UNE MONOGRAPHIE DE L'I.R.E.M. d'AIX-MARSEILLE

analyse 1

Dépôt légal 4ème trimestre 1978

PRIX : F

RESPONSABLE DES PUBLICATIONS

Gilles THOMAS

Ont participé aux travaux conduisant à la rédaction de cette brochure :

ALICOT	Colette
AMBROSINI	Alain
ARAGNOL	André
BENIAMINO	Jean-Claude
COUPET	Solange
CRUCIANI	Patrick
GROUX	Roland
JAUME	Michèle
LECHENE	Jean-Pierre
MARION	Jean
MARTINO-GAUCHI	Henri
OVAERT	Jean-Louis
ROLLAND	Robert
ROSAY	Geneviève
SAID	Nicole
SOTTOCASA	Gérard

membres du Groupe de Recherche sur l'Enseignement de l'Analyse de l'I.R.E.M. d'Aix-Marseille.

La frappe a été assurée par Mireille ANDRIEUX.

Les travaux d'édition ont été effectués par Gilles THOMAS.

PLAN DE LA BROCHURE

1 – OBJECTIFS ET METHODES DE TRAVAIL 5

2 – SUITES : UNE PREMIERE APPROCHE 25

3 – CALCUL DE VALEURS APPROCHEES D'INTEGRALES 73

4 – RESOLUTION DE L'EQUATION F(X) = X PAR APPROXIMATIONS SUCCESSIVES 109

BIBLIOGRAPHIE 171

1

objectifs et méthodes de travail

TABLE DES MATIERES

I - ETUDE SOMMAIRE DE L'ETAT ACTUEL DE L'ENSEIGNEMENT DE L'ANALYSE

II - OBJECTIFS ET METHODES DE TRAVAIL DU GROUPE

III - LES PROBLEMES DE L'ANALYSE

IV - CALCULATRICES DE POCHE ET ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES

OBJECTIFS ET METHODES DE TRAVAIL

I - ETUDE SOMMAIRE DE L'ETAT ACTUEL DE L'ENSEIGNEMENT DE L'ANALYSE

1 - Au niveau de l'enseignement obligatoire, l'analyse n'est pas enseignée en tant que telle. Cependant, certaines notions des programmes de 4ème et 3ème lui sont liées : manipulations d'inégalités, d'encadrements ; exemples de fonctions (linéaires, affines, polynomiales, rationnelles, racines carrées) ; notions sur les nombres réels. Mis à part le cas des fonctions affines, la représentation graphique de telles fonctions n'est pas abordée. Quelques exemples de fonctions en escalier ou affines par morceaux sont parfois donnés, à l'occasion de problèmes.

2 - En classe de seconde, la part de l'analyse est très faible. Une rubrique quelque peu sybilline concerne les encadrements et les valeurs approchées d'expressions de la forme $(1+x)^{\alpha}$; on constate que, dans les faits, fort peu de temps est réservé à cette étude. Ceci pose une question importante : A l'issue du premier cycle, et c'est bien normal, les élèves sont loin de maîtriser l'emploi des inégalités, des valeurs absolues, des expressions algébriques, des radicaux. Or cette maîtrise est capitale pour l'étude, abordée en classe de première, de la continuité, des limites et des dérivées.

La "mise en jachère" pendant un an de connaissances encore fragiles à l'issue de la troisième est certainement préjudiciable. On pourrait envisager de consacrer à l'analyse en seconde un temps plus long, en reportant ultérieurement certains développements d'algèbre linéaire et de géométrie.

3 - En classe de première, l'analyse est abordée à partir des notions de continuité et de limite d'une fonction en un point. L'expérience montre que, faute d'une

préparation suffisante, l'enseignement de ces notions demande un temps assez long, et que, malgré cela, elles sont difficilement maîtrisées par les élèves. Ceux-ci sont plus à l'aise dans le calcul des dérivées et dans ses applications aux constructions de courbes. Néanmoins le calcul "direct" de dérivées (i.e. à partir de la définition) pose lui aussi des problèmes.

Toutes ces difficultés ont de nombreuses sources, notamment :

- Une maîtrise insuffisante des notions prérequises : fonctions, encadrements, valeurs absolues.
- Spécificité de la démarche sous-jacente aux ε-raisonnements (stratégie par conditions suffisantes successives) dans un contexte peu intuitif.
- Absence de tout support algorithmique dans les démonstrations utilisant les théorèmes de permanence de la continuité. Il est à cet égard frappant de comparer les taux de réussite à des questions des deux types suivants : "Montrer la continuité de la fonction $x \longmapsto \sin(x^2)$" et "Calculer la dérivée de la fonction $x \longmapsto \sin(x^2)$".
- Manque d'approfondissement préalable du concept de fonction. La définition de la continuité induit-elle une perception de ce concept comme propriété commune aux "bonnes" fonctions déjà manipulées ? ou au contraire comme propriété délimitant une sous-classe dans l'ensemble de <u>toutes</u> les fonctions ? Mais alors, quels sont les matériaux dont disposent les élèves pour explorer le champ de toutes les fonctions ?
- Motivation insuffisante pour les problèmes posés ; les applications intéressantes arrivent beaucoup plus tard, et les notions ne sont pas dès l'abord perçues comme étant efficaces. Cela tient en bonne partie au caractère <u>non quantitatif</u> des problèmes posés : la notion de rapidité de convergence n'apparaît pas ; elle est cependant fondamentale pour les applications (contact, branches infinies, analyse numérique) et pour l'approfondissement des concepts de l'analyse elle-même. Dans la plupart des problèmes, une information du type $f(x) \longrightarrow 0$ si $x \longrightarrow +\infty$ est trop pauvre ; une inégalité $|f(x)| \leq \frac{1}{x^2}$ est beaucoup plus efficace. De même la continuité de f sur un intervalle $[a,b]$ ne saurait remplacer une inégalité telle que $|f(x) - f(y)| \leq 2|x-y|$ si on s'intéresse à des calculs de valeurs approchées de $f(x)$, ou de $\int_a^b f(x)\,dx$, ou de solutions de l'équation $f(x) = 3x$, etc.

En fait la continuité relève plus de la topologie que de l'analyse. Deux résultats de type topologique figurent au programme de terminale des sections scientifiques : Existence d'un maximum pour une fonction numérique continue sur un intervalle compact, et image d'un intervalle par une fonction numérique continue. Encore peut-on noter que dans la plupart des applications de ces théorèmes, des informations plus quantitatives sont indispensables.

- Le plus souvent, l'étude de ces questions correspond principalement à un discours du maître, et non à des activités de résolution de problèmes. (Mais le temps qu'on y passerait serait-il bien employé ?)
- Dans le cas des sections "non scientifiques" les difficultés précédentes apparaissent encore plus nettement, et les objectifs sont très mal perçus.

4 - En classe de terminale enfin, les notions de continuité et de limite sont reprises dans toutes les sections sous forme de "révisions". Le calcul différentiel est repris et approfondi, surtout dans les sections scientifiques. Cette fois, les principales difficultés proviennent de l'enseignement du calcul intégral :

- La présentation de la notion d'intégrale définie à partir des sommes de Riemann ou de l'intégrale des fonctions en escalier demande du temps et se prête peu à des exercices. En outre, les concepts mis en jeu sont délicats (cf par exemple les changements de subdivision des intervalles, l'emploi de bornes supérieures et inférieures indexées par de grands ensembles).
- La phase ci-dessus contraste avec celle qui suit la découverte du lien entre primitives et intégrales. Ici les élèves peuvent réinvestir leurs connaissances antérieures dans des activités de résolution de problèmes, et mesurer l'efficacité du calcul intégral.

Néanmoins le bilan n'est pas satisfaisant car, en pratique, il reste de ce chapitre l'impression dominante que le calcul intégral consiste à calculer des primitives. Or on sait bien que les cas où on peut calculer effectivement une primitive sont rares. Il importe alors d'obtenir des valeurs approchées de l'intégrale. Aucune activité n'est prévue à cet effet, et cependant ce problème est étroitement lié aux sommes de Riemann...

5 - En conclusion, la manière actuelle d'aborder l'analyse soulève des difficultés sérieuses, et les objectifs poursuivis ne sont pas clairement perçus. Est-ce à dire qu'il convient de différer cet enseignement, voire de l'évacuer des programmes de certaines sections ? Sûrement pas, car les rudiments du calcul différentiel et intégral constituent un des secteurs des Mathématiques les plus importants pour la formation scientifique.

On pourrait plutôt envisager de préciser les grands problèmes du calcul infinitésimal qu'on voudrait étudier, et les concepts à mettre en oeuvre à cet effet. De ce point de vue il n'est pas nécessaire de commencer par la continuité et les limites de fonctions. Bien entendu, l'importance de ces concepts en Mathématiques n'est pas mise en cause.

Il s'agit, les objectifs et les contenus étant préalablement précisés, de construire d'autres progressions pour l'enseignement de l'analyse qui permettent à l'ensemble des élèves du second cycle général et technique de maîtriser le fonctionnement des concepts fondamentaux du calcul infinitésimal à travers l'étude de quelques grands problèmes. L'emploi de telles progressions n'est pas exclusive d'un meilleur approfondissement de ces concepts, y compris de la continuité et des limites, bien au contraire.

C'est dans cette perspective que travaille le groupe de l'I.R.E.M. d'Aix-Marseille.

II - OBJECTIFS ET METHODES DE TRAVAIL DU GROUPE

1 - Ce groupe s'est constitué en Septembre 1975, et étendu en Septembre 1976. Il s'est d'abord fixé pour tâche de dégager quelques grandes orientations pour l'enseignement de l'Analyse, en tenant compte :

- des indices fournis par l'état actuel de cet enseignement,
- d'une étude scientifique et épistémologique des concepts fondamentaux de l'analyse,
- du rôle joué par ces concepts dans une formation scientifique.

On trouvera une rédaction sommaire de ces orientations au III. Elle appelle quatre remarques :

a) Les hypothèses de travail ainsi définies nous ont permis d'assurer une indispensable communauté d'objectifs pour le groupe, leur caractère assez général laissant suffisamment de liberté pour l'exploration des différents thèmes par les membres du groupe. Ces hypothèses sont évidemment réversibles à la lumière des expérimentations à mettre en oeuvre. D'ores et déjà, au bout d'un an d'élaboration de documents et d'expérimentations partielles, elles ont été considérablement affinées, et, sur certains points, quelque peu modifiées.

b) Ces orientations sont regroupées non autour de concepts théoriques, mais à partir des quelques grands problèmes de l'Analyse qu'il nous a paru utile d'étudier dans l'enseignement secondaire. Cela ne signifie en aucun cas un abandon de l'approfondissement théorique des concepts de l'Analyse, bien au contraire. Les études historiques et épistémologiques, aussi bien que les réflexions d'ordre didactique et génétique nous ont montré que c'est à travers leur fonctionnement dans la résolution de problèmes que ces concepts peuvent être progressivement approfondis. Les problèmes ont été choisis en fonction de cet objectif, de l'intérêt qu'ils peuvent susciter chez les élèves, de leur importance pour la construction d'une culture scientifique, et des interconnexions qu'ils présentent avec d'autres secteurs des mathématiques, de l'informatique scientifique, des sciences physiques et technologiques...

L'organisation par grands types de problèmes présente en outre l'avantage, important à nos yeux, d'éviter une linéarité trop contraignante dans l'enseignement de l'analyse. Dans la pratique, cette linéarité conduit à augmenter le taux d'échecs, et à la notion de "révisions", ce qui n'est pas synonyme d'approfondissement.

c) Nous estimons que c'est à travers l'extension du champ et l'approfondissement d'un problème sur plusieurs années qu'on peut bâtir des progressions pour l'enseignement de l'analyse. C'est pourquoi nous n'avons pas tracé de limitations a priori pour leur étude. Certains aspects des thèmes abordés au III dépassent assez largement les possibilités des élèves du second degré, et débordent sur des formations de niveau supérieur. Cela ne signifie cependant pas qu'ils doivent être sujets "tabous" à ne pas déflorer Un tel risque existe s'il y a énonciation prématurée de définitions et résultats généraux mais certainement pas à propos de résolution de problèmes et d'études de modèles (exemples).

Dans un premier temps, les niveaux auxquels il convient d'aborder ces problèmes n'ont pas été précisés, car c'est un des rôles des expérimentations partielles de fournir des indications solides à ce sujet.

Les thèmes choisis présentent un caractère très ouvert (aussi bien verticalement qu'horizontalement), et la composition du groupe en a tenu compte : enseignants des premier et second cycles, enseignement supérieur ; présence d'informaticiens, de probabilistes, d'un animateur du groupe Maths-Physique, d'animateurs s'intéressant à l'histoire de l'analyse et à l'épistémologie de ses concepts,...

d) Le groupe de Marseille ne pense pas que les options qu'il a prises soient les seules possibles. Il souhaite avoir des contacts organisés et réguliers avec d'autres groupes, que ceux-ci aient pris des options voisines ou non.

2 - L'orientation générale étant définie, la démarche du groupe a été assez pragmatique. Trois sous-groupes se sont constitués et ont élaboré des documents concernant les suites pour le premier, les fonctions et le calcul différentiel pour le second, le calcul intégral pour le troisième. Ces documents, dont certains figurent dans cette brochure, appellent plusieurs remarques :

a) Conformément aux objectifs généraux, ils ne constituent pas des "cours", mais des thèmes possibles pour des activités de résolution de problèmes. Pour chaque problème, nous avons tenté de préciser les objectifs spécifiques et différents niveaux d'approfondissement. Des rubriques voisines dans les documents ne le sont donc pas nécessairement dans le déroulement du cursus des élèves ; l'inconvénient qui en résulte nous paraît compensé par la mise en évidence d'une certaine continuité dans les objectifs de l'ensei

b) Beaucoup de ces documents (convenablements adaptés pour certains d'entre eux) ont d'ores et déjà fait l'objet d'expérimentations partielles "sauvages" (en ce sens qu'aucun appareil précis d'évaluation ne les a accompagnés). Ces expérimentations, exclusivement effectuées par des membres du groupe, ont pour fonction principale de tester la motivation d'élèves de différents niveaux et sections pour les problèmes posés, et de fournir une première indication pour une élaboration approfondie, accompagnée d'expérimentations plus globales et de méthodes d'évaluation plus scientifiques.

c) En l'état actuel, les documents sont à l'usage exclusif de chercheurs, qui, au sein d'un groupe, étudient l'enseignement de l'analyse. L'eur emploi généralisé par des enseignants isolés comporterait des risques certains. Sauf exception, ils ne sont pas directement utilisables par des élèves.

d) Ces documents ne forment pas un tout ; ils s'insèrent dans une progression générale concernant l'enseignement de l'analyse, tenant compte des orientations ébauchées au III. Il ne faut pas ici se méprendre sur les objectifs du groupe de travail de Marseille : il ne s'agit absolument pas de compléter un déroulement traditionnel par des thèmes de problèmes et d'exercices peu étudiés à l'heure actuelle, mais d'une refonte générale de l'enseignement de l'analyse. Bien évidemment, cela n'interdit pas d'utiliser les documents à des fins plus "ponctuelles", sous les réserves énoncées au c).

3 - Ce travail s'insère dans une conception générale de l'activité mathématique, hors de laquelle il serait vidé de tout sens. Cette conception est esquissée dans les documents suivants (liste non exhaustive).

- Texte de Georges Glaeser sur la didactique de l'analyse (sur le principe de l'enseignement en spirale). Bulletin APM 302.
- Textes des groupes I.R.E.M. Analyse.
- Texte de Jean-Louis Ovaert - Quelle philosophie et quelle vision des mathématiques... Bulletin APM 317.
- Texte de Y. Chevallard et R. Rolland. Une expérience d'enseignement de l'analyse au Deug 2ème année. (IREM de Marseille).
- Texte APM de Juillet 1978 sur les programmes de 4ème et 3ème - Bulletin APM n° 316.
- Texte de Christian Houzel sur l'histoire des Mathématiques. Colloque de Poitiers 1977.

III - LES PROBLEMES DE L'ANALYSE

La liste qui suit ne comporte que les problèmes susceptibles d'être abordés au niveau de l'Enseignement secondaire.

1. - Limites de suites, sommes de séries

Les problèmes se présentent sous un double aspect.

- qualitatif : Etude de la convergence, exploration des divers types de divergence. Recherche de limites.
- quantitatif : approximations de nombres définis de cette manière, rapidité de convergence, performance des divers procédés d'approximation. Accélérations de convergence. Sommation de séries divergentes.

Ce thème met en jeu une dialectique entre deux points de vue :

- tantôt les suites et séries sont données et on veut étudier la convergence.
- tantôt on se donne un nombre ou une fonction et on étudie les modes de représentation de ce nombre ou de cette fonction comme limite de suites ou somme de séries.

Ce thème est lié de manière étroite à celui des équations numériques (cf 2), des évaluations asymptotiques (cf 6) et de l'approximation des nombres réels (cf 7).

2. - Equations numériques

Ici aussi, les problèmes se présentent sous un double aspect :

- qualitatif : Existence et unicité de solutions. Séparation des solutions. Stabilité des solutions et des processus d'approximation.
- quantitatif : Calcul de solutions approchées, comparaison de la rapidité de convergence et de la performance des divers procédés. Accélérations de convergence.

Ce thème met en jeu une dialectique entre l'étude de processus donnés et l'élaboration de nouveaux procédés afin d'améliorer la performance pour une classe de cas donnée.

Ce thème est lié à celui des suites et séries (cf 1).

3. - Variations des fonctions d'une variable réelle

Les différents problèmes : monotonie, convexité, continuité, taux de variation, étude locale, étude asymptotique, peuvent prendre, suivant les cas un aspect qualitatif ou quantitatif.

Peuvent être rattachés à ce thème :

- la comparaison de deux fonctions, des éléments d'une suite ou d'une famille de fonctions,
- l'étude de la monotonie et de la convexité des suites, (intervention du continu sur le discret).

4. - Etude locale des fonctions d'une variable réelle

- Existence et recherche de développements limités des différents ordres, de développements asymptotiques. Recherche de limites.
- Allure locale d'une fonction (maxima, minima, inflexions) ; pour les fonctions à valeurs vectorielles, points réguliers.
- Calcul de valeurs approchées d'une fonction au voisinage d'un point.
- Extension des problèmes précédents au cas des fonctions de plusieurs variables.

Ce thème met en jeu une dialectique entre les concepts liés aux fonctions, aux graphismes, au calcul numérique et à la géométrie différentielle (problèmes de contact). L'aspect qualitatif est dominant, mais certains problèmes utilisent des majorations et des encadrements (aspect quantitatif).

5. - Majorations et encadrements de nombres, de suites, de fonctions

Ce thème intervient dans presque toutes les questions

d'analyse. On peut y regrouper, de manière transversale, différentes techniques employées pour obtenir des majorations :

- opérations algébriques, composition des fonctions,
- variations de fonctions,
- inégalités taylориennes,
- inégalités de convexité,
- intégration et sommation d'inégalités.

6. - Ordres de grandeur, évaluations asymptotiques

- Etude de différents types de comportement asymptotiques pour les suites et les fonctions : phénomènes linéaires, quadratiques, logarithmiques, exponentiels, oscillatoires purs, oscillatoires amortis, oscillatoires divergents.
- Recherche de limites et de parties principales.
- Evaluation de restes de séries et d'intégrales convergentes, de sommes partielles de séries et d'intégrales divergentes.
- Evaluation de racines d'équations dépendant d'un paramètre.
- Convergence des sommes du type de Riemann.

Ce thème met en jeu une dialectique entre le discret et le continu.

Il est lié à celui des limites de suites et de sommes de séries (cf 1) et à celui des majorations et encadrements (cf 5).

Il jette un pont entre les problèmes purement qualitatifs (existence et unicité, ...) et les problèmes quantitatifs . (Majorations...)

7. - Représentations et approximation des nombres

Etude de divers types de représentation des nombres :

- développements décimaux, dyadiques, triadiques,
- sommes de séries, limites de suites (déjà traité au thème 1),
- intégrales,

- fractions continues.

Cette étude présente des aspects qualitatifs et quantitatifs.

Elle peut porter sur des nombres donnés, ou sur une classe de nombres donnée.

Ce thème est lié aux problèmes d'irrationnalité et de transcendance, et de mesure d'icelles.

8.- Problèmes de maxima et de minima

Aspect qualitatif :

Existence et unicité d'extrema. Séparation des extrema locaux - stabilité des extrema.

Aspect quantitatif :

Calcul des extrema, par différentes techniques : inégalités, calcul différentiel. Problèmes d'extrema liés.

Ce thème recouvre notamment les problèmes d'optimisation :

- optimisation de majorations ,
- optimisation d'un processus d'approximation,
- optimisation de valeurs d'une fonction numérique (coût, énergie...),
- optimisation de fonctions : calcul des variations. En particulier, optimisation d'une distance (géodésiques, normales à une courbe, chemin optique, intégrales d'énergie).

Ce thème est d'une importance capitale pour les interventions de l'analyse en sciences physiques et économiques.

9.- Représentations et approximation des fonctions

- Etude de différentes méthodes de représentation : développements en série, représentations intégrales, interpolation.

- Etude, pour chacun de ces procédés, des différents modes de convergence et de leur pertinence (converge simple, uniforme, en moyenne, en moyenne quadratique, ...). Cette étude présente, comme pour le cas des nombres (cf 1 et 7) des aspects qualitatifs et des aspects quantitatifs.

- opérations sur les représentations : opérations algébriques, composition, dérivation, intégration. Ces problèmes mènent à l'étude systématique du comportement des concepts de l'analyse (continuité, caractère lipschitzien, dérivabilité, intégrabilité, ...) vis à vis des différents types de convergences étudiés.

10.- Nombres attachés à des fonctions par le calcul infinitésimal (Il s'agit des intégrales et des dérivées). Calcul des dérivées et des primitives. Etude qualitative et quantitative de divers procédés d'approximations :

- interpolation et différences finies,
- développements en séries,
- développements tayloriens généralisés.

Le calcul des valeurs d'une fonction est traité au thème 4, celui de ses zéros au thème 2.

Ce thème est lié à celui de l'approximation des fonctions et de leurs différents modes de représentation (cf. 9).

11.- Equations différentielles - Equations aux différences finies

a) Equations linéaires à coefficients constants

- Etude du problème de Cauchy ; structure de l'ensemble des solutions - Sous-groupes à un paramètre du groupe linéaire - Classification des points singuliers - Stabilité des solutions - Comportement asymptotique des solutions.

b) Equations linéaires

- Etude du problème de Cauchy ; structure de l'ensemble des solutions.

- Problèmes aux limites ;
- Problèmes de contrôle et de commande ;
- Recherche de solutions approchées : performance comparée de diverses méthodes.

c) Equations non linéaires autonomes

- Etude des champs de vecteurs, flots, orbites.

d) Equations non linéaires dépendant du temps

Problème de Cauchy. Recherche de solutions approchées.

* *
*

Pour chacun de ces problèmes, sont prévus des documents détaillés précisant

- divers niveaux possibles d'approfondissement,
- des problématiques scientifiques et didactiques liées à ces problèmes,
- des notices bibliographiques, historiques et épistémologiques.

Ces documents seront publiés dans les différentes brochures prévues. On trouvera ici :

le thème 1. Limites de suites, sommes de séries page 67 à 71.

le thème 2. Equations numériques page 167 à 170.

le thème 10. Nombres attachés à des fonctions par le calcul infinitésimal page 106 à 108.

Pour éviter des redites, ces documents font référence à une seule bibliographie, placée page 171.

IV - CALCULATRICES DE POCHE ET ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES

Introduction

Les progrès de la technologie des composants électroniques ont permis l'apparition et le développement fulgurant de machines à calculer électroniques de poche, dites quelquefois et improprement "ordinateurs de poche". La modicité croissante des coûts de ces objets, les performances qu'ils permettent, font que de nombreuses familles possèdent une calculatrice de poche.

Sur le chantier, le contremaître, le technicien supérieur et l'ingénieur ont envoyé aux oubliettes abaques, tables de logarithmes et règles à calculs pour la machine à calculer ; les écoliers en emportent — plus ou moins subrepticement - à l'école ou au lycée, pour s'épargner des tracasseries arithmétiques.

Nous disons "plus ou moins subrepticement" car, effectivement, la machine à calculer de poche, dont nous venons de montrer l'importance comme objet courant dans notre société, est loin d'être admise comme objet didactique. Tout au plus, au hasard d'un programme, au détour d'un paragraphe énonçant une liste de rubriques, on trouve ce codicille ; "usage de machines à calculer", sans autres précisions.

On peut classer ces machines à calculer de poche en deux catégories suivant qu'elles sont programmables ou non.

Les machines non programmables sont de 3 types ; elles comportent un certain nombre de mémoires.

(Voir page ci-contre).

	Type I	Type II	Type III
Fonctions	+ - x :	+ - x : $\frac{1}{x}$, $\sqrt{x}$	+ - x : $\frac{1}{x}$, $\sqrt{x}$, y^x exp., sin, cos, tg et fonctions inverses
Indication du prix p en francs	$60 \leq p \leq 100$	$80 \leq p \leq 140$	$110 \leq p \leq 200$

Les machines programmables comportent toutes les fonctions du type III. Leur type est très varié :

- les plus simples ne comportent pas de bibliothèques de programmes : $200 \leq p \leq 600$.
- d'autres permettent l'emploi de sous-programmes tout faits : $500 \leq p \leq 3.000$.

Il est hors de question, notamment pour des raisons de coûts, d'universaliser l'ordinateur dans l'enseignement des mathématiques. En 1976, aux U.S.A., 6,7 % des établissements scolaires ont utilisé pour l'enseignement des mathématiques un ordinateur ou un terminal. Au contraire, le tableau ci-dessus montre à l'évidence que la machine à calculer de poche peut devenir un objet usuel dans les établissements scolaires.

LA MACHINE A CALCULER COMME OBJET DIDACTIQUE dans l'enseignement des Mathématiques.

A - Sa contribution à l'apprentissage du calcul

1 - Quand dit-on qu'un élève ne sait pas calculer ?

a) Sens des opérations. L'élève ne sait pas quelle opération poser parce qu'il ne sait pas ce qu'il peut attendre de

telle ou telle opération.

b) Ordre de grandeur. L'élève ne sait pas estimer a priori l'ordre de grandeur d'un résultat ni la contribution des différents facteurs qui le déterminent.

c) Maîtrise des techniques opératoires. L'élève ne maîtrise ni les techniques opératoires ni, encore plus fréquemment, leurs enchaînements.

2 - Que peut-on attendre de l'utilisation de la machine ?

a) Ce que la machine ne peut pas être :

Elle n'est pas un convertisseur qui permette de passer d'un problème concret au modèle mathématique "ad hoc" permettant de le résoudre.

b) Ce qu'il ne suffit pas que la machine soit :

Un outil réduisant les tracasseries arithmétiques.

c) Ce que la machine peut être :

En abrégeant les tracasseries arithmétiques, permet de concentrer l'attention sur le sens des opérations et sur la maîtrise des techniques opératoires.

Elargissant considérablement le champ des nombres sur lequel on calcule, elle favorise l'acquisition du concept d'ordre de grandeur.

Enfin, elle conduit à des activités d'approfondissement dans la recherche :

- d'une rationnalisation de la démarche et, par voie de conséquence, d'une meilleure mathématisation ;
- d'une démarche algorithmique plus performante ;
- de l'évaluation de la contribution des différents facteurs qui déterminent un résultat.
- du contrôle de ce résultat.

d) Ce que l'on peut en attendre de plus :

Une certaine motivation pour les activités de calcul, y compris pour le calcul à la main.

B - Sa contribution à l'enseignement de l'analyse

Là, plus qu'ailleurs, le choix des terrains doit être effectué tant en fonction de leur intérêt propre que des possibilités ultérieures d'approfondissement et de reprises des concepts qu'ils mettent en jeu.

1 - La machine est un outil d'investigation puissant permettant de découvrir des phénomènes (comportement d'un terme général d'une suite, qualité de convergence. De ce point de vue, elle peut être un précieux auxiliaire pour une première approche de concepts variés ou pour une exploration de leur fonctionnement) et d'analyser les facteurs qui interviennent.

2 - La machine permet la mise en oeuvre effective de procédures (itérations, approximations, valeurs approchées d'une intégrale...). Elle facilite la comparaison expérimentale d'algorithmes et induit à en rechercher de nouveaux, plus performants.

A ce titre, c'est un auxiliaire très précieux pour la mise en oeuvre d'une dialectique entre approfondissement théorique et efficacité accrue dans les calculs, qui joue un rôle central en analyse.

Au moment où l'introduction des calculatrices dans l'enseignement secondaire est envisagée, il est indispensable que soient entreprises des recherches concernant leur utilisation dans l'enseignement des mathématiques, faute de quoi les machines se réduiront à un simple gadget.

2

suites :

une première

approche

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION

I – ACTIVITES MATHEMATIQUES ELEMENTAIRES SUR LES SUITES DE NOMBRES

II – ETUDE DE SUITES QUI CONVERGENT VERS 0

A – Convergence vers 0

B – Comparaison de suites convergeant vers 0

III – ETUDE DE SUITES CONVERGEANT VERS UNE LIMITE FINIE

IV – ETUDE DES SUITES DIVERGENTES

A – Activités élémentaires sur des suites divergentes

B – Divergence vers $+\infty$

C – Comparaison de suites divergeant vers $+\infty$. Echelles

D – Divergence vers $-\infty$

E – Oscillations

ANNEXE

V – APPROXIMATION DE $\sqrt{2}$

A – Première méthode : encadrement par DICHOTOMIE

B – Deuxième méthode : encadrement par TRICHOTOMIE

C – Comparaison entre la dichotomie et la trichotomie

D – Troisième méthode dite de Newton (ou de Gauss)

E – Exercices de généralisation

VI – NOTICE BIBLIOGRAPHIQUE, HISTORIQUE ET EPISTEMOLOGIQUE

SUITES : UNE PREMIERE APPROCHE

INTRODUCTION

1) Les premières activités sur les suites (cf. par exemple Exercice 4) ont un double objectif : d'une part familiariser les élèves avec la notion de suite infinie, d'autre part suggérer différents types possibles d'évolution de telles suites lorsque n augmente.

Ceci appelle deux remarques :

- C'est à dessein que l'échantillonnage est restreint à des suites simples. Dans une phase ultérieure on manipulera des lots plus variés de suites et mieux adaptés à la constitution de classifications.

- Le caractère expérimental de ce premier contact nous paraît indispensable, mais il convient d'éviter un écueil important qui consisterait à porter des conclusions sur le comportement d'une suite à partir du seul examen d'un nombre fini de termes. A cet effet on peut proposer des exemples de suites où le comportement des 10 premiers termes (voire des 100 premiers termes) induit en erreur (par exemple : $\frac{2^n}{n^{20}}$, ou des rapports du type $n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right) - f(x)\right]\ldots$).

Ces exemples conduisent à compléter l'étude expérimentale par un approfondissement théorique.

2) Il nous a semblé inopportun de réduire cet approfondissement théorique à la notion de convergence ; les notions de rapidité de convergence, d'ordres de grandeur sont d'une importance capitale, à la fois pour l'approfondissement

théorique du concept de convergence et pour l'étude d'autres concepts issus de l'analyse elle-même, ou de l'analyse numérique.

3) La stratégie que nous avons suivie consiste d'abord à mettre en évidence (parmi les suites convergeant vers 0) un certain nombre de suites simples ($\frac{1}{10^n}$, $\frac{1}{2^n}$, $\frac{1}{3^n}$, $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n^2}$, ...) qui serviront ensuite de référence pour étudier des suites définies par des expressions plus compliquées. Les calculatrices auront ici un rôle important à jouer en permettant le calcul explicite, pour de nombreuses et grandes valeurs de n, des termes des suites choisies.

Comme nous ne supposons pas que la notion de limite est déjà acquise, il convient de choisir un premier élément de référence auquel tous les autres sont eux-mêmes comparés. Vu les connaissances antérieures des élèves il nous a semblé que la suite $\frac{1}{10^n}$ peut jouer ce rôle.

C'est au cours de cette étude que la notion de suite convergeant vers 0 est précisée ; cette notion plus qualitative permet de rassembler dans un même cadre les différents exemples étudiés sans se préoccuper dans un premier temps de la rapidité de la convergence.

On étudie ensuite la convergence vers a en la ramenant au cas où $a = 0$.

Enfin on aborde l'étude des infiniments grands par une méthode entièrement analogue (suites de référence). La divergence vers $+\infty$ ou $-\infty$ s'insère dans ce cadre. Des exemples montreront en outre que la non convergence ne se réduit pas à la divergence vers $+\infty$, ou vers $-\infty$.

4) Des activités de représentation graphique des suites sont menées de front avec les calculs numériques et l'approfondissement théorique. Elles présentent un intérêt double : fournir une intuition géométrique pour l'étude du comportement des suites, et familiariser l'élève avec les schémas cartésiens, constamment utilisés dans les autres sciences.

5) L'approfondissement théorique précédent est effectué non seulement à l'aide d'exemples construits à cet effet mais aussi à travers l'étude de problèmes ; citons par exemple :

- Approximations de nombres réels par des nombres décimaux.

- Recherche de solutions approchées d'équations par différentes méthodes (approximations successives, dichotomie, interpolation, méthode des tangentes).

- Etude de restes de séries convergentes simples ($\sum k^n$, $\sum \frac{1}{n^2}$ ...) et de sommes partielles de séries divergentes ($\sum \frac{1}{n}$, ...)

- Approximation de fonctions (procédés interpolatoires simples) et de nombres attachés à des fonctions (intégrales).

6) A travers ces problèmes on s'attache à mettre en évidence le rapport dialectique entre le discret (suites) et le continu (fonctions), rapport qui joue un rôle fondamental en analyse.

En conséquence il nous paraît indispensable de maintenir un équilibre constant entre les activités consacrées aux suites et celles consacrées aux fonctions.

7) Le document suivant est écrit à l'intention des professeurs, à qui il revient de choisir, suivant le niveau de leur classe, les activités à proposer aux élèves. Quelques essais effectués par des membres du groupe permettent de penser que de telles activités peuvent être proposées, avec un approfondissement progressif, dans les classes de 4ème, 3ème, 2nde.

L'importance de la notion de suite, tant en mathématiques que dans les activités liées aux autres sciences et à la vie courante, nous a amené à estimer qu'une première approche des suites doit être tentée dès la scolarité du 1er cycle, et, dès maintenant, en classe de seconde.

I ACTIVITES MATHEMATIQUES ELEMENTAIRES SUR LES SUITES DE NOMBRES

Exercice 1 - Depuis que Monsieur X a ouvert son magasin, tous les soirs il inscrit sur un carnet la recette de la journée ; on obtient ainsi une suite de nombres ; Monsieur X a appelé r_1 la recette faite le 1er jour, r_2 la recette faite le 2ème jour, r_3 la recette faite le 3ème jour, etc ; ainsi sur le carnet de Monsieur X on peut lire :

$r_1 = 146$; $r_2 = 257$; $r_3 = 628$; $r_4 = 360$; $r_5 = 859$; etc ...

La recette faite le 4ème jour après l'ouverture du magasin était donc de 360 F ; r_4 est le 4ème terme de la suite. Quelle est la recette totale au bout du 5ème jour ?

Exercice 2 - Depuis le 1er janvier 1971, Monsieur Y habite un ensemble immobilier $\mathcal{E}$ où à la fin de chaque mois le préposé de la société de distribution d'eau envoie à Monsieur Y un relevé de consommation d'eau qui porte deux nombres : le premier est le nombre de m3 qui était affiché au compteur d'eau à la fin du mois précédent, le deuxième est le nombre de m3 affiché au compteur à la fin du mois en cours.

a) Que représente la différence entre ces deux nombres ?

b) Sur le relevé reçu fin janvier 1971, on lisait $u_0 = 0$, $u_1 = 36,2$; sur le relevé reçu fin février 1971, on lit : $u_1 = 36,2$, $u_2 = 72,5$; quel est le premier nombre inscrit sur le relevé de fin mars 1971 ?

c) Si on note u_1 le nombre inscrit sur le compteur fin janvier 1971, u_2 le nombre inscrit sur le compteur fin février 1971, u_3 le nombre inscrit fin mars 1971, etc... comment notera-t-on le nombre inscrit au compteur fin décembre 1971 ? fin juillet 1972 ? fin avril 1975 ?

d) Il y a maintenant 73 mois que Monsieur Y habite l'ensemble $\mathcal{E}$ puisque nous sommes aujourd'hui le 31 janvier 1977 ; il vient de recevoir le

relevé pour janvier 1977 ; comment seront notés les deux nombres du relevé d'eau ? Quelle opération doit faire Monsieur Y pour connaître le volume de l'eau qu'il a consommée au cours de janvier 1977 ?

Exercice 5. — Suites infinies

a) On considère la suite $u_1 = 1, u_2 = \frac{1}{2}, u_3 = \frac{1}{3}, u_4 = \frac{1}{4}, \ldots$, etc. ; cette suite de nombres peut-elle être continuée "indéfiniment" ? Que vaut u_{10} ? Quel sera le 20e, le 100e terme de cette suite ?
n étant un entier, quel sera le $n^{ième}$ terme de cette suite ? et comment le noter ?

On considère l'application f de $N - \{0\}$ dans R telle que $\forall n \in N - \{0\}, f(n) = \frac{1}{n}$.

La phrase suivante : "La suite $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$, est la suite des images par f de $N - \{0\}$" vous paraît-elle acceptable ?

b) Soit g l'application de N dans R telle que pour tout entier n, $g(n) = \frac{1}{10^n}$.

Calculer $g(0)$, $g(1)$, $g(10)$; quel est le 5ème terme de la suite définie par g ? Cette suite a-t-elle un nombre fini de termes ?

c) Plus généralement la donnée d'une suite infinie $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$ de membres réels équivaut à celle d'une application u de $N - \{0\}$ dans R ; u est définie par les formules $u(1) = u_1, u(2) = u_2, \ldots u(n) = u_n, \ldots$

d) Etes-vous d'accord avec la définition suivante : "Une suite de nombres est donnée par l'ensemble des images d'un sous-ensemble A de N par une application $f : A \to R$? "

Notations : Soit $(u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots)$ une suite. Les nombres u_n, où n parcourt l'ensemble $\mathbb{N} - \{0\}$ s'appellent termes de la suite. u_n s'appelle le terme de rang n. Pour abréger les notations, la suite se note souvent $(u_n)_{n \geq 1}$, ou encore (u_n). (On met des parenthèses pour éviter de confondre la donnée de la suite avec celle d'un de ses termes). Nous rencontrerons aussi des suites du type $(u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots)$; elles se notent $(u_n)_{n \geq 0}$. Enfin, certaines suites ne sont définies qu'à partir d'un certain rang : ainsi, lorsque $u_n = \frac{1}{2n-8}$, il convient de supposer que $n \geq 5$, cette suite est alors notée $\left(\frac{1}{2n-8}\right)_{n \geq 5}$.

Exercice 4. — Effectuer les calculs numériques pour calculer les 10 premiers termes des suites (u_n) définies par les formules suivantes, où $n \geq 1$:

$u_n = 2n + 1$ $\qquad$ $u_n = 3 - 2n$ $\qquad$ $u_n = 10 - \frac{1}{2}n$

$u_n = 1^{n-1}$ $\qquad$ $u_n = (-1)^n$ $\qquad$ $u_n = \frac{1}{2n+1}$

$u_n = 2^n$ $\qquad$ $u_n = n!$ $\qquad$ $u_n = \frac{3^n}{n^{10}}$

$u_n = \min\left(\frac{n^2}{512}, \frac{1}{n}\right)$ $\qquad$ $u_n = \frac{1 + (-1)^n}{n + (-1)^{n+1}}$ $\qquad$ $u_n = E\left(\frac{17}{n}\right)$

On présentera les calculs sous forme d'un tableau, où dans chaque colonne on consignera les valeurs des 10 premiers termes.

Exercice 5. — Reprendre pour les valeurs de $n \in \{20, 30, 40, 50, 100\}$ les calculs pour les deux suites que voici :

$$u_n = E\left(\frac{17}{n}\right) \quad (E \text{ signifie partie entière})$$

$$u_n = \frac{3^n}{n^{10}}$$

Exercice 6. — Représentation graphique de ces suites.

(à mener de front avec les exercices précédents).

a) On rapporte un plan euclidien à un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$. Représenter les points M_n de coordonnées $x_n = n$ et $y_n = u_n$, pour $1 \leq n \leq 10$, lorsque $u_n = 2n + 1$, $u_n = 10 - \frac{1}{2}n$, $u_n = (-1)^n$, $u_n = E\left(\frac{17}{n}\right)$

b) Que se passe-t-il lorsque $u_n = 2^n$, $u_n = n!$, $u_n = 20n - 3$?

Peut-on rendre le graphique plus lisible en prenant un repère orthogonal, et en choisissant convenablement les normes de $\vec{i}$ et $\vec{j}$?

Examiner le cas où $u_n = \frac{2^n}{n^3}$.

II ETUDE DE SUITES QUI CONVERGENT VERS 0

A - Convergence vers 0

Exercice 1. — Considérons la suite $S_1 = (u_n)_{n \geq 1}$, où $u_n = \frac{1}{n}$.

Autrement dit, $S_1 = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots)$.

a) Existe-t-il un naturel N tel que tous les termes u_n où $n \geq N$ (c'est-à-dire $\frac{1}{N}, \frac{1}{N+1}, \ldots, \frac{1}{N+R}, \ldots$) vérifient

$$-0 \leq u_n \leq \frac{1}{10^3}$$

b) Existe-t-il un naturel N tel que tous les termes u_n où $n \geq N$ vérifient

$$-0 \leq u_n \leq \frac{1}{10^{63}}$$

c) Etant donné un naturel k, existe-t-il un naturel N tel que tous les termes u_n où $n \geq N$ vérifient

$$-0 \leq u_n \leq \frac{1}{10^k}$$

(c'est à dessein que les trois questions a), b), c) font intervenir la même lettre N ; s'il s'avère que cette formulation est source de confusions, il conviendra d'employer trois lettres différentes).

Exercice 2. — Considérons la suite $S_2 = (v_n)_{n \geq 1}$, où $v_n = \frac{1}{n^2}$.

Autrement dit,

$$S_2 = (1, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \ldots, \frac{1}{n^2}, \ldots).$$

a) Existe-t-il un naturel N tel que tous les termes v_n où $n \geq N$ vérifient

$$-0 \leq v_n \leq \frac{1}{10^5}$$

b) Existe-t-il un naturel N tel que tous les termes v_n où $n \geq N$ vérifient

$$-0 \leq v_n \leq \frac{1}{10^{99}}$$

c) Etant donné un naturel k, existe-t-il un naturel N tel que tous les termes v_n où $n \geq N$ vérifient

$$-0 \leq v_n \leq \frac{1}{10^k}$$

Exercice 3. — Considérons la suite $S = (w_n)_{n \geq 1}$ où $w_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Autrement dit,

$$S = (1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \ldots).$$

a) Existe-t-il un naturel N tel que tous les termes w_n où $n \geq N$ vérifient

$$-\frac{1}{10^3} \leq w_n \leq \frac{1}{10^3}$$

b) Etant donné un naturel k, existe-t-il un naturel N tel que tous les termes w_n où $n \geq N$ vérifient

$$-\frac{1}{10^k} \leq w_n \leq \frac{1}{10^k}$$

Exercice 4. — Répondre aux mêmes questions qu'au 3 pour les suites

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n \geq 1} \quad , \left(\frac{1}{2^n}\right)_{n \geq 1}$$

Ces exemples nous amènent à poser la définition suivante :

Définition 1 *Soit $S = (u_n)_{n \geq 0}$ une suite. On dit que S converge vers 0 si pour tout naturel k on peut trouver un naturel N tel que tous les termes u_n où $n \geq N$ vérifient l'inégalité*

$$-\frac{1}{10^k} \leq u_n \leq \frac{1}{10^k} .$$

Remarque 1. Lorsque, pour tout entier n, $u_n \geq 0$, cela veut dire que si $n \geq N$, $0 \leq u_n \leq \frac{1}{10^k}$.

Remarque 2. Lorsque les termes u_n ne sont pas nécessairement positifs, cela veut dire que si $n \geq N$, $|u_n| \leq \frac{1}{10^k}$; par conséquent $(u_n)_{n \geq 0}$ converge vers 0 si et seulement si $(|u_n|)_{n \geq 0}$ converge vers 0.

Remarque 3. Soit (u_n) une suite convergeant vers 0. Si on modifie les premiers termes de la suite (par exemple les 2 premiers termes, ou les 100 premiers termes), la nouvelle suite ainsi obtenue converge encore vers 0, car il suffit d'imposer à N la condition supplémentaire $N \geq 3$, ou $N \geq 101$.

Ainsi le comportement des premiers termes de la suite n'intervient pas pour l'étude de la convergence.

On comprend alors que l'examen des 10 premiers termes, voire des 10^6 premiers termes ne suffit pas pour démontrer la convergence. Cet examen peut seulement suggérer que la suite converge vers 0 ou non.

Exercice 5. Représentation graphique de suites convergeant vers 0. (à mener de front avec les exercices précédents).

Dans le plan euclidien rapporté à un repère orthogonal $(0, \vec{i}, \vec{j})$, représenter, pour les suites étudiées au 1, 2, 3, 4, les points M_n de coordonnées $x_n = n$ et $y_n = u_n$, pour $1 \leq n \leq 10$.

(On choisira les normes de $\vec{i}$ et $\vec{j}$ de manière à rendre ces graphiques lisibles).

B - Comparaison de suites convergeant vers 0.

1. Calculs numériques introductifs à la notion de suite de référence pour des suites convergeant vers 0.

Exercice 1. — Soit A l'ensemble {1, 2, 5, 10, 20, 30, 40, 50, 100, 1000, 10 000}.

a) Soit la suite de terme général $a_n = \frac{1}{n}$ et la suite de terme général $u_n = \frac{1}{n+4}$. On leur adjoint la suite de terme général $v_n = \frac{u_n}{a_n}$

Calculer les valeurs de v_n pour $n \in A$.

b) Calculer pour $n \in A$ les valeurs de $v_n = \frac{u_n}{a_n}$ lorsque $u_n = \frac{1}{3n-1}$

Exercice 2. — Soit B l'ensemble {1, 2, 3, 4, 5, 10, 15, 20}.

a) Calculer pour $n \in B$ les valeurs de $v_n = \frac{u_n}{a_n}$, où $u_n = \frac{1}{n+2^n}$.

b) Soit la suite de terme général $b_n = \frac{1}{2^n}$.

Calculer pour $n \in B$ les valeurs de $w_n = \frac{u_n}{b_n}$, où $u_n = \frac{1}{n+2^n}$.

c) Représenter graphiquement w_n, où $n \in B$.

Exercice 3. — Soit C l'ensemble {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} et $u_n = \frac{1}{5^n + 2^n}$.

a) Calculer pour $n \in C$ les valeurs de $w_n = \frac{u_n}{b_n}$.

b) Calculer pour $n \in C$ les valeurs de $z_n = \frac{u_n}{c_n}$ où $c_n = \frac{1}{5^n}$ et $u_n = \frac{1}{5^n + 2^n}$.

c) Représenter graphiquement z_n, où $n \in C$.

2. Comparaison de suites qui convergent vers 0.

Exercice 1. — On considère la suite $S_3 = \left(\frac{1}{n^3}\right)_{n \geq 1}$.

a) Montrer que pour tout naturel $n \geq 1$, $0 < \frac{1}{n^3} \leq \frac{1}{n}$.

b) En conclure que la suite $\left(\frac{1}{n^3}\right)_{n \geq 1}$ converge vers 0.

Exercice 2. — Etant donné un naturel $p \geq 1$, on considère la suite $S_p = \left(\frac{1}{n^p}\right)_{n \geq 1}$

a) Montrer que pour tout naturel $n \geq 1$, $0 < \frac{1}{n^p} \leq \frac{1}{n}$.

b) En conclure que la suite $\left(\frac{1}{n^p}\right)_{n \geq 1}$ converge vers 0.

Exercice 3. — Montrer que pour $n \geq 1$, $0 < \frac{2}{n(n+3)} \leq \frac{2}{n^2}$; en conclure que la suite $\left(\frac{2}{n(n+3)}\right)_{n \geq 1}$ converge vers 0.

b) Représenter sur un même graphique les 10 premiers termes des suites $u_n = \frac{2}{n(n+3)}$ et $v_n = \frac{2}{n^2}$.

Exercice 4. — Montrer que pour $n \geq 7$, $0 < \frac{3n - 19}{n^2 + 1} \leq \frac{3}{n}$; en conclure que la suite $\frac{3n - 19}{n^2 + 1}$ converge vers 0.

Plus généralement, nous pouvons comparer la convergence de deux suites grâce au théorème suivant:

Théorème de comparaison des suites convergeant vers 0.

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite de réels positifs qui converge vers 0.

Soit $(v_n)_{n \geq 0}$ une suite de réels positifs.

S'il existe une constante réelle $K > 0$, et un naturel N tels que pour tout $n \geq N$, $v_n \leq K u_n$, alors $(v_n)_{n \geq 0}$ converge vers 0.

Définition II *On dit alors que la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ est dominée par la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.*

Exercice 5. — Montrer que $\left(\frac{5}{3^n}\right)_{n\geq 0}$ est dominée par $\left(\frac{1}{2^n}\right)_{n\geq 0}$.

Exercice 6. — Montrer que pour $n \geq 1$, $2^n \geq n+1$: on pourra utiliser l'identité

$$(x^n - 1) = (x-1)(1 + x + \ldots + x^{n-1}).$$

En conclure que $\left(\frac{1}{2^n}\right)_{n\geq 1}$ est dominée par $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$.

Exercice 7. — Montrer que si $p \geq q > 0$, $\left(\frac{1}{n^p}\right)_{n\geq 1}$ est dominée par la suite $\left(\frac{1}{n^q}\right)_{n\geq 1}$.

Exercice 8. — On considère la suite $\left(\frac{n+2}{n^2+1}\right)_{n\geq 1}$

a) Montrer que $\frac{n+2}{n^2+1} \leq \frac{1+\frac{2}{n}}{n}$, et que, si $n \geq 2$, $\frac{n+2}{n^2+1} \leq \frac{2}{n}$.

b) En conclure que la suite $\left(\frac{n+2}{n^2+1}\right)_{n\geq 1}$ est dominée par la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$.

c) Montrer d'autre part que la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 0}$ est dominée par la suite $\left(\frac{n+2}{n^2+1}\right)_{n\geq 1}$.

d) Représenter sur un même graphique les 10 premiers termes des suites $u_n = \frac{n+2}{n^2+1}$, $v_n = \frac{1}{n}$, $w_n = \frac{2}{n}$.

Ce dernier exemple ramène à poser la définition suivante :

Définition III *Soient $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ deux suites à termes réels positifs qui convergent vers 0.*

Nous dirons que $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0 comme $(v_n)_{n\geq 0}$, si $(u_n)_{n\geq 0}$ est dominée par $(v_n)_{n\geq 0}$, et si $(v_n)_{n\geq 0}$ est dominée par $(u_n)_{n\geq 0}$.

Cela signifie donc qu'il existe deux constantes $K_1 > 0$ et $K_2 > 0$ satisfaisant à la condition suivante : il existe un naturel N, tel que pour tout entier $n \geq N$ on ait : $K_2 u_n \leq v_n \leq K_1 u_n$.

Remarque : On peut étendre les définitions II et III à des suites dont les termes sont de signe quelconque en étudiant les suites des valeurs absolues.

Par exemple, étant données deux suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ qui convergent vers 0, on dira que $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0 comme $(v_n)_{n\geq 0}$ si $(|u_n|)_{n\geq 0}$ converge vers 0 comme $(|v_n|)_{n\geq 0}$.

Exercice 9. — Comparer du point de vue de la rapidité de la convergence vers 0 la suite $\left(\frac{1}{\sqrt[p]{n}}\right)_{n\geq 1}$ aux suites $\left(\frac{1}{n^q}\right)_{n\geq 1}$ ($p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}$).

Exercice 10. — Comparer $\left(\frac{1}{2^{(2^n)}}\right)_{n\geq 0}$ à $\left(\frac{1}{2^n}\right)_{n\geq 0}$.

Exercice 11. — Comparer $\left(\frac{1}{10^n}\right)_{n\geq 0}$ à $\left(\frac{1}{2^n}\right)_{n\geq 0}$.

3. Quelques suites de référence convergent vers 0.

En pratique, (cf. par exemple exercices 3 et 4) on ramène l'étude de suites "compliquées" à celle de suites de référence grâce à des majorations et des minorations. L'étude des suites de référence a été faite une fois pour toutes. Voici quelques exemples usuels de suites de référence :

a) suites de puissances.

$\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\geq 1}$ $\left(\frac{1}{n^3}\right)_{n\geq 1}$ $\left(\frac{1}{n^4}\right)_{n\geq 1}$ $\left(\frac{1}{n^5}\right)_{n\geq 1}$ etc.

$\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\geq 1}$ $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)_{n\geq 1}$ $\left(\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right)_{n\geq 1}$ etc.

b) suites géométriques

$\left(\frac{1}{2^n}\right)_{n\geq 0}$ $\left(\frac{1}{3^n}\right)_{n\geq 0}$ $\left(\frac{1}{5^n}\right)_{n\geq 0}$ $\left(\frac{1}{6^n}\right)_{n\geq 0}$ etc.

c) Autres suites classiques

$\left(\frac{1}{n!}\right)_{n\geq 0}$ $\left(\frac{1}{n^n}\right)_{n\geq 1}$ $\left(\frac{1}{2^{2^n}}\right)_{n\geq 0}$

Remarque 1 On trouvera en Annexe un problème où l'on compare les suites précédentes dans le cas le plus général. Bien entendu, le niveau de ce problème dépasse largement les possibilités des élèves du 1er cycle. Pour une première approche, on pourra se contenter d'exemples numériques. On peut suggérer des activités en petits groupes, les exemples étant différents selon les groupes, suivie d'une activité collective de synthèse des résultats obtenus. Les élèves disposeront ainsi d'un tableau assez riche de suites de références, qu'ils pourront utiliser dans les exercices de comparaison ultérieurs.

Remarque 2 Il convient d'essayer le tableau de référence obtenu sur des exercices variés du type :

Placer la suite $\left(\frac{n^2}{n^4+1}\right)$ ..... L'objectif de ces exercices est double :

- faire pratiquer des majorations et des minorations.
- apprécier la pertinence des "ordres de grandeurs" de référence, et enrichir progressivement le tableau des suites de référence. (Ici, l'approfondissement porte évidemment sur plusieurs années).

III ETUDE DE SUITES CONVERGEANT VERS UNE LIMITE FINIE

Exercice 1. — On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$, où $u_n = 1 + \frac{1}{n}$.

Montrer que la suite $(v_n)_{n\geq 1}$, où $v_n = u_n - 1$, converge vers 0.

Exercice 2. — On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$, où $u_n = \frac{2n+1}{n+1}$.

Montrer que $u_n = 2 - \frac{1}{n+1}$.

En conclure que la suite $(v_n)_{n\geq 1}$, où $v_n = u_n - 2$, converge vers 0.

Exercice 3. — En utilisant l'égalité (que l'on vérifiera)

$(1 - x^n) = (1 - x)(1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1})$ (où $n \geq 1$)

Montrer que $1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^n} = 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$

En conclure que si l'on pose $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^n}$, la suite $(v_n)_{n\geq 1}$, où $v_n = u_n - 2$, converge vers 0.

Exercice 4. — Représenter graphiquement les 10 premiers termes des suites (u_n) étudiées en 1, 2, 3.

Ces exemples nous amènent à poser la définition suivante :

Définition IV *On dit que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge vers un nombre réel a si la suite $(v_n)_{n\geq 0}$, où $v_n = u_n - a$, converge vers 0.*

Exercice 5. — Soit b un réel non nul. Montrer que si la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge vers 0, la suite $(u_n + b)_{n\geq 1}$ ne converge pas vers 0.

En conclure que si une suite converge vers a, elle ne converge vers aucun autre nombre réel distinct de a.
On voit donc l'unicité de la limite de (u_n).

Remarque Il convient de placer ici des exercices variés concernant la convergence des suites vers une limite finie.

IV ETUDE DES SUITES DIVERGENTES

A - Activités élémentaires sur des suites divergentes

Exercice 1. — Calculer pour quelques valeurs de n les termes des suites suivantes :

$\left((-1)^n\right)_{n\geq 0}$, $\left(2+\sin\frac{n\pi}{3}\right)_{n\geq 0}$, $(-1)^n n$,

$(n^2)_{n\geq 0}$, $(2^n)_{n\geq 0}$, $(-2^n)_{n\geq 0}$,

$(-3n+100)_{n\geq 0}$, $\left((-2)^n\right)_{n\geq 0}$,

$\left(n^{[(-1)^n]}\right)_{n\geq 1}$, $\left(2^{n[n-2E(\frac{n}{2})]}\right)_{n\geq 0}$

$\left(\frac{1}{n}+n-3E(\frac{n}{3})\right)_{n\geq 0}$.

Exercice 2. — (A mener de front avec le précédent).

Dans le plan euclidien rapporté à un repère orthogonal $(0,\vec{i},\vec{j})$ représenter, pour quelques valeurs de n, les points M_n de coordonnées $x_n = n$ $y_n = u_n$

lorsque $u_n = n^2$, $u_n = -3n+100$, $u_n = (-1)^n n$,

$u_n = n^{[(-1)^n]}$, $u_n = 2+\sin\frac{n\pi}{3}$.

Le comportement des termes de ces suites suggère qu'elles ne convergent pas, on dit alors qu'elles sont divergentes.

Leur comportement est de plusieurs types :

★ divergence vers $+\infty$

★ divergence vers $-\infty$

★ autres cas.

B - Divergence vers $+\infty$

Exercice 1. — Considérons la suite $U = (u_n)_{n \geq 0}$ où $u_n = n + 4$.

a) Existe-t-il un naturel N tel que tous les termes u_n où $n \geq N$ vérifient $u_n \geq 10^3$.

b) Existe-t-il un naturel N tel que tous les termes u_n où $n \geq N$ vérifient $u_n \geq 10^{63}$.

c) k étant un naturel existe-t-il un naturel N tel que tous les termes u_n où $n \geq N$ vérifient $u_n \geq 10^k$.

Exercice 2. — Considérons la suite $V = (v_n)_{n \geq 0}$, où $v_n = n^2$.

Mêmes questions qu'au 1)

Exercice 3. — Considérons la suite $W = (w_n)_{n \geq 0}$ où $w_n = 2^n$.

Mêmes questions qu'au 1)

Exercice 4. — Considérons la suite $T = (t_n)_{n \geq 0}$ où $t_n = \sqrt{n}$.

Mêmes questions qu'au 1)

Définition 1 *Soit $S = (s_n)_{n \geq 0}$ une suite. On dira que S diverge vers $+\infty$ si pour tout naturel k on peut trouver un naturel N tel que tous les termes s_n, où $n \geq N$ vérifient $s_n \geq 10^k$.*

Remarque : Notons bien que si S "diverge vers $+\infty$" elle est bien divergente au sens de la définition déjà donnée (elle ne converge vers aucun réel).

C - Comparaison de suites divergeant vers $+\infty$

1. Calculs numériques introductifs à la notion de suite de référence

Exercice 1. - Soit $n \in \{1, 2, 5, 10, 20, 30, 40, 50, 100, 1000, 10\,000\}$.

a) Soient la suite $a_n = n$ et la suite $u_n = n + 4$

on leur adjoint la suite $v_n = \frac{u_n}{a_n}$

Calculer les valeurs de v_n.

b) Calculer les valeurs de $v_n = \frac{u_n}{a_n}$ pour $u_n = 3n - 1$.

c) Calculer les valeurs de $v_n = \frac{u_n}{a_n}$ pour $u_n = 2n + \frac{10}{n}$.

Exercice 2. - Dans ce paragraphe $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 10, 15, 20\}$.

a) Calculer les valeurs de $v_n = \frac{u_n}{a_n}$ pour $u_n = n + 2^n$.

b) Soit la suite $b_n = 2^n$, calculer les valeurs de $W_n = \frac{u_n}{b_n}$.

Exercice 3. - Dans ce paragraphe $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

et $u_n = 5^n + 2^n$

a) Calculer les valeurs de $w_n = \frac{u_n}{b_n}$.

2. Comparaison de suites qui divergent vers $+\infty$.

Exercice 1. - On considère la suite $U = (n^3)_{n \geq 0}$

a) Montrer que pour tout naturel $n \geq 1$ on a $n \leq n^3$.

b) Montrer en utilisant a) que la suite U diverge vers $+\infty$

Exercice 2. — On considère la suite $V = (n^p)_{n \geq 0}$ où $p \in \mathbb{N}^*$.

Mêmes questions qu'au 1).

Exercice 3. — On considère la suite $S = (n(n+2))_{n \geq 0}$.

Montrer que pour $n \geq 0$ $n(n+2) \geq n^2$. En conclure que la suite S diverge vers $+\infty$.

Théorème *Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite réelle positive qui diverge vers $+\infty$. Soit $(v_n)_{n \geq 0}$ une suite réelle positive. S'il existe une constante réelle $K > 0$ et un naturel N tels que pour tout $n \geq N$ $v_n \geq K u_n$ alors $(v_n)_{n \geq 0}$ diverge vers $+\infty$.*

Définition 2 *On dit alors que $(v_n)_{n \geq 0}$ domine $(u_n)_{n \geq 0}$.*

Remarque : La relation $v_n \geq K u_n$ équivaut à la relation $u_n \leq \frac{1}{K} v_n$. C'est pourquoi on dit aussi que u_n est dominée par v_n.

Exercice 4. — Montrer que $(5^{n-1})_{n \geq 0}$ domine $(3^n)_{n \geq 0}$.

Exercice 5. — Montrer que $2^n \geq n+1$ en conclure que $(2^n)_{n \geq 0}$ domine $(n+1)_{n \geq 0}$.

Exercice 6. — Montrer que $(n!)_{n \geq 0}$ domine $(2^n)_{n \geq 0}$.

(On montrera que $n! \geq 2^{n-1}$).

Exercice 7. — Montrer que si $p \geq q \geq 0$, $(n^p)_{n \geq 0}$ domine $(n^q)_{n \geq 0}$.

Exercice 8. — Etude de la suite $\dfrac{n^3 + n^2 + 1}{n+3}$ $n \geq 0$.

(On pourra noter que, pour $n \geq 3$, $n + 3 \leq 2n$, et comparer cette suite à la suite $(n^2)_{n \geq 1}$).

Définition 3 *Soient $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ deux suites à termes réels positifs qui divergent vers $+\infty$.*

Nous dirons que $(u_n)_{n\geq 0}$ diverge vers $+\infty$ comme $(v_n)_{n\geq 0}$ si $(u_n)_{n\geq 0}$ domine $(v_n)_{n\geq 0}$ et si $(v_n)_{n\geq 0}$ domine $(u_n)_{n\geq 0}$.

Remarque : Cela signifie donc qu'il existe deux constantes $K_1 > 0$ et $K_2 > 0$ telles que : il existe un naturel N tel que pour tout entier $n \geq N$ on ait $K_2 u_n \leq v_n \leq K_1 u_n$.

3. Quelques suites de référence divergeant vers $+\infty$

a) Suites de puissances

$(n^p)_{n\geq 1}$. $p \in \mathbb{N}^*$

b) Suites géométriques

$(a^n)_{n\geq 0}$ $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$

c) Autres suites classiques

$(n^n)_{n\geq 1}$, $(n!)_{n\geq 0}$, 2^{2^n}, 10^{2^n}.

D - Divergence vers $-\infty$

L'étude est analogue à l'étude de la divergence vers $+\infty$, et s'y ramène en passant aux opposés.

Remarque 1. Il convient de placer ici des activités analogues à celles déjà effectuées pour les suites convergeant vers 0.

Remarque 2. Pour les suites à termes strictement positifs on pourra mettre en évidence le lien entre la divergence vers $+\infty$ et la convergence vers 0 : (u_n) converge vers $+\infty$ si et seulement si $\left(1/u_n\right)$ converge vers 0.

E - Oscillations.

Jusqu'à présent, nous avons étudié trois éventualités pour une suite (u_n) :

- la convergence vers un nombre a.
- la divergence vers $+\infty$.
- la divergence vers $-\infty$.

Il est très important de noter qu'on n'obtient pas ainsi tous les cas possibles. Plus précisément, nous allons voir que certaines suites sont divergentes (i.e. non convergentes) mais qu'elles ne divergent ni vers $+\infty$, ni vers $-\infty$:

Considérons par exemple la suite $U = (u_n)$, où $u_n = (-1)^n$, $n \geq 1$. Ainsi tous les termes de rang pair, $u_0, u_2, \ldots, u_{2n} \ldots$ sont égaux à 1, tandis que tous les termes de rang impair $u_1, u_3, \ldots, u_{2n+1}$, sont égaux à -1. Intuitivement, u_n oscille constamment entre 1 et -1. Effectuons une démonstration :

a) la suite U diverge. Supposons par l'absurde qu'elle converge vers a. Alors la suite des termes pairs $(u_0, u_2, \ldots, u_{2n}, \ldots)$ converge aussi vers a. Or cette suite converge évidemment vers 1 ; donc $a = 1$. De même la suite des termes impairs $(u_1, u_3, \ldots, u_{2n+1} \ldots)$ converge aussi vers a. Or cette suite converge évidemment vers -1 ; donc $a = -1$. On aboutit à une contradiction.

b) la suite U ne diverge pas vers $+\infty$. En effet, pour tout n, $u_n \leq 1$.

c) la suite U ne diverge pas vers $-\infty$. En effet, pour tout n, $u_n \geq -1$.

L'idée de cette démonstration a une portée très générale : elle consiste à déterminer deux suites extraites de la suite (u_n) (ici celle des termes pairs, et celle des termes impairs) qui convergent vers des limites distinctes.

Exercice 1. – En s'inspirant de la méthode précédente, étudier les suites $V = (v_n)_{n \geq 0}$ où $v_n = 1 + \cos n\pi$, et $W = (w_n)_{n \geq 0}$ où $w_n = 2 + \sin n\frac{\pi}{3}$.

Exercice 2. – Etudier la suite $U = (u_n)_{n \geq 0}$, où $u_n = (-1)^n n$.

Exercice 3. – Etudier la suite $V = (v_n)_{n \geq 0}$, où $v_n = (-2)^n$.

Exercice 4. – Etudier la suite $W = (w_n)_{n \geq 1}$, où $w_n = n^{(-1)^n}$.

Exercide 5. – Etudier les suites

$$\left(2^{n(n-2E(\frac{n}{2}))}\right)_{n \geq 0}, \text{ et } \left(\frac{1}{n} + n - 3E(\frac{n}{3})\right)_{n \geq 0}.$$

Remarque : On dit souvent que de telles suites sont oscillantes. Leur étude générale nécessite la mise en place de concepts plus profonds, notamment celui de valeur d'adhérence d'une suite. Cette étude générale est en dehors des objectifs de l'enseignement du second degré, mais l'examen précis de quelques exemples est indispensable pour que les élèves évitent de tomber dans l'erreur "classique" selon laquelle une suite de nombres réels positifs divergente tend vers $+\infty$.

ANNEXE

COMPARAISON DES SUITES DE PUISSANCES, DES SUITES GEOMETRIQUES ET DE LA SUITE FACTORIELLE

Le but de ce problème est de comparer, du point de vue de la relation de domination, la convergence vers 0 des trois suites que voici :

$$\left(\frac{1}{n^p}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \quad (\text{avec } p\in\mathbb{N}^*)$$

$$\left(\frac{1}{a^n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \quad (\text{avec } a\geq 1)$$

$$\left(\frac{b^n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \quad (\text{avec } b\in\mathbb{R}^{+*})$$

I - Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites à termes réels strictement positifs.

Supposons l'existence d'un entier n_o tel que pour tout entier n supérieur ou égal à n_o,

$$(1) \quad \frac{v_{n+1}}{v_n} \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} .$$

Montrer que dans ces conditions, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est dominée par la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Indications : Ecrire les inégalités du type (1) pour n_o, n_o+1, ... n .

Peut-on les multiplier entre elles ? En déduire que $\frac{v_{n+1}}{v_{n_o}} \leq \frac{u_{n+1}}{u_{n_o}}$.

Conclure.

II – Soit p un entier naturel non nul. On se propose d'appliquer les résultats de la partie I aux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, où $u_n = \frac{1}{n^p}$ et $v_n = \frac{1}{2^n}$.

a) Montrer que ces deux suites convergent vers 0.

b) Calculer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et $\frac{v_{n+1}}{v_n}$. On est alors conduit à comparer $(1 + \frac{1}{n})^p$ à 2. A cette fin, montrer que pour tout entier naturel non nul n, et tout entier naturel non nul q inférieur ou égal à n,

$$(1 + \frac{1}{n})^q \leq 1 + 2\frac{q}{n}$$

(on pourra raisonner par récurrence sur q).

En déduire que pour tout entier n supérieur ou égal à 2p,

$$(1 + \frac{1}{n})^p \leq 2.$$

En conclure que la suite $(\frac{1}{2^n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est dominée par la suite $(\frac{1}{n^p})_{n \in \mathbb{N}^*}$.

c) Refaire une étude analogue afin de comparer les suites $(\frac{1}{n^p})_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(\frac{1}{a^n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ où a est un réel strictement supérieur à 1.

III – Refaire une étude analogue à celle de la partie II avec les suites $(\frac{3^n}{n!})_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(\frac{1}{2^n})_{n \in \mathbb{N}^*}$,

puis avec les suites $(\frac{b^n}{n!})_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(\frac{1}{a^n})_{n \in \mathbb{N}^*}$, où b est un réel strictement positif, et a un réel strictement supérieur à 1.

V - APPROXIMATION DE $\sqrt{2}$

Introduction

Les activités suivantes mettent en oeuvre plusieurs méthodes d'approximation de $\sqrt{2}$ par des suites de nombres décimaux.

Il est intéressant de comparer l'efficacité de ces méthodes et l'on verra que le nombre d'itérations à faire pour aboutir à un même ordre d'approximation n'est pas forcément le seul critère à employer pour comparer deux processus d'approximation.

L'utilisation de certaines de ces méthodes est facilitée par l'emploi de mini-ordinateurs (ou même par celui de simples calculatrices de poche), c'est pourquoi on a été amené à présenter certaines suites de calculs sous forme d'organigrammes avec boucles, essayant, par la même occasion, de familiariser élèves et professeurs avec cette présentation.

Les méthodes employées ici sont généralisables, soit pour l'approximation d'autres racines carrées, soit pour l'approximation d'autres nombres réels. Des exercices de généralisation sont donc proposés par la suite.

Ce thème peut être abordé dès la classe de 4ème, puis approfondi progressivement en 3ème et seconde.

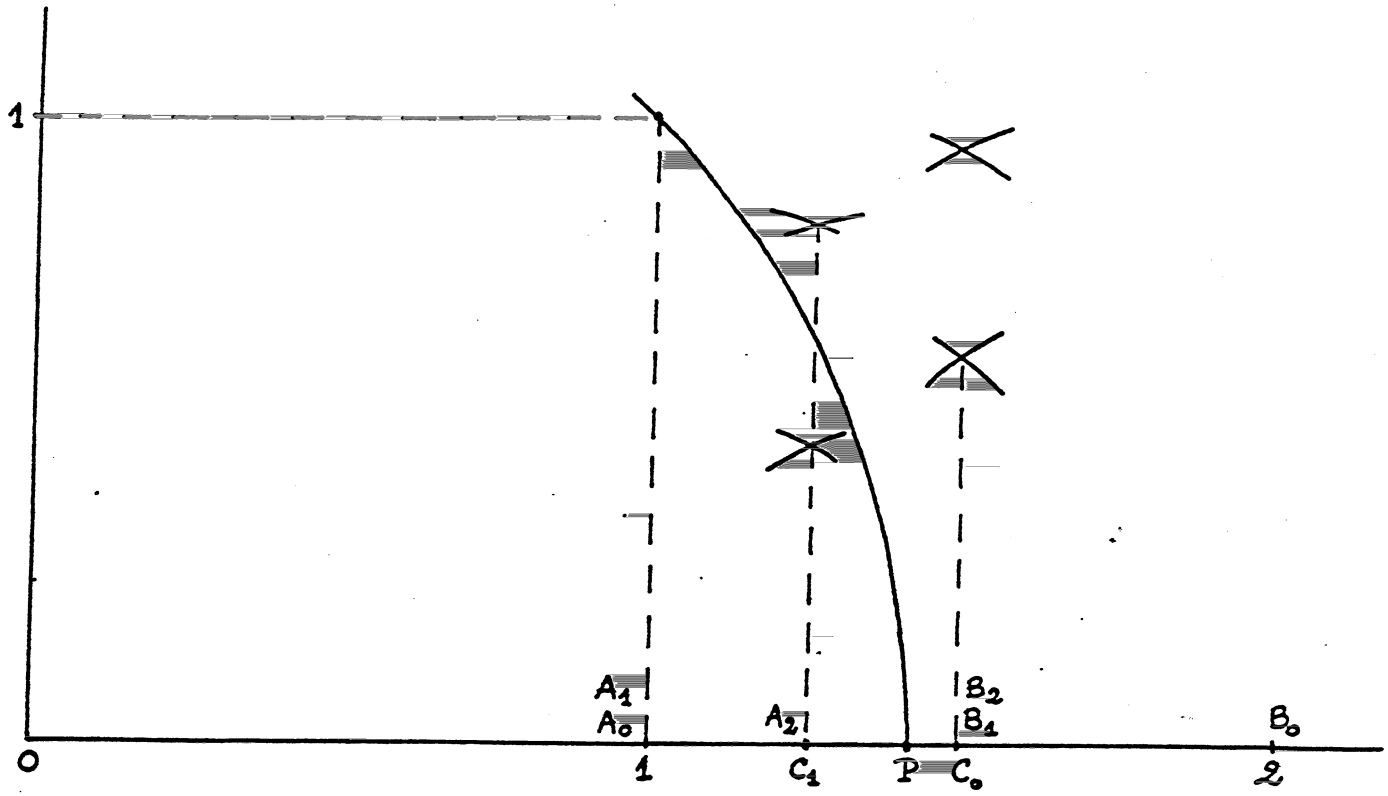
A - Première méthode : Encadrement par DICHOTOMIE

(appendisectomie : on coupe l'appendice ; dichotomie : on coupe un intervalle en deux parties égales)

a) Présentation géométrique :

La diagonale du carré de côté 1 est mesurée par le nombre $\sqrt{2}$:

Dans la figure suivante en axes orthonormés, la longueur du vecteur unitaire est huit centimètres.



Le point P d'abscisse $\sqrt{2}$ appartient au segment $[A_0,B_0]$ où A_0 a pour abscisse 1 et B_0 pour abscisse 2.

Soit C_0 le milieu de $[A_0,B_0]$, son abscisse est 1,5. P appartient à $[A_0,C_0]$, on peut considérer le segment $[A_1,B_1]$ tel que $A_1 = A_0$ et $B_1 = C_0$.

Soit C_1 le milieu de $[A_1,B_1]$, son abscisse est 1,25. P appartient à $[C_1,B_1]$, on peut considérer le segment $[A_2,B_2]$ tel que $A_2 = C_1$ et $B_2 = B_1$.

On peut continuer le processus : le point P appartient toujours à l'un des deux segments $[A_n,C_n]$ ou $[C_n,B_n]$. S'il appartient à $[A_n,C_n]$ on considère le segment $[A_{n+1},B_{n+1}]$ tel que $A_{n+1} = A_n$ et $B_{n+1} = C_n$. Si, au contraire il appartient au segment $[C_n,B_n]$ on considère le segment $[A_{n+1},B_{n+1}]$ tel que $A_{n+1} = C_n$ et $B_{n+1} = B_n$.

Exercice 1. — Prenez du papier non millimétré, reproduisez la figure précédente et renouvelez le processus de dichotomie aussi longtemps que vous le pouvez. Notez en colonnes les valeurs des abscisses successives des points A_n et B_n. A partir de quelle valeur de n commencez-vous à "ne plus rien y voir" ?

Exercice 2. — Du fait que P appartient à $[A_0, C_0]$, on déduit l'encadrement suivant pour $\sqrt{2}$: $1 \leq \sqrt{2} \leq 1,5$.

De même, du fait que P appartient à $[C_1, B_1]$, on déduit l'encadrement

$$1,25 \leq \sqrt{2} \leq 1,5.$$

En utilisant la figure de l'exercice 1, donner des encadrements de $\sqrt{2}$ plus précis que les deux précédents.

Il apparait que si n devient trop grand, on n'est plus certain de la position de P par rapport à A_n et B_n ; le processus graphique ne fournit plus d'encadrement pour $\sqrt{2}$. C'est pourquoi nous allons reprendre la question par le calcul.

b) Approfondissement théorique

Nous remarquons d'abord que :

1) la suite des valeurs des abscisses a_n des points A_n est croissante ;

2) la suite des valeurs des abscisses b_n des points B_n est décroissante ;

3) pour tout entier n ,

$$a_n \leq \sqrt{2} \leq b_n \qquad (1)$$

4) la longueur de $A_n B_n$ est égale à $b_n - a_n$,

or
$$b_0 - a_0 = 1$$
$$b_1 - a_1 = 1/2$$
$$b_2 - a_2 = 1/2^2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

En général $b_n - a_n = 1/2^n$. (2)

5) Des relations (1) et (2) nous déduisons que :

$$0 \leq \sqrt{2} - a_n \leq b_n - a_n \leq 1/2^n \quad . \qquad (3)$$

Exercice 3. —

a) Calculer les valeurs de $1/2^n$ pour tous les entiers n tels que $n \leq 10$.
Calculer $1/2^{15}$, $1/2^{20}$ et $1/2^{30}$.

b) Déterminer un entier N tel que $1/2^N \leq \frac{1}{10}$.

Déterminer un entier N tel que $1/2^N \leq \frac{1}{100}$.

Déterminer un entier N tel que $1/2^N \leq \frac{1}{10^6}$.

Exercice 4. — (se situant à un niveau plus élevé).

a) Montrer que $1/2^4 \leq \frac{1}{10}$.

En déduire que $1/2^8 \leq \frac{1}{100}$ et que $1/2^{12} \leq \frac{1}{1000}$.

b) Plus généralement, pour tout entier n, $1/2^{4n} \leq 1/10^n$.

c) Soit p un entier. Montrer que, si $n \geq 4p$, $1/2^n \leq 1/10^p$.

La suite $1/2^n$ converge donc vers 0.

Donc les suites (a_n) et (b_n) convergent vers $\sqrt{2}$.

6) Il reste une question très importante à résoudre : il faut trouver un critère calculatoire qui remplace le critère assez flou du coup d'œil qui permet de décider si P appartient à $[A_n, C_n]$ ou à $[C_n, B_n]$.
Voici ce critère :

Exercice 5. — Montrer que si x et y sont deux réels positifs, il y a équivalence logique entre les deux propositions : "x est inférieur ou égal à y" et "x^2 est inférieur ou égal à y^2".

Il y a donc équivalence logique entre $2 \geq x^2$ et $\sqrt{2} \geq x$.

7) Dès lors, on peut préciser l'algorithme permettant de construire les suites (a_n) et (b_n).

- On initialise ces suites en posant $a_0 = 1$ et $b_0 = 2$, (ce qui convient, car $a_0^2 = 1 \leq 2 \leq b_0^2 = 4$.

- On pose $c_0 = \frac{1}{2}[a_0 + b_0]$. Deux cas se présentent :

. Si $a_0^2 \leq 2 \leq c_0^2$ on pose $a_1 = a_0$ et $b_1 = c_0$.

. Sinon, c'est-à-dire si $c_0^2 < 2 \leq b_0^2$, on pose $a_1 = c_0$ et $b_1 = b_0$.

- On pose $c_1 = \frac{1}{2}[a_1 + b_1]$. Deux cas se présentent à nouveau :

. Si $a_1^2 \leq 2 \leq c_1^2$ on pose $a_2 = a_1$ et $b_2 = c_1$.

. Sinon, c'est-à-dire si $c_1^2 < 2 \leq b_1^2$, on pose $a_2 = c_1$ et $b_2 = b_1$.

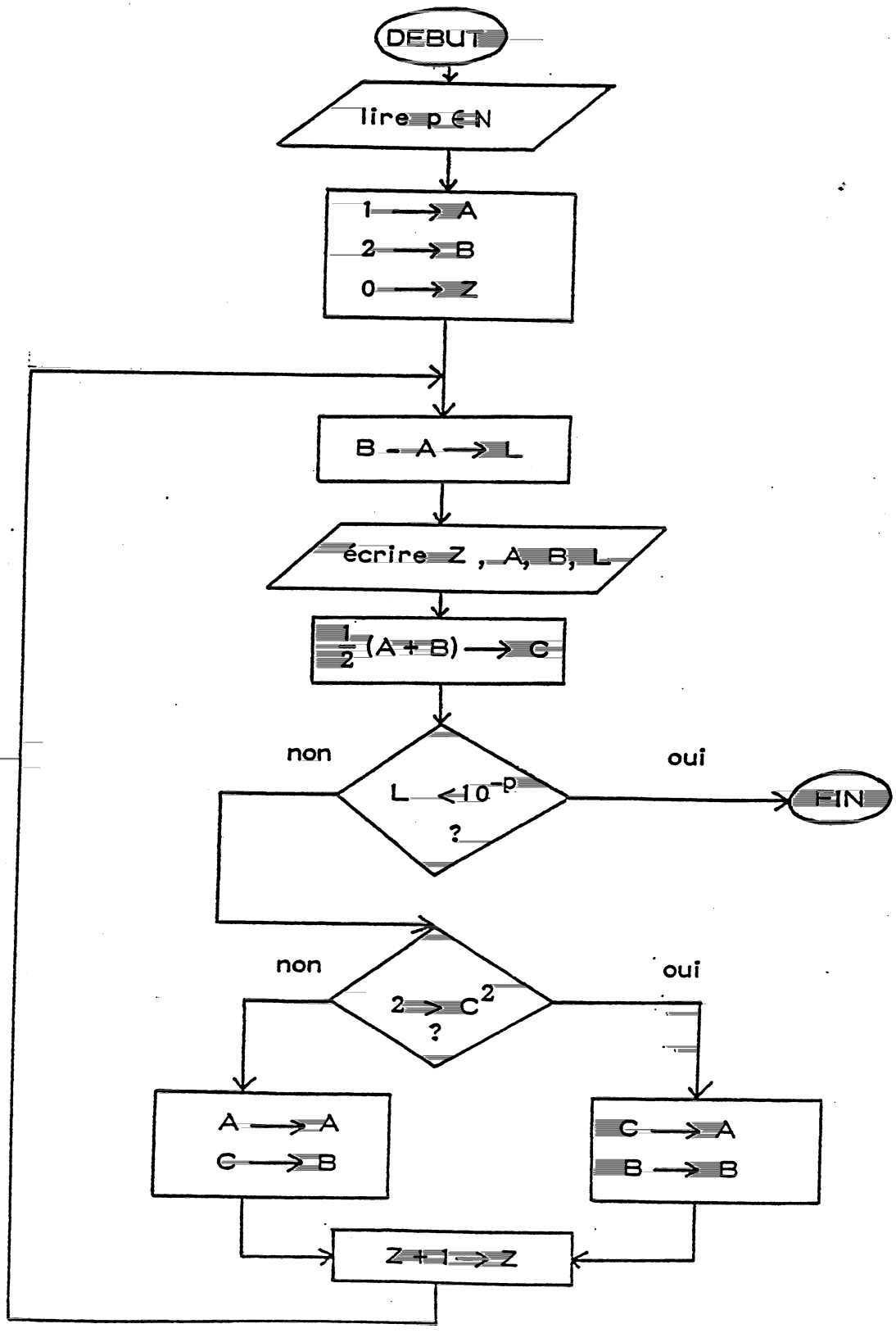
- On poursuit ce processus. Supposons qu'on ait a_n et b_n. on pose alors $c_n = \frac{1}{2}[a_n + b_n]$

. Si $a_n^2 \leq 2 \leq c_n^2$ on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = c_n$.

. Sinon, c'est-à-dire si $c_n^2 < 2 \leq b_n^2$, on pose $a_{n+1} = c_n$ et $b_{n+1} = b_n$.

8) Cet algorithme peut se traduire par l'organigramme suivant, où l'on décide d'arrêter le processus lorsque $b_n - a_n < \frac{1}{10^p}$, où p est un entier naturel donné, qui fixera en pratique la précision recherchée pour encadrer $\sqrt{2}$.

ORGANIGRAMME n°1



Utilisation de l'organigramme n° 1

On entre dans un organigramme par l'ovale (DEBUT) et on en sort par l'ovale (FIN) ; entre le début et la fin, on suit les flèches.

- Ici, on rencontre d'abord un ordre ; lire p (nombre naturel). Ce nombre p est l'ordre d'approximation que l'on veut obtenir, par exemple si on veut obtenir $\sqrt{2}$ encadré par deux nombres dont la différence soit au plus $1/1000 = 10^{-3}$ on lira p = 3. Si on désire un meilleur encadrement, on pourra lire p = 5,6 ... On n'est limité dans le choix de p que par sa patience et son courage si on fait les calculs à la main, le nombre de décimales exactes que donne la machine si on fait les calculs à l'aide d'une machine.

- Ensuite, on rencontre un rectangle dans lequel on initialise certaines variables . Le signe $\longrightarrow$ indique qu'on attribue à

une case de mémoire nommée A la valeur 1

" " " " B " 2

" " " " Z " 0

En comparant avec la présentation géométrique vous voyez que Z contient l'indice des points de départ du dessin, que A contient la valeur de l'abscisse de A_0 et B celle de B_0.

- La flèche nous mène à un rectangle où l'on attribue à une case de mémoire nommée L une valeur calculée en prenant la différence entre le contenu de la mémoire B et celui de la mémoire A, c'est-à-dire 2 - 1 = 1. L contient donc 1, qui mesure la longueur de $[A_0B_0]$.

- La flèche nous mène dans un parallélogramme (figure qui indique une lecture ou une écriture, c'est-à-dire une entrée ou une sortie). Nous devons écrire sur une ligne les valeurs de Z, A, B, L. Nous écrivons
0 1 2 1.
Si nous avons l'occasion de réécrire, nous le ferons à la ligne suivante.

- Encore un rectangle : on y attribue à une case de mémoire nommée C la demi-somme des valeurs contenues dans A et B. Donc C contient la valeur 1,5. Vous reconnaissez la valeur de l'abscisse de C_0 :

- Cette fois-ci la flèche nous mène à un losange. Nous y pénétrons par le haut. C'est dans un losange que l'on se pose une question à laquelle on doit toujours pouvoir répondre par "oui" ou par "non". On sort d'un losange par la droite ou par la gauche selon la réponse faite, jamais par le bas. La question est $L < 10^{-p}$. Supposons que $p = 3$, comme la valeur de L est actuellement 1, la réponse est "non" et la flèche nous conduit à

- Un nouveau losange. Voici notre critère calculatoire, qui permet de décider où se trouve le point P par rapport à C. Est-ce que 2 est supérieur au carré de la valeur contenue dans la mémoire C ? Pour le moment cette valeur étant 1,5, son carré est 2,25 et la réponse est non. Nous sortons du losange par la gauche et cela nous mène à

- Un rectangle. Deux ordres dont l'un, pour mémoire $A \longrightarrow A$, et l'autre, indispensable $C \longrightarrow B$, attribuant à A la valeur 1, qu'elle avait déjà, et à B la valeur 1,5. Cela traduit le phénomène "P appartient à $[A_0, C_0]$, on peut considérer le segment $[A_1, B_1]$ tel que $A_1 = A_0$ et $B_1 = C_0$".

- Dans ce nouveau rectangle, dans lequel on peut arriver soit par la droite, soit par la gauche, on calcule le nouvel indice du segment considéré. $Z + 1 \longrightarrow Z$ ordonne de mettre dans la case Z l'ancienne valeur augmentée de une unité. On a incrémenté l'indice de un.

- Et maintenant il faut recommencer à partir de $B - A \longrightarrow L$.

Ce n'est que lorsque la valeur de L devient assez petite que l'on sort du losange "$L < 10^{-p}$?" par oui qui nous mène à

- L'ovale (FIN).

"DICHOTOMIE"

Tableau d'affichage

Z	A	B	L
0	1	2	1
1	1	1,5	

Calculs auxiliaires

C	C^2
1,5	2,25

Exercice 6. — A l'aide de l'organigramme n° 1 continuer de remplir la feuille "dichotomie". On peut commencer par se donner p = 3.

Si nécessaire, on peut naturellement rajouter des lignes au bas de celles qui sont déjà tracées.

Répondre maintenant aux questions suivantes :

Quel est l'indice Z quand on sort après s'être donné p = 3 ?

Comparez le nombre 1000 et le nombre 2^9, puis le nombre 1000 et le nombre 2^{10}. Pouvait-on de cette comparaison tirer la valeur de Z que vous avez constatée ?

Si on s'était donné p = 4, quelle aurait été la valeur du Z de sortie ?

Pour Z = 20 quelle approximation décimale de $\sqrt{2}$ peut-on espérer ?

Pour p = 3 combien de tests a-t-on faits ? (Comptez combien de points d'interrogation vous avez rencontrés).

B — Deuxième méthode : Encadrement par TRICHOTOMIE.

Et si maintenant, au lieu de couper chaque segment en deux parties égales, on le coupait en trois parties égales ? P n'appartient encore qu'à une seule de ces trois parties.

Exercice 7. — En s'inspirant de l'organigramme n° 1, faire l'organigramme n° 2 dont le résultat serait le tableau d'affichage suivant lorsque l'on se donne comme valeurs initiales

1 ⟶ A

2 ⟶ B

0 ⟶ Z

et que l'on prend p = 3 ; donc, pour commencer, une approximation de $\sqrt{2}$ à 10^{-3} près.

Z	A	B	L
0	1	2	$(1/3)^0$
1	1,333333	1,666667	$(1/3)^1$
2	1,333333	1,444444	$(1/3)^2$
3	1,407407	1,444444	$(1/3)^3$
4	1,407407	1,419753	$(1/3)^4$
5	1,411526	1,415638	$(1/3)^5$
6	1,412894	1,414266	$(1/3)^6$
7	1,413809	1,414266	$(1/3)^7$

C - Comparaison entre la dichotomie et la trichotomie.

Comparez le nombre 1 000 et le nombre 3^6, puis le nombre 1 000 et le nombre 3^7.

1er critère de comparaison : pour la même valeur de p (p = 3) combien de lignes gagne-t-on par la méthode de la trichotomie ?

2ème critère de comparaison : toujours pour p = 3, combien de fois a-t-on dû calculer le carré d'un nombre

. dans le cas de la dichotomie ?

. dans le cas de la trichotomie ?

3ème critère de comparaison : ce qui prend du temps, donc de qui "coûte cher" pour un ordinateur, c'est un test (ce qui correspond au passage dans un losange d'un organigramme). Toujours pour p = 3, combien de tests aurait dû faire un ordinateur

. dans le cas de la dichotomie ?

. dans le cas de la trichotomie ?

Peut-on tirer un résultat décisif de l'étude de ces trois critères ?

D - Troisième méthode dite de Newton (ou de Gauss).

Le nombre $\sqrt{2}$ est par définition la racine positive de l'équation $x^2 = 2$.

On peut mettre cette équation, puisque cette racine est strictement positive, sous la forme suivante : $x = \frac{2}{x}$.

La méthode que l'on envisage maintenant se propose de chercher une approximation de la racine positive de cette équation.

Notations : on dira qu'un intervalle $[x_1, y_1]$ est emboîté dans un intervalle $[x_0, y_0]$ si et seulement si chacun des nombres x_1 et y_1 appartient à l'intervalle $[x_0, y_0]$. On rappelle que le segment AB ne diffère pas du segment BA. De même on pourra être amené à considérer momentanément des intervalles où l'abscisse x_i soit supérieure à l'abscisse y_i. Exemple on peut dire que l'intervalle $[3 ; 7]$ est emboîté dans l'intervalle $[10 ; 1]$, ce dernier ne différant pas de l'intervalle $[1 ; 10]$ d'une part, et chacun des nombres 3 et 7 étant compris entre 1 et 10, d'autre part.

Exercice 8. — Mise en place de l'algorithme

1) Montrer que pour tout nombre y appartenant à $\mathbb{R}_+^*$, $\sqrt{2} \in [y, \frac{2}{y}]$.

2) Soient x_0 et x_1, deux nombres appartenant à $\mathbb{R}_+^*$, montrer que l'un des intervalles $[x_0 ; \frac{2}{x_0}]$; $[x_1 ; \frac{2}{x_1}]$ est emboîté dans l'autre.

3) Prouver que pour tout nombre $x > 0$,

$$\frac{1}{2}\left[x + \frac{2}{x}\right] \geq \sqrt{2}.$$

4) Soit x un nombre réel strictement positif ; on pose $y = \frac{1}{2}(x + \frac{2}{x})$.

Prouver que l'intervalle $[y, \frac{2}{y}]$ est emboîté dans l'intervalle $[x, \frac{2}{x}]$.

En déduire que $\left| y - \frac{2}{y} \right| \leq \frac{1}{2} \left| x - \frac{2}{x} \right|$.

Prouver enfin que $2/y \leq \sqrt{2} \leq y$.

5) On considère la suite (x_n) définie par les relations $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{2}{x_n})$ et $x_0 = 1$. Calculer $x_1, x_2, \ldots, x_q$, en s'arrêtant au premier entier q

tel que $\left| x_q - \frac{2}{x_q} \right| < 10^{-3}$.

Dans ces conditions,

$$2/x_q \leq \sqrt{2} \leq x_q \ .$$

On obtient donc une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-3} près.

Pour comparer cette méthode avec les précédentes (dichotomie, ...) on présentera les calculs dans un tableau. Dans la colonne Z, on place l'indice n ; dans la colonne A on place le plus petit des deux nombres x_n et $2/x_n$; dans la colonne B on place le plus grand de ces deux nombres. Enfin, dans la colonne L on place la quantité $\left| x_n - \frac{2}{x_n} \right|$.

6) Expliciter le gain de lignes par rapport à la méthode de dichotomie, en comparant $L_n = \left| x_n - \frac{2}{x_n} \right|$ à $1/2^n$.

Exercice 9. Etude de la convergence de la suite (x_n).

1) Prouver que pour tout nombre entier n ,

$$(1) \quad x_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2x_n} (x_n - \sqrt{2})^2$$

2) En déduire que pour tout entier n ,

$$\left| x_{n+1} - \sqrt{2} \right| \leq \frac{1}{2} \left| x_n - \sqrt{2} \right| .$$

3) Prouver que $\left| x_n - \sqrt{2} \right| \leq \frac{1}{2^n} \left| x_0 - \sqrt{2} \right|$, et en conclure que la suite (x_n) converge vers $\sqrt{2}$.

4) Prouver que pour tout $n \geq 1$, $\sqrt{2} \leq x_{n+1} \leq x_n$.

Exercice 10. Etude de la rapidité de convergence de la suite (x_n). On a vu dans l'exercice précédent que cette suite converge vers $\sqrt{2}$ au moins aussi vite que $1/2^n$. En fait nous allons voir qu'à partir d'un certain rang, la convergence est bien plus rapide.

1) Prouver que $0 < \left| x_0 - \sqrt{2} \right| < \frac{1}{2}$ et que $0 < x_1 - \sqrt{2} < \frac{1}{10}$.

2) En utilisant l'égalité (1), en déduire que

$$(2) \quad 0 \leq x_2 - \sqrt{2} \leq \frac{1}{300}$$

3) Prouver que pour tout entier n,

$$0 \leq x_{n+1} - \sqrt{2} \leq (x_n - \sqrt{2})^2 .$$

4) On introduit la suite (u_n) définie par les relations
$u_0 = 1/2$, $u_1 = 1/10$, $u_2 = 1/300$, et pour tout $n \geq 2$, $u_{n+1} = u_n^2$.

Prouver que pour tout entier n, $0 \leq x_n - \sqrt{2} \leq u_n$.

5) Former un tableau où l'on affichera les entiers n jusqu'à $n = 5$ dans la colonne Z, où les colonnes A, B, L sont remplies comme précédemment, et où on placera enfin u_n dans une colonne M.

Comparer les colonnes L et M.

6) En utilisant la relation $0 \leq x_n - \sqrt{2} \leq u_n$, déterminer un entier q tel que $0 \leq x_q - \sqrt{2} \leq 10^{-10}$.

Exercice 11. Influence de l'initialisation

On peut se poser la question de l'influence de la valeur initiale sur le nombre de lignes que l'on a à calculer pour arriver à un encadrement à la même approximation, par exemple 10^{-3} ; pour cela on reprendra l'exercice 8 en posant $x_0 = 20$ par exemple.

1) Effectuer les calculs, et former le tableau.

2) Quelle est le plus petit nombre k tel que $20 \leq 2^k$?

Si l'on appelle q l'indice de la dernière ligne écrite dans l'exercice 8, en déduire que l'on pouvait être sûr de ne pas avoir à écrire plus de $(k + q)$ lignes en prenant $x_0 = 20$.

Cet exercice montre qu'il y a intérêt à prendre pour x_0 une valeur déjà "assez proche" de $\sqrt{2}$. Dans l'exercice 8, on avait pris pour x_0 la partie entière de $\sqrt{2}$, à savoir 1.

E - Exercices de généralisation

Exercice 12. - Calcul de $\sqrt{5}$

Appliquer la méthode de la dichotomie au calcul de $\sqrt{5}$ à 10^{-4} près. On pourra prendre comme valeurs initiales A = 1 et B = 5.

Quelle serait la suite u_n que l'on devrait considérer pour approcher $\sqrt{5}$? En écrire les 8 premiers termes en prenant $u_0 = 5$. Quelle est l'approximation obtenue ?
Combien de termes aurait-il fallu écrire pour obtenir une approximation du même ordre en prenant $u_0 = 100$? Les écrire.

Exercice 13. - Calcul de racines cubiques

Ecrire l'organigramme de l'encadrement par dichotomie de la racine cubique d'un nombre donné x . Le faire tourner pour x = 10 et n = 13. (Pour l'organigramme général, on peut remarquer que le nombre y est toujours compris entre 1 et y^3) - si y est positif, ce qui permet une initialisation des mémoires A et B).

Exercice 14. - Gauche, droite, gauche, droite, ...

a) Soit l'intervalle $[x_0 y_0] = [2 ; 10]$. On le coupe en deux intervalles de même longueur [2 ; 6] et [6 ; 10]. On pose $[x_1 y_1] = [6 ; 10]$. On recommence à partir de $[x_1 y_1]$ mais cette fois-ci on conserve l'intervalle "de gauche" : $[x_2 y_2] = [6 ; 8]$... et ainsi de suite : l'intervalle de droite pour les intervalles d'indice pair, et de gauche pour les indices impairs.
Quel est le nombre réel que vous encadrez ainsi ? Soit X ce nombre.

b) Si on avait pris pour intervalle initial l'intervalle [0 ; 1] quel est le nombre réel que l'on aurait encadré ? Soit Y ce nombre.

c) Montrer que l'intervalle [2 ; 10] est l'image de l'intervalle [0 ; 1] par le produit d'une homothétie et d'une translation.
Montrer que chaque intervalle $[x_i y_i]$ obtenu à partir de [2 ; 10] est l'image par ce même produit de transformations de l'intervalle de même indice obtenu à partir de l'intervalle initial [0 ; 1].
En déduire le calcul de X connaissant Y.

d) On obtient de même X' et Y' quand on prend l'intervalle de droite pour les intervalles d'indice pair, et celui de gauche pour ceux d'indice impair. Calculer X' et Y'.

VI - NOTICE BIBLIOGRAPHIQUE, HISTORIQUE ET ERISTEMOLOGIQUE

L'objectif de ce texte est double :

- préciser les niveaux d'approfondissement du Thème 1 des PROBLEMES DE L'ANALYSE (cf partie I : OBJECTIFS ET METHODES DE TRAVAIL, III, p. 14),
- délimiter la place de la partie 2 de cette brochure dans l'étude des suites et séries.

PREMIER NIVEAU

a) - Recherche de limites de suites par comparaison avec les suites de références simples $n \longmapsto n^p$, $n \longmapsto a^n$ (exemples numériques). Comparaison de quelques suites de référence (exemples numériques) ;

- exemples de divergence vers $+\infty$, vers $-\infty$; comparaison aux suites de référence ; exemples de phénomènes d'oscillation et de chaos.

On peut faire ressortir la dialectique entre suites, graphismes, et calcul numérique, et mettre en évidence la nécessité d'un contrôle théorique de la convergence.

Bibliographie. IREM d'Aix-Marseille [56], Nancy [70], Rennes [73], Brochure APM [51], Poitiers [71], Bordeaux [60].

b) - Rapidité de convergence.

- Exemples de convergence rapide. Calcul de e par la somme de la série : étude expérimentale, puis théorique. Moyennes arithmético-géométriques (exemples) : étude expérimentale, puis théorique. Voir aussi le calcul des racines carrées par la méthode de Héron (cf thème n° 2).

Bibliographie. IREM d'Aix-Marseille [57], Bordeaux [60] et [61].

- Exemples de convergences géométriques. Dichotomies, trichotomies. Calcul de π par la méthode d'Archimède (polygônes inscrits). Calcul des logarithmes par la méthode de Briggs.

Bibliographie. IREM de Lille [65], Poitiers [71], Marseille [56] et [57]. Lelionnais [10], Goldstine Chap 2 [8], Ch. Naux [12], Itard [9]. Rouse Ball [15]. Brochure APM [51]. J. Dhombres [114].

- Exemples de convergences lentes.

$$e = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad , \quad 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \ldots\ldots = \frac{\pi}{4}$$

(Pas de contrôle théorique de la convergence, ni d'accélération de convergence à ce niveau).

Bibliographie. IREM d'Aix-Marseille [57], Article de D. Reisz APM [14], Goldstine Chap 2 [8], A. Engel [28].

Les exemples étudiés au b) sont à mener de front avec la mise en place des suites de référence.

- Exemples de divergence lente. $\sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n}$, $\sum_{n=1}^{p} \frac{(-1)^{c(n)}}{n}$, où $c(n)$ est le nombre de chiffres de n.

Bibliographie. IREM d'Aix-Marseille [57]. Article D. Reisz APM [14]. IREM de Lyon [68], de Dijon [64], A. Engel [28].

DEUXIEME NIVEAU (on dispose des dérivées et de la convergence des suites monotones).

a) Recherche de limites de suites par comparaison avec les suites de référence $n \longmapsto n^{\alpha}$, où $\alpha \in R$, $n \longmapsto a^{n}$, où $a \in R_{+}^{x}$, $n \longmapsto n!$.
Comparaison de ces suites de référence. (Etude systématique).
Exemples faisant intervenir $n \longmapsto \text{Log } n$.
Etude analogue pour la divergence vers $+\infty$, ou vers $-\infty$.
Exploration de la divergence oscillatoire par suites extraites (exemples).
Même dialectique qu'au premier niveau.

Bibliographie. IREM d'Aix-Marseille [56], de Rennes [73], IUT Nancy [76].

Note historique. Pour la comparaison des suites de référence, voir Cauchy. Cours d'Analyse Algébrique. Chap. II. § 3. [106].

b) Existence de limites par monotonie et suites adjacentes.
Retour sur e, π, Log 2, sur les racines carrées.

Bibliographie. IREM d'Aix-Marseille [57], D. Reisz et C. Wasseren [63].

c) Approfondissement des méthodes de calcul de π.
Méthode d'Archimède, d'Al Khasi, de Viète, de Snellius.
Voir IREM d'Aix-Marseille [57], Le Lionnais [10], Itard [9], Rouse Ball [15], IREM de Lyon [68], A. Engel [28].
Etude expérimentale et théorique. Bon terrain pour montrer l'intérêt des développements limités pour améliorer la performance.

d) Calcul des fonctions exponentielles et trigonométriques par les séries.
Bon terrain pour faire apparaître une majoration du reste, à partir du principe de Lagrange, thème à lier à celui de la construction d'une table trigonométrique (cf thème 2).

Bibliographie. IREM d'Aix-Marseille [58], DEA didactique Marseille [54] et Bordeaux [53].

Note historique. Pour comparer sur ce thème les conceptions de la convergence des séries, voir
Newton, papers Vol IV, cité dans Goldstine page 62 [101];

Euler, Introduction à l'analyse des infiniment petits, chap 8 [102];
Lagrange, Théorie des fonctions analytiques (Art. 25 à 29) [104],
Leçons sur le calcul des fonctions (Leçon 5) [105];
Cauchy, Analyse algébrique, Chap. 9 - § 2 [106].

e) Calcul des logarithmes. (on peut prendre comme objectif la construction d'une table).

- Méthode de Briggs : étude expérimentale et théorique ;
- Méthode de Mercator ; emploi de techniques arithmétiques pour améliorer la performance : étude expérimentale et théorique ;
- Méthodes de Newton et Halley ; accélérations de convergence : Etude expérimentale.

Bibliographie. IREM d'Aix-Marseille [57], J. L. Ovaert, article E.U [13], Goldstine chap 2 [8]. Ch. Naux [12]. Colloque Carry le Rouet [74].

Note historique. Pour comparer sur ce thème les conceptions de la convergence des séries, voir
Newton, Méthode des fluxions et des suites infinies, chap. 9 [100];
Euler, Introduction à l'analyse des infiniment petits, chap. 6 et 7 [102];
Lagrange, Théorie des fonctions analytiques (Art. 19 à 24) [104];
Leçons sur le calcul des fonctions (Leçon 4) [105];
Cauchy, Analyse algébrique, Chap. 6. § 4 [106].

f) Accélérations de convergence pour les séries numériques

Approfondissement de l'étude de $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$, $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Etude de la convergence. Mise en évidence expérimentale de la partie principale du reste. Amélioration de la performance qui en résulte. Ce thème est à mener de front avec les problèmes d'évaluations asymptotiques (cf Problèmes de l'analyse - Thème 6).

Bibliographie. IREM d'Aix-Marseille [57], IREM de Grenoble (Martinie) [11], A. Deledicq, mathémachines [5]. IREM de Dijon [64], A. Engel [28].

TROISIEME NIVEAU (on dispose des nombres complexes, du calcul intégral, des théorèmes sur les fonctions continues, et des développements limités des fonctions transcendantes élémentaires).

a) Recherche de limites de suites par comparaison avec les suites de référence $n \mapsto n^{\alpha}$, $n \mapsto a^{n}$, $n \mapsto n!$, $n \mapsto (\text{Log}\, n)^{\alpha}$.
Comparaison de ces suites de référence. Emploi des dérivées, des parties principales et des développements limités pour la recherche de limites.

Bibliographie. IREM d'Aix-Marseille [57], IREM de Rennes [73], Demidovitch [6], J. Barra [1], C. Berman [2].

b) Etude de convergences et de divergences de suites

- Par monotonie et suites adjacentes. Cas des séries numériques à termes positifs et des séries alternées.
- Par des majorations du type $|u_{n+1} - u_n| \leq k^n$, $k < 1$, preuves de divergence par paquets de Cauchy (sur exemples). La condition $u_{n+1} - u_n \to 0$ ne suffit pas pour établir la convergence.

  Ce thème met en évidence, sur des exemples simples, l'importance des paquets de Cauchy.
- Exploration de la divergence par suites extraites : quelques exemples d'oscillations et de phases tournantes.
- Cas des suites définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. (Se reporter au thème n° 2 - Equations numériques).

Bibliographie. IREM d'Aix-Marseille [57], Y. Chevallard et R. Rolland [4], J. Dieudonné - Calcul infinitésimal [7], L. Chambadal et J. L. Ovaert [3].

c) Développement en série des fonctions transcendantes élémentaires

$x \mapsto \exp x$, $x \mapsto \sin x$, $x \mapsto \cos x$, $x \mapsto \text{Log}\,(1+x)$ et $x \mapsto \text{Arctg}\, x$. Intérêt de l'intégration par parties et de la forme intégrale du reste. Accélérations de convergence pour $x \mapsto \text{Log}\,(1+x)$ et $x \mapsto \text{Arctg}\, x$.

- Méthode d'Euler pour le calcul de π et ses variantes. Comparaison des diverses méthodes et analyse des facteurs mis en jeu ;
- Méthode d'Euler pour le calcul des logarithmes. Comparaison des méthodes.

Bibliographie. IREM d'Aix-Marseille [57], IREM de Bordeaux [59], DEA Didactique Marseille [55], Bordeaux [53].
Pour le calcul de π et des logarithmes, se reporter à la bibliographie du niveau 2, Y. Chevallard et R. Rolland [4], Dieudonné, Calcul infinitésimal [7].

Note historique. Le problème du développement en série entière des fonctions transcendantes élémentaires a été longtemps fort difficile. Voici quelques points de repère :

L. Euler : Introduction à l'analyse des infiniments petits - chap. 6 à 8 [102].

J.L. Lagrange : Théorie des fonctions analytiques - Art. 19 à 29 [104].
Leçons sur le calcul des fonctions - Leçons 4 et 5 [105].

A.L. Cauchy : Analyse algébrique, Chap. 6 et 9 [106].

N. Abel : Lettre à Holmböe et mémoire sur la série du binôme [107].

C. Jordan : Cours d'Analyse à l'Ecole polytechnique [108].

E. Picard : Traité d'analyse [109].

d) Accélérations de convergence pour les suites et séries numériques

Reprise des exemples $\sum \frac{1}{n^2}$, $\sum \frac{(-1)^n}{n}$, $\sum \frac{(-1)^n}{2n+1}$, $\sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n} - \log p$, $\log n!$.

- Approche expérimentale des restes, rôle des paquets de Cauchy ; Contrôle théorique du reste grâce au calcul intégral.
- Amélioration de la précision sur le reste par intégrations par parties (début, sur ces exemples, de la formule sommatoire d'Euler-Maclaurin). Gain de performance qui en résulte.
- Exploration de la sommation de quelques séries divergentes.

Bibliographie. IREM d'Aix-Marseille [57], IREM de Grenoble (Martinie) [11], A. Deledicq - Mathémachines [5], J.L. Ovaert [13], Y. Chevallard et R. Rolland [4], J. Dieudonné, Calcul infinitésimal [7], L. Chambadal et J.L. Ovaert [3], Goldstine - chap 3 [8]. IREM de Dijon [64], A. Engel [28].

Note historique. Pour la sommation des séries divergentes, voir L. Euler [103], J.L. Lagrange [104], Lacroix [110], A.L. Cauchy [106], N. Abel [107] et E. Borel. Leçons sur les séries divergentes [111].

Pour les procédés d'accélération de convergence, voir L. Euler [103] et Jacobi [112].

QUATRIEME NIVEAU (à suivre....)

3

calcul de valeurs approchées d'intégrales

CALCUL DE VALEURS APPROCHEES D'INTEGRALES

INTRODUCTION

I - QUELQUES METHODES D'APPROXIMATION

II - MAJORATION DES ERREURS

III - QUELQUES APPLICATIONS NUMERIQUES

ANNEXES

IV - NOTICE BIBLIOGRAPHIQUE, HISTORIQUE ET EPISTEMOLOGIQUE

CALCUL DE VALEURS APPROCHEES D'INTEGRALES

INTRODUCTION

Le groupe intégration, considérant que l'enseignement actuel privilégie trop l'aspect "calcul des primitives" au détriment des autres modes de fonctionnement du concept d'intégrale, a décidé d'axer ses premières réflexions sur le calcul approché des intégrales d'une part, et sur les évaluations asymptotiques d'intégrales et de séries d'autre part. Dans un deuxième temps, il se propose de travailler sur les modes d'intervention du concept d'intégrale dans les sciences physiques et dans d'autres secteurs des mathématiques (arithmétique, probabilités, ...).

1. — Le thème du calcul de valeurs approchées d'intégrales associe de manière dialectique :

a) Une intuition géométrique permettant de découvrir, sur des représentations graphiques, différentes méthodes d'approximations (rectangles, trapèzes, tangentes, Simpson).

b) Une mesure expérimentale de l'efficacité comparée de ces méthodes par des calculs numériques explicites effectués sur des exemples types :

$$\int_1^2 \frac{dx}{x}, \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}, \int_0^1 e^{-x^2} dx, \int_0^{1/2} \sqrt{1-x^2}\, dx.$$

c) Un contrôle théorique de cette efficacité, au moyen de l'intégration par parties.

- Les représentations graphiques permettent un démarrage du thème et une interprétation suggestive des méthodes les plus simples.
- L'étude expérimentale est un facteur très puissant de motivation des élèves ; la nature des opérations de calcul à effectuer nécessite l'emploi de calculatrices de poches ; la comparaison de la performance expérimentale d'une méthode et de la performance prévue par les moyens théoriques permet de détecter si les majorations sont optimales ; elle peut même permettre de suggérer des termes correctifs dans les approximations. Il conviendra alors d'interpréter ces termes et de leur donner un statut théorique.

- Le contrôle théorique ne se borne pas à "sécuriser" les calculs expérimentaux effectués ; il gouverne en effet la stratégie de calcul à employer pour un problème nouveau, car il met en évidence les facteurs en jeu ; il gouverne aussi la dialectique entre le nombre n de pas de subdivision de l'intervalle d'intégration, et le degré p des polynômes d'approximation de la fonction considérée sur chaque intervalle de subdivision.

Il permet enfin de découvrir d'autres méthodes d'approximation, plus élaborées (Euler – Mac Laurin, Gauss, Spline-cubiques) dont l'interprétation géométrique est plus cachée, voire insignifiante.

En conclusion, ce thème présente le triple intérêt d'être important pour les interventions du calcul intégral dans les autres secteurs, d'être un bon terrain d'approfondissement théorique, et de pouvoir susciter l'intérêt des élèves grâce à son caractère opératoire et la dialectique de l'efficience qu'il met en jeu.

2. – Dans ce document, nous avons voulu mettre en évidence le rôle fondamental joué par l'intégration par parties. A ce propos, Roger Godement écrit (Encyclopaedia Universalis – article "calcul infinitésimal") :

" La formule d'intégration par parties

$$\int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx = u(b)\,v(b) - u(a)\,v(a) - \int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx ,$$

valable pour u et v de classe C^1, très commode (au concours d'entrée à l'Ecole Polytechnique) pour le calcul pratique des intégrales, mais dont l'intérêt est ailleurs lorsqu'on s'occupe de mathématiques..."

Cette formule joue en effet un rôle privilégié dans tous les problèmes d'approximation des fonctions, car elle permet d'évaluer sous forme intégrale l'erreur commise lors d'une telle approximation. Une majoration de l'intégrale fournit alors un contrôle de la performance du procédé d'approximation considéré.

. Un exemple fondamental est fourni par la formule de Taylor avec reste intégral ; diverses majorations de ce reste sont utilisées (majoration de Lagrange, convergence de la série de Taylor d'une fonction vers cette fonction). Cet exemple est susceptible de plusieurs généralisations intéressantes :

a) Interpolation de Lagrange, et de Lagrange-Sylvester. Les méthodes élémentaires de calcul approché des intégrales (rectangles, trapèzes, tangentes, Simpson) rentrent dans ce cadre, ainsi que des méthodes plus élaborées (Gauss, Poncelet, fonctions spline-cubiques).

b) Développements Tayloriens généralisés. Parmi ceux-ci le développement d'Euler-Mac Laurin joue un rôle capital dans des questions aussi variées que le calcul approché des intégrales, l'évaluation asymptotique des restes de séries convergentes et des sommes partielles des séries divergentes, les développements en série des fonctions transcendantes élémentaires, ainsi que leurs développements asymptotiques (Formule de Stirling...).

3. — Les méthodes d'Euler-Mac Laurin, de Gauss et des fonctions spline-cubiques seront étudiées dans un document ultérieur s'appuyant sur la théorie de l'interpolation (cf Analyse II). On verra aussi que cette théorie permet de retrouver simplement les majorations des erreurs intervenant dans les méthodes étudiées ici.

4. Ce document est écrit à l'intention des professeurs, à qui il revient de choisir, suivant le niveau de leur classe, les activités à proposer aux élèves.

I — QUELQUES METHODES D'APPROXIMATION

On suppose donnée une fonction f continue sur l'intervalle $[a,b]$. Pour trouver des valeurs approchées de l'intégrale $I = \int_a^b f(x)\,dx$, on approche I par différentes méthodes en s'aidant d'une intuition géométrique par le biais de représentations graphiques. On contrôle ensuite les erreurs inhérentes à ces méthodes en utilisant l'intégration par parties.

Précisons d'abord quelques notations :

- On divise l'intervalle d'intégration $[a,b]$ en n intervalles égaux de longueur $h = \frac{b-a}{n}$.

- On désigne les points de subdivision par

$$x_o = a;\ x_1 = a+h,\ \ldots,\ x_n = b.$$

- On désigne par $y_o, y_1, \ldots, y_n$ les valeurs de f respectivement en $x_o, x_1, \ldots, x_n$.

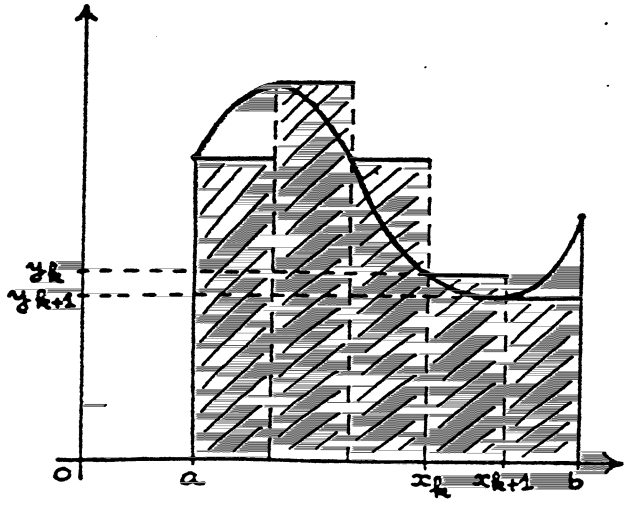
- On désigne par $y_{1/2}, y_{3/2}, \ldots, y_{\frac{2n-1}{2}}$ les valeurs de f aux points $\frac{1}{2}(x_j + x_{j+1})$.

A — Méthode des rectangles

Support géométrique : On approche I par l'aire de la partie hachurée ; la valeur approchée obtenue est

$$\boxed{h(y_o + y_1 + \ldots + y_{n-1}).}$$

Cela revient à approcher f par une fonction en escalier.

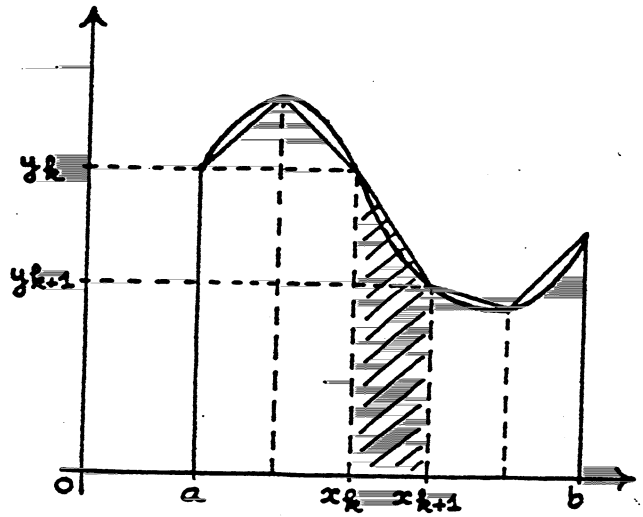


B - Méthode des trapèzes

On considère, pour valeur approchée de I, la somme des aires des n trapèzes déterminés par

l'axe des x, les droites $x = x_k$ et $x = x_{k+1}$, la droite passant par les points de coordonnées (x_k, y_k) et (x_{k+1}, y_{k+1}).

La valeur approchée obtenue est $\boxed{h(y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}) + \frac{h}{2}(y_o + y_n)}$.

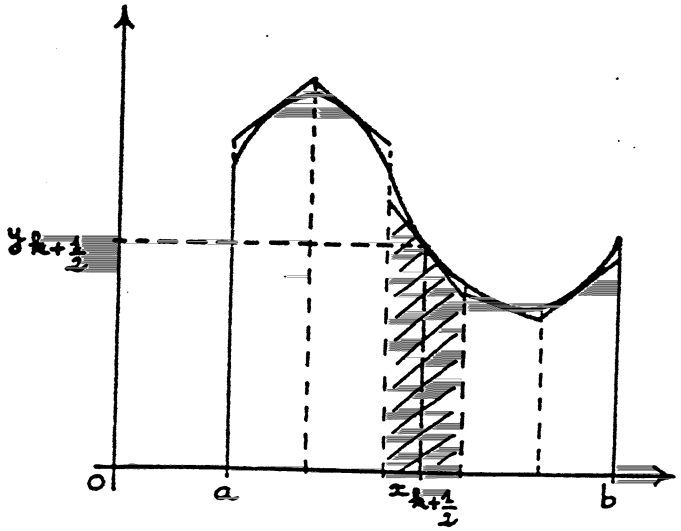


C - Méthode de la tangente

On suppose ici que f est dérivable sur $[a, b]$.

On considère pour valeur approchée de I, la somme des aires des n trapèzes déterminés par

l'axe des x, les droites d'équations $x = x_k$ et $x = x_{k+1}$, la tangente à la courbe au point d'abscisse $x_{k+1/2} = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$.

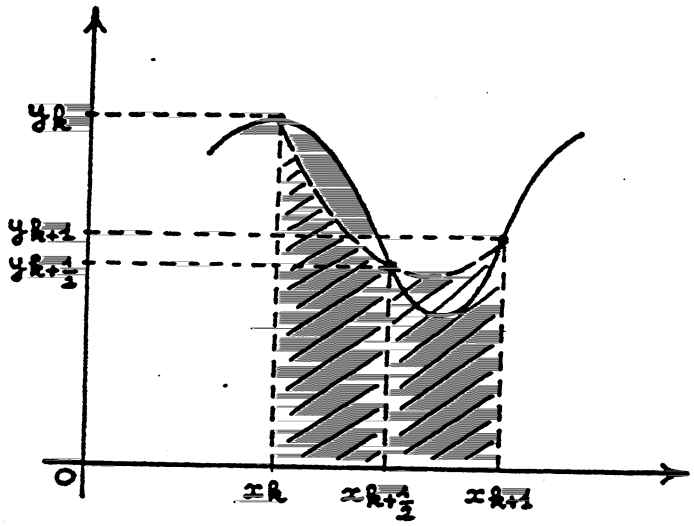


l'aire du $k^{ième}$ trapèze est $h y_{k+\frac{1}{2}}$;

la valeur approchée de I est donc

$$h\left(y_{1/2} + y_{3/2} + \ldots + y_{\frac{2n-1}{2}}\right).$$

D - Méthode de Simpson



On pose $I_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx$.

On approche I_k par l'aire comprise entre :

l'axe des x ,

les droites d'équation $x = x_k$ et $x = x_{k+1}$,

la courbe d'équation $y = P(x)$ où P est l'unique polynôme de degré inférieur ou égal à 2 tel que

$$P(x_k) = y_k,\ P(x_{k+\frac{1}{2}}) = y_{k+\frac{1}{2}},\ P(x_{k+1}) = y_{k+1}.$$

La formule des trois niveaux , valable pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à 3, fournit la relation

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} P(x)\,dx = \frac{x_{k+1} - x_k}{6}\left[P(x_k) + P(x_{k+1})\right] + \frac{2}{3}(x_{k+1} - x_k)\,P(x_{k+\frac{1}{2}}).$$

La valeur approchée de I_k est

$$\frac{h}{6}(y_k + y_{k+1}) + \frac{2}{3} h\, y_{k+\frac{1}{2}}.$$

La valeur approchée de I est donc

$$\frac{2}{3}h\left[y_{1/2} + y_{3/2} + \ldots + y_{\frac{2n-1}{2}}\right] + \frac{h}{3}\left[y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}\right] + \frac{h}{6}\left[y_o + y_n\right]$$

II - MAJORATION DES ERREURS

On suppose que f satisfait à des conditions de dérivabilité, suffisantes. Elles seront précisées dans chacune des méthodes.

Lorsque f est de classe C^p (i.e. p fois continuement dérivable), on pose $M_p = \sup_{x \in [a;b]} \left| f^{(p)}(x) \right|$.

A - Méthode des rectangles

On suppose que f est de classe C^1 sur $[a,b]$.

Rappelons la valeur approchée de I obtenue en I. A :

$$h(y_o + y_1 + \ldots + y_{n-1}).$$

Pour comparer I et cette valeur approchée, on divise l'intervalle d'intégration en n intervalles. Ainsi :

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n-1} I_k \quad \text{où} \quad I_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx.$$

Par suite,

$$\left| I - h(y_o + y_1 + \ldots + y_{n-1}) \right| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} (I_k - h y_k) \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \left| I_k - h y_k \right|.$$

Pour majorer chacun des termes $\left| I_k - h y_k \right|$, on calcule I_k par intégration par parties.

On obtient la relation

$$I_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx = \Big[(x+c)\,f(x)\Big]_{x_k}^{x_{k+1}} - \int_{x_k}^{x_{k+1}} (x+c)\,f'(x)\,dx .$$

Il reste à choisir la constante c de façon que le terme intégré soit hy_k c'est-à-dire $c = -x_{k+1}$

On obtient alors la relation

$$I_k = hy_k - \int_{x_k}^{x_{k+1}} (x - x_{k+1})\,f'(x)\,dx, \text{ et par suite}$$

$$\left| I_k - hy_k \right| = \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} (x - x_{k+1})\,f'(x)\,dx \right| \leq M_1 \int_{x_k}^{x_{k+1}} (x_{k+1} - x)\,dx ;$$

donc $$\left| I_k - hy_k \right| \leq M_1 \frac{h^2}{2},$$

et finalement

$$\boxed{I = h \sum_{k=0}^{n-1} y_k + R_n \quad \text{où} \quad |R_n| \leq M_1 \frac{(b-a)^2}{2n}}$$

B - Méthode des trapèzes

On suppose que f est de classe C^2 .

Rappelons la valeur approchée de I obtenue au I. B :

$$h(y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}) + \frac{h}{2}(y_o + y_n).$$

En procédant comme au A , on obtient la relation

$$\left| I - h(y_1 + \ldots + y_{n-1}) - \frac{h}{2}(y_o + y_n) \right| = \left| I - \frac{h}{2}\left[(y_o + y_1) + (y_1 + y_2) + \ldots + (y_{n-1} + y_n)\right] \right| =$$

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} I_k - \frac{h}{2}(y_k + y_{k+1}) \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \left| I_k - \frac{h}{2}(y_k + y_{k+1}) \right| .$$

Pour majorer chacun de ces derniers termes, calculons I_k par intégration par parties. On obtient la relation

$$I_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx = \left[(x+c)\,f(x)\right]_{x_k}^{x_{k+1}} - \int_{x_k}^{x_{k+1}} (x+c)\,f'(x)\,dx .$$

Il convient de choisir c de telle sorte que le terme tout intégré soit égal à $\frac{h}{2}\left[f(x_k) + f(x_{k+1})\right]$.

Pour cela, il suffit de choisir c tel que

$$x_{k+1} + c = \frac{h}{2} \quad \text{et} \quad -(x_k + c) = \frac{h}{2} ;$$

le nombre $c = -\frac{1}{2}(x_k + x_{k+1})$ convient.

Dans ces conditions,

$$I_k = \underbrace{\frac{h}{2}(y_k + y_{k+1})}_{A} - \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left(x - \frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right) f'(x)\,dx .$$

On voit ainsi apparaître un terme tout intégré A, qui sera la valeur approchée de I_k et un reste sous forme d'intégrale.

Nous nous proposons d'évaluer ce reste, ou, plus précisément, d'en trouver une majoration aussi bonne que possible.

Pour ce faire, nous allons effectuer une nouvelle intégration par parties sur ce reste, de la même façon que précédemment, en dérivant f' et en prenant une primitive quelconque du facteur polynôme.

Plus précisément

$$I_k = \frac{h}{2}(y_k + y_{k+1}) - \left[\left(\frac{1}{2}\left(x - \frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right)^2 + \ell\right) f'(x)\right]_{x_k}^{x_{k+1}}$$

$$+ \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left[\frac{1}{2}\left(x - \frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right)^2 + \ell\right] f''(x)\,dx .$$

Pour annuler le terme tout intégré, il suffit de choisir

$$\ell = -\frac{1}{2}\left(\frac{x_{k+1} - x_k}{2}\right)^2 = -\frac{h^2}{8}.$$

On obtient alors la relation

$$I_k = \frac{h}{2}(y_k + y_{k+1}) + \frac{1}{2}\int_{x_k}^{x_{k+1}} (x - x_k)(x - x_{k+1}) f''(x)\, dx .$$

Comme $(x - x_k)(x_{k+1} - x) \geq 0$ sur $[x_k, x_{k+1}]$, on en déduit que

$$\left| I_k - \frac{h}{2}(y_k + y_{k+1}) \right| \leq \frac{M_2}{2} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (x - x_k)(x_{k+1} - x)\, dx = \frac{M_2 h^3}{12} .$$

En conclusion,

$$I = \frac{h}{2}\sum_{k=0}^{n-1} (y_k + y_{k+1}) + R_n \quad \text{où} \quad |R_n| \leq \frac{M_2}{12}\,\frac{(b-a)^3}{n^2}$$

La performance de la méthode des trapèzes est supérieure à celle de la méthode des rectangles, tout au moins dans le cas où f'' n'est pas trop grand.

C - Méthode de la tangente

On suppose encore que f est de classe C^2

la valeur approchée de I obtenue au I. C est :

$$h\left(y_{1/2} + y_{3/2} + \ldots + y_{\frac{2n-1}{2}}\right) .$$

$$\left| I - h\sum_{k=0}^{n-1} y_{k+\frac{1}{2}} \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \left| I_k - h\, y_{k+\frac{1}{2}} \right|$$

On veut obtenir $y_{k+\frac{1}{2}}$ comme terme tout intégré dans l'intégration par parties de I_k. On est donc amené à partager l'intervalle $[x_k, x_{k+1}]$ en deux intervalles $[x_k, x_{k+\frac{1}{2}}]$, $[x_{k+\frac{1}{2}}, x_{k+1}]$:

$$I_k = \int_{x_k}^{x_{k+\frac{1}{2}}} f(x)\,dx + \int_{x_{k+\frac{1}{2}}}^{x_{k+1}} f(x)\,dx.$$

Par intégration par parties ,

$$\int_{x_k}^{x_{k+\frac{1}{2}}} f(x)\,dx = \Big[(x+c)\,f(x)\Big]_{x_k}^{x_{k+\frac{1}{2}}} - \int_{x_k}^{x_{k+\frac{1}{2}}} (x+c)\,f'(x)\,dx$$

Il convient de choisir c de façon à annuler le coefficient de $f(x_k)$, c'est-à-dire $c = -x_k$.

Dans ces conditions :

$$(1)\quad \int_{x_k}^{x_{k+\frac{1}{2}}} f(x)\,dx = \frac{h}{2}\,y_{k+\frac{1}{2}} - \int_{x_k}^{x_{k+\frac{1}{2}}} (x - x_k)\,f'(x)\,dx;$$

de même

$$(2)\quad \int_{x_{k+\frac{1}{2}}}^{x_{k+1}} f(x)\,dx = \frac{h}{2}\,y_{k+\frac{1}{2}} - \int_{x_{k+\frac{1}{2}}}^{x_{k+1}} (x - x_{k+1})\,f'(x)\,dx.$$

En ajoutant (1) et (2) il vient :

$$(3)\quad I_k = h\,y_{k+\frac{1}{2}} - \int_{x_k}^{x_{k+\frac{1}{2}}} (x - x_k)\,f'(x)\,dx + \int_{x_{k+\frac{1}{2}}}^{x_{k+1}} (x - x_{k+1})\,f'(x)\,dx.$$

En procédant comme pour la méthode des trapèzes, on intègre à nouveau par parties en choisissant les constantes d'intégration de façon à annuler le terme tout intégré. Plus précisément :

$$\int_{x_k}^{x_{k+\frac{1}{2}}} (x - x_k)\, f'(x)\, dx =$$

$$\left[\left(\frac{1}{2}(x - x_k)^2 + c_1\right) f'(x)\right]_{x_k}^{x_{k+\frac{1}{2}}} - \int_{x_k}^{x_{k+\frac{1}{2}}} \left(\frac{1}{2}(x - x_k)^2 + c_1\right) f''(x)\, dx .$$

De même :

$$\int_{x_{k+\frac{1}{2}}}^{x_{k+1}} (x - x_{k+1})\, f'(x)\, dx =$$

$$\left[\frac{1}{2}(x - x_{k+1})^2 + c_2\right) f'(x)\Big]_{x_{k+\frac{1}{2}}}^{x_{k+1}} - \int_{x_{k+\frac{1}{2}}}^{x_{k+1}} \left(x - x_{k+1}\right)^2 + c_2 f''(x)\, dx .$$

En ajoutant les deux égalités précédentes, on voit que

$$\int_{x_k}^{x_{k+\frac{1}{2}}} (x - x_k)\, f'(x)\, dx + \int_{x_{k+\frac{1}{2}}}^{x_{k+1}} (x - x_{k+1})\, f'(x)\, dx =$$

$$\frac{1}{2} f'(x_{k+\frac{1}{2}})\,(x_{k+\frac{1}{2}} - x_k)^2 (c_1 - c_2) + c_2 f'(x_{k+1}) - c_1 f'(x_k).$$

On choisit donc $c_1 = c_2 = 0$, et on obtient la relation

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} (x - x_k)\, f'(x)\, dx + \int_{x_{k+\frac{1}{2}}}^{x_{k+1}} (x - x_{k+1})\, f'(x)\, dx =$$

$$-\frac{1}{2}\int_{x_k}^{x_{k+\frac{1}{2}}} (x - x_k)^2 f''(x)\, dx - \frac{1}{2}\int_{x_{k+\frac{1}{2}}}^{x_{k+1}} (x - x_{k+1})^2 f''(x)\, dx .$$

D'où :

$$\left| I_k - h f_{k+\frac{1}{2}} \right| \leq \frac{M_2}{2} \left[\int_{x_k}^{x_{k+\frac{1}{2}}} (x - x_k)^2\, dx + \int_{x_{k+\frac{1}{2}}}^{x_{k+1}} (x - x_{k+1})^2\, dx \right],$$

c'est-à-dire : $\left| I_k - h f_{k+\frac{1}{2}} \right| \leq \frac{M_2}{24} h^3$;

et donc :

$$I = h \sum_{k=0}^{n-1} y_{k+\frac{1}{2}} + R_n \quad \text{où} \quad |R_n| \leq \frac{M_2}{24} \frac{(b-a)^3}{n^2}$$

D - Méthode de SIMPSON

f est supposée de classe C^4 sur $[a,b]$. Il s'agit encore d'évaluer

$$I_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx$$

la valeur approchée de I_k obtenue au I.D est

$$\frac{h}{6}(y_k + y_{k+1}) + \frac{2}{3} h\, y_{k+\frac{1}{2}}.$$

Pour simplifier les notations on pose $\alpha = x_k$, $\beta = x_{k+1}$ et donc $x_k + \frac{1}{2} = \frac{\alpha+\beta}{2}$.

Première étape - calcul de I_k lorsque $[\alpha,\beta] = [-1,1]$.

Nous pouvons nous ramener au cas où $\alpha = -1$ et $\beta = +1$ en effet la fonction $x \longmapsto f(\frac{1}{2}[\alpha(1-x) + \beta(1+x)])$ est de classe C^4 sur $[-1,+1]$ et

$$(1) \qquad \int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \frac{\beta-\alpha}{2} \int_{-1}^{+1} f(\tfrac{1}{2}[\alpha(1-x) + \beta(1+x)])\,dx$$

Supposons donc $\alpha = -1$ et $\beta = 1$.

Nous avons vu que dans la méthode de Simpson interviennent les valeurs de f aux bornes et au milieu de l'intervalle. Partageons donc l'intervalle $[-1,+1]$ en deux intervalles $[-1,0]$ et $[0,1]$:

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx + \int_0^1 f(x)\,dx.$$

Intégrons par parties $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx$:

$$\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = [(x+c)f(x)]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} (x+c) f'(x)\,dx, \text{ où } c \text{ est une constante arbitraire.}$$

De plus en remarquant que $\int_0^1 f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} f(-x)\,dx$ et en appliquant ce qui précède à cette intégrale, il vient :

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_{-1}^0 f(-x)\,dx = \Big[(x+c)\,f(-x)\Big]_{-1}^0 + \int_{-1}^0 (x+c)\,f'(-x)\,dx ,$$

et donc

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx = \underbrace{2cf(0) - (c-1)\big(-f(1) + f(-1)\big)}_{A} - \int_{-1}^0 (x+c)\,\big[f'(x) - f'(-x)\big]\,dx .$$

On voit ainsi apparaître un terme tout intégré A et un reste sous forme intégrale.

Dans A n'interviennent que les valeurs de f en 0, 1 et -1 ; A est la valeur approchée de $\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx$ et nous nous proposons d'évaluer le reste, ou plus précisément d'en trouver une majoration, aussi bonne que possible.

Pour ce faire, nous allons effectuer une nouvelle intégration par parties sur ce reste, de la même façon que précédemment, en dérivant f' et en prenant une primitive quelconque du facteur polynôme.

Dans le terme tout intégré apparaissent les valeurs de f' en 1 et -1. On choisit alors c et d de façon à annuler le terme tout intégré.

Plus précisément :

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx = A - \int_{-1}^0 (x+c)\big[f'(x) - f'(-x)\big]\,dx .$$

Une première intégration par parties donne :

$$\int_{-1}^1 f(x)\,dx = A - \Big[\Big(\frac{1}{2}x^2 + cx + d\Big)\big[f'(x) - f'(-x)\big)\Big]_{-1}^0 + \int_{-1}^0 \Big(\frac{1}{2}x^2 + cx + d\Big)\big[f''(x) + f''(-x)\big]\,dx .$$

Peut-on choisir c et d de façon à annuler le terme tout intégré ? On remarque que si, $x = 0$, $f'(x) - f'(-x) = 0$; il est donc nécessaire et suffisant que :

$$(\star) \qquad \boxed{1/2 - c + d = 0}$$

alors $\frac{1}{2}x^2 + cx + d = \frac{1}{2}(x+1)(x+2d)$ et

$$(2)\quad \boxed{\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx = A + \int_{-1}^{0} \frac{1}{2}(x+1)(x+2d)\left[f''(x) + f''(-x)\right]dx\,.}$$

Intégrons à nouveau par parties. On obtient :

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx = A + \left[P_1(x)\left(f''(x) + f''(-x)\right)\right]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} P_1(x)\left[f'''(x) - f'''(-x)\right]dx$$

où P_1 est un polynôme dont la dérivée est :

$$x \longmapsto \frac{1}{2}(x+1)(x+2d)\,.$$

Pour annuler le terme tout intégré, il convient de choisir P_1 de telle sorte que $P_1(0) = P_1(-1) = 0$.

Etant à la fois racine de P_1 et de P_1', -1 est nécessairement racine double de P_1. Donc

$$P_1(x) = \frac{1}{6}(x+1)^2(x+e)\,;$$

mais alors $P_1'(x) = \frac{1}{2}(x+1)\left(x + \frac{2}{3}e + \frac{1}{3}\right)$, et donc

$$\boxed{e = \frac{6d-1}{2}\,.}$$

Par suite $P_1(x) = \frac{1}{6}(x+1)^2\left(x + \frac{6d-1}{2}\right)$.

P_1 devant aussi s'annuler en 0, $d = \frac{1}{6}$ et donc d'après (★)

$$\boxed{e = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}\,.}$$

Finalement, on obtient la relation

$$(3)\quad \boxed{\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx = \frac{4}{3}f(0) + \frac{1}{3}\left[f(1) + f(-1)\right] - \int_{-1}^{0} \frac{x}{6}(x+1)^2\left[f'''(x) - f'''(-x)\right]dx}$$

l'expression de A est bien celle annoncée au I. D.

Intégrons à nouveau par parties :

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx = A - \left[P_2(x)\,(f'''(x) - f'''(-x)) \right]_{-1}^{0} + \int_{-1}^{0} P_2(x)\left[f^{(4)}(x) + f^{(4)}(1-x) \right] dx$$

où P_2 est une primitive de $x \longmapsto \frac{x}{6}(x+1)^2$.

Pour annuler le terme tout intégré, il suffit alors de choisir P_2 de façon que $P_2(-1) = 0$.

Ainsi -1 est nécessairement une racine triple de P_2, et donc P_2 est de la forme

$$P_2(x) = \frac{1}{24}(x+1)^3(x+e).$$

Mais alors

$$P_2'(x) = \frac{1}{6}(x+1)^2\left(x + \frac{3}{4}e + \frac{1}{4}\right), \text{ et donc}$$

$$\boxed{e = -\frac{1}{3}.}$$

Par suite:

$$\boxed{\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx = \frac{4}{3}f(0) + \frac{1}{3}(f(1) + f(-1)) + \int_{-1}^{0} \frac{1}{24}(x+1)^3\left(x - \frac{1}{3}\right)\left[f^{(4)}(x) + f^{(4)}(-x) \right] dx.} \quad (4)$$

Remarque :

Si nous intégrons à nouveau par parties, nous voyons que

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx = A + \left[P_3(x)\,(f^{(4)}(x) + f^{(4)}(-x)) \right]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} P_3(x)\,(f^{(5)}(x) - f^{(5)}(-x))\,dx,$$

où P_3 est une primitive de $x \longmapsto \frac{1}{24}(x+1)^3\left(x - \frac{1}{3}\right)$.

(Nous supposons ici que f est 5 fois continuement dérivable). Pour pouvoir annuler le terme tout intégré, il faut que :

$$P_3(-1) = 0 \quad \text{et} \quad P_3(0) = 0.$$

Ainsi -1 est une racine quadruple de P_3 et comme, de plus, $P_3(0) = 0$, nécessairement

$$P_3(x) = \frac{x}{5!}(x+1)^4.$$

Mais alors $P_3'(x) = \frac{1}{24}(x+1)^3(x+\frac{1}{5})$, ce qui contredit la définition de P_3.

On ne peut donc améliorer la relation (4).

Majorons le reste intégral R intervenant dans la formule (4).

Soit $M = \sup_{x\in[-1,1]} |f^{(4)}(x)|$. Alors

$$|R| = \left| \int_{-1}^{0} \frac{1}{24}(x+1)^3(x-\frac{1}{3})\left[f^{(4)}(x)+f^{(4)}(-x)\right]dx \right| \leq \frac{1}{12} M \int_{-1}^{0} |(x+1)^3(x-\frac{1}{3})|\,dx.$$

$$\text{Or } \int_{-1}^{0} |(x+1)^3(x-\frac{1}{3})|\,dx = \int_{-1}^{0} (x+1)^3(\frac{1}{3}-x)dx = \left[\frac{1}{5}(x+1)^4(\frac{2}{3}-x)\right]_{-1}^{0} = \frac{2}{15},$$

et donc $$|R| \leq \frac{M}{6\times 15} = \frac{M}{90}.$$

Finalement

$$(5)\quad \int_{-1}^{+1} f(x)\,dx = \frac{4}{3}f(0) + \frac{1}{3}\left[f(1)+f(-1)\right] + R,$$

$$\text{avec } |R| \leq \frac{M}{90}, \text{ où } \quad M = \sup_{x\in[-1,+1]} |f^{(4)}(x)|.$$

Deuxième étape - Calcul de I_k dans le cas général.

La formule (1) montre que

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx = \frac{x_{k+1}-x_k}{2} \int_{-1}^{+1} g(x)\,dx,$$

$$\text{où } g(x) = f\left(\frac{1}{2}x_k(1-x) + \frac{1}{2}x_{k+1}(1+x)\right) = f\left(\frac{h}{2}x + x_{k+\frac{1}{2}}\right).$$

Appliquons à g les résultats de la 1ère étape (cf formule (5)) :

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx = \frac{h}{2}\left[\frac{4}{3}g(0) + \frac{1}{3}(g(1) + g(-1)) + R\right]$$

$$= \frac{h}{2}\left[\frac{4}{3}f(x_{k+\frac{1}{2}}) + \frac{1}{3}(f(x_{k+1}) + f(x_k)) + R\right],$$

avec $|R| \leq \frac{1}{90} \times \sup_{x\in[-1,+1]} |g^{(4)}(x)|$.

Or :

$$\sup_{x\in[-1,+1]} |g^{(4)}(x)| = \left(\frac{h}{2}\right)^4 \sup_{x\in[x_k,x_{k+1}]} |f^{(4)}(x)| \leq \left(\frac{h}{2}\right)^4 \sup_{x\in[a,b]} |f^{(4)}(x)|.$$

Rappelons que $M_4 = \sup_{x\in[a,b]} |f^{(4)}(x)|$; on obtient donc la relation

$$I_k = h\left[\frac{2}{3}y_{k+\frac{1}{2}} + \frac{1}{6}(y_{k+1} + y_k)\right] + R',$$

avec $|R'| \leq \left(\frac{h}{2}\right)^5 \times \frac{1}{90} \times M_4 = \frac{(b-a)^5}{n^5} \times \frac{1}{2880} \times M_4$

Enfin, puisque $I = \sum_{k=0}^{n-1} I_k$

$$I = \left[\frac{2}{3}h\left[y_{1/2} + \ldots + y_{\frac{2n-1}{2}}\right] + \frac{h}{3}\left[y_1 + \ldots + y_{n-1}\right] + \frac{h}{6}\left[y_o + y_n\right]\right] + R_n$$

$$\text{avec } |R_n| \leq \frac{(b-a)^5}{n^4} \times \frac{1}{2880} \times M_4$$

Performance comparée des méthodes précédentes

méthode	Valeur approchée de $\int_a^b f(x)\,dx$	Majoration de R_n
rectangles	$h(y_0+y_1+\ldots+y_{n-1})$	$\lvert R_n\rvert \leq \frac{M_1}{2}\frac{(b-a)^2}{n}$
trapèzes	$h(y_1+y_2+\ldots+y_{n-1})+\frac{h}{2}(y_0+y_n)$	$\lvert R_n\rvert \leq \frac{M_2}{12}\frac{(b-a)^3}{n^2}$
tangente	$h(y_{1/2}+y_{3/2}+\ldots+y_{\frac{2n-1}{2}})$	$\lvert R_n\rvert \leq \frac{M_2}{24}\frac{(b-a)^3}{n^2}$
Simpson	$\frac{2}{3}h\left[y_{1/2}+\ldots+y_{\frac{2n-1}{2}}\right]+\frac{h}{3}\left[y_1+\ldots+y_{n-1}\right]+\frac{h}{6}\left[y_0+y_n\right]$	$\lvert R_n\rvert \leq \frac{M_4}{2880}\frac{(b-a)^5}{n^4}$

Notations : $h=\frac{b-a}{n}$; $x_k=a+kh$, où $k\in[0,n]$; $y_k=f(x_k)$

$x_{k+1/2}=\frac{x_k+x_{k+1}}{2}$, où $k\in[0,n-1]$, $y_{k+1/2}=f(x_{k+1/2})$

$M_k=\sup_{x\in[a,b]}\lvert f^{(k)}(x)\rvert$

Le nombre des valeurs de f à calculer est sensiblement le même dans les trois premières méthodes. Il est doublé pour la méthode de Simpson.

De plus les formules de majoration d'erreurs montrent la supériorité de la méthode de Simpson à condition toutefois que la dérivée de f ne soit pas "trop grande" (on remarquera en outre que le calcul de $f^{(4)}$ n'est pas toujours aisé).

On pourra comparer expérimentalement la performance de ces méthodes sur des exemples simples tels que :

$$\int_1^2 \frac{dx}{x},\ \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2},\ \int_0^{1/2}\sqrt{1-x^2}\,dx,\ \int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx$$

L'organigramme ci-contre permet de calculer successivement les valeurs approchées de $\int_a^b f(x)\,dx$ par les quatre méthodes précédemment étudiées.

On choisit le même pas $h = \frac{b-a}{n}$, en remarquant que les valeurs intervenant dans la méthode de Simpson interviennent dans les autres méthodes. Nous sommes donc conduits à calculer les valeurs de la fonction f pour les $2n+1$ valeurs $x_k = a + \frac{b-a}{2n}k$ $k \in [0, 2n]$, et à introduire les nombres

$$A = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{2k}) \quad \text{et} \quad B = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{2k+1}) .$$

Alors les valeurs approchées de l'intégrale $I = \int_a^b f(x)\,dx$ sont :

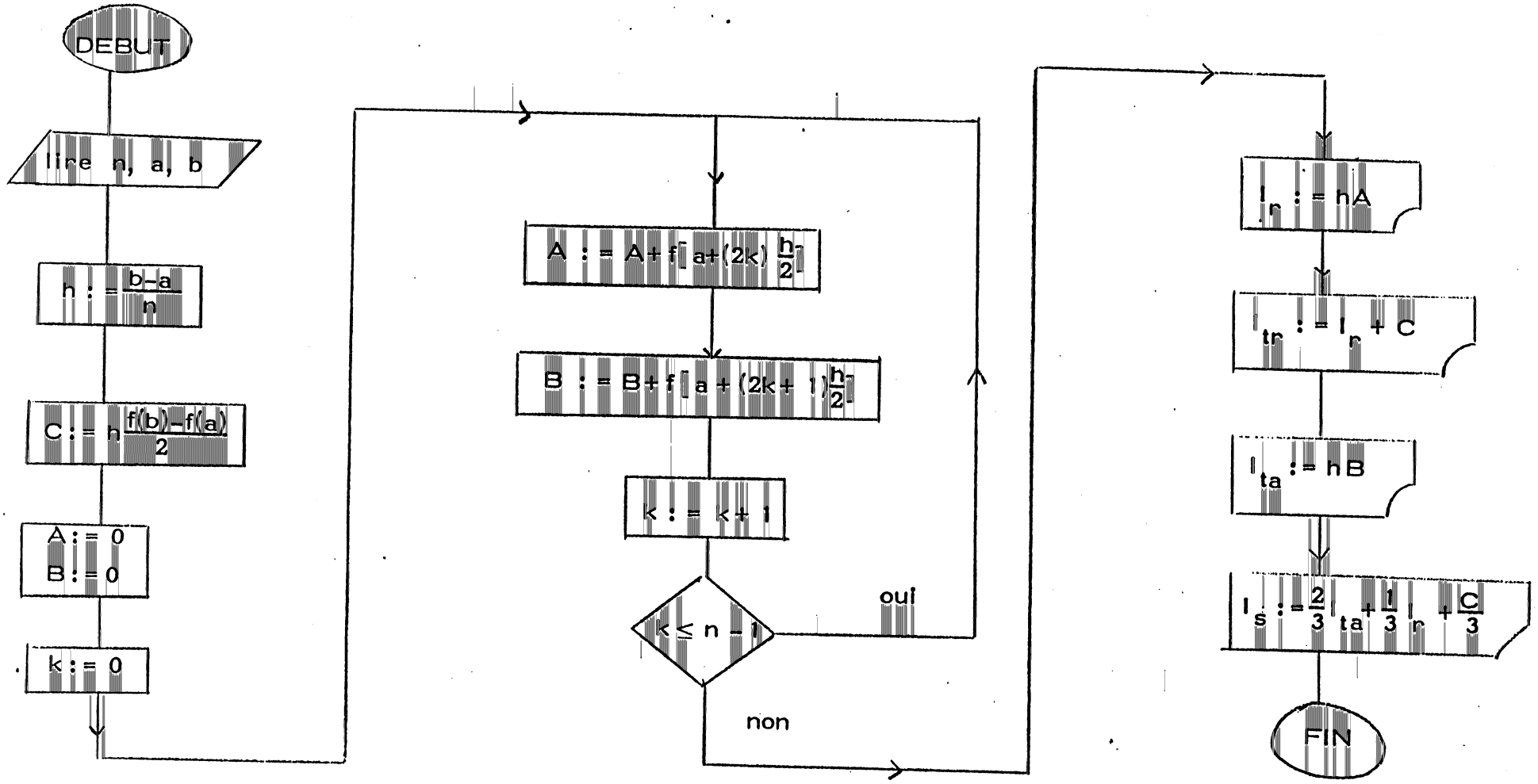
$I_r = hA$ pour la méthode des rectangles,

$I_{tr} = hA + h\frac{f(b)-f(a)}{2}$ pour la méthode des trapèzes,

$I_{ta} = hB$ pour la méthode des tangentes,

$I_s = \frac{2}{3}hB + \frac{1}{3}hA + \frac{1}{3}h\frac{f(b)-f(a)}{2}$ pour la méthode de Simpson.

ORGANIGRAMME DE COMPARAISON DES DIFFERENTES METHODES DE CALCUL APPROCHE D'UNE INTEGRALE



III -- QUELQUES APPLICATIONS NUMERIQUES

1er exercice :

Calculer des valeurs approchées de $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ à l'aide des différentes méthodes d'intégration numérique précédentes.
Expliciter les formules fournissant l'erreur commise due à la méthode.

Dans les calculs qui suivent, nous avons utilisé une simple calculatrice.

Nous avons retenu suffisamment de décimales pour que les erreurs d'arrondi soient inférieures à celles dues aux différentes méthodes d'approximation utilisées.

1° - Méthode des rectangles :

On prend le pas $h = 1/10$.

On en déduit que

$$\boxed{0,71877 \leq I_r \leq 0,71878 .}$$

2° - Méthode des trapèzes :

On prend encore le pas $h = 1/10$.

$$I_{tr} = h(y_1 + y_2 \ldots + y_9) + \frac{h}{2}(y_0 + y_{10})$$

$$= 0,618773 + 0,075 = 0,693773.$$

Donc

$$\boxed{0,69377 \leq I_{tr} \leq 0,69378 .}$$

3° - Méthode de la tangente

On prend toujours le pas $h = 1/10$.

$$I_{ta} = \frac{1}{10}(y_{1/2} + \ldots + y_{19/2})$$

On aboutit à l'encadrement

$$\boxed{0,69283 \leq I_{ta} \leq 0,69284 .}$$

4° - Méthode de Simpson

Pour que le nombre de valeurs à calculer soit sensiblement le même que dans les méthodes précédentes on prend ici un pas $h = \frac{1}{5}$.

$$I_s = \frac{2h}{3}(y_{1/2} + y_{3/2} + y_{5/2} + y_{9/2}) + \frac{h}{3}(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) + \frac{h}{6}(y_0 + y_5).$$

On en déduit que

$$\boxed{0,69315 \leq I_s \leq 0,69316}.$$

Majoration des erreurs

a) méthode des rectangles

On a vu que $R_n \leq \frac{M_1(b-a)^2}{2n}$.

$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, $M_1 = 1$, $b - a = 1$, $n = 10$.

Donc $R_{10} \leq \frac{1}{20}$,

d'où $$\boxed{0,66877 \leq \text{Log } 2 \leq 0,76878}.$$

b) - méthode des trapèzes

On a vu que $R_n \leq \frac{M_2(b-a)^3}{12n^2}$.

$f''(x) = \frac{2}{x^3}$, $M_2 = 2$, $b - a = 1$, $n = 10$.

Donc $R_{10} \leq \frac{1}{600} = 167.10^{-5}$,

d'où $$\boxed{0,6921 \leq \text{Log } 2 \leq 0,69545}.$$

c) – méthode de la tangente

On a vu que $R_n \leq \frac{M_2}{24} \frac{(b-a)^3}{n^2}$.

Donc $R_{10} \leq \frac{1}{1200} = 84.10^{-5}$,

d'où $\boxed{0,69199 \leq \text{Log } 2 \leq 0,69368}$.

d) méthode de Simpson

On a vu que $R_n \leq \frac{M_4}{2880} \frac{(b-a)^5}{n^4}$.

$f^{(4)}(x) = \frac{24}{x^5}$, donc $M_4 = 24$.

Donc $R_5 \leq 14.10^{-6}$,

d'où $\boxed{0,69313 \leq \text{Log } 2 \leq 0,69318}$.

Nota Bene : Une calculatrice scientifique donne

$$\text{Log } 2 = 0,693141471806 .$$

Deuxième exercice :

On se propose de calculer des valeurs approchées de π à l'aide des méthodes numériques classiques d'intégration. On peut partir du fait que l'aire du quart de cercle trigonométrique vaut :

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \sqrt{1 - x^2} \, dx .$$

Mais, ici les méthodes d'approximation seront peu efficaces car la dérivée de $x \longmapsto \sqrt{1 - x^2}$ n'est par bornée au voisinage de 1 (la tangente est verticale). En revanche, lorsque l'angle θ appartient à $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$ la pente des tangentes est faible ce qui permet d'espérer une bonne approximation.

Comme $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, on est amené à calculer des valeurs approchées de

$$I = \int_0^{1/2} \sqrt{1-x^2}\, dx .$$

Une figure et un calcul trigonométrique élémentaire montre que $I = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8}$.

On utilisera la valeur approchée

$$\frac{\sqrt{3}}{8} = 0,21650635 \text{ à la précision } 10^{-8} .$$

I - Méthode des rectangles :

1) Calcul d'une valeur approchée de I

On considère une subdivision de l'intervalle $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ de pas $h = \frac{1}{20}$

(subdivision en $n = 10$ intervalles de même longueur).

On trouve l'encadrement suivant :

$$0,4815348 \leq I_r \leq 0,4815349 .$$

2) Majoration de l'erreur commise due à la méthode :

R_n étant l'erreur relative au calcul de I, on a la relation :

$$R_n \leq \frac{M_1 (b-a)^2}{2\, n} .$$

Or $f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. Donc $M_1 \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$, et enfin $R_{10} \leq 0,0075$.

L'erreur commise sur le calcul de π est donc inférieure à 10^{-2}.

D'où l'encadrement $\quad 3,0927 \leq \pi \leq 3,2680 .$

II - Méthode des trapèzes

1) Calcul de valeurs approchées :

On considère toujours une subdivision de $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ en 10 intervalles de longueur $h = \frac{1}{20}$

une valeur approchée de I est :

$$I_{tr} = h(y_1 + y_2 + \ldots + y_9) + \frac{h}{2}(y_0 + y_{10}) = \frac{1}{20}(y_1 + \ldots + y_9) + \frac{1}{40}(y_0 + y_{10}).$$

D'où l'encadrement suivant

$$\boxed{0,47818545 \leq I_{tr} \leq 0,47818546}.$$

2) Majoration de l'erreur due à la méthode :

Pour cette méthode $R_n \leq \frac{M_2}{12}\frac{(b-a)^3}{n^2}$.

Or, $f''(x) = -(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}$. Par suite, $M_2 \leq \frac{8}{3\sqrt{3}}$.

D'où $R_{10} \leq 1,7.10^{-4}$.

On en déduit que l'erreur commise sur le calcul de π est inférieure à 2.10^{-3}.

D'où l'encadrement :

$$\boxed{3,1380 \leq \pi \leq 3,1422}.$$

III - Méthode de Simpson

1) Calcul de valeurs approchées

On considère une subdivision de $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ correspondant à un pas $h = \frac{1}{10}$ et $n = 5$.

La méthode de Simpson donne comme valeur approchée de I :

$$\frac{2}{3}h(y_{1/2} + y_{3/2} + y_{5/2} + y_{7/2} y_{9/2}) + \frac{h}{3}(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) + \frac{h}{6}(y_0 + y_5).$$

On en déduit l'encadrement suivant :

$$\boxed{0,4783056 \leq I_s \leq 0,4783057}$$

2) Calcul d'une majoration de l'erreur due à la méthode

$$R_n \leq \frac{M_4}{2880} \frac{(b-a)^5}{n^4} .$$

$f'(x) = -x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$, $f''(x) = -(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}$, $f'''(x) = -3x(1-x^2)^{-\frac{5}{2}}$.

Donc $\forall x \in [0, \frac{1}{2}]$ $f^{(4)}(x) = -3(1+4x^2)(1-x^2)^{-\frac{7}{2}}$, et $|f^{(4)}(x)| \leq 3.2.(\frac{4}{3})^{\frac{7}{2}}$.

On en déduit que $M_4 \leq 16,5$ et que $R_5 \leq 4.10^{-7}$.

L'erreur sur le calcul de π est donc inférieure à 5.10^{-6} .

D'où l'encadrement

$$\boxed{3,141585 \leq \pi \leq 3,141597}$$

Nota Bene : Une calculatrice scientifique donne la valeur

$$\pi = 3,141592653 .$$

Troisième exercice

Calculer les valeurs approchées de $\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ à l'aide des différentes méthodes d'intégration numérique précédentes. Comparer la performance.
Dans chaque cas on choisira un pas $h = \frac{1}{10}$.

Nous avions remarqué dans la partie théorique que, pour un même pas, la méthode de Simpson demande sensiblement le double de calculs que les autres méthodes. Aussi dans les exercices précédents, dans le souci de comparer leur efficacité, nous avions choisi un pas $h = \frac{1}{10}$ pour les méthodes des rectangles, trapèzes et tangentes et un pas $h = \frac{1}{5}$ pour celle de Simpson.

Toutefois, on remarque que, pour un même pas, les valeurs intervenant dans la méthode de Simpson interviennent aussi dans celle des rectangles et celle des tangentes.

Aussi, dans le cadre d'un exercice où sont traitées simultanément les quatre méthodes, on pourra choisir le même pas pour celle de Simpson que pour les trois autres, et ce, sans calculs supplémentaires et avec un bien meilleur résultat. C'est ce point de vue qui est adopté dans ce qui suit.

Posons $A = y_0 + y_1 + \ldots\ldots + y_9$

$B = y_{1/2} + y_{3/2} + \ldots\ldots + y_{19/2}$

Alors les valeurs approchées de I sont données par les relations

rectangles $\quad I_r = \frac{1}{10} A$

trapèzes $\quad I_{tr} = \frac{1}{10} A + \frac{1}{20}(y_{10} - y_0)$

tangentes $\quad I_{ta} = \frac{1}{10} B$

Simpson $\quad I_s = \frac{1}{15} B + \frac{1}{30} A + \frac{1}{60}(y_{10} - y_0)$

On est ainsi ramené au calcul de A et B :

i	x_i	$y_i = \frac{1}{1+x_i^2}$	i	x_i	$y_i = \frac{1}{1+x_i^2}$
0	0	1,00000000	1/2	0,05	0,99750623
1	0,1	0,99009901	3/2	0,15	0,97799511
2	0,2	0,96153846	5/2	0,25	0,94117647
3	0,3	0,91743119	7/2	0,35	0,89086860
4	0,4	0,86206897	9/2	0,45	0,83160083
5	0,5	0,80000000	11/2	0,55	0,76775432
6	0,6	0,73529412	13/2	0,65	0,70298770
7	0,7	0,67114094	15/2	0,75	0,64000000
8	0,8	0,60975610	17/2	0,85	0,58055152
9	0,9	0,55248619	19/2	0,95	0,52562418
	A =	8,09981500		B =	7,85606500

Sachant de plus que $y_{10} = 0,5$ nous obtenons les valeurs approchées suivantes :

$I_r = 0,8099815$

$I_{tr} = 0,7849815$

$I_{ta} = 0,7856065$

$I_s = 0,78539817$

Majoration des erreurs

La majoration de l'erreur commise avec la méthode des rectangles fait intervenir la dérivée première de $f : x \longmapsto \frac{1}{1+x^2}$; celles relatives à la méthode des trapèzes et des tangentes, la dérivée seconde de f ; enfin celle relative à la méthode de Simpson la dérivée quatrième de f.

Pour majorer sur $[0,1]$ ces dérivées, plusieurs méthodes sont possibles :

La première, la plus rapide, mais hors du programme des seconds cycles des lycées, utilise le fait que $\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i}\right]$.

Il en résulte que, pour tout entier naturel n :

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{2i}\cdot(-1)^n\left[\frac{1}{(x-i)^{n+1}} - \frac{1}{(x+i)^{n+1}}\right]$$

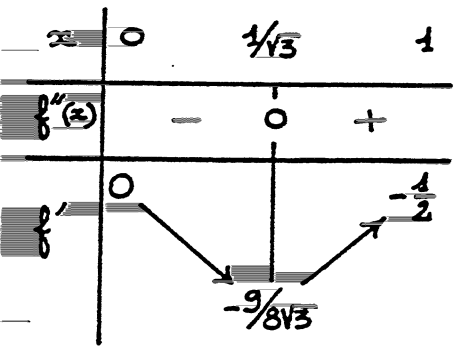
On en déduit que $M_n = \sup_{[0,1]} |f^{(n)}(x)| \leq n!$

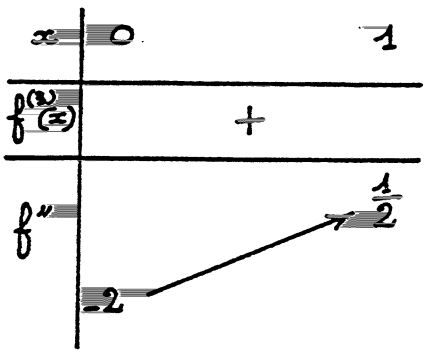
Quand à la seconde, elle consiste à étudier les variations sur $[0,1]$ de $f^{(n)}$ en étudiant le signe de sa dérivée $f^{(n+1)}$ on obtient ainsi :

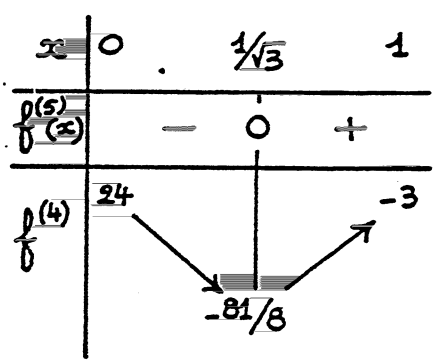
$$f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \; ; \; f''(x) = 2\frac{3x^2-1}{(1+x^2)^3} \; ; \; f^{(3)}(x) = 24x\frac{1-x^2}{(1+x^2)^4}$$

$$f^{(4)}(x) = 24\frac{5x^4 - 10x^2 + 1}{(1+x^2)^5} \quad \text{et} \quad f^{(5)}(x) = 240x\frac{-3x^4 - 10x^2 - 3}{(1+x^2)^6}$$

On en déduit les tableaux de variations suivants.







Par suite $M_1 = 9/8\sqrt{3} < 1$

$M_2 = 2$

$M_4 = 24$

De plus on tiendra compte de l'erreur d'arrondi de la machine, qui, pour A comme pour B, est inférieure à 5.10^{-9} : on s'assurera que ces erreurs sont négligeables devant l'erreur due aux méthodes d'approximation.

a) Méthode des rectangles

$$R_n \leq \frac{M_1(b-a)^2}{2n}, \quad \text{d'où } R_{10} \leq 5.10^{-2}.$$

Donc $3,039 \leq \pi \leq 3,440$.

b) Méthode des trapèzes

$$R_n \leq \frac{M_2}{12}\frac{(b-a)^3}{n^2}, \quad \text{d'où } R_{10} \leq 2.10^{-3}.$$

Donc $3,133 \leq \pi \leq 3,147$.

c) Méthode des tangentes

$$R_n \leq \frac{M_2}{24}\frac{(b-a)^3}{n^2}, \quad \text{d'où } R_{10} \leq \frac{1}{1200} \leq 10^{-3}.$$

Donc $3,139 \leq \pi \leq 3,146$.

d) Méthode de Simpson

$$R_n \leq \frac{M_4}{2880}\cdot\frac{(b-a)^5}{n^4}, \text{ d'où } R_{10} \leq 10^{-6}.$$

Donc $3,141589 \leq \pi \leq 3,141596$.

IV - NOTICE BIBLIOGRAPHIQUE, HISTORIQUE ET EPISTEMOLOGIQUE

L'objectif de ce texte est double :

- préciser les niveaux d'approfondissement du Thème 10 des PROBLEMES DE L'ANALYSE (cf partie 1 : OBJECTIFS ET METHODES DE TRAVAIL, III, p. 18),
- délimiter la place de la partie 3 de cette brochure dans l'étude du calcul infinitésimal.

PREMIER NIVEAU (on dispose des dérivées et des primitives)

a) Calcul des dérivées. Emploi des opérations sur les fonctions (opérations algébriques, composition). Emploi des développements limités (sur exemples).

Bibliographie. IREM d'Aix-Marseille [58], IREM de Poitiers [71], IREM de Lyon [78], IREM de Rennes [79]. S. Lang, a first course in Analysis [20].

b) Calcul des primitives. Primitives usuelles ; emploi de l'intégration par parties. Construction des fonctions transcendantes élémentaires.

Bibliographie. IREM d'Aix-Marseille [57], IREM de Nancy. S. Lang [20].

c) Calcul de valeurs approchées de dérivées par différences finies. Instabilité des dérivées (sur exemples). Etude expérimentale et théorique.

Bibliographie. DEA didactique Marseille [55], IREM de Lyon [68], Berezin et Zhydkov [16], Demidovitch et Maron [17], A. Deledicq, mathémachines [5], A. Engel [28].

d) Emploi des dérivées et des primitives pour la mesure des grandeurs.

- en géométrie : (aires, volumes de sphères, cônes, cylindres, pyramides).
- en électricité : quantité d'électricité, intensité efficace, énergie.
- en mécanique : quantité de mouvement, travail, énergie.

Bibliographie. IREM d'Aix-Marseille [58], IREM de Lyon [78], S. Lang [20].

DEUXIEME NIVEAU (on dispose des dérivées, des primitives et des intégrales).

a) Calcul des dérivées. Approfondissement des méthodes (composition, fonctions réciproques). Calcul et emploi de développements limités.

Bibliographie. IREM d'Aix-Marseille [58], IREM de Lyon [78], de Poitiers [72], de Rennes [73], S. Lang [20].

b) Calcul des primitives. Emploi de l'intégration par parties et de changements de variables simples ($x \longmapsto a\,x + b$, $x \longmapsto x^2$). Emploi des fonctions transcendantes élémentaires directes et réciproques. Exemples d'intégrales conduisant à de nouvelles transcendantes.

Ce thème permet de dégager une classification grossière des fonctions.

Bibliographie. E. Goursat [21], G. Valiron [22], L. Chambadal et J.L. Ovaert [3].

Note historique concernant la classification des fonctions.

L. Euler. Introduction à l'analyse infinitésimale - chap. 1 [102].
J.L. Lagrange. Leçons sur le calcul des fonctions - Leçons 1 et 2 [105].
A.L. Cauchy. Cours d'analyse algébrique - chap. 1 [106].
Ch. Hermite. Cours d'analyse - chap. 1 [133].

A ce sujet, on pourra aussi consulter les ouvrages suivants :

Ch. Houzel sur les travaux d'Euler in [121].
J.L. Ovaert sur les travaux de Lagrange in [121].
Youschkevitch in [122].
DEA didactique Bordeaux [53].

c) Calcul de valeurs approchées de dérivées. Cas des dérivées d'ordre supérieur - Majoration des erreurs commises.

Bibliographie. IREM d'Aix-Marseille [58], de Lyon [68], A. Deledicq [5], Berezin et Zhydkov [16].

d) Calcul de valeurs approchées d'intégrales.

- Méthodes interpolatoires simples (rectangles, trapèzes, tangentes, Simpson). Etude expérimentale. Contrôle théorique des erreurs. Comparaison expérimentale et théorique de la performance de ces méthodes. Optimisation de l'interpolation linéaire et parabolique (Méthode de Gauss à l'ordre 2 et 3).

- Développements tayloriens : exemples d'utilisation de développements en série entière. Méthode d'Euler-Maclaurin à l'ordre inférieur à 3 et comparaison avec les méthodes interpolatoires.

Bibliographie. IREM d'Aix-Marseille [56], Demidovitch et Maron [17], Berezin et Zhydkov [16], DEA didactique Marseille [55], J. L. Ovaert, article E. U. [13], A. Engel [28].

e) Emploi du calcul différentiel et intégral pour la mesure des grandeurs :

- en géométrie : aires, volumes de révolution, emploi de coordonnées polaires.
- en mécanique : centres d'inertie, moments d'inertie, travail, énergie.
- en électricité (électrostatique et électrocinétique) : tension, intensité, énergie.
- en mécanique des fluides, pressions, flux, travail.
- en optique : chemin optique.
- en thermodynamique : quantité de chaleur, travail, entropie.

Bibliographie. IREM d'Aix-Marseille [58], de Lyon [79], de Strasbourg [77], S. Lang [20]. Arnold [23].

TROISIEME NIVEAU (à suivre....)

4

résolution de l'équation

$f(x) = x$

par

approximations successives

RESOLUTION DE L'EQUATION $f(x) = x$ PAR APPROXIMATIONS SUCCESSIVES

INTRODUCTION

I - ETUDE DE L'EXISTENCE ET UNICITE D'UNE SOLUTION ET DE SA STABILITE

II - ETUDE DE LA RAPIDITE DE CONVERGENCE

III - ACCELERATIONS DE CONVERGENCE

IV - NOTICE BIBLIOGRAPHIQUE, HISTORIQUE ET EPISTEMOLOGIQUE

INTRODUCTION

Considérons une fonction f continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, telle que $f(I) \subset I$. On se pose les trois problèmes suivants :

Problème 1. — Existe-t-il un point a de I tel que $f(a) = a$? Ce point est-il unique ?

Problème 2. — Soit alors c un élément de I, la suite (u_n) définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ et la condition initiale $u_0 = c$, converge-t-elle vers a ?

Problème 3. — Si oui, étudier la rapidité de convergence de (u_n) vers a.

Les problèmes 1 et 2 sont d'ordre qualitatif ; le problème 3 est d'ordre quantitatif. En outre, si la rapidité de convergence est trop faible, (ou même si le processus du problème est divergent), on peut chercher à transformer l'équation $f(x) = x$ en une équation $g(x) = x$ ayant la même solution a, mais pour laquelle la convergence est plus rapide. D'où le

Problème 4. — Déterminer des procédés d'accélération de convergence.

Bien sûr, le problème 4 ne peut être résolu que si, à l'occasion du problème 3, on approfondit l'étude des facteurs qui interviennent dans la rapidité de convergence.

Problème 5. — Il reste enfin à examiner, et ceci est capital pour les applications, comment la recherche d'une solution d'une équation $h(x) = 0$ peut se ramener à celle d'une équation du type précédent. Ici encore, l'étude préalable des problèmes 3 et 4 s'avère indispensable.

A travers l'étude des problèmes précédents, on pourra approfondir quelques points clefs.

1) Le problème 1 met en jeu les principales méthodes de preuve d'existence en analyse : monotonie, complétion, compacité, connexité. Ces méthodes peuvent être employées ensuite pour l'étude de problèmes plus difficiles : équations matricielles, équations différentielles et intégrales, problèmes de maxima et de minima, théorème d'inversion locale et des fonc-

2) Une solution positive du problème 2 est insuffisante en analyse numérique ; il convient en effet d'étudier la stabilité du processus d'approximation, c'est-à-dire d'analyser l'effet d'une perturbation de la condition initiale C ou de l'application f. Nous nous bornons ici à mettre en place sur cet exemple le concept de stabilité par rapport aux conditions initiales, et d'esquisser en annexe celui de stabilité par rapport à f.

3) Le problème 3 met en jeu diverses techniques importantes de calculs asymptotiques et utilise de manière intensive le lien entre suites et séries.

4) enfin les problèmes 4 et 5 consistent essentiellement à construire des algorithmes satisfaisant à des conditions données, et à optimiser des algorithmes d'une classe donnée.

5) Bien entendu, ce thème s'insère dans le cadre général de la recherche de solutions approchées d'équations numériques, décrit dans la notice IV. Il convient à ce propos de souligner un des avantages essentiels des équations à point fixe : la méthode des approximations successives est autocorrective, en ce sens que des erreurs de calcul sur les termes u_n (en particulier les erreurs d'arrondi) ne se répercutent pas de manière cumulative sur les termes suivants.

Dans ce qui suit, nous traiterons d'énoncés généraux, suivis de problèmes portant sur des exemples substantiels. Il va de soi que cette étude théorique doit être précédée de l'étude détaillée d'un ou deux exemples simples, tels que la résolution de $x^2 = a$, étude qui a fait l'objet de documents antérieurs.

Enfin, ce document est écrit à l'intention des professeurs, à qui il revient de choisir, suivant le niveau de leur classe, des activités à proposer aux élèves.

On trouvera un choix de telles activités, effectivement proposées à des classes, dans la brochure Analyse II.

I - ETUDE DE L'EXISTENCE ET UNICITE D'UNE SOLUTION ET DE SA STABILITE

(Résolution des problèmes 1 et 2).

On dispose de plusieurs types d'énoncés. Le premier est de type topologique et s'appuie sur la notion de connexité :

Théorème 1 *Soit f une application continue d'un intervalle compact $[\alpha,\beta]$ dans lui-même. Alors f admet au moins un point fixe.*

En effet la fonction $g : x \longmapsto f(x) - x$ est continue, $g(\alpha) \geq 0$, et $g(\beta) \leq 0$. Le théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence d'un élément a de $[\alpha,\beta]$ tel que $g(a) = 0$, ie tel que $f(a) = a$.

Remarque 1. Ce théorème ne s'étend pas au cas d'un intervalle I non compact, même si I est fermé ; ainsi, lorsque $I = \mathbb{R}$, la fonction $f : x \longmapsto x + 1$ n'admet aucun point fixe.

Remarque 2. Ce théorème est un cas particulier du théorème du point fixe de Brouwer : toute application continue de la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$ dans elle-même admet au moins un point fixe.

Lorsque $n > 1$, la démonstration de ce théorème est nettement plus difficile, et fait appel à des techniques de topologie algébrique (voir, par exemple, M. Greenberg, lectures on algebraic topology). Lorsque $n = 1$, la connexité des intervalles de $\mathbb{R}$ suffit.

Remarque 3. Ces points fixes ne s'obtiennent pas nécessairement par itération : c'est le cas lorsque $I = [-1,+1]$ et $f(x) = -x$. On peut cependant décrire des algorithmes permettant d'approcher un point fixe. Voici par exemple un procédé utilisant une barycentration : Pour tout élément c de $[\alpha,\beta]$, la suite (u_n) définie par la relation de récurrence

$u_{n+1} = (1 - \frac{1}{n})\, u_n + \frac{1}{n} f(u_n)$ et la condition initiale $u_0 = c$ converge vers un point fixe a de f. (On trouvera une esquisse de la démonstration dans l'annexe 1). La rapidité de convergence est en général en $\frac{1}{n^k}$ (idem) ; c'est pourquoi ce procédé est peu employé en pratique.

L'énoncé le plus classique est de type métrique et se fonde sur la notion de complétion :

Théorème 2 . *Soient I un intervalle fermé de R , et f une application de I dans lui-même lipschitzienne dans un rapport k < 1. (On dit que f est k-contractante).*

1. Il existe un élément a de I et un seul tel que f(a) = a.
2. Pour tout élément c de I , la suite définie par les relations $u_{n+1} = f(u_n)$ *et* $u_0 = c$ *converge vers a.*
3. Pour tout entier n ,

$$|u_n - a| \leq \frac{k^n}{1-k} |u_1 - u_0| .$$

Démonstration

- Unicité du point fixe. Soient a et b des points fixes alors $|(b-a)| = |f(b) - f(a)| \leq k\,|b-a|$. Comme $k < 1$, nous en déduisons que $b = a$.

- Existence du point fixe, et convergence de (u_n) vers a .

La démonstration s'effectue en deux étapes :

1. — La suite (u_n) est de Cauchy. En effet, si $p < q$,

$$|u_q - u_p| \leq |u_{p+1} - u_p| + |u_{p+2} - u_{p+1}| + \ldots\ldots + |u_q - u_{q-1}|$$

$$\leq |u_1 - u_0| (k^p + k^{p+1} \ldots\ldots\ldots\ldots + k^{q-1})$$

Donc

$$(1) \qquad |u_q - u_p| \leq |u_1 - u_0| \frac{k^p}{1-k} .$$

Comme $k < 1$, il en découle que (u_n) est de Cauchy.

2. - La suite u_n converge vers un point fixe de f.

En effet comme R est complet, (u_n) converge vers un nombre réel a. Comme I est fermé, $a \in I$. Enfin, f est lipschitzienne sur I, donc continue sur I ; par passage à la limite dans la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, nous en déduisons que $a = f(a)$.

- Majoration de l'erreur.

Fixons $p = n$ dans la relation 1, et faisons tendre q vers $+\infty$. Nous obtenons la relation

$$(2) \qquad |a - u_n| \leq |u_1 - u_0| \frac{k^n}{1-k},$$

ce qu'il fallait prouver.

Remarque 1. L'assertion 3 fournit une première indication sur la rapidité de convergence : elle est au moins d'ordre géométrique, et gouvernée par la valeur de k.

Remarque 2. Lorsque f est continuement dérivable sur I, à dérivée bornée, le théorème des accroissements finis montre que f est lipschitzienne dans le rapport $k = \sup |f'(t)|$. C'est donc la pente des tangentes qui gouverne la rapidité de convergence ; plus précisément, comme $u_n \to a$, c'est la valeur de $f'(a)$ qui gouverne la rapidité asymptotique de convergence. Nous préciserons ce point au II.

Remarque 3. Lorsque $k = 1$, f n'admet pas nécessairement de point fixe : c'est le cas si $I = R$ et $f(x) = x + 1$.

Remarque 4. Le théorème 2 est un cas particulier de l'énoncé suivant, dont la démonstration est analogue :

Soient (A,d) un espace métrique COMPLET et f une application lipschitzienne de A dans A, telle que la série $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda(f^n)$ des rapports de Lipschitz des itérées de f converge. Alors

1. L'application f admet un point fixe a et un seul.

2. Pour tout élément c de A, la suite définie par les relations $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 = c$ converge vers a.

3. Pour tout entier n,

$$|u_n - a| \leq |u_1 - u_0| \sum_{p=n}^{+\infty} \lambda(f^p).$$

Cette dernière majorante est meilleure que celle du théorème 2, car $\lambda(f^p) \leq [\lambda(f)]^p$.

Cet énoncé est d'une importance capitale en analyse. Il s'applique notamment aux équations implicites, aux équations différentielles, et aux équations intégrales cf [29].

Remarque 5. Il ne suffit pas que, pour tout couple (x,y) d'éléments distincts de I, $|f(x) - f(y)| < |x-y|$. Ainsi, lorsque $I = [1,+\infty[$ et que $f(x) = x + \frac{1}{x}$, cette condition est réalisée, mais f n'a aucun point fixe. "Moralement", le point fixe est rejeté à l'infini. Pour empêcher l'apparition de ce phénomène, on peut supposer que I est compact :

Théorème 3 *Soient $I = [\alpha,\beta]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$ et f une application de I dans lui-même telle que, pour tout couple (x,y) de points distincts de I, $|f(x) - f(y)| < |x - y|$. Alors*

1. L'application f admet un point fixe a et un seul.

2. Pour tout élément c de I, la suite définie par les relations $u_{n+1} = f(u_n)$, $u_0 = c$ converge vers a.

Unicité de a. Même démonstration que pour le théorème 2.

Existence de a. La fonction continue $x \mapsto |f(x) - x|$ atteint sa borne inférieure sur l'intervalle compact $[\alpha,\beta]$ en au moins un point a. Alors $f(a) = a$; sinon, posons $b = f(a)$; Alors

$$|f(b)-b| = |f^2(a) - f(a)| < |f(a) - a|,$$

ce qui contredit la définition de a.

La démonstration de l'assertion 2 est plus délicate ; elle s'appuie sur la notion de valeur d'adhérence d'une suite ; on la trouvera esquissée dans l'annexe 1.

Remarque 1. Contrairement au précédent, cet énoncé ne fournit plus aucune indication sur la rapidité de convergence, qui peut d'ailleurs être arbitrairement lente (Voir annexe 2).

Remarque 2. Le théorème 3 est un cas particulier de l'énoncé suivant :

Soient (A,d) un espace métrique COMPACT et f une application de A dans A telle que pour tout couple (x,y) de points distincts de A

$$d(f(x),f(y)) < d(x,y).$$

Alors f admet un point fixe unique, obtenu par le procédé des approximations successives.

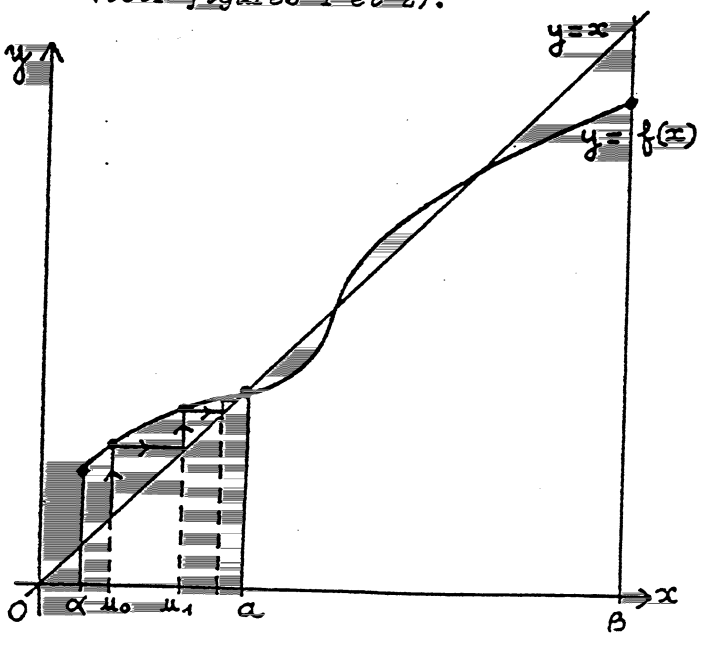
Notons finalement que l'existence d'une limite pour la suite (u_n) peut aussi être obtenue par monotonie. Plus précisément :

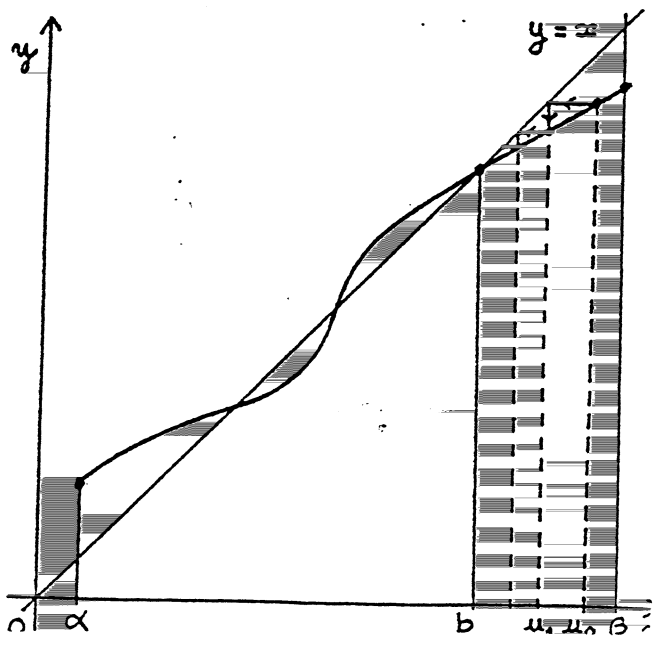
Théorème 4 *Soient $I = [\alpha,\beta]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$, f une application continue de I dans lui-même, c un point de I et (u_n) la suite définie par les relations $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 = c$. Soit enfin F l'ensemble des points fixes de f (qui est fermé et non vide d'après le théorème 1).*

1. On suppose que f est croissante sur I.

- *Si $u_1 \geq u_0$ la suite (u_n) est croissante et converge vers le plus petit élément a de $F \cap [u_0, +\infty[$.*
- *Si $u_1 \leq u_0$ la suite (u_n) est décroissante et converge vers le plus grand élément b de $]-\infty, u_0] \cap F$.*

Dans les deux cas, on dit que l'itération est "en escalier" (voir figures 1 et 2).





2. On suppose que f est décroissante sur I ; alors f admet un point fixe a et un seul.

- Si $u_0 \leq a$ et $u_2 \geq u_0$, la suite (u_{2n}) est croissante et la suite (u_{2n+1}) est décroissante ; elles convergent toutes deux vers a.

- Si $u_0 \geq a$ et $u_2 \leq u_0$, la suite (u_{2n}) est décroissante et la suite (u_{2n+1}) est croissante ; elles convergent toutes deux vers a.

- Si $u_0 < a$ et $u_2 \leq u_0$, la suite (u_{2n}) est décroissante et la suite (u_{2n+1}) est croissante ; elles convergent vers deux points fixes b et c de $f \circ f$, tels que $b < a < c$. En particulier, la suite (u_n) diverge.

- Si $u_0 > a$ et $u_2 > u_0$, la suite (u_{2n}) est croissante et la suite (u_{2n+1}) est décroissante ; elles convergent vers deux points fixes b et c de $f \circ f$, tels que $c < a < b$. En particulier, la suite (u_n) diverge.

Dans les quatre cas on dit que l'itération est en spirale (cf. figures 3 et 4).

La démonstration est immédiate.

Pour l'assertion 2, on observe que $f \circ f$ est croissante.

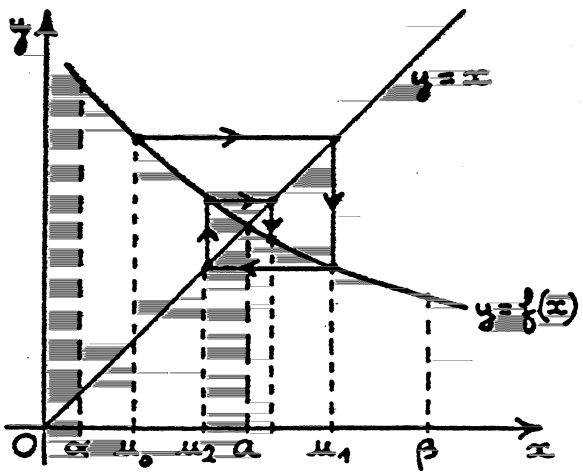


figure 3 : spirale convergente

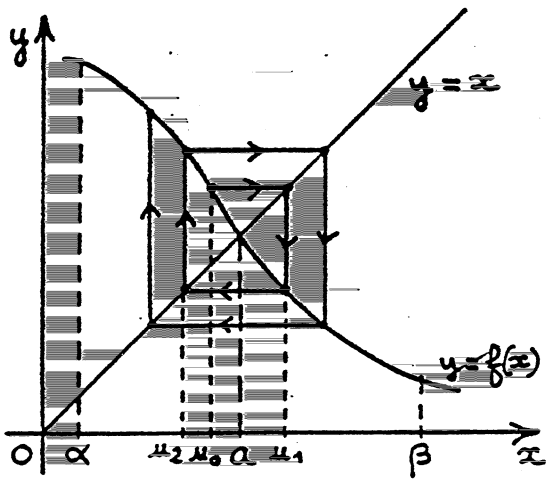


figure 4 : spirale divergente

Pour étudier la stabilité d'un point fixe nous introduisons la

Définition. Points fixes attractifs, répulsifs.

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point et f une application continue de I dans lui-même. On suppose que f admet un point fixe a et un seul.

- *On dit que a est attractif, ou stable, s'il existe un intervalle fermé J de centre a, stable par f, et tel que, pour tout élément $u_0 = c$ de $J \cap I$, (u_n) converge vers a.*
- *On dit que a est instable dans le cas contraire.*
- *On dit enfin que a est répulsif si, pour tout intervalle fermé J de centre a de longueur assez petite, et pour tout élément $u_0 = c$ de $J \cap I$, $c \neq a$, l'ensemble des entiers n tels que $u_n \notin J$ est non vide.*

On définit de même les points attractifs et répulsifs à gauche (resp. à droite) ; I admet alors a pour extrémité (resp. pour origine). On remarquera que a peut être instable sans être répulsif : c'est le cas lorsque $f(x) = -x$.

Ces notions ont une grande importance pratique, car les points fixes instables ne peuvent être approchés par itération. Nous allons voir qu'on peut déterminer facilement la nature d'un point fixe.

Théorème 5. — Stabilité des points fixes.

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une application de classe C^1 de I dans I, admettant un point fixe a et un seul.

1. *Si $0 < f'(a) < 1$, le point a est attractif et la convergence de (u_n) vers a est en escalier.*
2. *Si $-1 < f'(a) < 0$, le point a est attractif et la convergence de (u_n) vers a est en spirale.*
3. *Si $|f'(a)| > 1$, le point a est répulsif.*

(Voir à nouveau les figures 1 à 4).

Supposons par exemple que a est inférieur à 1.

Assertions 1 et 2. Comme f' est continue, il existe un intervalle J fermé de centre a tel que $k = \sup_{t \in J} |f'(t)| < 1$. Dans ces conditions J est stable par f car, pour tout élément x de J, $|f(u) - f(a)| \leq k |u-a|$.
Il en découle (cf. Théorème 2) que pour tout élément c de J, (u_n) converge vers a. Donc a est attractif.

Assertion 3. Supposons par exemple que $f'(a) > 1$.

Comme f' est continue, il existe un nombre réel $\alpha > 0$ tel que $[a-\alpha, a+\alpha] \subset I$ et que, pour tout élément t de $[a-\alpha, a+\alpha]$, $f'(t) \geq 1$. Soient J un intervalle fermé de centre a contenu dans $[a-\alpha, a+\alpha]$, et c un point de J, $c \neq a$. Supposons par l'absurde que, pour tout n, $u_n \in J$.

- ou bien $c > a$; Alors (u_n) est croissante : en effet
$u_1 - f(a) = f(c) - f(a) \geq c - a = u_0 - a$, donc $u_1 \geq u_0$. Par récurrence, $u_{n+1} - f(a) = f(u_n) - f(a) \geq u_n - a$, et, par suite, $u_{n+1} \geq u_n$.
La suite (u_n) converge donc vers un élément b de J, $b \geq u_0 > a$.
D'autre part $f(b) = b$, ce qui contredit l'unicité de a.

- ou bien $c < a$; Alors (u_n) est décroissante : en effet
$f(a) - u_1 = f(a) - f(c) \geq a - c = a - u_0$, donc $u_1 \leq u_0$. Par récurrence, $u_{n+1} \leq u_n$. La suite (u_n) converge donc vers un élément b' de J, $b' \leq u_0 < a$.
D'autre part $f(b') = b'$, ce qui contredit l'unicité de a.

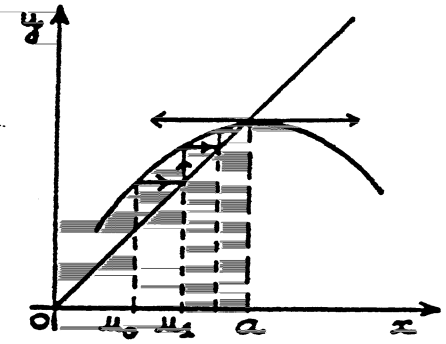
Il reste à examiner les cas particuliers, (importants en pratique) où $f'(a) = 0$, $f'(a) = 1$, et $f'(a) = -1$:

Les démonstrations, analogues à la précédente, sont laissées aux soins du lecteur.

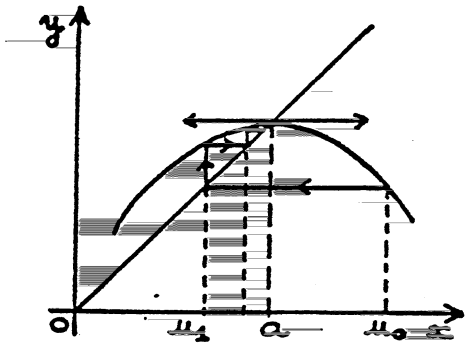
Théorème 6. Stabilité dans le cas où $f'(a) = 0$. *Le point a est attractif.*

Supposons f deux fois dérivable au point a.

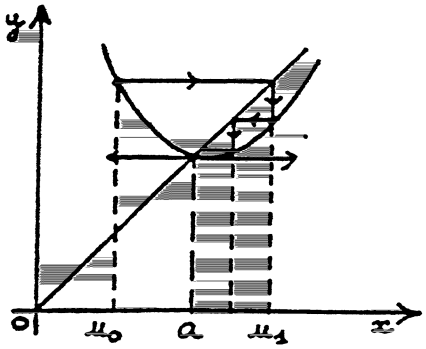
- *Si $f''(a) \neq 0$, il y a convergence en escalier croissant si $f''(a) < 0$, et décroissant si $f''(a) > 0$.*
- *Si $f''(a) = 0$ et si f est croissante, il y a convergence en escalier.*
- *Si $f''(a) = 0$ et si f est décroissante, il y a convergence en spirale.*



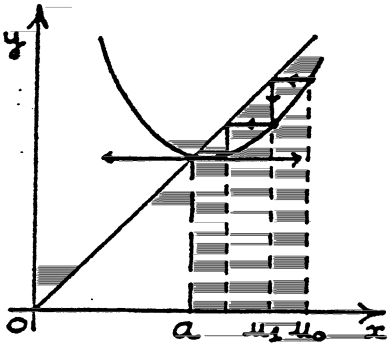
Cas $f''(a) < 0$ et $u_0 < a$



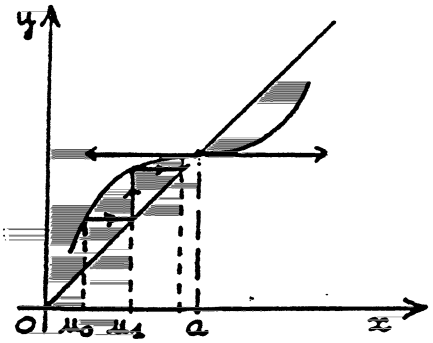
Cas $f''(a) < 0$ et $u_0 > a$



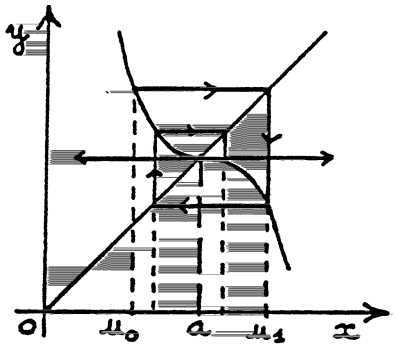
Cas $f''(a) > 0$ et $u_0 < a$



Cas $f''(a) > 0$ et $u_0 > a$



Cas $f'(a) = 0$ et f croissante



Cas $f'(a) = 0$ et f décroissante

Théorème 7. Stabilité dans le cas où $f'(a) = 1$. *L'itération est en escalier au voisinage de a.*

Tout dépend du signe de $f(x) - x$ au voisinage de a.

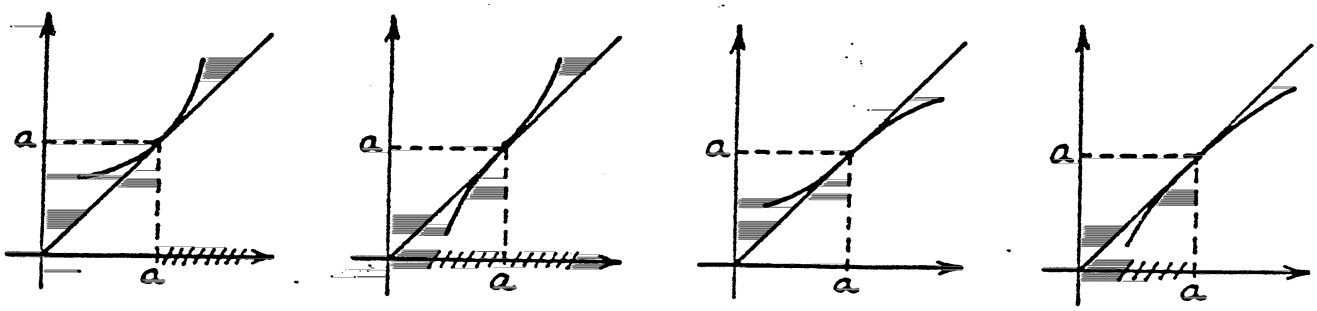
1. *Si $f(x)-x$ est positif sur un voisinage $[a-\gamma, a+\gamma]$ de a, est attractif à gauche et répulsif à droite.*

2. *Si $f(x)-x$ est positif sur $[a, a+\gamma]$ et négatif sur $[a-\gamma, a]$ a est répulsif.*

3. *Si $f(x)-x$ est négatif $[a, a+\gamma]$ et positif sur $[a-\gamma]$, a est attractif.*

4. *Si $f(x)-x$ est négatif sur $[a-\gamma, a+\gamma]$, a est répulsif à gauche et attractif à droite.*

Ces cas sont schématisés sur les figures ci-dessous.



Remarque 1.

Le signe de $f(x) - x$ peut être étudié à l'aide de celui de $f''(a)$ et $f'''(a)$.

- Si $f''(a) > 0$, premier cas.
- Si $f''(a) < 0$, quatrième cas.
- Si $f''(a) = 0$, $f'''(a) > 0$, deuxième cas.
- Si $f''(a) = 0$, $f'''(a) < 0$, troisième cas.

Bien entendu, une étude plus fine est nécessaire si $f''(a) = 0$ et $f'''(a) = 0$.

Remarque 2. Dans le cas où $f'(a) = -1$. L'itération est en spirale au voisinage de a.

L'étude est semblable à celle du cas $f'(a) = 1$ et nous la laissons aux soins du lecteur.

Voici quelques exemples :

Exemple 1. $I = [0,4]$ et $f(x) = \sqrt{2+x}$; f est croissante et I est stable. Il y a un unique point fixe $a = 2$. La convergence est en escalier, croissant ou décroissant suivant que $u_0 < 2$ ou $u_0 > 2$. Ce point fixe a est stable, car $f'(a) = \frac{1}{4}$.

Exemple 2. $I = [0,1]$, $f(x) = e^{-x}$; f est décroissante et I est stable. Il y a un unique point fixe a, et la convergence est en spirale. Le point fixe a est stable, car $|f'(a)| = e^{-a} < 1$.

Exemple 3. $I = [0,1]$ $f(x) = 1 - x^2$; f est décroissante et I est stable. Il y a un unique point fixe $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Les autres points fixes de f0f sont 0 et 1. Il y a divergence en spirale. Le point fixe a est répulsif, car $|f'(a)| = 2a = \sqrt{5} - 1 > 1$.

II - ETUDE DE LA RAPIDITE DE CONVERGENCE

Considérons à nouveau un intervalle fermé I de $\mathbb{R}$, et f une application de I dans lui-même, continuement dérivable sur I. On suppose que f admet un point fixe a et un seul (nous avons étudié au I des conditions suffisantes pour qu'il en soit ainsi). Nous savons que si $|f'(a)| > 1$, le point fixe a est répulsif. Nous nous bornerons donc à étudier les trois cas suivants :

$$0 < |f'(a)| < 1, \quad f'(a) = 0, \quad \text{et} \quad |f'(a)| = 1.$$

A. Cas où $0 < |f'(a)| < 1$.

Considérons un nombre réel positif k tel que $|f'(a)| < k < 1$. Comme f' est continue, il existe un intervalle compact $J = [a-\alpha, a+\alpha]$, $\alpha > 0$, tel que pour tout point x de $J \cap I$, $|f'(x)| \leq k$. En outre, d'après le théorème des accroissements finis, pour tout couple (x,y) de points de $J \cap I$,

(1) $$|f(x) - f(y)| \leq k\,|x-y|.$$

Il en découle que $J \cap I$ est un intervalle compact stable par f, (prendre $y = a$), et que f est lipschitzienne dans le rapport k sur $J \cap I$. Donc, pour tout point c de $J \cap I$, la suite (u_n) définie par les relations $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 = c$ converge vers a et

(2) $$|u_n - a| \leq \frac{k^n}{1-k}\,|u_1 - u_0|.$$

Ainsi, (u_n) converge vers a, et $|u_n - a|$ est dominée par k^n.
En fait, on peut améliorer légèrement l'inégalité (2).
En effet, d'après la relation (1),

(11) $$|f(x) - a| \leq k\,|x-a|.$$

En particulier

$$|u_{n+1} - a| \leq k\,|u_n - a|.$$

Par récurrence, nous en déduisons que, pour tout entier $n \geq 1$,

(3) $\quad |u_n - a| \leq k^n |c-a|$.

Cette inégalité est plus précise que (2), mais elle suppose qu'on puisse majorer $|u_0 - a|$, ce qui ne peut être effectué que si l'on connait déjà un encadrement de a, grâce à (2) par exemple !

Remarque. L'inégalité (3) ne peut pas être fortement améliorée : prenons k' tel que $0 < k' < |f'(a)|$. Alors, d'après le théorème des accroissements finis, au voisinage de a,

$$k' |x-a| \leq |f(x)-f(a)|.$$

Par suite,

(3') $\quad k'^n |u_0 - a| \leq |u_n - a|$.

Les relations (3) et (3') suggèrent que $|u_n - a|$ se comporte comme ρ^n, où $\rho = |f'(a)|$ (mais elles ne suffisent pas à le prouver !). Une étude plus fine permet de conclure, sous l'hypothèse supplémentaire où f admet au point a un développement asymptotique de la forme suivante :

$$f(x) = a + (x-a) f'(a) + 0\left[|x-a|^s\right], \quad \text{où } s \in \mathbb{R}, \quad s > 1.$$

Dans ces conditions, posons $v_n = \dfrac{|u_n - a|}{\rho^n}$. Alors v_n converge vers un nombre réel non nul. En effet, si n est assez grand,

$$v_{n+1} = v_n \left[1 + 0\left(|u_n - a|^{s-1}\right)\right]$$

Donc $\log v_{n+1} - \log v_n$ est dominé par $|u_n - a|^{s-1}$. Or d'après (3) $|u_n - a|^{s-1}$ est dominée par $(k^{s-1})^n$, terme général d'une série convergente. Il en découle que la suite $(\log v_n)$ converge et que (v_n) admet une limite finie non nulle b.

On obtient ainsi le

Théorème 1. Evaluation de la rapidité de convergence si $0 < |f'(a)| < 1$.

Soit f une fonction de classe C^1 sur I satisfaisant aux deux conditions suivantes :

a) $0 < |f'(a)| < 1$

b) $f(x) = a + (x-a)f'(a) + O(|x-a|^s)$, *où* $s > 1$.

Il existe alors un nombre réel $b > 0$ tel que

(4) $$|u_n - a| \sim b\,|f'(a)|^n .$$

Ce résultat fournit une estimation très précise de la rapidité de convergence, et montre en particulier que cette rapidité est gouvernée par $|f'(a)|$.

Remarque. Bien entendu, en pratique, on ignore la valeur exacte de a, et de $f'(a)$. C'est pourquoi on utilisera plutôt la relation (3), en prenant pour k le maximum de $|f'|$ sur un petit voisinage compact de a.

B. Cas où $f'(a) = 0$.

La première partie du raisonnement précédent reste valable, et montre que, pour tout nombre k tel que $0 < k < 1$, $|u_n - a|$ est dominée par k^n. Pour évaluer $|u_n - a|$, nous ferons l'hypothèse suivante : Il existe un nombre réel $r > 1$, et un nombre réel $\lambda > 0$ tels que, au voisinage de a,

$$|f(x) - f(a)| \sim \lambda\,|x-a|^r .$$

(Cette hypothèse est satisfaite dans la plupart des cas rencontrés en pratique). Ecartons le cas trivial où $u_n = a$ à partir d'un certain rang. Alors

$$\log(|u_{n+1} - a|) = r \log|u_n - a| + \log\lambda + \delta_n, \text{ où } \delta_n \to 0 .$$

Posons $v_n = |u_n - a|^{r-1}$. La suite v_n diverge vers $+\infty$, et

$$\log v_{n+1} = r \log v_n - \log\lambda - \delta_n .$$

Cette relation suggère que le comportement de $(\log v_n)$ ressemble à celui de (r^n). Posons donc $\log v_n = r^n w_n$. Alors

$$w_{n+1} = w_n + (\log \lambda + \delta_n) \frac{1}{r^{n+1}} \quad .$$

Comme $r > 1$, la série de terme général $(\log \lambda + \delta_n) \frac{1}{r^{n+1}}$ est absolument convergente. Par suite, w_n admet une limite finie ℓ. En outre,

$$w_n = \ell + \sum_{p=n}^{+\infty} (\log \lambda + \delta_p) \frac{1}{r^{p+1}} \quad .$$

Donc

$$w_n = \ell + \frac{\log \lambda}{r-1} \frac{1}{r^n} (1 + \epsilon_n), \quad \text{où} \quad \epsilon_n \to 0.$$

Le comportement asymptotique de $(\log v_n)$ en découle :

$$\log v_n = \ell r^n + \frac{\log \lambda}{r-1} (1 + \epsilon_n)$$

Comme $\log v_n$ tend vers $+\infty$, cette relation montre que ℓ est strictement positif. Finalement,

$$|u_n - a| = \exp(-\ell r^n) \exp \frac{-\log \lambda}{r-1} (1 + \epsilon_n) \quad ,$$

et

$$|u_n - a| \sim \frac{1}{\lambda^{\frac{1}{r-1}}} k^{r^n} \quad \text{où} \quad k = e^{-\ell} \quad .$$

Nous obtenons donc le

Théorème 2. Evaluation de la rapidité de convergence si $f'(a) = 0$.

Soit f une fonction de classe C^1 sur I satisfaisant aux deux conditions suivantes :

a) $f'(a) = 0$;

b) $|f(x) - f(a)| \sim \lambda |x - a|^r$, où $r > 1$, et $\lambda > 0$.

Il existe alors un nombre réel k, $0 < k < 1$, et un nombre réel $b > 0$ tels que

(5) $$|u_n - a| \sim b\, k^{r^n} \quad .$$

Comme $k < 1$, la rapidité de convergence est beaucoup plus grande que dans le cas où $|f'(a)| \neq 0$. Cette rapidité est essentiellement gouvernée par le nombre r, ordre du contact au point fixe a entre la courbe $y = f(x)$ et la tangente (horizontale) à cette courbe. Lorsqu'une suite (u_n) satisfait à une relation du type (5) on dit que la convergence est d'ordre r.

Corollaire. Cas des fonctions de classe C^r.

Supposons que f est de classe C^r sur I, et que

$$f'(a) = 0, \ldots\ldots f^{(r-1)}(a) = 0, \quad f^{(r)}(a) \neq 0.$$

Alors $$|f(x) - f(a)| \sim \left|\frac{f^{(r)}(a)}{r!}\right| |x-a|^r,$$

et la convergence est d'ordre r.

Remarque. En pratique, il n'est pas commode d'évaluer les nombres k et b. On se bornera plutôt à établir une inégalité, analogue à (3). Plus précisément, supposons qu'il existe $\beta > 0$ tel que pour tout point x de $[a-\beta, a+\beta] \cap I$,

(6) $$|f(x)-f(a)| \leq M |x-a|^r \quad \text{où} \quad r > 1, \text{ et } M > 0.$$

(lorsque f satisfait aux hypothèses du corollaire, une telle inégalité résulte facilement de la formule de Taylor-Lagrange).

Soit α un nombre réel strictement positif tel que $\alpha^{r-1} \leq \frac{1}{M}$.

Posons $J = [a-\alpha, a+\alpha]$. Alors, d'après (6), $J \cap I$ est stable par f. Supposons désormais que $u_0 = c$ appartient à $J \cap I$. Alors, pour tout entier n, $u_n \in J \cap I$ et

(7) $$|u_{n+1}-a| \leq M |u_n-a|^r.$$

Par récurrence sur n, nous en déduisons que

(8) $$|u_n-a| \leq \frac{1}{M^{r-1}} k^{r^n}, \quad \text{où} \quad k = M^{\frac{1}{r-1}} |c-a|.$$

(D'après le choix de α, k est strictement inférieur à 1).

L'inégalité (8) fournit une bonne estimation de la rapidité de convergence de la suite (u_n), conforme au théorème 2.

En pratique, on initialise la suite (u_n) dans $J \cap I$, et on fait tourner l'algorithme jusqu'à ce que par exemple $M^{n_0-1}|u_{n_0}-a| \leq 1/10$. Reprenant alors cette valeur (u_{n_0}) comme initialisation de (u_n), on utilise la majoration (8), plus efficace si k est suffisamment petit. On pourra se reporter par exemple au cas du calcul approché des racines carrées pour se convaincre du bien fondé de cette façon de procéder, où encore aux exemples suivants :

Exemple 1. — $I = [0,2]$, $f(x) = 1 + (x-1)^2$, $a = 1$, $c \in]0,2[$

Ici $|u_n - 1| = k^{2^n}$, où $k = |c-1|$.

Calculer (u_n) pour $n \leq 6$, $c = 3/2$.

Exemple 2. — Soit $r > 1$, $I = [0,2]$, $f(x) = 1 + |1-x|^r$, $a = 1$, $c \in]0,2[$

Ici $|u_n - 1| = k^{r^n}$, où $k = |c-1|$.

Calculer (u_n) pour $n \leq 6$, $c = 3/2$, lorsque $r = 3/2$, $r = 4/3$, $r = 11/10$.

Exemple 3. — (ne rentrant pas dans le cadre théorique précédent).

$I = [1-\alpha, 1+\alpha]$, $f(x) = 1 - \dfrac{x-1}{\log|x-1|}$, $a = 1$, où α est choisi tel que I soit stable par f, i.e. tel que $\alpha \leq \dfrac{1}{2}$.

Calculer (u_n) pour $n \leq 6$, $c = 4/3$. Par une étude asymptotique, on pourrait prouver que $\log|u_n - 1| \sim -n \log n$: il suffit de poser $t_n = -\log|u_n - 1|$. Alors $t_{n+1} - t_n = \log t_n$. Donc (cf appendice) $t_n \sim n \log n$).

C. Cas où $|f'(a)| = 1$. Comme ce cas est uniquement destiné à mettre en évidence des convergences très lentes (cas d'intérêt pratique nul), nous nous bornerons à étudier le cas où $f'(a) = 1$, où f est croissante, où $f(x) < x$ si $x > a$, et où $c > a$. Alors la suite (u_n) définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 = c$ est strictement décroissante et converge vers a. Pour étudier la rapidité de cette convergence nous ferons l'hypothèse suivante ; il existe un nombre réel $r > 1$ et un nombre réel $\lambda > 0$ tels que

$$f(x) - x \sim -\lambda(x-a)^r \quad \text{si} \quad \begin{matrix} x \to a \\ x > a \end{matrix}$$

Posons $v_n = u_n - a$. Alors v_n est strictement décroissante et converge vers 0. En outre,

$$(1) \qquad v_{n+1} = v_n - \lambda v_n^r (1+\varepsilon_n), \text{ où } \varepsilon_n \to 0.$$

Pour évaluer la rapidité de convergence de v_n, nous allons prouver qu'il existe un nombre réel $\beta > 0$ tel que $v_{n+1}^\beta - v_n^\beta$ admette une limite finie non nulle ; le lemme de l'escalier permet alors de déterminer la partie principale de v_n^β, et donc de $u_n - a$.

a) D'après (1),

$$v_{n+1}^\beta = v_n^\beta \left[1 - \lambda v_n^{r-1}(1+\varepsilon_n)\right]^\beta = v_n^\beta \left[1 - \lambda\beta v_n^{r-1}(1+\varepsilon'_n)\right]$$

Donc $v_{n+1}^\beta - v_n^\beta \sim -\lambda\beta v_n^{\beta+r-1}$. Pour que $v_{n+1}^\beta - v_n^\beta$ admette une limite finie non nulle, il suffit de prendre $\beta = 1 - r$. Alors $v_{n+1}^\beta - v_n^\beta \to \lambda(r-1)$.

b) Rappelons l'énoncé du lemme de l'escalier (appelé aussi théorème de Césaro) : Soit (a_n) une suite de nombres complexes. Si $a_{n+1} - a_n$ admet une limite ℓ, alors $\frac{a_n}{n}$ converge aussi vers ℓ. En appliquant ce résultat à la suite v_n^β, nous voyons que $v_n^\beta \sim n\lambda(r-1)$, et que $v_n \sim \frac{k}{n^{1/(r-1)}}$ où $k = [\lambda(r-1)]^{1/(1-r)}$. Nous obtenons donc le

Théorème 3. — Evaluation de la rapidité de convergence si $f'(a) = 1$.

Soit f une fonction de classe C^1 sur I, croissante, et satisfaisant aux trois conditions suivantes

a) $f'(a) = 1$

b) Pour tout élément x de I tel que $x > a$, $f(x) < x$

c) $f(x) - x \sim -\lambda (x-a)^r$ si $x \to a$, $x > a$, où $r > 1$ et $\lambda > 0$.

Alors pour tout élément c de I, $c > a$, la suite (u_n) définie par les relations $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 = c$ converge vers a et

(9) $$u_n - a \sim \frac{k}{n^{1/r-1)}} \quad \text{où} \quad k = \left[\lambda (r-1)\right]^{1/1-r)} .$$

La rapidité de convergence est donc beaucoup plus faible que dans le cas où $|f'(a)| < 1$. Elle est essentiellement gouvernée par le nombre r, ordre du contact au point fixe a entre la courbe $y = f(x)$ et la tangente $y = x$ à cette courbe.

Corollaire. Cas des fonctions de classe C^r.

Supposons que f est de classe C^r sur I et que

$$f'(a) = 1, \ f''(a) = 0, \ldots, f^{(r-1)}(a) = 0, f^{(r)}(a) < 0$$

Alors $f(x) - x \sim \frac{f^{(r)}(a)}{r!}(x-a)^r$ si $x \to a$, $x > a$.

Donc $u_n - a \sim \frac{k}{n^{1/(r-1)}}$.

Remarque. Le choix du terme initial c n'influe pas sur la rapidité de convergence.

Exemple 1. $I = [0, +\infty[$, $f(x) = \frac{x}{1+x}$, $a = 0$, $c \in]0, +\infty[$.

Ici $|u_n| \sim \frac{1}{n}$. Plus précisément $u_n = \frac{c}{1+nc}$.

Exemple 2. $I = [0, +\infty[$, $f(x) = x e^{-x}$, $a = 0$, $c \in]0, +\infty[$

Ici encore $|u_n| \sim \frac{1}{n}$. Calculer u_{10^p}, $p \leq 10$.

Exemple 3. $I = [0, \frac{\pi}{2}]$, $f(x) = \sin x$, $a = 0$, $c \in]0, \frac{\pi}{2}]$.

Ici $|u_n| \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$. La convergence est très lente : prendre par exemple $c = \frac{\pi}{2}$ et calculer u_{10^p}, $p \leq 100$.

Exemple 4. (ne rentrant pas dans le cadre théorique précédent)

$I = [0, 1/2]$, $f(x) = x^{1+x}$, $a = 0$, $c \in]0, 1/2]$. Calculer u_{10^p}, $p \leq 10$.

(Par une étude asymptotique on pourrait prouver que $u_n \sim \frac{1}{n \log n}$:

Il suffit de poser $t_n = \frac{1}{u_n}$. Alors $t_{n+1} - t_n \sim \log t_n$. Donc, (cf appendice), $t_n \sim n \log n$).

Exemple 5. Cas de convergence très lente (ne rentrant pas dans le cadre théorique précédent)

$I = [0, +\infty[$, $f(x) = x\left[1 - \exp(-\frac{1}{x})\right]$, $a = 0$, $c \in]0, +\infty[$. Lorsque $c = 1/10$, calculer u_{100}. Lorsque $c = \frac{1}{10^2}$, peut-on effectuer le calcul de u_{10} ?

(Par une étude asymptotique, on pourrait prouver que $u_n \sim \frac{1}{n \log n}$:

Il suffit de poser $t_n = \exp(1/u_n)$. Alors $t_{n+1} - t_n \sim \log t_n$. Donc $t_n \sim n \log n$).

III - ACCELERATIONS DE CONVERGENCE

Soit f une fonction de classe C^1 sur un intervalle fermé I de $\mathbb{R}$. Plaçons-nous dans le cas où l'équation $f(x) = x$ admet une solution a et une seule dans I, mais où le processus des approximations successives converge trop lentement, ou même diverge ; c'est le cas lorsque $|f'(a)|$ n'est pas assez petit. En outre, on ne perdra pas de vue le fait que si $|f'(a)| < 1$ mais est voisin de 1, les erreurs d'arrondi peuvent rendre instable le processus d'itération. On est alors amené à chercher une fonction g continuement dérivable sur un intervalle contenant a et contenu dans I satisfaisant aux conditions suivantes :

a) l'équation $f(x) = x$ équivaut à l'équation $g(x) = x$ lorsque $x \in J$.

b) la valeur de $|g'(a)|$ est très petite, et, si possible, nulle.

La condition b) implique alors qu'il existe un intervalle compact J contenant a, contenu dans I, et stable par g. On applique alors à g le processus des approximations successives pour calculer a.

En outre, les équations à résoudre ne sont pas nécessairement données sous la forme $f(x) = x$. Nous nous placerons donc dans le cas d'une équation de la forme $F(x) = 0$, où F est de classe C^1 sur I, et où F

admet un zéro a et un seul sur I. Il s'agit alors de chercher une fonction g de classe C^1 sur un intervalle J contenant a et contenu dans I satisfaisant aux conditions suivantes :

a) l'équation $F(x) = 0$ équivaut à l'équation $g(x) = x$ lorsque $x \in J$.

b) la valeur de $|g'(a)|$ est très petite et, si possible, nulle.

La recherche de telles fonctions g procède de méthodes très diverses. Nous en décrivons quatre, très classiques : linéarisation par le calcul différentiel, ajustement linéaire, ajustements non linéaires, et passage aux fonctions réciproques. Cette description est suivie de quelques exemples.

A. Linéarisation de l'équation par le calcul différentiel (Méthode de Newton - Raphson)

a) Décrivons d'abord l'idée intuitive gouvernant cette méthode.

Supposons que l'on connaisse déjà une valeur approchée c de l'unique nombre a tel que $F(a) = 0$.

D'après la définition de la dérivée de F au point c, pour tout point x de I, $F(x) = F(c) + (x-c) F'(c) + o(x-c)$.

Comme $F(a) = 0$, et comme $a - c$ est petit, on peut vraisemblablement espérer que $F(c) + (a - c) F'(c)$ est petit par rapport à $(a-c)$.

Dans ces conditions on remplace l'équation non linéaire $F(x) = 0$ par l'équation linéaire approchée

$$(1) \quad F(c) + (x - c) F'(c) = 0.$$

Supposons que F' ne s'annule pas sur I ; Alors (1) admet une solution et une seule

$$(2) \quad d = c - \frac{F(c)}{F'(c)}.$$

On a ainsi construit une "meilleure" valeur approchée d de a. Il reste alors à itérer ce processus, en prenant d comme valeur initiale à la place de c.

On est donc conduit à envisager la suite (u_n) définie par les relations

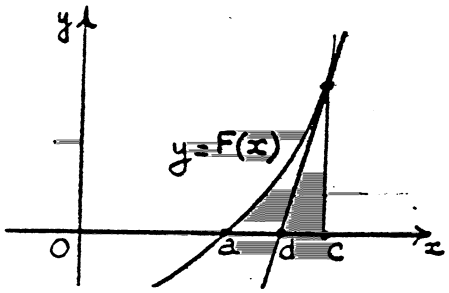
$$(3)\quad u_{n+1} = u_n - \frac{F(u_n)}{F'(u_n)} \qquad \text{(Algorithme de Newton)}$$

$$u_0 = c$$

On trouvera dans l'Annexe 2, un texte très remarquable d'Euler sur l'approche et l'emploi de cette méthode.

Remarque. Interprétation géométrique de la méthode de Newton. On approche a par l'abscisse d de l'intersection avec o x de la tangente au graphe de F au point c.

Il reste à préciser des conditions sous lesquelles (u_n) converge vers a.



Théorème. Convergence de la méthode de Newton

Soit F une fonction de classe C^2 sur $[\alpha,\beta]$ satisfaisant aux conditions suivantes

1) $F(\alpha) < 0$ et $F(\beta) > 0$.

2) F' est à valeurs strictement positives (par suite F est strictement croissante).

3) F'' est à valeurs strictement positives (par suite F est convexe).

Dans ces conditions,

1) il existe un élément a et un seul de $[\alpha,\beta]$ tel que $F(a) = 0$.

2) la fonction $g : x \mapsto x - \frac{F(x)}{F'(x)}$ est de classe C^1 sur I et stabilise l'intervalle $[a, \beta]$; en outre a est l'unique point fixe de g, et $g'(a) = 0$.

3) pour tout point c de $[a, \beta]$, la suite (u_n) définie par les relations (3) est décroissante et converge vers a.

4) la convergence est d'ordre 2 ; plus précisément

$$(4)\quad (u_{n+1} - a) \sim \frac{1}{2}\frac{F''(a)}{F'(a)}(u_n - a)^2$$

et

$$0 \leq u_{n+1} - a \leq \frac{1}{2}\frac{M_2(F)}{m_1(F)}(u_n - a)^2$$

$$(5)\quad \text{où } M_2(F) = \sup_{t\in[\alpha,\beta]} |F''(t)| \text{ et } m_1(F) = \inf_{t\in[\alpha,\beta]} |F'(t)| \ .$$

Assertion 1. Il suffit d'observer que f est continue et strictement croissante.

Assertion 2. g est évidemment de classe C^2. Soit $x \in [a, \beta]$ alors

$$g(x) = x - \frac{F(x)}{F'(x)} \leq x \quad \text{donc} \quad x \leq b.$$

En outre, comme F est convexe, la tangente au point x au graphe de F est en dessous de ce graphe. Donc $F(g(x)) \geq 0$, et, par suite, $g(x) \geq a$. En outre $F(x) = 0$ si et seulement si $g(x) = x$. Enfin,

$$(4) \qquad g'(x) = \frac{F(x) F''(x)}{F'^2(x)} .$$

Assertion 3. Il est immédiat par récurrence que, pour tout n, $u_n \in [a, \beta]$ donc $u_{n+1} = g(u_n) \leq u_n$. La suite (u_n) est donc décroissante. Comme elle est minorée par a, elle converge vers un élément ℓ de $[a, \beta]$. Enfin, comme g est continue au point ℓ, $g(\ell) = \ell$, et donc $\ell = a$.

Assertion 4. Ici $g(a) = a, g'(a) = 0$, $g''(a) = \frac{F''(a)}{F'(a)}$.

$$\text{Donc } (u_{n+1} - a) = g(u_n) - g(a) \sim \frac{1}{2} \frac{F''(a)}{F'(a)} (u_n - a)^2 .$$

Pour majorer $u_{n+1} - a$, nous utiliserons la majoration taylorienne

$$0 \leq F(a) - F(u_n) - (a - u_n) F'(u_n) \leq \frac{1}{2} M_2(F) (u_n - a)^2 ;$$

$$\text{or } F(a) = 0 \text{ et } u_{n+1} - a = (u_n - a) - \frac{F(u_n)}{F'(u_n)} = \frac{(u_n - a) F'(u_n) - F(u_n)}{F'(u_n)} ,$$

$$\text{donc } 0 \leq u_{n+1} - a \leq \frac{1}{2} \frac{M_2(F)}{F'(u_n)} (u_n - a)^2 \leq \frac{1}{2} \frac{M_2(F)}{m_1(F)} (u_n - a)^2 .$$

Remarque 1.

- Si $F'(x) > 0$ et $F''(x) < 0$, il convient de prendre $c \in [\alpha, a]$;
- si $F'(x) < 0$ et $F''(x) > 0$, il convient de prendre $c \in [\alpha, a]$;
- si $F''(x) < 0$ et $F''(x) < 0$, il convient de prendre $c \in [a, \beta]$.

Remarque 2. Lorsque $F''(a) \neq 0$ on sera toujours dans l'un de ces quatre cas à condition de se placer dans un voisinage suffisamment petit de a.

Remarque 3. La méthode de Newton, étant d'ordre 2, est extraordinairement efficace. On notera cependant que cette efficacité n'a lieu que si l'on part déjà d'une valeur c proche de a. En pratique, on pourra prendre

$$\frac{M_2(F)}{2m_1(F)}(c-a) \leq \frac{1}{10}, \quad \text{ou} \quad \frac{M_2(F)}{2m_1(F)}(c-a) \leq \frac{1}{100}.$$

Cette méthode est donc une méthode de grande précision, mais on a souvent intérêt à enclancher l'algorithme (3) seulement après avoir déterminé une valeur initiale c par une autre méthode (dichotomie, ajustement linéaire, ...).

Remarque 4. Il est souvent pénible de calculer $M_2(F)$ et $m_1(F)$. On opère alors de façon expérimentale pour apprécier la différence $(u_n - a)$: on calcule $F(u_n)$. Si par exemple $F(u_n) > 0$, on forme $F(u_n - \frac{1}{10^p})$ où p est entier. Si $F(u_n - \frac{1}{10^p}) < 0$ alors $(u_n - a) \leq \frac{1}{10^p}$.

Remarque 5. On peut remplacer l'hypothèse de convexité par une hypothèse de majoration de F''. Plus précisément, si F est de classe C^2 sur $[\alpha, \beta]$ et satisfait aux conditions suivantes :

1) $F(\gamma) < 0$, $F(\delta) > 0$ où $\gamma = \frac{3\alpha + \beta}{4}$ et $\delta = \frac{\alpha + 3\beta}{4}$;

2) F' est à valeurs strictement positives ;

3) $M_2(F)(\beta - \alpha) < 4m_1(F)$.

Alors :

1) Il existe un élément a et un seul de $[\gamma, \delta]$ tel que $F(a) = 0$.

2) Pour tout n, $g^n([\gamma, \delta])$ est contenu dans $[\alpha, \beta]$; en outre a est l'unique point fixe de g, et $g'(a) = 0$.

3) Pour tout point c de $[\gamma, \delta]$, la suite (u_n) définie par la relation (3) converge vers a.

4) Pour tout entier naturel n,

$$(4)\quad |u_{n+1} - a| \leq \frac{1}{2}\frac{|F''(a)|}{F'(a)}(u_n - a)^2$$

et

$$(5)\quad |u_{n+1} - a| \leq \frac{1}{2}\frac{M_2(F)}{m_1(F)}(u_n - a)^2.$$

La démonstration repose sur la majoration taylorienne suivante : pour tout élément x de $[\alpha,\beta]$

$$|F(x) - a| \leq \frac{1}{2}\frac{M_2(F)}{m_1(F)}(x - a)^2.$$

Par hypothèse $|u_o - a| \leq \frac{\beta - \alpha}{2}$; donc

$$|u_1 - a| \leq k|u_o - a|, \text{ où } k = \frac{M_2(F)}{m_1(F)}\frac{\beta - \alpha}{4} < 1.$$

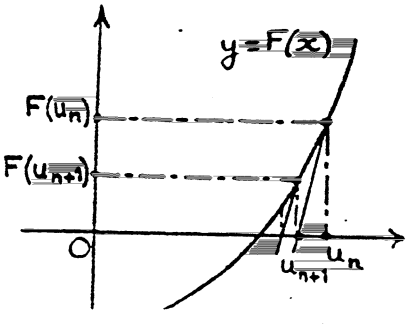
En particulier $u_1 \in [\alpha,\beta]$; par récurrence, on en déduit que $u_n \in [\alpha,\beta]$, et on achève la démonstration comme dans le cas précédent.

Pour d'autres variantes, on pourra se reporter à [27], chapitre 2, où à [16], chap. 7, § 4.

B. Ajustement linéaire. Considérons une équation de la forme $F(x) = 0$, admettant une solution a et une seule, et supposons que $F'(a) \neq 0$, ce qui signifie que a est un zéro simple de F. L'idée consiste à transformer l'équation $F(x) = 0$ en l'équation équivalente $F(x) - \lambda x = -\lambda x$, où λ est un nombre réel non nul à choisir convenablement. On est alors ramené à l'équation à point fixe $g(x) = x$, où $g(x) = x - \frac{F(x)}{\lambda}$. Comme $g'(x) = 1 - \frac{F'(x)}{\lambda}$, on choisit $\lambda = F'(a)$ de telle sorte que $g'(a) = 0$. En pratique il est rare que l'on connaisse $g'(a)$. On prendra donc λ de telle sorte que $|(g'(a)|$ soit suffisamment petit.

Remarque 1. Lorsque l'équation de départ est sous la forme $f(x) = x$, on se ramène à ce cas en posant $F(x) = f(x) - x$.

Remarque 2. Interprétation géométrique.



la relation $u_{n+1} = g(u_n)$ équivaut à la la relation $\lambda(u_{n+1} - u_n) + F(u_n) = 0$. Le point d'abscisse u_{n+1} s'obtient donc en coupant l'axe $0x$ par la droite passant par le point $(u_n, F(u_n))$ de pente λ.

Remarque 3. Nouvelle approche de la méthode de Newton .

En pratique, il est rare qu'on connaîsse $F'(a)$, et il n'est pas possible d'effectuer le choix optimal $\lambda = F'(a)$. Ayant déjà obtenu un encadrement assez fin de a par une autre méthode (dichotomie, méthode de Lagrange ...) on pourra prendre $\lambda = F'(c)$, où c est voisin de a et poser $u_o = c$. On peut alors penser à changer λ à chaque pas de façon à se rapprocher de la valeur optimale $\lambda = F'(a)$, ce qui conduit à l'algorithme suivant

$$u_o = c \qquad \lambda_o = F'(u_o)$$

$$u_1 = u_o - \frac{F(u_o)}{\lambda_o} \qquad \lambda_1 = F'(u_1)$$

$$u_{n+1} = u_n - \frac{F(u_n)}{\lambda_n} \qquad \lambda_{n+1} = F'(u_{n+1})$$

Autrement dit,

$$(1) \quad u_{n+1} = u_n - \frac{F(u_n)}{F'(u_n)} .$$

On retombe ainsi sur la méthode de Newton.

C. Ajustements non linéaires : Méthode de Newton, méthode d'interpolation linéaire.

Le raisonnement précédent amène, plus généralement, à transformer l'équation $F(u) = 0$ en $x = x - \frac{F(x)}{\lambda(x)} = x$, où $x \mapsto \lambda(x)$ est une fonction de x à valeurs non nulles choisie de telle sorte que la fonction $g : x \mapsto x - \frac{F(x)}{\lambda(x)}$ ait un rapport de lipschitz petit, ou, mieux, de telle sorte que $g'(a) = 0$.

Voici quelques exemples importants :

a) Méthode de Newton, autre approche.

$$\text{Comme } g'(x) = 1 - \frac{F'(x)}{\lambda(x)} + \frac{F(x)\lambda'(x)}{\lambda^2(x)},$$

$$g'(a) = 1 - \frac{F'(a)}{\lambda(a)} .$$

Il suffit donc de choisir $\lambda(x) = F'(x)$ pour que la condition $y'(a) = 0$ soit réalisée. Dans ces conditions,

$$(1) \quad g(x) = x - \frac{F(x)}{F'(x)} .$$

On retrouve encore l'algorithme de Newton.

b) Méthode d'interpolation linéaire.

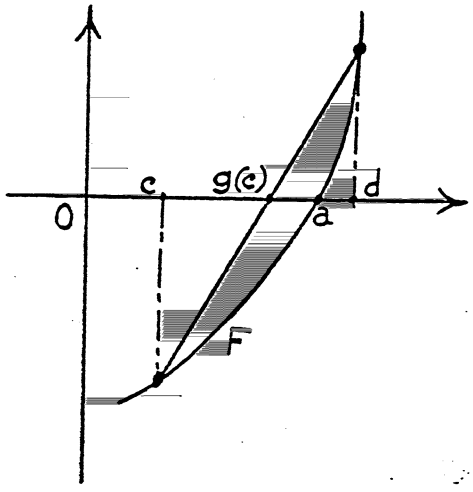
En pratique, il n'est pas toujours simple de calculer F'; on peut prendre pour λ une valeur approchée de F', à savoir le quotient différentiel

$$(2) \quad \lambda(x) = \frac{F(x) - F(d)}{x - d} , \quad \text{où } d \text{ est une valeur approchée de } a .$$

Dans ces conditions,

$$(3) \quad g(x) = x - \frac{x - d}{F(x) - F(d)} F(x) .$$

Remarque. Interprétation géométrique de la méthode d'interpolation linéaire



Supposons que l'on connaisse un encadrement $[c, d]$ de la solution a. Alors $g(c)$ n'est autre que l'abscisse du point d'intersection avec $0x$ de la sécante relative aux points c et d. Autrement dit, on effectue une interpolation linéaire de F sur l'intervalle $[c, d]$, et on remplace l'équation non linéaire $F(x) = 0$ par l'équation linéaire approchée

$$x - \frac{c - d}{F(c) - F(d)} F(c) = 0 .$$

Cette méthode porte des noms variés : interpolation linéaire, sécantes, fausse position, Lagrange, Descartes...

Théorème. Convergence de la méthode d'interpolation linéaire.

Soit F une fonction de classe C^2 sur $[\alpha, \beta]$ satisfaisant aux conditions suivantes :

1) $F(\alpha) < 0$ et $F(\beta) > 0$;

2) F' est à valeurs strictement positives (par suite F est strictement croissante) ;

3) F'' est à valeurs strictement positives (par suite F est convexe).

Dans ces conditions :

1) Il existe un élément a et un seul de $[\alpha,\beta]$ tel que $F(a) = 0$.

2) La fonction $g : x \mapsto x - \frac{x-\beta}{F(x)-F(\beta)} F(x)$ est de classe C^2 sur $[\alpha,\beta]$ et stabilise $[\alpha,\beta]$; en outre, a est l'unique point fixe de g, et $g'(a) = 1 - (\beta - a)\frac{F'(\beta)}{F(\beta)}$ appartient à $]0,1[$.

3) Pour tout point c de $[\alpha,a]$ la suite (u_n) définie par les relations $u_{n+1} = g(u_n)$ et $u_o = c$ est croissante et converge vers a,

- pour tout point c de $[a,\beta[$, la suite (u_n) est décroissante et converge vers a .

4) La convergence est d'ordre 1, plus précisément

$$(4) \quad |u_n - a| \sim k\,|g'(a)|^n$$

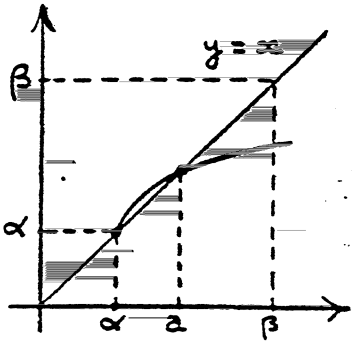
et

$$(5) \quad |u_{n+1} - a| \leq \frac{(\beta-\alpha)}{2} \frac{M_2(F)}{m_1(F)} |u_n - a| \quad .$$

Assertion 1. Immédiate.

Assertion 2. - Si $x \in [\alpha, a]$, $x \leq g(x) \leq a$, donc $g(x) \in [\alpha, a]$

- Si $x \in [a, \beta[$, $a \leq g(x) \leq x$, donc $g(x) \in [a, \beta]$.



(Utiliser la convexité de F).

En outre comme F est strictement convexe,

$$\frac{F(\beta) - F(a)}{\beta - a} > F'(a) .$$

Il en résulte que $0 < g'(a) < 1$.

Assertion 3. La monotonie de (u_n) découle des relations (1). Dans les deux cas (u_n) converge vers un élément ℓ de $]\alpha,\beta[$, et ℓ est point fixe de g. Donc $F(\ell) = 0$, et $\ell = a$.

Assertion 4. Comme $0 < g'(a) < 1$, la relation (4) découle de l'étude faite au II (Théorème 1).

D'autre part

$$|u_{n+1} - a| = \frac{(\beta - a)\, h(u_n)}{F(u_n) - F(\beta)} \quad , \text{où}$$

$$h(x) = F(x) - F(\beta)\frac{x - a}{\beta - a} \quad .$$

Comme $h(a) = h(\beta) = 0$, $|h(x)| \leq |(x - \beta)(x - a)| \frac{M_2(F)}{2!}$.

Il en découle que

$$|u_{n+1} - a| \leq \frac{M_2(F)\,|\beta - a|\,|(u_n - \beta)(u_n - a)|}{2\, m_1(F)\,|u_n - \beta|} \leq \frac{M_2(F)}{m_1(F)} \frac{\beta - \alpha}{2} |u_n - a| ,$$

ce qui prouve la relation (5).

Remarque 1. On dispose d'énoncés analogues si F est décroissante, ou concave.

Remarque 2. Contrairement à ce qui se passe pour la méthode de Newton, il y a convergence quelle que soit la valeur initiale $c \in [\alpha, \beta]$.

Remarque 3. Cette méthode, étant du premier ordre, est bien moins performante que celle de Newton. Néanmoins on peut obtenir des méthodes du second ordre en effectuant des extrapolations. Voir [27] Chap. 2 et [16], Chap. 7, § 4.

Remarque 4. Comme dans la méthode de Newton, on peut abandonner l'hypothèse de convexité, en la remplaçant par une majoration de $\frac{M_2(F)}{m_1(F)}$.

D. Passage aux fonctions réciproques

Considérons une équation $f(x) = x$ et supposons que pour tout point x de I, $|f'(x)| > 1$. Alors, comme f' ne s'annule pas, f est strictement monotone sur I et admet donc une fonction réciproque g définie sur $I' = f(I)$. En outre g est de classe C^1 sur I' et, pour tout

point y de I' ,

$$|g'(y)| = \frac{1}{|f'(x)|} \qquad \text{où } y = f(x).$$

Donc $|g'(y)| < 1$, et la méthode des approximations successives s'applique à g.

Remarque. Bien entendu cette méthode est déconseillée si les fonctions réciproques sont compliquées à calculer, ou si les rapports de lipschitz sont trop voisins de 1.

E. Cas des racines multiples

Les méthodes précédentes échouent si $F'(a) = 0$ (ou si $F'(a)$ est trop voisin de 0). Il convient alors de transformer préalablement l'équation $F(x) = 0$ de telle sorte que la racine a devienne une racine simple.

En analyse numérique, cette difficulté survient dès que deux racines sont mal séparées. Pour l'étude de tels cas on pourra se reporter à Durand, Chapitre 2 [27], et Berezin et Zhydkov, Chap. 7 [16].

F. Quelques exemples illustrent ces méthodes et permettant de comparer expérimentalement leur performance.

Exemple 1. Résoudre l'équation numérique $\operatorname{tg} x = x$, où $x \in]\pi, \frac{3\pi}{2}[$, à la précision 10^{-8}.

a) Poser $\operatorname{tg} x = y$ (Méthode des fonctions réciproques).

b) Traiter ensuite les cas où $x \in]n\pi, n\pi + \pi/2[$, lorsque $n = 2, 3, 4$.

c) Utiliser la méthode de Newton pour l'équation $\operatorname{tg} x = x$, puis pour l'équation $y = \operatorname{Arctg} y + n\pi$.

d) On peut relier cet exercice à la recherche d'une évaluation asymptotique de l'unique solution x_n de $\operatorname{tg} x = x$ sur $]n\pi, n\pi + \pi/2[$.

Exemple 2. Résoudre l'équation numérique $e^{5x} = x + 100$, où $x \geq 0$, à la précision 10^{-8}. Il est clair que $a \in [0, 1]$.

a) Transformer cette équation en

$$y = \frac{1}{5}\operatorname{Log}(y + 100), \text{ ou } z = \operatorname{Log}\left(\frac{z}{5} + 100\right).$$

b) Utiliser la méthode de Newton.

c) Comparer la performance de ces deux méthodes.

Exemple 3. Résoudre l'équation numérique $\operatorname{sh} x = 100x$, à la précision 10^{-8}.

a) Poser $y = \operatorname{sh} x$.

b) Poser $y = e^x$.

c) Utiliser un ajustement linéaire.

d) Comparer la performance de ces méthodes.

Exemple 4. Résoudre l'équation numérique $x = 30 \operatorname{Log} x + 100$ à la précision 10^{-8}.

a) Déterminer d'abord la partie entière de la solution a.

b) Effectuer un ajustement linéaire.

c) Employer la méthode de Newton.

d) Comparer la performance des procédés b) et c).

Exemple 5. Résoudre l'équation numérique $x^3 + x - 1 = 0$ à la précision 10^{-8}.

a) Prouver que $a \in [2/3, 3/4]$.

b) Effectuer un ajustement linéaire en prenant $\lambda = F'(2/3)$.

c) Employer la méthode de Newton.

d) Comparer.

Exemple 6. Résoudre l'équation $x = \operatorname{Log} x + 2$, $x \geq 1$, à la précision 10^{-8}.

a) Combien faudrait-il d'itérations par l'algorithme $u_{n+1} = \operatorname{Log} u_n + 2$, $u_0 = 3$?

b) Effectuer un ajustement linéaire en prenant $\lambda = F'(3) = 2/3$, puis $\lambda = F'(u_1)$.

c) Employer la méthode de Newton.

d) Comparer.

Remarque. Dans les exemples précédents, on a choisi la précision 10^{-8} pour pouvoir apprécier plus clairement les performances des méthodes utilisées, ce que ne permettrait pas une précision moindre.

Exemple 7. Etudier la suite (u_n) définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = e^{1-u_n}$, et la condition initiale $u_o = c$, où $c \in [0, +\infty[$.

a) Montrer que (u_n) converge vers 1.

b) Déterminer la partie principale de $v_n = u_n - 1$.

c) Expliquer pourquoi une expérimentation sur calculatrice conduit à une divergence pour cette suite.

Dans la brochure analyse II, on trouvera de nombreux exemples mettant en jeu une dialectique entre l'expérimentation et le contrôle théorique des algorithmes et des moyens de calculs, ainsi qu'un choix d'activités proposées à des classes de niveaux variés.

G. Etant donnée une équation $F(x) = 0$, admettant une solution a et une seule, et telle que $F'(a) \neq 0$, il est possible, en généralisant la méthode de linéarisation, de construire des algorithmes d'approximation de a dont la rapidité de convergence est d'ordre aussi grand (ou aussi petit) que l'on voudra. Deux de ces procédés sont esquissés dans l'annexe 3. Cependant, en pratique, de tels algorithmes ne sont pas employés, car ils sont peu performants : en effet, le gain de rapidité de convergence est compensé par la complexité des calculs à effectuer à chaque pas.

H. Nous conclurons cette étude par sa mise à l'épreuve sur quelques exemples très simples, mais d'usage constant :

a) Approximations de l'inverse d'un nombre

- La méthode élémentaire consiste à effectuer des divisions euclidiennes. Sa rapidité de convergence est en $1/10^n$. Elle est assez performante pour déterminer l'ordre de grandeur du résultat, mais le devient beaucoup moins lorsqu'on recherche une précision meilleure. Elle revient d'ailleurs à effectuer une décachotomie. On peut aussi opérer par dichotomie, ce qui diminue le nombre de tris à effectuer.

- Lorsque l'on désire améliorer la précision d'un inverse approché c d'un nombre donné b (par exemple celui donné par une calculatrice) on peut calculer exactement (en employant s'il le faut une technique de multiprécision) le produit cb, qui est alors très peu différent de 1, et que l'on écrit $cb = 1 + h$. Le développement en série de $\frac{1}{1+h}$ fournit des valeurs approchées de $\frac{1}{b} = \frac{c}{1+h}$. La convergence est géométrique de raison h ; la méthode est

donc plus performante que la précédente dès que $|h| \leq \frac{1}{2}$ dans le cas d'une dichotomie, ou $|h| \leq \frac{1}{10}$ dans le cas de la division en système décimal. On peut l'interpréter par la méthode de linéarisation qui conduit à l'algorithme $u_{n+1} = c - h u_n$, $u_o = c$.

- Si l'on désire une très grande précision (calcul de la période de $1/n$, conjectures de type arithmétiques, comparaison de la performance de méthodes diverses sur un exemple crucial) on peut résoudre l'équation $b x = 1$ en appliquant la méthode de Newton à $F(x) = b - \frac{1}{x}$, ce qui conduit à l'algorithme, $u_{n+1} = u_n - \frac{F(u_n)}{F'(u_n)} = u_n(2 - b u_n)$, qui ne nécessite que des calculs de produits, et que l'on initialise par la relation $u_o = c$, où c est un inverse approché de a.

Posons $a = 1/b$. Il est immédiat que

$$u_{n+1} - a = -b(u_n - a)^2$$

Donc, dès que $0 < c < 2/b$, la suite u_n converge vers a ; en outre la convergence est d'ordre 2, et le processus est auto-correctif. Donc si l'on part d'une valeur c exacte à 10^{-4} près, deux pas fournissent déjà la précision 10^{-16}, et trois pas 10^{-32} ! On peut d'ailleurs initialiser avec la valeur donnée par la calculatrice !

Remarque. On peut étendre ces deux dernières méthodes au cas des matrices carrées. Supposons par exemple que l'on ait déjà déterminé une valeur approchée C de l'inverse A d'un élément B de $M_n(K)$ (par exemple par la méthode du pivot de Gauss). On peut alors améliorer rapidement C par les méthodes précédentes, qui conduisent respectivement aux algorithmes

$$U_{n+1} = C - U_n H, \quad U_o = C, \text{ d'ordre 1.}$$

$$U_{n+1} = 2U_n - U_n A U_n, \quad U_o = C, \text{ d'ordre 2.}$$

b) Approximations de la racine carrée d'un nombre réel positif.

- Les méthodes par dichotomie, décachotomie, ... permettent de trouver facilement un ordre de grandeur pour $\sqrt{b}$; mais leur performance est insuffisante si l'on désire une grande précision.

- Lorsque l'on désire améliorer la précision d'une racine carrée approchée c on peut calculer $c^{-2}b$ à la précision voulue, et l'on écrit $c^{-2}b = 1 + h$, ce

qui ramène au calcul de $\sqrt{1+h}$. Par un ajustement linéaire, on est conduit à l'algorithme $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2}[(1+h) - u_n^2]$, $u_o = 1$, qui est d'une bonne performance si $|h| \leq \frac{1}{10}$, et qui ne nécessite aucun calcul de quotients.

- Si l'on désire une grande précision on peut résoudre l'équation $x^2 = b$ en appliquant la méthode de Newton (comme aussi dans ce cas particulier sous le nom de méthode de Héron) à la fonction $F(x) = x^2 - b$, ce qui conduit à l'algorithme classique $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{b}{u_n})$, $u_o = c$. Posons $a = \sqrt{b}$. Il est immédiat que $u_{n+1} - a = \frac{1}{2u_n}(u_n - a)^2$, et que $u_n \geq a$ pour $n \geq 1$. Donc $|u_{n+1} - a| \leq \frac{1}{2a}|u_n - a|^2$. La convergence est d'ordre 2. On notera néanmoins qu'il convient d'initialiser avec une valeur c telle que $\frac{c-a}{2c}$ soit déjà suffisamment petit ; sinon pour les premiers pas de l'algorithme la convergence est géométrique de raison $1/2$, ce qui est fort médiocre. Une méthode possible est de se ramener au cas où $1 \leq b \leq 4$ par multiplication de b par 4^k, $k \in \mathbb{Z}$; on peut alors initialiser l'algorithme de Newton par les relations $u_o = 1$ si $1 \leq b \leq 2$ et $u_o = 2$ si $2 \leq b \leq 4$. Il est facile de voir que dans tous les cas $0 \leq u_2 - a \leq \frac{1}{400}$. La convergence est alors extraordinairement rapide.

Remarque 1. On pourrait aussi appliquer la méthode de Newton à d'autres fonctions. En effet l'équation $F(x) = x^2 - b = 0$ équivaut aussi à $G(x) = 1 - b/x^2 = 0$, ou encore $H(x) = x - \frac{a}{x} = 0$, qui conduisent aux algorithmes respectifs

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2b}(3b - u_n^2) \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = \frac{2bu_n}{u_n^2 + b} .$$

On pourra, à titre d'exercice, comparer la rapidité de convergence et la performance de ces algorithmes à celle de l'algorithme classique ; on notera que le premier d'entre eux évite le calcul de quotients à chaque pas : il suffit d'avoir calculé $1/b$ une fois pour toutes.

Remarque 2. L'algorithme de Newton permet aussi de déterminer des valeurs approchées de la racine carrée d'une matrice symétrique définie positive.

c) Racines cubiques, racines $p^{èmes}$.

- La dichotomie, ou la décachotomie, permet de trouver un ordre de grandeur de $a = \sqrt[3]{b}$, $b > 0$.

- La méthode de Newton peut s'appliquer aux fonctions $x \mapsto x^3 - b$, $x \mapsto 1 - b/x^3$, $x \mapsto x^2 - b/x$, $x \mapsto x - \frac{b}{x^2}$. Il est intéressant de comparer la rapidité de convergence et de performance de ces algorithmes.

- Une autre idée est de se ramener à des extractions de racines carrées successives, en écrivant l'équation $x^3 = a$ sous la forme $x^4 = b\,x$ et en passant aux fonctions réciproques $x = \sqrt[4]{bx}$. On pourra étudier la convergence de cet algorithme, qui est géométrique.

- Pour les racines $p^{\text{ièmes}}$ les calculs les plus simples consistent à appliquer la méthode de Newton, à $x \mapsto x^p - b$ ou $x \mapsto 1 - \frac{b}{x^p}$, ce qui conduit aux algorithmes

$$u_{n+1} = \frac{1}{p}\left[(p-1)u_n + \frac{b}{u_n^{p-1}}\right] \text{ et } u_{n+1} = \frac{u_n}{p}\left[(p+1) - \frac{u_n^p}{b}\right].$$

Le dernier algorithme est spécialement commode pour calculer l'inverse de $\sqrt[p]{b}$.

Remarque. Sur le plan didactique, il n'y a pas intérêt à automatiser prématurément l'algorithme $u_{n+1} = u_n - \frac{F(u_n)}{F'(u_n)}$. La reprise sur chaque exemple de la démarche de linéarisation par le calcul différentiel est bien plus formatrice et motivante. On pourra se référer au texte d'Euler cité en annexe 2, qui peut être proposé aux élèves pour emploi et critique.

d) Une approximation parabolique de F (cf. annexe 3) permet d'aboutir à des algorithmes ayant une rapidité de convergence d'ordre 3. Pour l'équation $x^2 = a$, on aboutit aux algorithmes suivants :

$$u_{n+1} = u_n\left[1 - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{b}{u_n^2}\right) - \frac{1}{8}\left(1 - \frac{b}{u_n^2}\right)^2\right],$$

$$u_{n+1} = u_n\left[1 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{u_n^2}{b}\right) + \frac{3}{8}\left(1 - \frac{u_n^2}{b}\right)^2\right],$$

$$u_{n+1} = u_n\,\frac{u_n^2 + 3b}{3u_n^2 + b}.$$

dont on pourra comparer la rapidité de convergence et la performance.

★ ★

★

ANNEXE 1 - METHODES DE COMPACITE

Ces méthodes consistent à étudier le comportement d'une suite numérique (u_n) à l'aide de l'ensemble de ses valeurs d'adhérence. Nous esquissons ici la mise en oeuvre de cette méthode, les démonstrations sont laissées en exercice.

Définition : Valeurs d'adhérence d'une suite

Soit (u_n) une suite de nombres réels. On dit qu'un élément a de $\bar{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ est une valeur d'adhérence de (u_n) s'il existe une suite $(u_{\varphi(p)})$ extraite de (u_n) convergeant vers a dans $\bar{\mathbb{R}}$. Cela revient encore à dire que pour tout voisinage V de a, l'ensemble des entiers n tels que $a_n \in V$ est infini.

Remarque. La suite (u_n) converge vers a dans $\bar{\mathbb{R}}$ si et seulement si, pour tout voisinage V de a, il existe un entier n_o tel que, pour tout entier $n \geq n_o$, $a_n \in V$. Il en découle que, dans ces conditions, la suite (u_n) admet une valeur d'adhérence et une seule, à savoir a. En revanche les valeurs d'adhérence de la suite $(-1)^n$ sont 1 et -1.

Deux théorèmes fondamentaux gouvernent ce concept.

Théorème 1. (Bolzano - Weierstrass). Toute suite bornée de nombres réels admet au moins une valeur d'adhérence dans $\mathbb{R}$; toute suite de nombres réels admet au moins une valeur d'adhérence dans $\bar{\mathbb{R}}$.

La première assertion se démontre par dichotomie ; la seconde s'y ramène facilement.

Remarque. Il existe des suites de nombres réels n'admettant aucune valeur d'adhérence dans $\mathbb{R}$ (exemples : $u_n = n$, $u_n = -n$, $u_n = (-1)^n n, \ldots$). La compacité joue ici un rôle essentiel. C'est pourquoi on introduit $\bar{\mathbb{R}}$ dans cette question.

Théorème 2. Propriétés de l'ensemble des valeurs d'adhérence.

Soit (u_n) une suite de nombres réels.

1. L'ensemble T des valeurs d'adhérence de (u_n) est une partie fermée non vide de $\overline{\mathbb{R}}$.

2. Tout ouvert U de $\overline{\mathbb{R}}$ contenant T contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang.

(Pour l'assertion 2, raisonner par l'absurde et utiliser le théorème 1).

Corollaire 1. Caractérisation des suites convergentes

Soit (u_n) une suite de nombres réels.

Pour que (u_n) converge, il faut et il suffit que T soit réduit à un point et un seul.

Remarque 1. Ici aussi, il est essentiel de se placer dans l'espace compact $\overline{\mathbb{R}}$. Par exemple, la suite (u_n) définie par les relations $u_{2n} = 0$ et $u_{2n+1} = n$ diverge, mais admet une seule valeur d'adhérence dans $\mathbb{R}$.

Remarque 2. Pour prouver la divergence d'une suite, on construit souvent deux suites extraites convergeant vers des limites distinctes. Le corollaire précédent montre que, réciproquement, toute suite divergente admet au moins deux valeurs d'adhérence.

Corollaire 2. Suites dont l'incrément tend vers 0

Soit (u_n) une suite de nombres réels telle que $u_{n+1} - u_n \longrightarrow 0$.

Alors l'ensemble T des valeurs d'adhérences de (u_n) est un intervalle fermé non vide $[a,b]$ de $\overline{\mathbb{R}}$.

(Raisonner par l'absurde).

En particulier, si $u_{n+1} - u_n \longrightarrow 0$, et si T est fini, alors (u_n) converge.

Théorème 3. Ensemble des valeurs d'adhérence des suites définies par itération.

Soient f une application continue d'un intervalle compact de $\mathbb{R}$ dans lui-même, et (u_n) la suite définie par la relation de récurrence

$u_{n+1} = f(u_n)$ et par la condition initiale $u_o = c$.

Soit enfin T l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n). Alors T est contenu dans $[\alpha,\beta]$ et $f(T) = T$.

(Utiliser le théorème de Bolzano-Weierstrass).

Corollaire 1. Cas des applications diminuant strictement la distance.
Si, en outre, pour tout couple de points distincts (x, y) de $[a,b]$, $|f(x) - f(y)| < |x-y|$, alors (u_n) converge vers l'unique point fixe de f.

(Supposer par l'absurde que T contient au moins deux points, considérer le plus petit élément u de T et le plus grand élément v de T, et des éléments u' et v' de T tels que $u = f(u')$ et $v = f(v')$).

Corollaire 2. Suites itératives dont l'incrément converge vers 0.

Soit f une application continue de $[\alpha, \beta]$ dans lui-même et u_n la suite définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ et la condition initiale $u_o = c$ où $c \in [\alpha,\beta]$. Si $u_{n+1} - u_n \to 0$ alors u_n converge vers un point fixe de f. (considérer l'ensemble fermé F des points fixes et l'intervalle T des valeurs d'adhérence de (u_n), observer que T est contenu dans F et en déduire que T est réduit à un seul point).

Corollaire 3. Recherche d'un point fixe par barycentration.

Soit f une application continue de $[\alpha, \beta]$ dans lui-même et (u_n) la suite définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = (1 - \frac{1}{n})u_n + \frac{1}{n} f(u_n)$ et la condition initiale $u_o = c$ où $c \in [\alpha, \beta]$. Alors (u_n) converge vers un point fixe a de f.

- Considérer l'ensemble fermé F des points fixes et l'ensemble T des valeurs d'adhérences de (u_n).
- Prouver que la suite (u_n) converge : on supposera par l'absurde qu'il existe des points a' et b' de T tels que $a' < b'$, et montrer alors que tout point x de $]a', b'[$ est un point fixe de f.
- Prouver enfin que la limite a de (u_n) est un point fixe de f (supposer par l'absurde que $f(a) \neq a$ et observer que $u_{n+1} - u_n \sim \frac{1}{n}[f(a) - a]$).

Remarque. Gérard RAUZY nous a signalé que cette méthode ne s'étend pas au cas des applications f du disque unité compact dans lui-même. Plus précisément, soit f l'application de $D^1_o(1)$ dans lui-même définie par les relations $f(0) = 0$, $f(\rho e^{i\theta}) = 2\rho e^{i\theta}$ si $\theta \in \mathbb{R}$, et $\rho \in]0, 1/2]$ $f(\rho e^{i\theta}) = e^{2i\theta}$ si $\theta \in \mathbb{R}$ et $\rho \in [1/2, 1]$. Alors aucun processus de barycentration ne permet d'obtenir l'unique point fixe 0. Ainsi, dès que la dimension dépasse 1, les phénomènes de rotation peuvent empêcher les processus itératifs de converger vers un point fixe de f.

* $f(\rho e^{i\theta}) = e^{i[\theta + (2\rho - 1)\pi/4]}$ si $\theta \in \mathbb{R}$ et $\rho \in [\frac{1}{2}, 1]$

ANNEXE 3 - RECHERCHE DE CONVERGENCES OU DE DIVERGENCES D'ORDRE DONNE.

Nous esquissons d'abord une méthode générale, reposant sur la formule d'inversion d'Euler-Lagrange, et nous détaillons ensuite la recherche de convergences rapides et de convergences lentes pour les racines carrées.

Méthode d'Euler-Lagrange. Soit F une fonction de classe C^∞ sur $[\alpha,\beta]$, dont la dérivée ne s'annule pas. Pour tout élément b de $[F(\alpha), F(\beta)]$, il existe un élément a de $[\alpha,\beta]$ et un seul tel que $F(a) = b$.

Soit φ la fonction réciproque de F. Lorsque $y \to b$, $x = \varphi(y) \to a$. L'idée consiste à évaluer la différence $x - a$ par un développement taylorien de φ au point $y = F(x)$, ce qui consiste à généraliser la méthode de linéarisation de Newton-Raphson :

$$a = \varphi(y+b-y) = \varphi(y) + \frac{(b-y)}{1!}\varphi'(y) + \frac{(b-y)^2}{2!}\varphi''(y) + \dots + \frac{(b-y)^p}{p!}\varphi^{(p)}(y) + 0(y-b)^{p+1}$$

Or, pour tout entier $k \geq 1$, $\varphi^{(k)}(y) = \left[\frac{1}{F'(x)} D\right]^{k-1} \frac{1}{F'(x)}$,

où D désigne l'opérateur de dérivation. Donc

$$(1)\quad a = x + \frac{(b-F(x))}{1!}\frac{1}{F'(x)} + \frac{(b-F(x))^2}{2!}\frac{F''(x)}{F'^3(x)} + \dots + \frac{(b-F(x))^p}{p!}\left[\frac{1}{F'(x)} D\right]^{p-1}\left(\frac{1}{F'(x)}\right) + R_p$$

où $|R_p(x)| \leq M \frac{|b-F(x)|^{p+1}}{(p+1)!} \leq K|x-a|^{p+1}$,

car $b - F(x)$ est dominé par $(x-a)$.

La relation (1) est connue sous le nom de formule d'inversion d'Euler-Lagrange ; elle sert notamment à calculer le développement limité d'une fonction réciproque.

Plaçons-nous maintenant dans le cas particulier où $b = 0$, et où l'on cherche à approcher l'unique solution a de l'équation $F(t) = 0$. Nous voyons que

$$(1)\quad a = f_p(x) + R_p(x)$$

$$(2)\quad f_p(x) = x - \frac{F(x)}{F'(x)} - \frac{F^2(x)F''(x)}{2F'(x)^3} + \dots + (-1)^p \frac{F(x)^p}{p!}\left[\frac{1}{F'(x)} D\right]^{p-1}\left(\frac{1}{F'(x)}\right)$$

(3) $|R_p(x)| \leq K(x-a)^{p+1}$.

Supposons que l'on connaisse une valeur approchée c de a. Vu les relations précédentes, il est clair que $d = f_p(c)$ est une valeur approchée bien meilleure. On peut alors itérer ce processus, ce qui conduit à envisager la suite (u_n) définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = f_p(u_n)$ et la condition initiale $u_o = c$. Les relations (1) et (3) montrent alors que

$$|u_{n+1} - a| = |f_p(u_n) - a| = |R_p(u_n)| \leq K|u_n - a|^{p+1} .$$

la convergence est donc d'ordre $p+1$.

Remarque. Lorsque $p = 1$, on retrouve la méthode de Newton. Lorsque F, F' et F'' sont assez simples, on peut envisager de prendre $p = 2$, ce qui fournit une convergence d'ordre 3. En pratique, on ne va pas au delà de $p = 2$, car les algorithmes deviennent très complexes et la performance est plutôt moins bonne, bien que la rapidité de convergence soit meilleure.

Dans les deux exemples qui suivent, nous employons une variante de cette méthode.

Exemple 1. — Convergences en exponentielles itérées pour la recherche des racines carrées.

Soit a un nombre rationnel positif. La méthode des approximations successives consiste à calculer $\sqrt{a}$ par résolution approchée de $f(x) = x$, où $f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{a}{x})$.

L'obtention d'une erreur en $(q)^{2^n}$ tient au fait que $f'(\sqrt{a}) = 0$. On est conduit à généraliser ce procédé en cherchant pour un entier k donné, une fonction f satisfaisant aux conditions :

$$f(\sqrt{a}) = \sqrt{a} \qquad f'(\sqrt{a}) = 0 \ldots\ldots f^{(k)}(\sqrt{a}) = 0.$$

Comme dans le cas particulier précédent, on cherche f sous la forme $f(x) = \frac{Q_k(x)}{x}$ où Q_k est un polynôme pair à coefficients rationnels.

Les conditions requises pour f sont alors équivalentes aux suivantes :

$$Q_k(\sqrt{a}) = a \quad Q'_k(\sqrt{a}) = \quad a \quad Q''_k(\sqrt{a}) = 0 \ldots\ldots Q_k^{(k)}(\sqrt{a}) = 0 .$$

Enfin, le changement de variable $x \mapsto \frac{x}{\sqrt{a}}$ permet de se ramener à un problème ne faisant pas intervenir a. Plus précisément, si $Q_k(x) = aP_k(\frac{x}{\sqrt{a}})$, le polynôme P_k doit être pair, à coefficients rationnels et vérifier les conditions :

$$P_k(1) = 1 \,,\; P'_k(1) = 1 \,,\; P''_k(1) = 0 \,,\ldots, P_k^{(k)}(1) = 0 .$$

Pour calculer P_k, observons que P''_k est un polynôme dont les $k-2$ premières dérivées s'annulent pour les racines 1 et -1. $P''_k(x)$ est donc divisible par $(x-1)^{k-1}$ et $(x+1)^{k-1}$ donc par $(x^2-1)^{k-1}$.

Prenons $P''_k(x) = \frac{1}{a_k}(1-x^2)^{k-1}$, où $a_k \in \mathbb{R}_+^*$.

Par intégration et en tenant compte des conditions imposées, on doit avoir

$$P'_k(x) = \frac{1}{a_k}\int_0^x (1-t^2)^{k-1}\,dt \,, \qquad P_k(x) = \frac{1}{a_k}\left[x\int_0^x (1-t^2)^{k-1}\,dt - \frac{1}{2k}(1-t^2)^k\right],$$

et finalement, $a_k = \int_0^1 (1-t^2)^{k-1}\,dt$.

Inversement, il est clair que le polynôme P_k ainsi défini vérifie toutes les conditions demandées.

Voyons maintenant si la fonction $f(x) = \frac{a}{x}P_k(\frac{x}{\sqrt{a}})$ nous permet d'obtenir par itération des valeurs approchées de $\sqrt{a}$, et majorons l'erreur

en écrivant $f(x) - \sqrt{a} = \frac{1}{x}\left[a P_k\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right) - x\sqrt{a}\right]$.

Le numérateur est un polynôme s'annulant pour $\sqrt{a}$, ainsi que ses k premières dérivées. Il existe donc un polynôme $R_k(x)$ tel que

$$f(x) - \sqrt{a} = \frac{R_k(x)}{x}(x - \sqrt{a})^{k+1}$$

Il est simple maintenant de déterminer un intervalle de centre $\sqrt{a}$ stable par f. En effet, pour tout élément x de $\left[\frac{\sqrt{a}}{2}, \frac{3\sqrt{a}}{2}\right]$

$$|f(x) - \sqrt{a}| \leq M |x - \sqrt{a}|^{k+1},$$

où $M = \sup_{x \in \left[\frac{\sqrt{a}}{2}, \frac{3\sqrt{a}}{2}\right]} \left|\frac{R_k(x)}{x}\right|$.

Prenons maintenant un réel ϵ tel que $0 < \epsilon < \frac{\sqrt{a}}{2}$;

l'intervalle $]\sqrt{a} - \epsilon, \sqrt{a} + \epsilon[$ sera stable pour f si $M\epsilon^{k+1} \leq \epsilon$, c'est-à-dire $M\epsilon^k \leq 1$ ou encore $0 < \epsilon \leq \sqrt[k]{\frac{1}{M}}$. Donc

$$\forall x \in]\sqrt{a} - \epsilon, \sqrt{a} + \epsilon[, \quad |f(x) - \sqrt{a}| \leq M |x - \sqrt{a}|^{k+1}.$$

Considérons alors une suite d'itérés par f, dont le premier terme x_0 appartient $]\sqrt{a} - \epsilon, \sqrt{a} + \epsilon[$.

L'inégalité précédente nous permet de définir de proche en proche une suite de majorants e_n des erreurs $|x_n - \sqrt{a}|$

$$e_0 = \epsilon \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad e_{n+1} = M(e_n)^{k+1}$$

On peut expliciter le terme général de cette suite en fonction de n. (la suite $\gamma_n = \text{Log } e_n$ est de la forme classique $\gamma_{n+1} = \alpha\gamma_n + \beta$)

On obtient $e_n = \frac{1}{\sqrt[k]{M}} q^{(1+k)^n}$, avec $q = \epsilon\sqrt[k]{M}$, $0 < q < 1$,

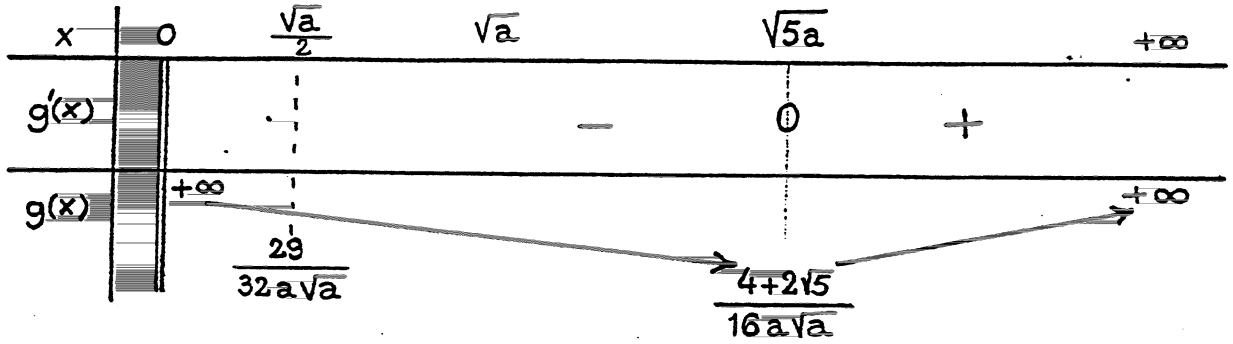
Ce qui est conforme au Théorème 2 du C.

Voici un exemple d'évaluation de l'erreur, pour n = 3.

$$f_3(x) = \frac{1}{16}\left(15x - \frac{5x^3}{a} + \frac{x^5}{a^2} + \frac{5a}{x}\right).$$

Alors $f_3(x) - \sqrt{a} = (x-\sqrt{a})^4 \cdot g(x)$ avec $g(x) = \frac{1}{16a^2}\left[x + 4\sqrt{a} + \frac{5a}{x}\right]$

Rappelons que l'on veut majorer $|g(x)|$ sur un intervalle de centre $\sqrt{a}$ et stable par f. Etudions les variations de g sur l'intervalle $]0, +\infty[$.



On voit que $\frac{29}{32a\sqrt{a}}$ est un majorant de $|g|$ sur l'intervalle $\left[\frac{\sqrt{a}}{2}, \sqrt{5a}\right]$.

Soit ε réel positif. Alors $[\sqrt{a} - \varepsilon, \sqrt{a} + \varepsilon]$ est inclus dans l'intervalle ci-dessus si et seulement si $\varepsilon \leq \frac{\sqrt{a}}{2}$. Il sera aussi stable par f_3, car la condition $\frac{29}{32a\sqrt{a}}\varepsilon^4 \leq \varepsilon$ est réalisée si $\varepsilon \leq \frac{\sqrt{a}}{2}$.

En définitive, si $|x-\sqrt{a}| \leq \frac{\sqrt{a}}{2}$, $|f_3(x)-\sqrt{a}| \leq \frac{\sqrt{a}}{2}$ et $|f_3(x)-\sqrt{a}| \leq \frac{29}{32a\sqrt{a}}|x-\sqrt{a}|$

Exemple 2. — Procédés d'approximation des racines carrées à convergence lente.

Il s'agit cette fois de trouver f telle que $f(\sqrt{a}) = \sqrt{a}$ et admettant un contact d'ordre k avec l'identité au point $\sqrt{a}$.
On peut chercher f sous la forme $f(x) = x + P(x)$ P étant un polynôme à coefficients rationnels tel que $P'(\sqrt{a}) = 0, P''(\sqrt{a}) = 0, \ldots, P^{(k)}(\sqrt{a}) = 0$ et $P(\sqrt{a}) = 0$.

La condition de contact est réalisée pour tout multiple de $\left(\frac{x^2}{a} - 1\right)^{k+1}$.

Il apparaît alors que la fonction définie par

$$f(x) = x - \left(\frac{x^2}{a} - 1\right)^{k+1}$$ vérifie les conditions requises.

Remarque : Le procédé d'itération est stable à droite et à gauche de $\sqrt{a}$ lorsque k est pair, mais instable à gauche si k est impair.

Evaluation de l'erreur.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = x_n - \left(\frac{x_n^2}{a} - 1\right)^{k+1}$. Donc

$$x_{n+1} - \sqrt{a} = (x_n - \sqrt{a})\left[1 - (x_n - \sqrt{a})^k \left(\frac{x_n + \sqrt{a}}{a}\right)^{k+1}\right]$$

Considérons par exemple le cas où la suite décroît et posons $u_n = x_n - \sqrt{a}$,

ce qui donne $u_{n+1} = u_n\left[1 - u_n^k \left(\frac{u_n + 2\sqrt{a}}{a}\right)^{k+1}\right]$.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ on a $u_{n+1}^{\alpha} = u_n^{\alpha}\left[1 - u_n^k \left(\frac{u_n + 2\sqrt{a}}{a}\right)^{k+1}\right]^{\alpha}$,

Expression bien définie quel que soit α dès que u_n est assez proche de 0.

$$(u_{n+1})^{\alpha} = (u_n)^{\alpha}\left[1 - \alpha u_n^k \left(\frac{u_n + 2\sqrt{a}}{a}\right)^{k+1}(1 + \varepsilon_n)\right]$$

avec $\varepsilon_n \to 0$ (par dérivabilité de $(1-x)^{\alpha}$ pour $x = 0$). Ainsi,

$$(u_{n+1})^{\alpha} - (u_n)^{\alpha} = -\alpha (u_n)^{\alpha+k} \left(\frac{u_n + 2\sqrt{a}}{a}\right)^{k+1}\left[1 + \varepsilon_n\right].$$

D'où, pour $\alpha = -k$, $(u_{n+1})^{-k} - (u_n)^{-k} \sim k\left(\frac{2}{\sqrt{a}}\right)^{k+1}$, lorsque $n \to +\infty$.

Donc, d'après le lemme de l'escalier,

$$(u_n)^{-k} \sim nk\left(\frac{2}{\sqrt{a}}\right)^{k+1}, \text{ lorsque } n \to +\infty.$$

Finalement $$|x_n - \sqrt{a}| \sim \frac{1}{\sqrt[k]{n.k\left(\frac{2}{\sqrt{a}}\right)^{k+1}}},$$

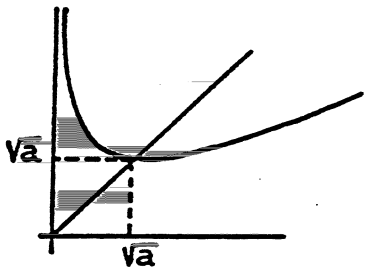
ce qui est conforme au Théorème 3 du C.

Tableau 1 : Explicitation des premières fonctions de l'exemple 1.

Cas où $n = 1$. Alors $P_1(x) = \frac{1}{2}(1 + x^2)$

$$f_1(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$$

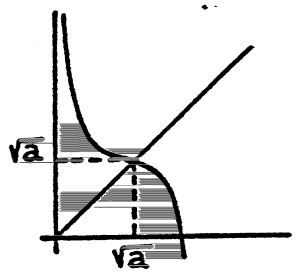
$$f_1(x) - \sqrt{a} = (x - \sqrt{a})^2 \frac{1}{2x}$$



Cas où $n = 2$. Alors $P_2(x) = \frac{1}{8}(3 + 6x^2 - x^4)$

$$f_2(x) = \frac{1}{8}\left(6x - \frac{x^3}{a} + \frac{3a}{x}\right)$$

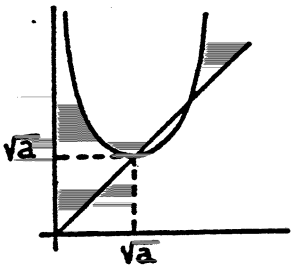
$$f_2(x) - \sqrt{a} = (x - \sqrt{a})^3 \frac{x + 3\sqrt{a}}{8ax}$$



Cas où $n = 3$. Alors $P_3(x) = \frac{1}{16}(5 + 15x^2 - 5x^4 + x^6)$

$$f_3(x) = \frac{1}{16}\left(15x - \frac{5x^3}{a} + \frac{x^5}{a^2} + \frac{5a}{x}\right)$$

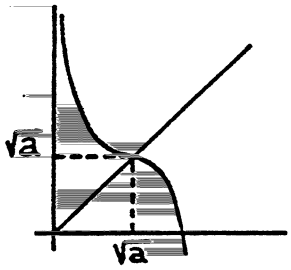
$$f_3(x) - \sqrt{a} = (x - \sqrt{a})^4 \frac{x^2 + 4x\sqrt{a} + 5a}{16xa^2}$$



Cas où $n = 4$. Alors $P_4(x) = \frac{1}{128}(35 + 140x^2 - 70x^4 + 28x^6 - 5x^8)$

$$f_4(x) = \frac{1}{128}\left(140x - \frac{70x^3}{a} + \frac{28x^5}{a^2} - \frac{5x^7}{a^3} + \frac{35a}{x}\right)$$

$$f_4(x) - \sqrt{a} = -(x - \sqrt{a})^5 \frac{5x^3 + 25x^2\sqrt{a} + 47ax + 35a\sqrt{a}}{128xa^3}$$



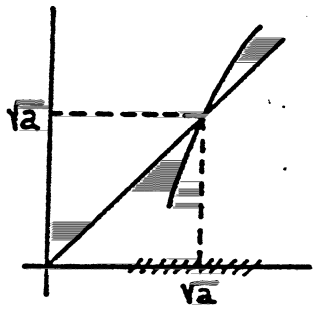
Ces formules permettent d'évaluer les erreurs.

En pratique, il n'est pas évident que les fonctions f_n soient de plus en plus performantes car les calculs à effectuer à chaque pas sont plus longs.

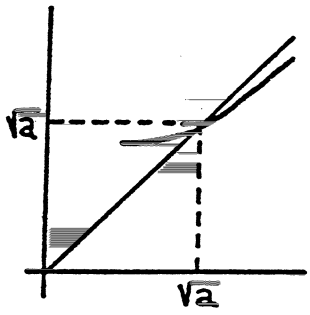
Tableau 2 - quelques exemples numériques :

A - $f'(\sqrt{a}) > 1$ divergence instabilité.

B - $0 < f'(\sqrt{a}) < 1$ $\quad |x_n - \sqrt{a}| < q^n, \quad 0 < q < 1$

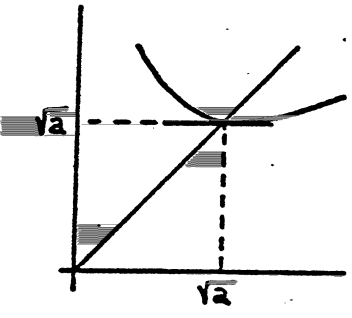


$f(x) = 2x - \frac{a}{x}$

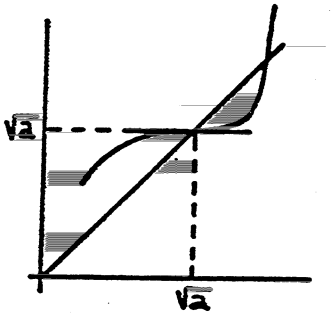


$f(x) = \frac{1}{4}(3x + \frac{a}{x})$

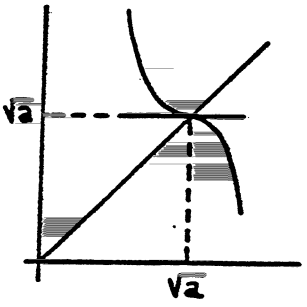
C - $f'(\sqrt{a}) = 0$ convergence "rapide" $\quad |x_n - \sqrt{a}| \leq \lambda (q)^{2n}$ $\quad \lambda > 0$, $0 < q < 1$



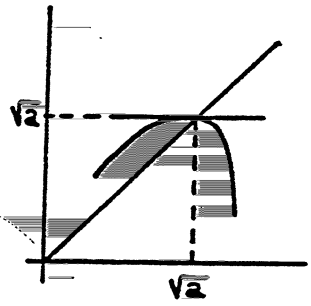
$f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{a}{x})$



$f(x) = \frac{1}{8}(15x - \frac{10x^3}{a} + \frac{3x^5}{a^2})$

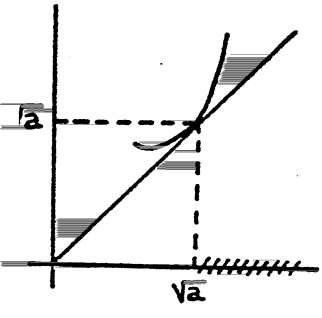


$f(x) = \frac{1}{8}(6x - \frac{x^3}{a} + \frac{3a}{x})$

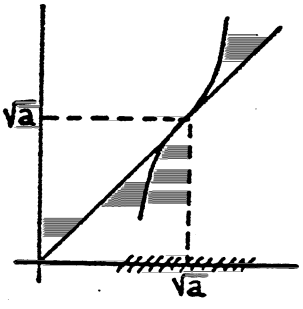


$f(x) = \frac{1}{2}(3x - \frac{x^3}{a})$

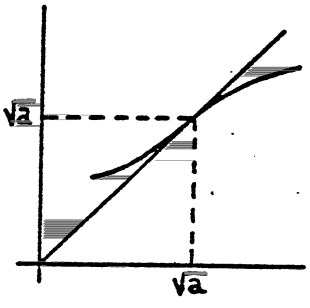
D - $f'(\sqrt{a}) = 1$ convergence "lente" $\quad |x_n - \sqrt{a}| \leq \frac{\lambda}{n^{1/k}}$ $\quad \lambda > 0$, $k \in \mathbb{N}$



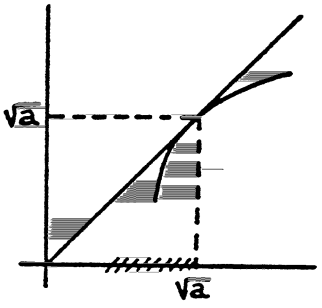
$f(x) = \frac{1}{2}(\frac{x^3}{a} + \frac{a}{x})$



$f(x) = x + (\frac{x^2}{a} - 1)^3$



$f(x) = x - (\frac{x^2}{a} - 1)^3$



$f(x) = \frac{2x^3}{a} - \frac{x^5}{a^2}$

IV - NOTICE BIBLIOGRAPHIQUE, HISTORIQUE ET EPISTEMOLOGIQUE

L'objectif de ce texte est double :

- préciser les niveaux d'approfondissement du Thème 2 des PROBLEMES DE L'ANALYSE (cf partie I : OBJECTIFS ET METHODES DE TRAVAIL, III, p. 14)
- délimiter la place du document précédent dans l'étude des équations numérique

PREMIER NIVEAU (Etude à mener de front avec une première approche des suites numériques).

a) Calcul des racines carrées par dichotomie, trichotomie.
Méthode de Héron : algorithme $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{\alpha}{u_n})$. Comparaison expérimentale, puis théorique, de la rapidité de convergence et de la performance.

Thèmes associés : cas des racines cubiques, de la recherche d'un inverse avec grande précision, du calcul des racines cubiques connaissant les racines carrées, ...

Bibliographie. IREM d'Aix-Marseille [56], de Bordeaux [62], de Lille [65], Dhombres [114], J. L. Ovaert, Article E. U. [13], C. Boyer - Chap. 3 [116], M. Kline, M. T. Chap. 5 [115], A. Engel [28].

b) Construction d'une table trigonométrique par la méthode de Ptolémée (à mener de front avec la géométrie des polygones réguliers et le calcul trigonométrique). Intervention de l'interpolation linéaire pour le calcul de sin 1° à partir de sin 3°. Amélioration de la performance par Al Khasi : on pose $x = \sin 1°$; alors $x = \frac{1}{3}[\sin 3° + 4x^3]$. Mise en place, sur cet exemple, de la méthode des approximations successives. Evaluation expérimentale, puis théorique, de la rapidité de convergence. Application au calcul de valeurs approchées de π.

Bibliographie. IREM d'Aix-Marseille [57], Abdeljaouad, Article APM [117]. J. L. Ovaert : article E. U. [13], C. Boyer : Histoire des mathématiques, chap. 10 [116] Youschkevitch [118], M. Kline : M. T. chap. 5 [115].

DEUXIEME NIVEAU (on dispose des dérivées et de la convergence des suites monotones).

a) Etude qualitative des équations

- Existence et unicité de solutions. (emploi de suites monotones).
- Exemples de séparation de solutions par étude de variations et par dichotomie.
- Cas des équations à point fixe - convergence en escalier et en spirale - Etude de la stabilité (exemples). Exemples d'oscillations et de chaos.

Bibliographie. IREM d'Aix-Marseille [56], de Lyon [68], D. Reisz et C. Wasserer [63], A. Engel [28].

Note historique

I. Newton. Arithmétique Universelle [131].

J. L. Lagrange. Leçons élémentaires de Mathématiques [132].

b) Recherche de solutions approchées d'équations numériques

Description de quelques méthodes : dichotomie, interpolation linéaire, méthode des tangentes, méthode des approximations successives. (Pas d'accélération de convergence à ce niveau).
Sur quelques exemples, comparaison expérimentale et théorique de la rapidité de convergence et de la performance.

Intervention de la dichotomie pour l'existence des solutions ; exemple des racines carrées. Dans le cas des équations à point fixe, exploration des facteurs gouvernant la rapidité de convergence (pente des sécantes et des tangentes). On pourra mettre en valeur l'importance d'inégalités lipschitziennes.

Bibliographie. IREM d'Aix-Marseille [56], J. L. Ovaert : article E.U. [13], Berezin et Zhydkov [16], J. Dieudonné, Calcul infinitésimal [7].
Goldstine, chap. 2 [8], A. Engel [28].

Note historique

- La dichotomie et ses variantes (subdivisions) ont eu une importance considérable dans le développement des concepts fondamentaux de l'analyse :

J. L. Lagrange. Théorie des fonctions analytiques - Art. 48 [104]
Leçons sur le calcul des fonctions - Leçon 9 [105]

B. Bolzano. Une preuve analytique.... [132]

A. L. Cauchy Cours d'Analyse Algébrique. note 3 [106]

On pourra trouver des références ultérieures (Weierstrass, Dini) dans les livres de Dugac [119] et [120].

- Méthode d'interpolation linéaire :

R. Descartes. La géométrie [135]

J. L. Lagrange. Résolution des équations numériques [134]

- Méthode de Newton :

I. Newton. La méthode des fluxions et des suites infinies [100].
Principes mathématiques de la philosophie naturelle. Livre 1 — Problème p. 31, Problème p. 22 et Scholie) [101].

A.L. Cauchy. Cours d'Analyse algébrique. note 3 [106].

- Méthode des approximations successives :

F. Viète. Extrait dans Goldstine - chap. 2 - § 4 [8].

J. Wallis . Extrait dans Goldstine - chap. 2 § 4 [8].

A.L. Cauchy. Cours d'analyse algébrique. note 3 [106].

TROISIEME NIVEAU (on dispose de la continuité, des développements limités, du concept de contact, et du calcul intégral).

a) Etude qualitative des équations

- Existence et unicité des solutions : Emploi des suites monotones, des théorèmes fondamentaux sur les fonctions continues, du critère de Cauchy sous la forme $|u_{n+1} - u_n| \leq k^n$, où $k < 1$. Cette étude permet de mettre en évidence les divers procédés de démonstration d'existences en analyse (monotonie et bornes supérieures, connexité, compacité, critère de Cauchy). Emploi des valeurs d'adhérence pour les phénomènes d'oscillation.

- Etude de la stabilité des solutions d'une équation à point fixe (par monotonie).

Bibliographie. IREM d'Aix-Marseille [56], Demidovitch et Maron [17],

b) Séparation des solutions d'une équation

- Utilisation de variations de fonctions (exemples).

- Comparaison d'équations (exemples).

- Cas des équations algébriques. Majoration du module des racines — exemples utilisant les méthodes de Descartes et de Sturm.

Bibliographie. Kurosh [18], Fadeev et Sominski [19], Durand [27].

c) Recherche de solutions approchées d'équations numériques

approfondissement de l'étude des méthodes classiques : dichotomie, interpolation linéaire, méthode des tangentes, méthode des approximations successives :

- La méthode de dichotomie peut être employée pour démontrer l'existence de racines (théorème des valeurs intermédiaires) et l'existence de maxima et de minima (propriétés des fonctions continues sur un compact).
- Intervention de la convexité dans les méthodes d'interpolation linéaire et des tangentes.
- Exemples d'accélération de convergence ; lien entre méthode des tangentes et méthode des approximations successives. Procédés utilisés pour ramener l'étude de $g(x) = 0$ à celle de $f(x) = x$. Emploi combiné des différentes méthodes précédentes.
- Sur exemples, évaluation asymptotique de la rapidité de convergence pour la méthode des approximations successives. Rôle du contact dans le cas $f(a) = a$, $f'(a) = 0$, et dans le cas $f(a) = a$, $|f'(a)| = 1$. Construction d'algorithmes ayant une performance donnée.

Bibliographie. IREM d'Aix-Marseille [36], Cours DEA didactique Marseille [55], Demidovitch et Maron [17], Berezin et Zhydkov [16], J. Dieudonné, calcul infinitésimal [7], A. Engel [28].

d) Systèmes linéaires et inversion de matrices carrées.

Sur des exemples simples, emploi de la méthode des approximations successives. Cas des matrices à diagonale strictement dominante.

Bibliographie. Gantmächer [24], Gastinel [25], Varga [26], Berezin et Zhydkov [16].

QUATRIEME NIVEAU (à suivre....).

BIBLIOGRAPHIE

OUVRAGES SCIENTIFIQUES

[1] — R. Barra. L'enseignement de l'Analyse (Cedic).

[2] — C. Berman. Problèmes d'analyse mathématique (Mir).

[3] — L. Chambadal et J. L. Ovaert. Analyse II (Gauthier-Villars).

[4] — Y. Chevallard et R. Rolland. Théorie des séries (Cedic).

[5] — A. Deledicq. Mathémachines (IREM de Paris Sud).

[6] — B. Demidovitch. Recueil d'exercices et de problèmes d'analyse mathématique (Mir).

[7] — J. Dieudonné. Calcul infinitésimal (Hermann).

[8] — H. Goldstine. A history of numerical analysis (Springer).

[9] — J. Itard. Les livres arithmétiques d'Euclide (Hermann).

[10] - Le Lionnais. Les grands courants de la pensée mathématique (Blanchard).

[11] - J. Martinie (IREM de Grenoble). Etude de la vitesse de convergence de deux suites - Brochure INRDP n° 75.

[12] - Ch. Naux. Histoire des logarithmes de Neper à Euler (Blanchard).

[13] - J. L. Ovaert. Article Encyclopaedia Universalis sur le calcul numérique.

[14] - D. Reisz. Article sur les suites (Bulletin APM n° 320).

[15] - Rouse Ball. Récréations mathématiques et problèmes (Hermann).

[16] - I. S. Berezin et N. P. Zhydkov. Computing methods (Pergamon Press).

[17] - Demidovitch et Maron. Eléments de calcul numérique (Mir).

[18] - Kurosh. Cours d'Algèbre supérieure (Mir).

[19] - Fadeev et Sominski. Exercices d'algèbre (Mir).

[20] - S. Lang. A first course in Analysis. (Addison et Wesley).

[21] - E. Goursat. Cours d'analyse mathématique (Gauthier-Villars).

[22] - G. Valiron. Cours d'analyse (Masson).

[23] - V. Arnold. Méthodes mathématiques de la mécanique classique.

[24] - F. R. Gantmacher. Théorie des matrices (Dunod).

[25] - N. Gastinel. Analyse numérique linéaire (Hermann).

[26] - R. E. Varga. Matrix iterative analysis (Englewood Cliffs).

[27] - E. Durand. Solutions numériques des équations algébriques (Masson).

[28] — A. Engel. Mathématique élémentaire d'un point de vue algorithmique, traduit par Daniel Reisz (Cedic).

[29] — J. Dieudonné. Eléments d'analyse. Vol. I (Gauthier-Villars).

DOCUMENTS SUR L'ENSEIGNEMENT DE L'ANALYSE

[51]	Brochure APM	Activités mathématiques en 4ème.
[52]	Brochure APM	Quelques apports de l'informatique à l'enseignement des mathématiques.
[53]	DEA didactique Bordeaux	Construction, développement et reprises du concept de fonction.
[54]	"	Discret et continu.
[55]	DEA didactique Marseille	Rôle des problèmes numériques dans la construction des concepts de l'analyse.

IREM : Travaux des groupes analyse.

[56]	Aix-Marseille	Analyse 1.
[57]	Aix-Marseille	Analyse 2 (à paraître). Documents provisoires manuscrits.
[58]	"	Analyse 3 (à paraître). Documents provisoires manuscrits.
[59]	Bordeaux	Relations n° 0, 1, 2.
[60]	"	Approche de la notion de suite.
[61]	"	Travaux des sections des Antilles.
[62]	"	Tous vos problèmes avec votre calculatrice.
[63]	Dijon	D. Reisz et C. Wasserer. Approche heuristique de l'enseignement de l'analyse.
[64]	"	Activités numériques - Bulletin n° 7.
[65]	Lille	Exercices destinés à introduire la notion de nombre réel.
[66]	Lyon	Premiers balbutiements.
[67]	"	Premiers pas.
[68]	"	Calculs numériques, avec ou sans machines.
[69]	"	Sans tambour ni trompette.
[70]	Nancy	Autour d'un prêt bancaire.
[71]	Poitiers	Introduction à l'analyse.
[72]	"	Sur l'enseignement de l'analyse.
[73]	Rennes	Activités en analyse : Majorer, minorer, encadrer (1978).

[74] Colloque IREM "Calculatrices programmables" - Carry-le-Rouet - Juin 1976.

[75] Colloque IREM sur l'enseignement de l'analyse (Dijon).

[76] IUT informatique de Nancy - Cours d'Analyse mathématique.

[77] IREM de Strasbourg. Livre du problème - Volume 5.

[78] IREM de Lyon. Dérivation.

[79] IREM de Lyon. Barycentres.

QUELQUES TEXTES HISTORIQUES

[100] - I. Newton. Méthode des fluxions et des suites infinies (Blanchard).

[101] - I. Newton. Oeuvres complètes - Volume 4.

[102] - L. Euler. Introduction à l'analyse des infiniments petits - 1748 (Diffusion IREM).

[103] - L. Euler. Institutiones calculi differentialis - 1755 (Vol. X - Oeuvres complètes).

[104] - J.L. Lagrange. Théorie des fonctions analytiques - 1797 (Diffusion IREM).

[105] - J.L. Lagrange. Leçons sur le calcul des fonctions - 1808.

[106] - A.L. Cauchy. Cours d'Analyse à l'Ecole Polytechnique. Analyse algébrique - 1821 (Gauthier-Villars) (et Diffusion IREM).

[107] - N. Abel. Oeuvres complètes (Christiania).

[108] - C. Jordan. Cours d'Analyse à l'Ecole polytechnique - 1882 (Gauthier-Villars).

[109] - E. Picard. Traité d'Analyse - 1891 (Gauthier-Villars).

[110] - S. Lacroix. Traité du calcul différentiel et intégral - 1797 (Diffusion IREM).

[111] - E. Borel. Leçons sur les séries divergentes - 1901 (Gauthier-Villars).

[112] - Jacobi. De usu legitimo...1834 - Vol. 6 des Oeuvres Complètes (Berlin)

On trouvera d'autres références historiques dans les ouvrages suivants :

[113] - C. Boyer. The history of the calculus and its conceptual development. Dover - 1949.

[114] - J. Dhombres. Nombre, mesure et continu - 1978 (Cedic).

[115] - M. Kline. Mathematical thought from ancient to modern times - New-York Oxford Univ. press - 1972, notamment Chap. 5, 9, 17, 19 et 20.

[116] - C. Boyer. A history of mathematics, J. Wiley and sons.

[117] - M. Abdeljaouad. Article sur les décimaux (Bulletin APM n° 320).

[118] - H.P. Youschkevitch. Les mathématiques arabes (Vrin).

[119] - P. Dugac. Cours d'histoire des mathématiques (Paris VII).

[120] - P. Dugac. Eléments d'analyse de K. Weierstrass. Archive for history of exact science. Vol. 10.

[121] - Ch. Houzel, J.L. Ovaert, P. Raymond et J.J. Sansuc. Philosophie et calcul de l'infini (Maspero).

[122] - Youschkevitch. The concept of function. Archive for history. Vol. 16.

[130] - I. Newton. Arithmétique universelle (Blanchard).

[131] - J.L. Lagrange. Leçons élémentaires de mathématiques. Oeuvres complètes - tome 7.

[132] - B. Bolzano. Une preuve analytique. Revue d'histoire des sciences, tome 17, n° 2.

[133] - Ch. Hermite. Cours d'analyse (Gauthier-Villars).

[134] - J.L. Lagrange. Résolution des équations numériques. Oeuvres complètes.

[135] - R. Descartes. La géométrie.