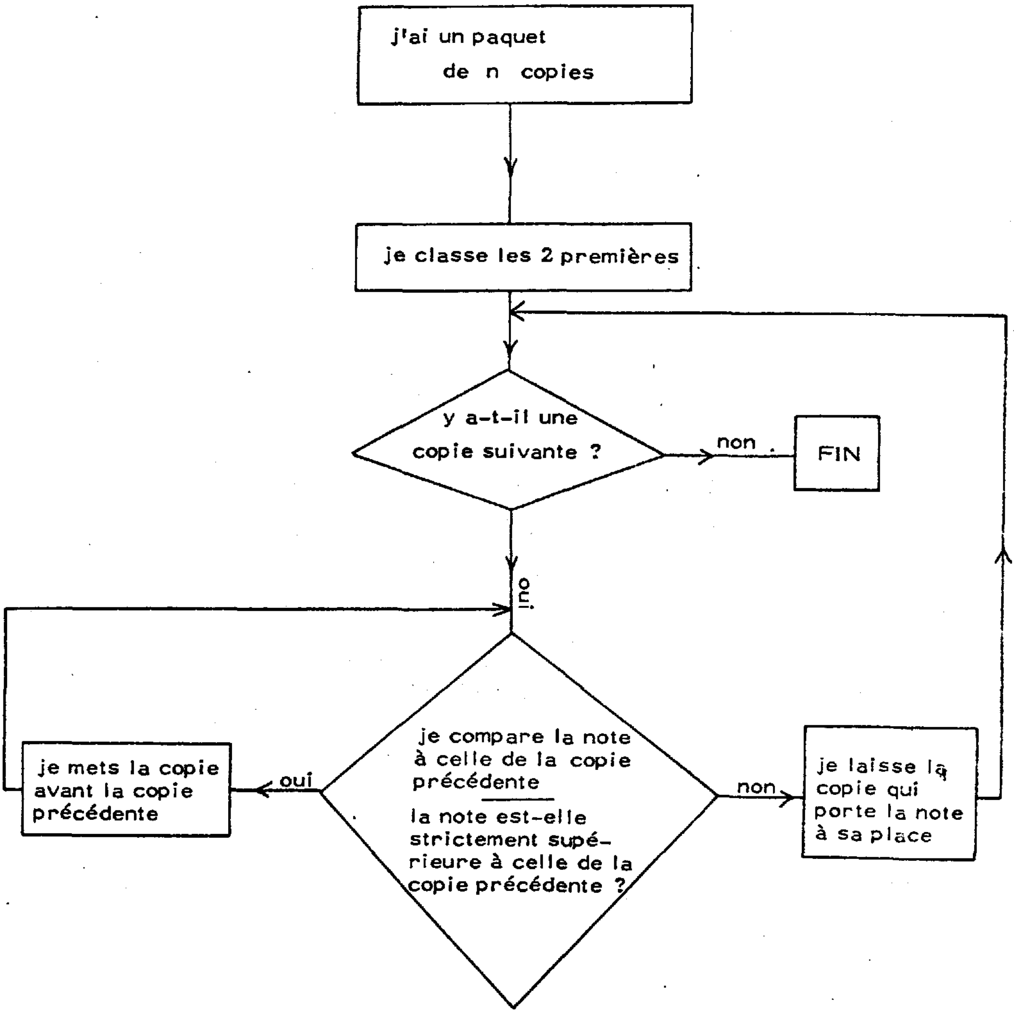
Ensuite, on passera à une écriture plus élaborée en langage synthétique.

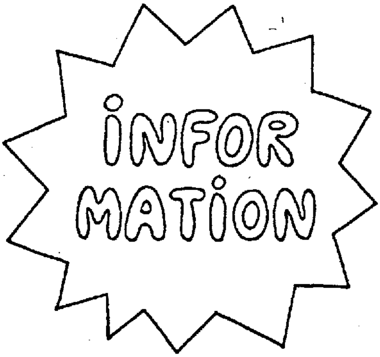
ACTION 0	je pars de la note de la 2ème copie et je fais l'action 1.
ACTION 1	je compare la note précédente, je fais l'action 2.
ACTION 2	si la note est strictement supérieure à la note précédente : alors je mets la copie avant la copie précédente, et je fais l'action 1.

sinon je laisse la copie qui porte la note à sa place, et je fais l'action 3.

ACTION 3	*je passe à la copie suivante :* s'il y en a une, je fais l'action 1 sinon je fais l'action 4.
ACTION 4	je m'arrête.

L'algorithme ainsi écrit, on pourra alors faire une sorte *de vérification de son efficacité en faisant "jouer"* les élèves (on peut simuler une machine qui ne sache faire que ces actions, chaque élève représentant une action). On pourra aussi le représenter par un dessin.


j'ai un paquet
de n copies
je classe les 2 premières
y a-t-il une
copie suivante ?
non
FIN
oui
je compare la note
à celle de la copie
précédente
la note est-elle
strictement supé-
rieure à celle de la
copie précédente ?
oui
je mets la copie
avant la copie
précédente
non
je laisse la
copie qui
porte la note
à sa place



LES NOUVEAUX PROGRAMMES
DE
QUATRIEME ET TROISIEME

Des projets de programmes pour les classes de quatrième et troisième avait été présentés le 22 juin 1978 au C.E.G.T. (Conseil de l'Enseignement Général et Technique) assortis de propositions d'horaires pour la classe de quatrième.

Le C.E.G.T. avait alors rejeté l'examen de ces programmes et horaires, demandant un bilan de la mise en application de la réforme en classe de 6e et une concertation sur les contenus des différentes disciplines. A la suite du vote du C.E.G.T., la Direction des Collèges avait retiré les textes proposés et annoncé une nouvelle concertation.

Lors de sa dernière réunion, le 17 octobre 1978, le C.E.G.T. a repoussé le projet d'arrêté fixant les horaires et l'organisation des classes de quatrième et troisième.

Par contre, le texte présenté sur les PROGRAMMES DE MATHEMATIQUES de 4e et 3e a été adopté.

Affaire à suivre...

LE BULLETIN INTER IREM NOUVEAU EST ARRIVE !

C'est un numéro spécial COPIRELEM (enseignement élémentaire)

il est à votre disposition à la bibliothèque de l'IREM.

REFLEXION SUR LES METHODES D'ENUMERATION ET DE DENOMBREMENT

★ ★
★

René CARMONA et Fernand DIDIER

I - Introduction - Motivation :

Les résultats d'analyse combinatoire présentés aux élèves de second cycle de l'enseignement secondaire portent sur les dénombrements de certains ensembles finis : sous-ensembles de cardinal donné d'un ensemble fini, applications d'un ensemble fini dans un autre, injections d'un ensemble fini dans un autre, bijections d'un ensemble fini sur un ensemble ayant même cardinalité.

Les démonstrations reposent sur la mise en évidence d'un procédé récurrent d'énumération des ensembles que l'on dénombre. Il apparaît que trop souvent, enseignants et enseignés retiennent les formules combinatoires ainsi obtenues, et oublient trop souvent les procédés d'énumération en cause. Nous souhaitons attirer l'attention du lecteur sur certaines insuffisances des systèmes d'écriture couramment utilisés. En effet, ceux-ci permettent bien d'écrire des formules statiques (qui deviennent alors définitions de certains des objets pour lesquels on introduit un symbolisme ad-hoc) mais ils ne permettent ni d'écrire, ni de manipuler des algorithmes, ni de synthétiser des procédés de calcul ou d'énumération.

L'exemple que nous choisissons pour développer notre argumentation est celui du dénombrement des surjections d'un ensemble E ayant n éléments sur un ensemble F ayant p éléments.

Pourquoi étudie-t-on les dénombrements mentionnés ci-dessus et ne dénombre-t-on pas les surjections d'un ensemble fini sur un autre ?

Il faut chercher les raisons ailleurs que dans la difficulté des démonstrations : nous verrons plus loin que le dénombrement des parties à p éléments d'un ensemble à n éléments et le dénombrement des surjections peuvent être conduits de façons parallèles, en explicitant des procédés d'énumération en tous points analogues. De plus, ces procédés d'énumération sont de difficultés égales et conduisent tous les deux à des formules de récurrence similaires.

$$C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p \quad , \tag{1}$$

et :

$$S_n^p = p\, S_{n-1}^{p-1} + p\, S_{n-1}^p , \tag{2}$$

si nous notons par S_n^p le nombre de surjections d'un ensemble à n éléments sur un ensemble à p éléments.

Il est clair que les formules (1) et (2) ne suffisent pas pour définir de façon univoque les fonctions C et S. Pourtant si on leur adjoint les valeurs que doivent prendre les fonctions pour les "valeurs limites" des variables n et p (voir les formules (7) et (10)), les formules (1) et (2) constituent des définitions mathématiques de fonctions. En outre ces définitions traduisent le procédé d'énumération qui nous a permis d'obtenir leur expression, et suggèrent ainsi un procédé d'évaluation. Ce procédé de calcul est bien connu dans le cas (1) puisque il correspond au "calcul des coefficients du binôme par la méthode du triangle de Pascal". Dans ces conditions la formule (2), ou mieux encore la formule (10), permet de calculer la fonction S en constituant un triangle analogue à celui de Pascal, et l'évaluation des nombres S_n^p n'est donc pas plus difficile que celle des C_n^p. Ce qui est moins bien admis est que (7) soit une définition au même titre que :

$$C_n^p = \frac{n\,!}{p\,!\,(n-p)\,!} \quad , \tag{3}$$

qui n'est rendu possible que parce qu'un symbolisme particulier a été introduit pour noter la fonction factorielle. Nous ne mettons pas en cause le sort particulier qui est réservé à la fonction factorielle.

En effet celle-ci est d'un grand intérêt dans de nombreux domaines des mathématiques (théorie des nombres, analyse, calcul des probabilités, ...) ce qui justifie l'introduction d'une notation particulière. Nous voulons simplement mentionner que l'existence de cette notation permet de substituer la définition (3) à la définition (7), et de rompre le parallélisme entre le traitement des formules de récurrence (1) et (2). On pourra voir, en appendice, l'expression développée de S_n^p. La manipulation des formules de définition récurrentes du type (10) nous est moins familière. C'est peut-être une des raisons pour lesquelles le calcul des S_n^p n'est pas au programme des classes de l'enseignement secondaire.

Pour terminer cette introduction, nous voudrions justifier la présence de cette note dans le cadre d'un travail de réflexion sur l'informatique et son influence sur l'enseignement des mathématiques. L'informaticien ne définit des objets que pour les construire effectivement. Ses définitions sont donc en fait des algorithmes de construction, de calcul ou de reconnaissance. C'est sa pratique qui a mis en évidence l'intérêt que pouvait avoir l'interprétation des formules (5) et (10) comme des définitions, provoquant ainsi le développement de nouvelles techniques permettant de manipuler les objets ainsi définis.

L'expérience accumulée par l'informaticien a mis en évidence l'intérêt des définitions et des procédés de calcul (ou de construction) récurrents [1] (voir par exemple [Rec] [2]). Notre but est de mettre à profit cette expérience pour éclairer d'un jour nouveau l'étude des problèmes de dénombrement dans le second cycle de notre enseignement secondaire.

Il ne sera pas question ici d'ordinateur ou de langage de programmation.

---

[1] Les définitions et les algorithmes que le mathématicien appelle récurrents sont qualifiés de "récursifs" par l'informaticien.

[2] [Rec] renvoie aux articles parus dans la brochure INRDP n° 75 (pages 175-234) et dans la brochure A.P.M.E.P. n° 20 (pages 199-206) sous le titre Récursivité.

II - Les dénombrements en question :

Les deux premiers des trois dénombrements que nous allons effectuer dans ce paragraphe sont bien connus de tous, et figurent en bonne place dans tous les ouvrages traitant de problèmes combinatoires. Nous devons donc en justifier la présentation dans cette note.

Le premier nous servira à illustrer comment l'introduction d'un symbolisme, en l'occurrence le point d'exclamation de la fonction factorielle, permet de rendre la notation d'une fonction (et plus précisément les valeurs de cette fonction) indépendante de tout procédé de calcul ou de définition. Nous essaierons ensuite de montrer comment la liberté ainsi gagnée peut n'être qu'illusoire, limitant en fait nos études aux fonctions possédant une écriture raisonnable au moyen des symboles et des notations que nous nous sommes autorisés. L'illustration de ce leurre est l'objet des études parallèles du dénombrement des parties à p éléments d'un ensemble à n éléments, et du dénombrement des surjections d'un ensemble à n éléments sur un ensemble à p éléments.

(i) Dénombrement des bijections :

Soient E et E' deux ensembles finis de cardinal n, et notons $\mathcal{B}(E,E')$ l'ensemble des applications bijectives de E dans E' et $B(n)$ son cardinal.

Si $n = 0$, nous avons :

$$\mathcal{B}(E,E') = \{\emptyset\} ,$$

et donc :

$$B(0) = 1.$$

Examinons maintenant le cas $n > 0$. Soit e un élément de E que nous particularisons (ceci est possible puisque $n \geq 1$).

Si f est une bijection de E sur E', si e' est l'image de e par f (alors $f(e) = e'$), et si nous enlevons le couple (e, e') du graphe de f, nous obtenons le graphe d'une bijection de $E \setminus \{e\}$ [3] sur $E' \setminus \{e'\}$. Réciproquement si $e' \in E'$ et si $\bar{f}$ est une bijection de $E \setminus \{e\}$ dans $E' \setminus \{e'\}$ il existe une et une seule bijection de E dans E', disons f, qui vérifie :

$$f(e) = e' \ \text{ et } \ (\forall x \in E \setminus \{e\}\ ,\ f(x) = \bar{f}(x))$$

Nous la noterons $\bar{f} \cup \{(e,e')\}$. Ainsi :

$$\mathcal{B}(E,E') = \bigcup_{e' \in E'} \mathcal{B}_{e'}$$

où $\mathcal{B}_{e'}$ désigne l'ensemble des $\bar{f} \cup \{(e,e')\}$, $\bar{f}$ parcourant l'ensemble $\mathcal{B}(E \setminus \{e\}, E' \setminus \{e'\})$.

Or les ensembles $\mathcal{B}_{e'}$ sont disjoints deux à deux et ont le même cardinal, à savoir card $\mathcal{B}(E \setminus \{e\}, E' \setminus \{e'\})$.

et :

$$B(n) = n.\,B(n-1).$$

Récapitulons ces formules :

$$\mathcal{B}(E,E') = \underline{\text{si}}\ \ n = 0\ \ \underline{\text{alors}}\ \ \{\emptyset\}$$
$$\underline{\text{si non}}\ \ \bigcup_{e' \in E'} \mathcal{B}_{e'}$$

et :

$$B(n) = \underline{\text{si}}\ \ n = 0\ \ \underline{\text{alors}}\ \ 1$$
$$\underline{\text{sinon}}\ \ n.\,B(n-1) \qquad (5)$$

Ainsi donc il apparait clairement que la cardinalité de $\mathcal{B}(E,E')$ n'est obtenu que comme un sous produit du procédé d'énumération mis en évidence. Plus que les résultats numériques qu'il permet d'obtenir, c'est la nature même du procédé d'énumération qui nous parait être fondamentale : il est, pour reprendre l'expression de Blaise Pascal, de nature universelle et porte sa démonstration en soi.

---

[3] $A \setminus B$ ~~désigne la~~ différence ensembliste $A \setminus B = A \cap B^c$, à savoir l'ensemble des éléments de A qui n'appartiennent pas à B (nous utilisons la notation B^c pour le complémentaire de B).

Pour $n \neq 0$ l'évaluation de $B(n)$ se fait de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
B(n) &= n.B(n-1)\\
B(n-1) &= (n-1).B(n-2)\\
&\vdots\\
B(1) &= 1.B(0)\\
B(0) &= 1\,.
\end{aligned}$$

En multipliant membre à membre, et en simplifiant on obtient :

$$B(n) = n.(n-1)\ldots\ldots\ldots 3.2.1\,, \tag{6}$$

(que l'on note $n!$). Remarquons que le produit figurant dans le membre de droite de (6) peut être calculé de nombreuses façons différentes.
Alors que la formule (5) suggère un procédé de calcul ([4]), la formule (6) et l'emploi de la notation $n!$ occultent le problème du choix du procédé de calcul.

En fait, dans le meilleur des cas, c'est (6) qui est retenu, le procédé d'énumération étant très vite oublié.

(ii) <u>Dénombrement des combinaisons</u> :

Soient n et p deux entiers ; si E est un ensemble à n éléments, nous noterons $\mathcal{P}(p,E)$ l'ensemble des sous-ensembles de E qui ont p éléments et C_n^p son cardinal.

Il est clair que :

$$\mathcal{P}(p,E) = \emptyset \ , \quad \text{si } p > n$$

et donc nous avons :

$$C_n^p = 0 \qquad \text{si } p > n.$$

([4]) Voir le chapitre II de l'article de la brochure INRDP n° 75 pour de plus amples détails.

De plus si $p = 0$ il est non moins évident que :

$$\mathcal{P}(p, E) = \{\emptyset\}$$

et donc que :

$$C_n^p = 1$$

Ces cas singuliers étudiés, envisageons maintenant le cas où $1 \leq p \leq n$. Soit e un élément de E que nous particularisons (ceci est possible puisque $n \geq 1$). Enumérer les parties de E à p éléments peut se faire en énumérant les parties à p éléments de $E \setminus \{e\}$, et en énumérant ensuite les parties de E à p éléments qui contiennent e (ce qui revient, en fait, à énumérer les parties à $p-1$ éléments de $E \setminus \{e\}$). Compte tenu des notations que nous avons introduites cette énumération repose sur la partition suivante de $\mathcal{P}(p, E)$:

$\mathcal{P}(p, E) = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$

où $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}(p, E \setminus \{e\})$

et $\mathcal{P}_2$ est l'ensemble des parties de la forme $\{e\} \cup P$,

P décrivant l'ensemble $\mathcal{P}(p-1, E \setminus \{e\})$.

d'où $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$.

Si nous regroupons les résultats obtenus, il est alors possible d'affirmer que $\mathcal{P}(p, E)$ et C_n^p sont entièrement déterminés par les formules :

$$\mathcal{P}(p, E) = \text{si } p = 0 \ \underline{\text{alors}} \ \{\emptyset\} \ \underline{\text{sinon}} \ \underline{\text{si}} \ p > n \ \underline{\text{alors}} \ \emptyset \ \underline{\text{sinon}} \ \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \tag{6}$$

et :

$$C_n^p = \underline{\text{si}} \ p = 0 \ \underline{\text{alors}} \ 1 \ \underline{\text{sinon}} \ \text{si } p > n \ \underline{\text{alors}} \ 0 \ \underline{\text{sinon}} \ C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1} \tag{7}$$

Ces formules peuvent donc être considérées comme des définitions, d'une part de l'ensemble des parties à p éléments de l'ensemble E, et d'autre part de la fonction C qui au couple d'entiers (p, n) fait correspondre le nombre C_n^p de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments [5]. Mais, et c'est le point sur lequel nous voulons insister, ces formules traduisent un procédé permettant d'une part d'énumérer $\mathcal{P}(p, E)$ et d'autre part de calculer C_n^p [4].

(iii) - Dénombrement des surjections :

Soient E et E' deux ensembles finis de cardinaux respectifs n et p, notons $\mathcal{S}(E, E')$ l'ensemble des applications surjectives de E sur E', et notons S_n^p son cardinal.

Il est clair que :

$$\mathcal{S}(E, E') = \emptyset \quad \text{si } p > n$$

et donc que :

$$S_n^p = 0 \qquad \text{si } p > n .$$

De plus si $p = 0$ et $n \neq 0$, nous avons également :

$$\mathcal{S}(E, E') = \emptyset ,$$

car il n'y a pas d'applications de E sur E', et donc :

$$S_n^0 = 0 .$$

Enfin si $p = 0$ et $n = 0$:

$$\mathcal{S}(E, E') = \{\emptyset\} ,$$

et donc :

$$S_0^0 = 1 .$$

---

[5] Il est à noter que l'objet défini figure à gauche et à droite des "égalités de définition" ce qui pourrait paraître curieux si l'on n'avait l'expérience de la récurrence.

Ces cas singuliers étudiés, envisageons maintenant le cas où $1 \leq p \leq n$, et comme précédemment, soit $e \in E$ un élément de E que nous particularisons. L'ensemble des surjections de E sur F se partitionne en deux sous-ensembles de la façon suivante : le premier est constitué par des surjections pour lesquelles l'image de e n'est l'image d'aucun autre élément de E, et le second est constitué par les surjections pour lesquelles l'image de e est l'image d'au moins un autre élément de E.

Ainsi, pour énumérer $\mathcal{S}(E,E')$, nous énumérons successivement ces deux sous-ensembles, que nous notons momentanément $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$.

Si $f \in \mathcal{S}_1$, si nous appelons e' l'image de e par f (i.e. $e' = f(e)$) et si nous enlevons le couple (e, e') du graphe de f, nous obtenons le graphe d'une surjection de $E \setminus \{e\}$ sur $E' \setminus \{e'\}$. La correspondance que nous venons de mettre en évidence est biunivoque. En effet si inversement, $e' \in E'$ et une surjection $\bar{f}$ de $E \setminus \{e\}$ sur $E' \setminus \{e'\}$ sont donnés, il existe une et une seule surjection f de E sur E' qui vérifie :

$$f(e) = e' \text{ et } (\forall x \in E \setminus \{e\}, f(x) = \bar{f}(x)). \tag{8}$$

Nous la noterons $\bar{f} \cup \{(e, e')\}$. Par conséquent, nous avons :

$$\mathcal{S}_1 = \bigcup_{e' \in E'} \bar{f} \cup \{(e, e')\} \; ; \text{ où } \bar{f} \text{ décrit } \mathcal{S}(E \setminus \{e\}, E' \setminus \{e'\}).$$

Les ensembles figurant au deuxième membre de l'égalité ci-dessus sont disjoints deux à deux, et ont tous même cardinalité S_{n-i}^{p-i}. Nous obtenons donc :

$$\text{card } \mathcal{S}_1 = p\, S_{n-1}^{p-1} .$$

De la même façon, si $f \in \mathcal{S}_2$, si nous appelons e' l'image de e par f, et si nous enlevons le couple (e, e') du graphe de f, nous obtenons le graphe d'une surjection de $E \setminus \{e\}$ sur E', et la correspondance ainsi mise en évidence est biunivoque. En effet, si inversement $e' \in E'$ et une surjection $\bar{f}$ de $E \setminus \{e\}$ sur E' sont donnés, il existe une et une seule surjection f de E sur E' qui vérifie la relation (8).

Nous avons donc :

$$\mathcal{S}_2 = \bigcup_{e' \in E'} \mathcal{F} \cup \{(e, e')\} \ ; \text{ où } \mathcal{F} \text{ décrit } \mathcal{S}(E \setminus \{e\}, E')$$

Comme précédemment, les ensembles qui figurent au second membre de l'égalité ci-dessus sont disjoints deux à deux et sont tous de même cardinalité. Cette cardinalité commune est cette fois-ci S^p_{n-1}. Par conséquent nous avons :

$$\text{card } \mathcal{S}_2 = p\, S^p_{n-1}$$

Si maintenant nous récapitulons les résultats que nous avons obtenus pour les énumérations et pour les dénombrements, nous obtenons :

$$\mathcal{S}(E,E') = \underline{\text{si}}\ p = 0\ \underline{\text{alors}}\ \underline{\text{si}}\ n = 0\ \underline{\text{alors}}\ \{\emptyset\} \atop \qquad\qquad\qquad\qquad \underline{\text{sinon}}\ \emptyset$$

$$\begin{array}{llll} \mathcal{S}(E,E') = \underline{\text{si}}\ p = 0\ \underline{\text{alors}} & \underline{\text{si}}\ n = 0 & \underline{\text{alors}} & \{\emptyset\} \\ & & \underline{\text{sinon}} & \emptyset \\ & \underline{\text{sinon}}\ \underline{\text{si}}\ p > n & \underline{\text{alors}} & \emptyset \\ & & \underline{\text{sinon}} & \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \end{array} \qquad (9)$$

et

$$\begin{array}{llll} S^p_n = \underline{\text{si}}\ p = 0\ \underline{\text{alors}} & \underline{\text{si}}\ n = 0 & \underline{\text{alors}} & 1 \\ & & \underline{\text{sinon}} & 0 \\ & \underline{\text{sinon}}\ \underline{\text{si}}\ p > n & \underline{\text{alors}} & 0 \\ & & \underline{\text{sinon}} & p\ S^{p-1}_{n-1} + p\ S^p_{n-1} \end{array} \qquad (10)$$

Pour terminer ce paragraphe, signalons que par des méthodes identiques ou similaires il est facile d'énumérer et de dénombrer les partitions d'un entier (décomposition en somme d'entiers) avec ou sans restrictions sur le nombre d'éléments de la partition.

III - Conclusion

Il est évident que le mode de raisonnement utilisé pour engendrer et dénombrer les surjections de E sur E' est tout à fait identique à celui que nous avons utilisé pour engendrer et dénombrer les parties à p éléments d'un ensemble E à n éléments.

L'écriture de la formule d'énumération (9) est indéniablement plus complexe que celle de (6). En fait cela est dû au système de notations que nous avons choisi plus qu'à des difficultés conceptuelles. La similitude est plus évidente sur les formules (10) et (7) de dénombrement, et si l'on excepte le fait que dans le cas des surjections nous ayons été contraints d'examiner le cas $n = 0$, la complexité de ces formules est la même.

Il faut donc chercher ailleurs que dans la complexité des démonstrations et des formules, les raisons de la "mise à l'écart des programmes du dénombrement des surjections".

Pour terminer, nous nous hasarderons à une explication.
Les procédés d'énumération ne trouvent pas beaucoup d'applications dans les problèmes des programmes actuels de mathématiques. Par contre les résultats des dénombrements sont d'une grande utilité pour la résolution de nombreux exercices (citons, par exemple, les exercices de calcul des probabilités). Si les formules (6) et (3) sont propices aux développements et aux simplifications des calculs, rien ne nous a préparé à calculer sur les formules (7) et (10), et à démontrer des propriétés des fonctions C et S en utilisant ces mêmes formules. Cette différence est sans appel.

Pourtant, si l'usage des calculatrices programmables se généralisent et si leur programmation se sophistique pour permettre l'utilisation de programmes dits "récursifs", le calcul des fonctions C et S se fera suivant les formules (7) et (10) (voir [Rec]). La systématisation de l'emploi des moyens informatiques nous conduira à reconsidérer les procédés jugés aujourd'hui inadaptés à la pratique calculatrice telle qu'on la conçoit actuellement (ou plutôt telle qu'on la concevait dans un passé récent).

Cette projection dans le futur n'est pas une vue de l'esprit gratuite mais, croyons nous, une simple anticipation sur un avenir très proche.

IV - Appendice

Nous proposons dans cet appendice une expression développée de S_n^p écrite sous forme de signes sommes. De la même façon que les formules (6) et (3) peuvent s'écrire :

$$B_{(n)} = \prod_{j=1}^{n} j ,$$

et :

$$C_n^p = \prod_{j=1}^{p} \frac{n-p+j}{j}$$

en utilisant le signe du produit de facteurs indiciés, il est possible d'exprimer la fonction S à l'aide de signes $\sum$ utilisés pour noter les sommes de termes indiciés.

Soient E et E' deux ensembles finis de cardinaux respectifs n et p, et notons $\mathcal{F}(E,E')$ l'ensemble de toutes les applications de E dans E'. $\mathcal{S}(E,E')$ est un sous ensemble de $\mathcal{F}(E,E')$ dont le complémentaire est facilement caractérisé. En effet si f est une application de E dans E', f n'est pas surjective si et seulement si l'énoncé suivant est satisfait :

$$\exists e' \in E' , \ \forall e \in E , \ f(e) \neq e' .$$

Ainsi donc, $\mathcal{S}(E,E')$ est le complémentaire dans $\mathcal{F}(E,E')$ de :

$$\bigcup_{e' \in E'} \mathcal{F}(E,E',e') ,$$

où $\mathcal{F}(E,E',e')$ est défini par :

$$\mathcal{F}(E,E',e') = \{ f \in \mathcal{F}(E,E') \ ; \forall e \in E , \ f(e) \neq e' \} .$$

$\mathcal{F}(E,E',e')$ est en fait l'ensemble des applications de E dans E' pour lesquelles e' n'est l'image d'aucun élément de E. Par conséquent :

$$\text{card } \mathcal{S}(E,E') = \text{card } \mathcal{F}(E,E') - \text{card } \bigcup_{e' \in E'} \mathcal{F}(E,E',e') , \qquad (11)$$

et nous saurons dénombrer $\mathcal{G}(E, E')$ lorsque nous saurons dénombrer l'ensemble de toutes les applications d'un ensemble fini dans un autre (c'est l'objet du sous paragraphe (i) et l'union de sous-ensembles non-disjoints (c'est l'objet du sous paragraphe (ii). En effet il est clair que les sous ensembles $\mathcal{F}(E, E', e')$ ne sont pas disjoints deux à deux.

(i) - <u>Dénombrement de toutes les applications</u> :

Nous $F(n,p)$ le nombre d'éléments de $\mathcal{F}(E, E')$.

Il est clair que :

$$\mathcal{F}(E, E') = \{\emptyset\}$$

si $n = 0$ (soit, $E = \emptyset$), et donc que :

$$F(0,p) = 1 .$$

Si maintenant $n \neq 0$, et $p = 0$ (soit, $E \neq \emptyset$ et $E' = \emptyset$), nous avons :

$$\mathcal{F}(E, E') = \emptyset ,$$

et donc :

$$F(n, 0) = 0 .$$

Ces cas singuliers étudiés, envisageons maintenant le cas où $p \neq 0$ et $n \neq 0$, et comme précédemment fixons un élément e dans E.

En utilisant les mêmes notations il est facile de voir que :

$$\mathcal{F}(E, E') = \bigcup_{e' \in E'} \mathcal{F}_{e'}$$ où $\mathcal{F}_{e'}$ désigne l'ensemble des $\bar{f} \cup \{(e, e')\}$, $\bar{f}$ décrivant $\mathcal{F}(E \setminus \{e\}, E')$

Les ensembles $\mathcal{F}_{e'}$ de l'égalité ci-dessus sont disjoints deux à deux et ont tous même cardinal, à savoir $F(n-1, p)$. Par conséquent

$$F(n,p) = p \,.\, F(n-1,p).$$

Si nous récapitulons les résultats obtenus pour les énumérations et pour les dénombrements nous obtenons :

$$\mathcal{F}(E,E') = \underline{\text{si}}\ n=0\ \underline{\text{alors}}\ \{\emptyset\}\ \underline{\text{sinon}}\ \underline{\text{si}}\ p=0\ \underline{\text{alors}}\ \emptyset\ \underline{\text{sinon}}\ \bigcup_{e'\in E'} \mathcal{F}_{e'}$$

et :

$$F(n,p) = \underline{\text{si}}\ n=0\ \underline{\text{alors}}\ 1\ \underline{\text{sinon}}\ \underline{\text{si}}\ p=0\ \underline{\text{alors}}\ 0\ \underline{\text{sinon}}\ p\,A(n-1,p)\,.$$

Comme pour le dénombrement des bijections il est facile d'obtenir une expression de $F(n,p)$ utilisant le symbolisme usuel. En effet, si nous écrivons :

$$\begin{aligned} F(n,p) &= p\,F(n-1,p) \\ F(n-1,p) &= p\,F(n-2,p) \\ &\text{-------------------} \\ &\text{-------------------} \\ F(1,p) &= p\,F(0,p) \\ F(0,p) &= 1\ , \end{aligned}$$

si nous multiplions les égalités ci-dessus membre à membre, et si nous simplifions, nous obtenons :

$$F(n,p) = p^n\,. \tag{12}$$

(ii) <u>Formule de Poincaré ou principe d'inclusion-exclusion</u> :

Soient, E un ensemble fini, N un entier, et $\{A_1,\ldots,A_N\}$ une famille finie de parties de E. Notre but est de déterminer :

$$\operatorname{card}\left(\bigcup_{j=1}^{N} A_j\right).$$

Si les A_j étaient disjoints deux à deux le résultat serait :

$$\sum_{j=1}^{N} \operatorname{card} A_j \tag{13}$$

Mais si les A_j ne sont pas supposés disjoints deux à deux, il est clair que les éléments de $\bigcup_{j=1}^{N} A_j$ qui appartiennent à plus d'un A_j, ont été comptés plus d'une fois. Par exemple, ceux qui appartiennent à deux ensembles A_j et à deux d'entre eux seulement, ont été comptés exactement deux fois. Ceci nous amène à proposer la correction suivante :

$$\sum_{j=1}^{N} \operatorname{card} A_j - \sum_{\substack{\{j_1, j_2\} \subset \{1, \ldots, N\} \\ \text{tel que } \operatorname{card}\{j_1, j_2\} = 2}} \operatorname{card} A_{j_1} \cap A_{j_2} \tag{14}$$

Cette correction nous rapproche du résultat puisque les éléments de $\sum_{j=1}^{N} A_j$ qui appartiennent à au plus deux ensembles A_j sont comptés une et une seule fois. Par contre, ceux qui appartiennent à exactement trois des ensembles A_j, étaient décomptés trois fois dans l'expression (13), et ne sont plus décomptés dans l'expression (14), puisqu'ils ont été retranchés trois fois. Ceci nous amène à proposer la correction suivante :

$$\sum_{j=1}^{N} \operatorname{card} A_j - \sum_{\substack{\{j_1, j_2\} \subset \{1, \ldots, N\} \\ \text{tel que } \operatorname{card}\{j_1, j_2\} = 2}} \operatorname{card} A_{j_1} \cap A_{j_2} \tag{15}$$

$$+ \sum_{\substack{\{j_1, j_2, j_3\} \subset \{1, \ldots, N\} \\ \text{tel que } \operatorname{card}\{j_1, j_2, j_3\} = 3}} \operatorname{card} A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap A_{j_3}$$

A nouveau nous nous sommes rapprochés du résultat puisque les éléments de $\sum_{j=1}^{N} A_j$ qui appartiennent à au plus trois des ensembles A_j sont comptés une et une seule fois. Par contre, ceux qui appartiennent à exactement quatre des ensembles A_j sont comptés deux fois. En effet ils étaient comptés quatre fois dans l'expression (13), nous avions retranché six fois leur nombre lors de la correction ayant conduit à l'expression (14), et nous avions rajouté quatre fois leur nombre lors de la correction ayant conduit à l'expression (15). Nous sommes donc amenés à retrancher :

$$\sum_{\substack{\{j_1,\ldots,j_4\}\subset\{1,\ldots,N\} \\ \text{tel que card}\{j_1,\ldots,j_4\}=4}} \text{card } A_{j_1} \cap \ldots \cap A_{j_4}$$

de l'expression (15). De correction en correction, nous arrivons en un temps fini à la formule exacte qui suit :

$$\text{card} \sum_{j=1}^{N} A_j = \sum_{k=1}^{N} (-1)^{k-1} \Big(\sum_{\substack{\{j_1,\ldots,j_k\}\subset\{1,\ldots,N\} \\ \text{tel que card}\{j_1,\ldots,j_k\}=k}} \text{card } A_{j_1} \cap \ldots \cap A_{j_k} \qquad (16)$$

que l'on écrit souvent sous forme développée :

$$\begin{aligned} \text{card}\Big(\bigcup_{j=1}^{N} A_j\Big) = {} & \text{card } A_1 + \text{card } A_2 + \ldots + \text{card } A_N \\ & - \text{card } A_1 \cap A_2 - \ldots \\ & + \text{card } A_1 \cap A_2 \cap A_3 + \ldots \\ & - \text{card } A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \\ & \text{-------------------} \end{aligned}$$

Nous sommons les cardinaux des ensembles, puis nous retranchons les cardinaux des intersections deux à deux, puis nous rajoutons les cardinaux des intersections trois à trois, puis nous retranchons les cardinaux des intersections quatre à quatre, ..., jusqu'à rajouter ou retrancher le cardinal de l'intersection de tous les A_j. Par exemple nous avons :

$$\text{card } A_1 \cup A_2 = \text{card } A_1 + \text{card } A_2 - \text{card } A_1 \cap A_2$$

$$\begin{aligned} \text{card } A_1 \cup A_2 \cup A_3 = {} & \text{card } A_1 + \text{card } A_2 + \text{card } A_3 \\ & - \text{card } A_1 \cap A_2 - \text{card } A_2 \cap A_3 - \text{card } A_3 \cap A_1 \\ & + \text{card } A_1 \cap A_2 \cap A_3 \end{aligned}$$

$$\mathrm{card}\, A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 = \mathrm{card}\, A_1 + \mathrm{card}\, A_2 + \mathrm{card}\, A_3 + \mathrm{card}\, A_4$$

$$- \mathrm{card}\, A_1 \cap A_2 + \mathrm{card}\, A_1 \cap A_3 - \mathrm{card}\, A_1 \cap A_4 - \mathrm{card}\, A_2 \cap A_3$$

$$- \mathrm{card}\, A_2 \cap A_4 - \mathrm{card}\, A_3 \cap A_4$$

$$+ \mathrm{card}\, A_1 \cap A_2 \cap A_3 + \mathrm{card}\, A_2 \cap A_3 \cap A_4 + \mathrm{card}\, A_1 \cap A_3 \cap A_4$$

$$+ \mathrm{card}\, A_1 \cap A_2 \cap A_4$$

$$- \mathrm{card}\, A_2 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \ .$$

La formule (16) se démontre en mettant en forme l'argument que nous avons utilisé pour la présenter. En effet si e est un élément de E qui appartient à $\bigcup_{j=1}^{N} A_j$ et si k_o est le nombre de A_j auxquels e appartient, c'est-à-dire :

$$k_o = \mathrm{card}\ \{j\ ;\ e \in A_j\},$$

dans la formule (16), e est compté :

$$\sum_{k=1}^{k_o} (-1)^{k-1}\, C_{k_o}^{k}$$

fois, c'est-à-dire exactement une fois puisque, en utilisant la formule du binome nous obtenons :

$$\begin{aligned} 0 &= (1-1)^{k_o} \\ &= \sum_{k=0}^{k_o} (-1)^k\, C_k^{k_o} \ , \end{aligned}$$

et donc :

$$1 = \sum_{k=1}^{k_o} (-1)^{k-1}\, C_k^{k_o} \ ,$$

ce qui démontre la formule (16).

(iii) Dénombrement des surjections :

La conjonction des formules (11) et (16) donne :

$$S_n^p = p^n - \sum_{k-1}^{p} (-1)^{k-1} \left(\sum_{\{e'_1, \ldots, e'_k\} \subset E'} \operatorname{card} \mathcal{F}(E, E', e'_1) \cap \ldots \cap \mathcal{F}(E, E', e'_k) \right)$$

$$\text{tel que} \quad \operatorname{card}\left\{e'_1, \ldots, e'_k\right\} = k \qquad (17)$$

Or, si $e'_1, \ldots, e'_k$ est une partie à k éléments de E',

$$\mathcal{F}(E, E', e'_1) \cap \ldots \cap \mathcal{F}(E, E', e'_k)$$

est l'ensemble des applications de E dans E' pour lesquelles $e'_1, \ldots$ et e'_k ne sont pas images d'un élément de E. Il est clair que ces applications sont en correcpondance biunivoque avec les applications de E dans $E' \setminus \{e_1, \ldots, e_k\}$ et donc que :

$$\begin{aligned} \operatorname{card}\mathcal{F}(E, E', e'_1) \cap \ldots \cap \mathcal{F}(E, E', E'_k) &= \operatorname{card}\mathcal{F}(E, E' \setminus \left\{e'_1, \ldots, e'_k\right\}) \\ &= (p-k)^n \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\operatorname{card}\mathcal{F}(E, E', e_1) \cap \ldots \cap \mathcal{F}(E, E', e'_k)$$

ne dépend que de k, et non pas du choix du sous ensemble $\left\{e'_1, \ldots, e'_k\right\}$ à k éléments de E'. Puisqu'il y a C_p^k tels sous ensembles, la formule (17) peut se reécrire :

$$S_n^p = p^n - \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k-1} C_p^k (p-k)^n \qquad (18)$$

L'utilisation du signe de sommation et du symbole C introduit pour noter le nombre de sous-ensembles de cardinal donné, d'un ensemble fini, permettent d'obtenir une écriture condensée de S_n^p. Mais la formule (18) ne traduit pas un procédé d'énumération et de plus, son écriture ne suggère pas un procédé de calcul pour évaluer S_n^p.

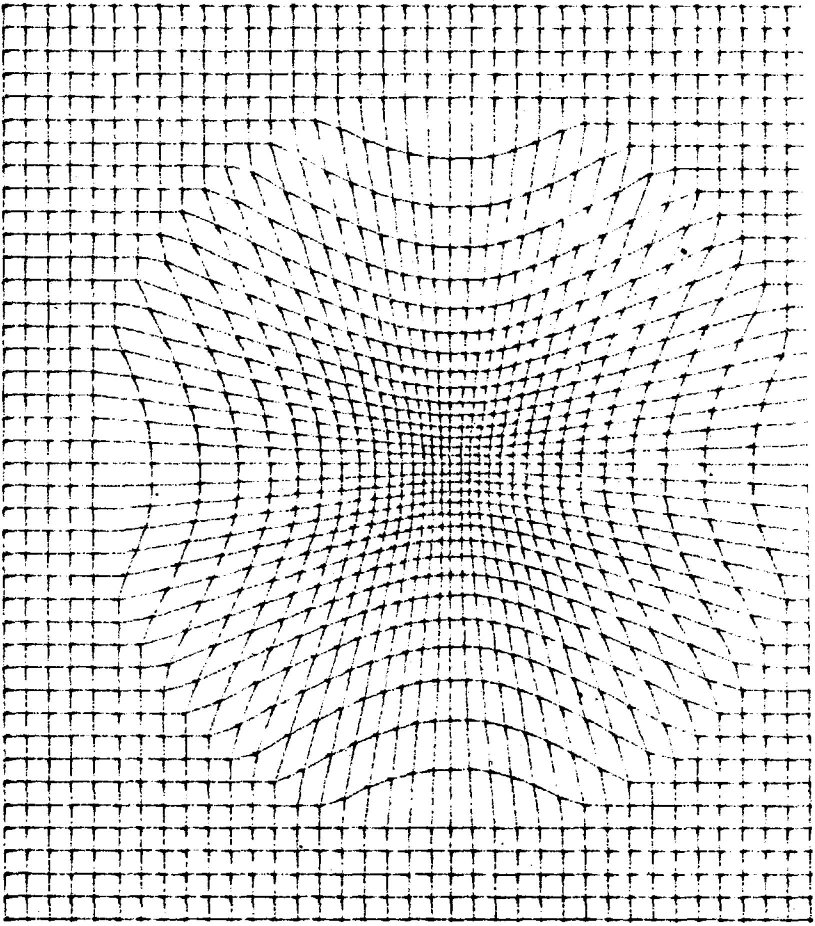
BIBLIOGRAPHIE

- Quelques apports de l'informatique à l'enseignement des mathématiques (Publication de l'A.P.M.E.P. n° 20).

- Calculateurs programmables dans les collèges et les lycées expérimentation menée par les I.R.E.M. et l'I.N.R.D.P. (Brochure I.N.R.D.P. n° 75).

- J. RIORDAN - An Introduction to combinatorial analysis New-York, London, Sidney - J. WILEY 1958.

- Louis COMTET - Analyse Combinatoire - Collection SUP (PUF) - Tome 2.



dessin réalisé à la table traçante
groupe Informatique - Gap

12

I.R.E.M.
Institut de recherche sur
l'enseignement des mathématiques

70, route Léon Lachamp
13288 MARSEILLE cedex 2

tél. 41.39.40. - 41.01.40.