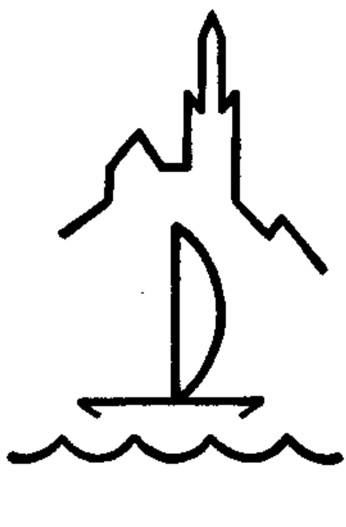
information mathématique



académie d'aix-marseille

irem

Académie d'AIX . MARSEILLE

INFORMATION

MATHEMATIQUE

RESPONSABLE DE LA PUBLICATION

Gilles THOMAS

INSTITUT DE RECHERCHE
JR L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES

I. R. E. M.

70, route Léon Lachamp

13288 - MARSEILLE Cedex 2

Tél. 41.01.40 poste 32.10/41.39.40

INFORMATION MATHEMATIQUE

N° 10 Décembre 1977

SOMMAIRE

★ EDITORIAL 4
(René CARMONA)

★ EN DIRECT DU SERVICE DES PUBLICATIONS 7
(Gilles THOMAS)

★ ACTIVITES DES GROUPES IREM :

COMPTE-RENDU DES ACTIVITES 76-77 DU GROUPE MATH-PHYSIQUE 9
(Centre de DIGNE)

★ CONTRIBUTIONS MATHEMATIQUES :

NOTE SUR LA REPRESENTATION COMPLEXE DES GRANDEURS SINUSOIDALES 31
(Daniel TESTARD)

★ REFLEXIONS ET PERSPECTIVES :

L'HOMO MATHEMATICUS ET L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES TELS QU'EN EUX-MEMES 39
(Jean MARION)

★ NOTES DE LECTURES ET PARUTIONS 47

★ INFORMATIONS :

LE CALENDRIER DES ACTIVITES DE LA REGIONALE APM d'AIX-MARSEILLE (2nd trimestre 1977-78) 51

couverture : Gill

Dépôt légal 4e trimestre 1977

EDITORIAL

* *
*

René CARMONA, directeur de l'IREM

Que nous réserve l'avenir ?

Il n'est pas dans mes intentions de procéder à un historique factuel des récents évènements dont ont été victimes les I.R.E.M. (1). Je voudrais simplement vous faire part de quelques réflexions qu'ils m'ont inspirés.

Lors de leur création, les objectifs des I.R.E.M. ont été clairement définis. Ils étaient au nombre de cinq :

1) Elargissement de la culture scientifique des maîtres comprenant une ouverture interdisciplinaire.

2) Développement des échanges et organisation de rencontres pour ceux qui sont, à des titres divers, intéressés par l'enseignement des mathématiques et où collaborent à des tâches communes des enseignants de différents degrés et de différentes disciplines.

3) Contribution à l'évolution de l'enseignement des mathématiques à moyen terme grâce à une recherche fondamentale comportant les expérimentations appropriées, les observations nécessaires et la diffusion des résultats obtenus.

4) Elaboration et diffusion de documents et supports très variés.

5) Contribution à la formation continue en mathématique.

Après plusieurs années de tâtonnements (2) les I.R.E.M. semblent être arrivés à maturité : un rapide coup d'oeil sur la forme et le contenu des stages, les thèmes et les méthodes de recherche, les publications et même sa gestion

---

(1) l'A.P.M. publie dans son Bulletin n° 311 un dossier complet et très détaillé auquel je renvoie le lecteur.

(2) ces balbutiements sont un mal nécessaire ; il me paraît illusoire de croire que le vécu des I.R.E.M. servira de <u>modèle</u> aux autres disciplines : les I.R.E.M. ont tout au plus valeur d'exemple et les éventuels I.R.E.X. devront faire leur propre expérience.

administrative, suffit pour s'en convaincre. Rappelons, par exemple, que la possibilité offerte aux enseignants de tous ordres (élémentaire, secondaire et supérieur) de travailler sur un pied d'égalité est une des grandes originalités des I.R.E.M. Pourtant elle fut dans un premier temps un handicap car rien ni personne ne prépare un P.E.G.C. et un professeur d'Université à un travail en commun. Cet handicap fut surmonté, et aujourd'hui cette promiscuité est, aux yeux de tous, un des facteurs essentiels de la réussite des I.R.E.M.

Les I.R.E.M. sont parvenus à un stade où ils sont en mesure de satisfaire les exigences initiales ce qui leur a valu un regain d'intérêt, national et international. Cette évolution ne s'est pas faite sans mal, ne serait-ce qu'à cause des difficultés financières grandissantes.

Il n'est donc pas surprenant, qu'à l'annonce des restrictions (les fameux 20 %) tous ceux qui ont travaillé, qui travaillent à la réussite des I.R.E.M aient ressenti un profond sentiment d'incompréhension, d'injustice et même d'indignation.

Je ne dirai que quelques mots de la procédure qui a été employée. Les mesures dont ont été victimes les I.R.E.M. ont été prises de façon unilatérale, sans la moindre consultation d'organismes de concertation mis en place par l Ministère de l'Education. De plus, outre leur inélégance, certaines de ces mesure possédaient un caractère discriminatoire voire illégal. Une telle procédure ne pouvait engendrer qu'un important gaspillage financier, un facheux désordre et un angoissante situation pour de nombreuses catégories de personnels.

Pourtant ces questions de forme sont beaucoup moins graves que le *problème de fond soulevé : les missions des I.R.E.M. auraient-elles été modifiée* sans que, une fois de plus, les intéressés en soient avertis ? La teneur de la réponse faite à la tribune de l'Assemblée Nationale par Monsieur le Ministre de l'Education Nationale (3) permet de le craindre. Ne semble-t-il pas vouloir limiter les objectifs des I.R.E.M. à une fonction de "recyclage" (4) conjoncturel, amalgamant ainsi les objectifs 1 et 5 et ignorant les trois autres ?

Il est grand temps de mettre un terme à cette angoissante incertitude.

---

(3) voir l'article paru dans le Journal "Le Monde" le 21 octobre 1977.

(4) ne devrait-on pas bannir l'usage de ce mot lorsqu'il s'agit d'autre chose que de déchets ?

A l'heure où nous préparons la rentrée 1978 (dossiers de candidatures, programmes des stages et des groupes de recherche) nous ne savons plus si l'I.R.E.M. existera encore à cette date. A quelques jours du début d'une nouvelle année civile, nous ne savons rien de la dotation budgétaire qui permettra aux Instituts de fonctionner à partir du 1er Janvier.

Le sérieux, la quantité et la qualité du travail des stagiaires, animateurs, chercheurs et personnels techniques, bénévoles ou non, leur confère le droit de vivre : les I.R.E.M. sont irremplaçables.

EN DIRECT
DU SERVICE DES PUBLICATIONS

★ ★
★

Gilles THOMAS, I.R.E.M. d'AIX-MARSEILLE

Constituée en septembre 1977, lors du séminaire de rentrée de l'I.R.E.M., la Commission des Publications vous propose, pour l'année scolaire 1977-78 :

■ D'abord, une nouvelle couverture pour le bulletin "Information Mathématique" ;
Symbolique, et bien marseillaise, ce sera désormais la couverture de toute publication de l'I.R.E.M.

■ Ensuite, un nouveau contenu pour le bulletin "Information Mathématique" ;
Le lecteur y trouvera des articles classés dans les rubriques suivantes :

★ Activités des groupes I.R.E.M.
★ Contributions mathématiques
★ Réflexions et perspectives
★ Notes de lecture et parutions
★ Tribune libre
★ et Informations diverses.

Ce numéro est consacré plus particulièrement à la recherche sur l'harmonisation des enseignements de mathématiques et de physique, l'une des préoccupations essentielles de l'I.R.E.M. de Marseille.

■ Enfin, un nouveau type de brochures :

- des MONOGRAPHIES concernant, par exemple, l'enseignement de l'Analyse, l'enseignement du Calcul des Probabilités, ...

- des COLLECTIONS traitant d'Analyses historiques et épistémologiques, de Fragments mathématiques ou de Didactique.

La parution de ces brochures sera annoncée dans le bulletin "Information mathématique" dont la tâche d'information et de liaison est renforcée.

Délaissant l'aspect quantitatif des publications, la Commission tient à assurer l'aspect qualitatif des brochures, qualité scientifique et qualité pédagogique.

N'hésitez pas à nous faire part de vos critiques et de vos suggestions concernant ces publications ; elles seront toujours très bien accueillies.

Toute correspondance concernant les publications de l'I.R.E.M. doit être adressée à

Monsieur le Directeur de l'I.R.E.M.
Service des Publications
70, route Léon Lachamp
13288 - MARSEILLE Cedex 2

MATHENIGMATIQUES

★ mathénigme 1 : objet géométrique victime de l'euthanasie .

★ mathénigme 2 : sont, topologiquement, en instance de divorce .

(réponses page 38)

COMPTE-RENDU DES ACTIVITES 76-77

DU GROUPE MATH-PHYSIQUE

* *

*

Centre de DIGNE

Ce document rassemble des travaux portant sur les concepts et notions de base qui interviennent en physique et en mathématiques sur l'unification du langage et des notations, tant au niveau de la réflexion et de l'analyse des problèmes soulevés qu'au niveau des solutions proposées et des questions posées non convenablement résolues.

Il peut à la fois apporter une aide et susciter de nouvelles réflexions, de nouvelles questions, et une concertation entre enseignants de physique et de mathématiques d'une même classe.

INTRODUCTION

Au début de l'année scolaire, tous les groupes réunis décident de consacrer quelques séances aux notions de base utilisées en mathématique et en physique, et à l'unification du langage et des notations.

Les participants proposent l'examen des sujets suivants :

- Ensembles (point de vue naïf) - Notations ensemblistes ;
- Logique (point de vue naïf) - Outils de rédaction ;
- Relations, fonctions ;
- Vecteurs ;
- Angles.

I - ENSEMBLES - (Point de vue naïf) - NOTATIONS ENSEMBLISTES

Rien à signaler à part les discussions qu'a suscité le signe =
Après accord de principe de tous sur le fait que l'écriture " $a = b$ " signifie que a et b sont deux noms donnés au même objet, il apparaît rapidement deux thèmes de discorde.

Premier thème

" $10\ ms^{-1} = 36\ kmh^{-1}$ " Tout le monde en convient.
$10\ ms^{-1}$ et $36\ kmh^{-1}$ sont deux noms donnés à une même grandeur physique, qui est une vitesse. La vitesse en question a pour mesure en ms^{-1} le réel 10 ; elle n'est pas égale au réel 10.

On pourra écrire :

soit " $v = 10\ ms^{-1}$ " après avoir décidé d'appeler v la vitesse considérée
soit " $v = 10$ " après avoir décidé d'appeler v la mesure de cette vitesse en ms^{-1}

Et v n'aura pas la même signification dans les deux cas.

Donc accord parfait ... jusqu'au moment où les physiciens révèlent que cependant, dans la pratique, ils écrivent couramment " $v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{30}{3} = 10\ ms^{-1}$ ", que dans leur tête il n'y a pas de problème, qu'ils font toujours comme ça, qu'ils s'en passeraient difficilement, et que d'ailleurs cela se lit dix fois par page dans tous les livres de physique.

Les matheux regimbent et opposent aux physiciens les deux seules attitudes qui leur paraissent raisonnables :

★ ou bien v représente une vitesse, et on écrira " $v = \frac{30m}{3s} = 10\ ms^{-1}$ "
(cf Rougée et ses corps physiques)

★ ou bien v représente la mesure de la même vitesse en ms^{-1}, et on écrira " $v = \frac{30}{3} = 10$ " quitte à conclure :
" La vitesse (pas v !) du mobile est donc égale à $10\ ms^{-1}$ " .

★★ Les physiciens trouvent ces attitudes bien contraignantes et préfèrent s'accommoder d'une certaine ambiguïté d'écriture, qui ne leur pose aucun problème, entre les grandeurs physiques et leurs mesures.

Autre exemple :

Quand on accroche des poids à une ressort on est conduit à l'écriture :

$$\frac{P_1}{a_1} = \frac{P_2}{a_2} = \frac{P_3}{a_3} = \dots = K$$

" - Qu'est-ce que P_1 ? - un poids - et a_1 ? - l'allongement du ressort produit par P_1 - qu'est-ce que K ? - c'est un nombre : le coefficient de raideur du ressort. - Excuse ! mais comment fais-tu pour diviser un poids par une longueur ? et comment peux-tu trouver un nombre ? Si P_1 et a_1 sont un poids et une longueur, alors K n'est pas un nombre, mais une grandeur physique attachée au ressort - D'accord, mais dans mon esprit P_1 et a_1 sont en réalité des mesures et K est un coefficient numérique qui dépend du ressort et des unités de poids et de longueur choisies. "

etc.

Les autres groupes ont-ils eu des discussions du même genre ?

De toute façon on aimerait avoir leur opinion sur le sujet.

Deuxième thème

Pour le matheux le signe = est sacré : $\frac{3}{2} = 1,5$ mais $\pi \neq 3,14$

" - Bon on n'écrira pas $\pi = 3,14$. Mais on pourra écrire $\pi \approx 3,14$.
- Qu'est-ce que ça veut dire ? - Ca veut dire que π est voisin de 3,14.
- Mais que signifie voisin ? - Ca dépend du nombre de décimales. "

★ *On peut s'entendre sur cette convention :*

$a \approx 1,73$ signifie que $1,72 < a < 1,74$.

Très bien - Mais si on indique que $a \approx 1,73$ et $b \approx 2,46$ que peut-on dire de $a + b$?

De l'information donnée on peut seulement déduire que :

$4,17 < a + b < 4,21$; alors que ce que l'on aurait été tenté d'écrire, à savoir $a + b \approx 4,19$ aurait signifié que $4,18 < a + b < 4,20$, ce qui n'a rien de sûr.

Si l'on s'en tient strictement à la convention passée, il faut conclure que $a + b \approx 4,2$, et rien de mieux.
D'où une hémorragie de décimales insupportable.

La convention est rejetée.

★ On pense alors à celle-ci :

$a \approx 1,73\,[\alpha]$ signifie que $1,73 - \alpha \leq a \leq 1,73 + \alpha$,

autrement dit que $1,73$ est une valeur approchée de a avec une incertitude α.

Voilà qui est bien plus souple. Mais les physiciens rappellent que les calculs des taux d'incertitude sur un produit ou un quotient ne sont plus au programme du 2e cycle.

Alors, sachant que $a \approx 1,73\,[\alpha]$ et que $b \approx 2,45\,[\beta]$, on conclura que $a,b \approx 4,24\,[\varepsilon]$ avec quel ε ?

les matheux suggèrent bien d'encadrer $a.b$ entre $(1,73 - \alpha)\,(2,45 - \beta)$ et $(1,73 + \alpha)\,(2,45 + \beta)$ mais les physiciens objectent que ce n'est guère pratique et qu'il ne serait pas réaliste de demander aux élèves des encadrements de cette sorte dans toute la suite des calculs d'un problème. Alors ?

★ Alors, le plus souvent on écrit que $a = 1,73$, $\pi = 3,14$, $\sqrt{2} = 1,41$ et que, tous calculs faits $z = 12,5$ en sachant que les "égalités écrites ne sont qu'approchées" et en priant Dieu pour ne pas taper trop loin de la plaque quand on énonce le résultat final ...

Comment nos collègues des autres groupes résolvent-ils ces difficultés ?

II - <u>LOGIQUE</u> (<u>Point de vue naïf</u>) - <u>OUTILS DE REDACTION</u>

Les participants choisissent d'abord un niveau, qui est celui du <u>bon sens</u> avec appui sur le <u>langage courant</u>, et, après bien des discussions, ils semblent s'accorder sur les points suivants :

UNE PROPOSITION en mathématique et en physique est une phrase ayant un sens et formulant un jugement dont on sait qu'il est à coup sûr soit vrai soit faux. (on n'a pas dit ... dont on sait s'il est vrai ou faux).

Toute proposition au sens précédent a donc l'une deux "valeurs logiques" V ou F.

Exemple : x étant un certain réel non précisé, l'énoncé " $x > 3$ " est une proposition. C'est une proposition VRAIE Si $x \in \left]3, +\infty\right[$

FAUSSE Si $x \in \left]-\infty, 3\right]$

Quant à l'énoncé " $\frac{1}{x} > 3$ ", on ne sait pas si c'est une proposition. C'est une proposition si $x \neq 0$, ce n'est pas une proposition si $x = 0$.

COMMENT PRESENTER une proposition comme VRAIE ?

C'est le contexte qui doit faire comprendre si une proposition est présentée comme vraie.

★ x étant toujours un certain réel, voici des exemples où la proposition "$x > 3$" est présentée comme vraie :

" $x > 3$ "

" la proposition $(x > 3)$ est vraie"

" $x > 3$ donc $x^2 > 9$ "

★ En voici d'autres où il n'en est pas ainsi :

" Considérons la proposition $(x > 3)$ "

" Si $x > 3$ alors $x^2 > 9$ "

" $\forall x \in R^+ \; (x > 3) \Rightarrow (x^2 > 9)$ "

LES LIAISONS "donc", "puisque", "si... alors", "si et seulement si"... etc. ont en mathématique et en physique le sens qu'elles ont dans le langage courant quand elles y sont employées correctement. Voici des exemples d'utilisation de ces liaisons, exemples où x est un réel.

★ <u>L'affirmation " $x > 3$ donc $x^2 > 9$ "</u>

signifie que le réel x est supérieur à 3 et qu'on en DEDUIT, par un raisonnement évoqué par la liaison "donc", que le réel x^2 est supérieur à 9 ; (raisonnement utilisant les propriétés de groupe ordonné de $(\mathbb{R}^{+*}, ., \leq)$).

★ <u>L'affirmation " si $x > 3$ alors $x^2 > 9$ "</u>

ne signifie pas que x est supérieur à 3 ni que x^2 est supérieur à 9, mais que dans tous les cas où x est supérieur à 3, x^2 est supérieur à 9. Ce qui résulte du raisonnement fait plus haut en prenant comme hypothèse que x est supérieur à 3.

L'affirmation " si $x > 3$ alors $x^2 > 9$ " ne donne évidemment aucune information concernant x^2 lorsque x n'est pas supérieur à 3. De même, lorsque j'ai dit " je téléphone si je suis reçu " je n'ai pas dit ce que je ferais si je n'étais pas reçu ; de sorte que je pourrais très bien téléphoner pour annoncer que je suis collé.

★ <u>L'affirmation " $4x^2 = 1$ ssi $4 = \frac{1}{x^2}$. "</u>

ne signifie ni que $4x^2$ est égal à 1 ni que 4 est égal à $\frac{1}{x^2}$, mais que : tout choix de x rendant $\frac{1}{x^2}$ égal à 4 rend aussi $4x^2$ égal à 1 et que $4x^2$ n'est égal à 1 que lorsque $\frac{1}{x^2}$ est égal à 4 ; autrement dit que :
l'ensemble des réels x faisant de l'énoncé " $4x^2 = 1$" une proposition vraie est le même que l'ensemble des réels x faisant de l'énoncé " $4 = \frac{1}{x^2}$ " une proposition vraie.

<u>LES CONNECTEURS non, et, ou, ⇒ , ⇔</u> .

A - Les trois premiers ne soulèvent pas de discussions.

B - Pour le connecteur ⇒ , la question est vite réglée.
Après avoir condamné son utilisation abusive dans le sens de "donc", on reconnaît que s'il est commode dans l'énoncé de certaines définitions ou de certains théorèmes, <u>son intérêt comme instrument de rédaction des raisonnements paraît nul</u>. On ne l'emploiera donc pas, en général, comme tel.

C - Par contre, tout le monde s'accorde sur <u>l'utilité pratique</u> du connecteur ⇔ , et on lui consacre un bon moment.

■ p et q étant 2 propositions, " p ⇔ q " est une troisième proposition, dont la valeur logique est V ou F selon que les deux propositions composantes p et q ont ou non la même valeur logique.

Quand la proposition " $p \Leftrightarrow q$ " est présentée comme vraie, on affirme que p et q ont la même valeur logique. D'où la déviation du sens de connecteur du signe $\Leftrightarrow$ vers son sens courant d'indicateur d'une relation d'équivalence entre les propositions.

Ce qui permet de donner à la chaîne " $p \Leftrightarrow q \Leftrightarrow \ldots$ " sa signification habituelle : p a la même valeur logique que q, qui a la même valeur logique que ....

■ Unanimité sur les précautions qu'exige l'emploi du signe $\Leftrightarrow$: Dans l'écriture " $p \Leftrightarrow q$ " p et q sont impérativement des propositions au sens indiqué. Dans le fil d'un texte on doit savoir où p commence et où p finit, de même pour q.; d'où l'utilisation de toutes les parenthèses, tous les crochets, ...etc. nécessaires.

■ Cela posé, les participants examinent divers textes et s'interrogent sur l'opportunité d'employer le signe $\Leftrightarrow$ dans leur rédaction.

Ex. 1 : on peut faire savoir qu'un réel X est supérieur à 1. Voici, entre autres, deux manières de le dire :

a) " $X > 1$ "

b) " $(X > 1) \Leftrightarrow (3 > 2)$ "

qui serait assez pédant pour choisir la manière b ? Hé bien ! tous ceux qui choisissent la rédaction b' dans l'exemple 1' :

Ex. 1' : Soit $f : R \to R$

$x \to (x+1)^2 - 4x$ Simplifier $f(x)$

a') $\forall x \in R,\ f(x) = x^2 + 2x + 1 - 4x = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$

b') $\forall x \in R, (f(x) = (x+1)^2 - 4x) \Leftrightarrow (f(x) = x^2 + 2x + 1 - 4x) \Leftrightarrow (f(x) = x^2 - 2x + 1) \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow (f(x) = (x-1)^2)$

Ex. 2 (Troisième, Seconde) Résoudre l'équation $e : x^2 - 1 = x + 1$ où l'inconnue x est à choisir dans R.

Posons $Sol(e) = \{x \in R \mid x^2 - 1 = x + 1\}$

$\forall x \in R, (x \in Sol(e)) \Leftrightarrow (x^2 - 1 = x + 1) \Leftrightarrow ((x-1)(x+1) = x+1) \Leftrightarrow$

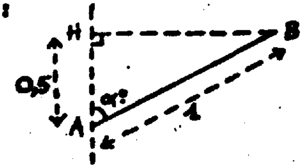
$\ldots \Leftrightarrow ((x-1)(x+1) - (x+1) = 0 \Leftrightarrow ((x-2)(x+1) = 0) \Leftrightarrow (x \in \{2, -1\})$

En résumé $\forall x \in R, (x \in Sol(e)) \Leftrightarrow (x \in \{-1, 2\})$ donc $Sol(e) = \{-1, 2\}$.

Voilà un texte où l'équivalence logique a joué un rôle excellent. On note qu'au niveau des débutants, on peut numéroter les signes $\Leftrightarrow$ successifs et indiquer la raison de l'affirmation contenue dans chacun d'eux.

Ex. 3 (Fin de troisième, début de seconde) Une tige rectiligne [AB] de 1m de longueur fait avec la vertic e un angle aigu de $\alpha°$. Comment choisir cet angle pour que la différence de niveau entre les extrémités de la tige soit de 0,5 m ?

a) Première attitude : L'intuition physique m'indique qu'il existe un angle $\alpha°$ et un seul tel que la différence de niveau entre les extrémités de la tige soit de 0,5 m. Alors je rédige la solution ainsi :



Soit $\alpha°$ l'angle cherché.

$\cos \alpha° = \frac{0,5}{1} = 0,5 \qquad \alpha° = 60°$

b) Deuxième attitude : je n'ai aucune intuition physique. Je ne sais pas s'il existe un angle solution. Alors je rédige la solution comme suit :

Soit $\alpha \in [0, 90]$ ★ La différence de niveau entre A et B a pour mesure en mètres $h = 1.\cos\alpha°$

★ $(h = 0,5) \Leftrightarrow (\cos\alpha° = 0,5) \Leftrightarrow (\alpha° = 60°)$

Il y a donc un angle solution et un seul : c'est l'angle de 60°.

ab) C'est l'occasion de réfléchir avec nos élèves de seconde sur cette remarque qu'ils font : " En math et en physique on ne raisonne pas de la même façon. En math il y a tout un cliché d'équivalences logiques, d'analyses-synthèses qu'on ne trouve pas en physique. En physique c'est bien plus simple". Hé oui ! c'est bien plus simple quand on sait que le problème a une solution ; quand on manipule des <u>propositions vraies</u> au lieu de <u>propositions à rendre vraies</u>.

<u>LE RAISONNEMENT PAR ANALYSE et SYNTHESE</u> est fréquemment utilisé en mathématique dans les problèmes d'un certain type. Comme les physiciens se jugent légitimes propriétaires de l'analyse et de la synthèse, il est bon que les matheux leur indiquent quel sens ils attribuent à ces deux termes dans le raisonnement dit par "analyse et synthèse".

Ex. 1 (début de seconde)... qui n'est pas présenté comme un modèle d'élégance, mais comme une illustration de la méthode par A et S. Résoudre l'équation e : $\sqrt{x+1} = x - 1$ où l'inconnu x est à choisir dans R.

Posons $sol(e) = \{x \in R \;/\; \sqrt{x+1} = x - 1\}$.

Dans le secondaire, "Résoudre l'équation e" signifie, en principe, "définir Sol (e) en extension", en donner les constituants. C'est un problème de construction, de synthèse d'un ensemble dont il faut rassembler les éléments épars dans R.

Tenter la synthèse en interrogeant chaque élément de l'immense R , ce n'est pas possible. On va donc soumettre à analyse préalable les constituants de sol (e), c'est-à-dire en rechercher des qualités résultant de leur propriété d'être des solutions de e ; on espère ainsi réduire la base de départ de la synthèse.

<u>Analyse</u> Supposons que sol(e) $\neq \emptyset$ et considérons un élément quelconque x_o de sol (e).

Alors $\sqrt{x_o + 1} = x_o - 1$ donc $x_o + 1 = (x_o - 1)^2$

donc $x_o + 1 = x_o^2 - 2x_o + 1$

donc $x_o^2 - 3x_o = 0$

donc $x_o (x_o - 3) = 0$

donc $x_o \in \{0;3\}$

Ainsi tout élément de sol (e) est élément de $\{0,3\}$; <u>sol (e) $\subset \{0;3\}$</u>

Le problème n'est pas fini, mais le progrès est considérable. La construction de sol (e) peut se faire à partir du petit ensemble $\{0;3\}$ tout simplement par deux essais.

<u>Synthèse</u>

Pour $x = 0$ $\begin{cases} \sqrt{x+1} = \sqrt{1} = 1 \\ x - 1 = \phantom{\sqrt{1}} -1 \end{cases}$ $0 \notin$ sol (e)

Pour $x = 3$ $\begin{cases} \sqrt{x+1} = \sqrt{4} = 2 \\ x - 1 = \phantom{\sqrt{4}} 2 \end{cases}$ $3 \in$ sol (e)

<u>Conclusion</u> Sol (e) = $\{3\}$

Deux remarques

1) Est-il opportun d'utiliser le signe $\Rightarrow$ dans la rédaction de l'analyse ?

Examinons ce texte :

<u>Soit $x_o \in$ Sol (e)</u>

$(x_o \in \text{Sol (e)}) \Rightarrow (\sqrt{x_o + 1} = x_o - 1) \Rightarrow \dots \Rightarrow x_o \in \{0;3\}$

★ Tout cela est parfaitement exact ; et, la proposition ($x_o \in$ Sol (e)) étant V par hypothèse, la chaîne des $\Rightarrow$ affirme-non sans pédantisme - que la proposition $x_o \in \{0;3\}$ est V.

★ Dans la rédaction sans $\Rightarrow$; les "donc" évoquent des raisons, des propriétés des calculs dans R qui font que la vérité de chaque proposition se DEDUIT de celle de la proposition précédente. Les $\Rightarrow$ ne suggèrent rien de tel ; leur chaîne n'est pas plus démonstrative que celle-ci :.

1.

Soit x_o ∈ Sol(e)

$(x_o \in Sol(e)) \Rightarrow (2 \in N) \Rightarrow (5 > 3) \Rightarrow (x_o \in \{0; 3\})$.

... chaîne ni plus ni moins exacte que la précédente.

2) Fréquemment les débutants utilisent le signe ⇔ dans la rédaction de l'analyse :

Soit $x_o \in Sol(e)$:

$(x_o \in Sol(e)) \Leftrightarrow (\sqrt{x_o + 1} = x_o - 1) \Leftrightarrow (x_o + 1 = (x_o - 1)^2) \Leftrightarrow$

$\ldots \Leftrightarrow (x_o \in \{0; 3\})$

Cette chaîne n'a rien d'incorrect puisque, dans le cadre considéré, toutes ses propositions sont vraies (Elles ont donc la même valeur logique). Elle présente aussi peu d'intérêt que la chaîne des ⇒ précédentes. Mais en outre elle est dangereuse car elle incite ceux qui ont perdu de vue le cadre de validité des ⇔ à conclure que Sol(e) = $\{0; 3\}$.

1, 2) Nous engagerons donc nos élèves à rédiger modestement sans ⇒ ni ⇔ leurs analyses.

III - RELATIONS - FONCTIONS

Les professeurs de mathématiques informent les physiciens sur les présentations modernes de ces notions. Pas de conflit, les physiciens pensent qu'ils pourront les utiliser plus explicitement et avec un langage plus conforme à celui de leurs élèves.

Ex. (Cessac, seconde)

Un ressort d'acier de bonne qualité s'allonge proportionnellement au poids du corps qu'on lui suspend. Sachant qu'un poids de 1 kgp lui inflige un allongement de 900 mm, 1°/ de combien l'allongerait un poids de 0,75 kgp ? 2°/ Quel serait le poids qui l'allongerait de 96 mm ?

• La fonction $A : [0, 1] \to R^+$

$p \mapsto a = \ldots$ qui à chaque nombre p de $[0, 1]$, mesure

en kgp du poids du corps accroché, fait correspondre le nombre a, mesure en mm de l'allongement produit, est une fonction linéaire puisque l'allongement est proportionnel à la charge. Il existe donc un réel fixé λ tel que
$\forall p \in [0, 1]$ $A(p) = \lambda . p$ or $A(1) = 200$ donc $200 = \lambda \times 1$ et $\lambda = 200$.
D'où la présentation définitive de la fonction A :

$$A : [0,1] \rightarrow R^+$$
$$p \mapsto a = 200.p$$

★ En particulier :

- □ Si $p = 0,75$, alors $a = 200 \times 0,75 = 150$.
  Un poids de 0,75 kgp allonge le ressort de 150 mm.
- □ Si $a = 96$, alors $96 = 200p$; $p = \frac{96}{200} = 0,48$.
  C'est un poids de 0,48 kgp qui allonge le ressort de 96 mm.

IV - VECTEURS

Les professeurs de mathématiques du 1er cycle présentent à leurs collègues physiciens le vecteur de 4ème ... sans soulever l'enthousiasme de l'auditoire. Que faire en effet de ces brassées de bipoints étrangères à toute idée de "grandeur" pour représenter des êtres physiques ayant une "intensité" ?

Heureusement en 3ème le vecteur s'enrichit d'une norme et, dès lors, professeurs de physique et élèves de 2ème peuvent le penser en toute harmonie comme ce paquet de 3 qualités : (direction - sens - norme) qui le rendent apte à la représentation de certaines grandeurs physiques. On regrette bien ça et là que le vecteur moderne n'ait plus ni origine ni support. Mais ce n'est qu'un baroud d'honneur puisqu'on sait bien que lorsque le besoin s'en fera sentir on pourra utiliser des couples (vecteur, point) ou (vecteur, droite).

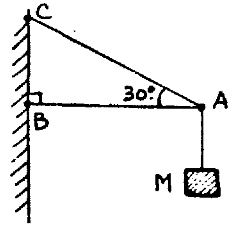
Cela dit, les physiciens ont le regret de faire savoir à leurs collègues matheux que les élèves à l'entrée en seconde sont aussi faibles sur les vecteurs d'aujourd'hui que sur ceux d'hier, ce qui les oblige à consacrer trop d'heures en début d'année à des tâches qui ne devraient pas être les leurs.

Le professeur de mathématiques de seconde sera donc invité à lancer dès le premier jour de classe une révision sérieuse sur les calculs dans l'ensemble des vecteurs du plan et sur l'utilisation des bases et repères.

Après ce retour sur le programme de géométrie de 4ème et de 3ème, les élèves pourront traiter proprement les petits problèmes d'équilibre qu'ils rencontreront dès le début de l'année en physique.

A titre d'exemple les participants examinent quelques-uns de ces problèmes, notamment celui de la console, posé (mal) dans le Cessac p. 54 :

" Une charge M de 1000 N est soutenue comme l'indique la figure. AB et AC sont deux poutrelles rigides assemblées en A et fixées au mur vertical en B et C. Rechercher les caractéristiques des 3 forces qui se font équilibre en A. "

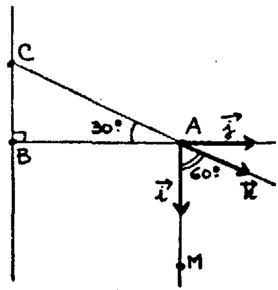


Il faut préciser que les poutrelles ont un poids négligeable et qu'elles sont liées entre elles et au mur par des articulations sans frottement (c'est-à-dire ni soudées ni encastrées).

Cela fait, l'analyse des forces agissant sur la barre [AB] en équilibre sur la barre [AC] en équilibre et sur le fil [AM] en équilibre montre que A est soumis à 3 forces :
l'une portée par la droite (AM), complètement connue, les deux autres portées par les droites (AB) et (AC) dont il faut déterminer sens et intensité.

Première présentation

Soit $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ des vecteurs unitaires des droites (AM) (AB) (AC) orientés comme l'indique la figure. Dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ les coordonnées de $\vec{k}$ sont $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.
les forces exercées sur A peuvent être représentées par 3 vecteurs $1000.\vec{i}$, $p.\vec{j}$, $q.\vec{k}$, 1000, $|p|$, $|q|$, étant les mesures de ces forces en Newton.
Puisque A est immobile $1000\vec{i} + p.\vec{j} + q\vec{k} = \vec{0}$. donc :



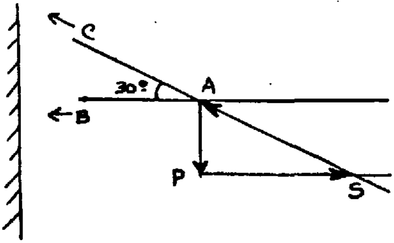
$$\begin{cases} 1000 \times 1 + p \times 0 + q \times \frac{1}{2} = 0 \\ 1000 \times 0 + p \times 1 + q \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} q = -2000 \\ p = 1000\sqrt{3} \end{cases}$$

A est donc soumis:

- Au poids de la masse suspendue ayant la direction et le sens de $\overrightarrow{AM}$ et pour intensité 1000 N.
- A la poussée de la barre (AB) ayant la direction et le sens de $\overrightarrow{BA}$ et pour intensité $1000\sqrt{3}$ N.
- A la traction de la barre (AC) ayant la direction et le sens de $\overrightarrow{AC}$ et pour intensité 2000 N.

Deuxième présentation

Dans le plan de la figure prenons comme unité de longueur le cm et convenons qu'un vecteur de norme 1 représente une force de 500 N.



Le point A est soumis à 3 forces que l'on peut représenter par 3 vecteurs de somme nulle :

1) Une force verticale orientée vers le bas représentée par un vecteur $\overrightarrow{AP}$ de norme $AP = \dfrac{1000}{500} = 2$
2) Une force ayant la direction de (AB) représentée par un vecteur $\overrightarrow{PS}$
3) Une force ayant la direction de (AC) représentée par le vecteur $\overrightarrow{SA}$

■ Le point S se trouve imposé à l'intersection de la droite (AC) et de la parallèle à (AB) menée par P

$PS = AP.\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$; $SA = AP \times 2 = 4$

$\overrightarrow{PS}$ représente donc une force de $2\sqrt{3} \times 500 \text{ N} = 1000\sqrt{3}$ N et
$\overrightarrow{SA}$ " une force de $4 \times 500 \text{ N} = 2000$ N.

Même conclusion...

V - ANGLES ET TRIGONOMETRIE EN 3ème

L'exposé orthodoxe des professeurs de mathématiques soulève des remous.

On décide de rédiger quelques fiches sur le sujet, destinées
- d'une part à informer les professeurs de physique,
- d'autre part à "accorder les violons" sur un registre moyen.

Il s'agit donc d'une information - plus pratique qu'orthodoxe - à l'usage des professeurs de physique en classe de seconde.

ISOMETRIES DU PLAN EUCLIDIEN

I - DEFINITION

★ Dans le "plan euclidien" construit en troisième, modèle mathématique du plan physique muni d'une unité de longueur, la distance de deux points M et N, la norme du vecteur $\overrightarrow{MN}$, la mesure de la longueur du segment [MN] sont un seul et même réel positif noté d(M, N) , $\| MN \|$ ou tout simplement MN.

★ Pour l'élève de troisième, les isométries du plan euclidien $\mathcal{P}$ sont les bijections de $\mathcal{P}$ sur lui-même qui conservent les distances, c'est-à-dire telles que si M et N sont deux points quelconques de $\mathcal{P}$ et M' et N' leurs images, alors MN = M'N'.

★ Deux figures F et F' de $\mathcal{P}$ sont dites isométriques pour exprimer qu'il existe une isométrie transformant F en F'.

Les isométries de $\mathcal{P}$ formant un groupe de transformations, la relation d'isométrie dans l'ensemble des figures de $\mathcal{P}$ est une relation d'équivalence.

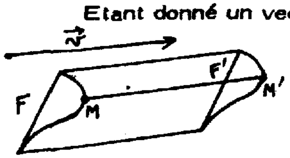
La propriété pour deux figures de $\mathcal{P}$ d'être isométriques est la traduction en mathématique de la propriété de deux corps plats d'être superposables en physique (avec ou sans retournement). Attention à la terminologie : les figures isométriques d'aujourd'hui sont les anciennes "figures égales". Avec le langage ensembliste l'égalité a perdu son sens élastique d'autrefois. Si je dis aujourd'hui, par exemple, que les segments [AB] et [CD] sont égaux, je n'affirme plus seulement qu'ils ont la même longueur, mais je fais savoir qu'ils sont un seul et même ensemble de points, c'est-à-dire que A = C et B = D, ou A = D et B = C.

Trois isométries fondamentales.

1) TRANSLATION

Etant donné un vecteur fixé $\vec{v}$, soit $T_{\vec{v}} : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$

$M \mapsto M' / \overrightarrow{MM'} = \vec{v}$

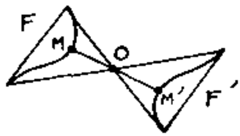


$T_{\vec{v}}$ est une isométrie, traduction en mathématique de la notion physique de "glissement rectiligne".

2) SYMETRIE-POINT

Etant donné un point fixé o , soit So : $\mathcal{P} \to \mathcal{P}$

$M \mapsto M'$/o est milieu de $[MN']$

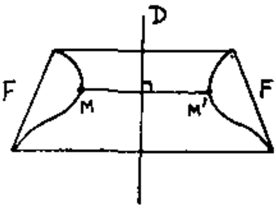


So est une isométrie, traduction en mathématic de la notion physique de "rotation d'un demi-tour autour du point o".

3) SYMETRIE-DROITE

Etant donné une droite fixée D, soit S_D : $\mathcal{P} \to \mathcal{P}$.

$M \mapsto M'$/D est médiatrice de $[MN']$

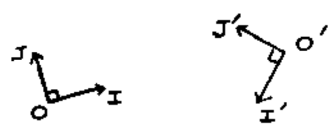


S_D est une isométrie, traduction en mathématique de la notion physique de pliage ou de rotation d'un demi-tour autour de D.

On peut démontrer en troisième que toute isométrie est la composée de 2 ou 3 symétries-droites.

III - On démontre que...

1) Etant donnés 2 repères othonormés $\mathcal{R}$ $\mathcal{R}'$, il existe une isométrie et une seule transformant $\mathcal{R}$ en $\mathcal{R}'$.

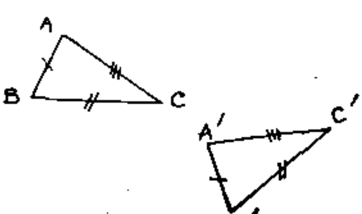


2) Etant donnés 2 triangles (A, B, C) (A', B', C') tels que $\begin{cases} AB = A'B' \\ BC = B'C' \\ CA = C'A' \end{cases}$

il existe une isométrie et une seule transformant A en A'

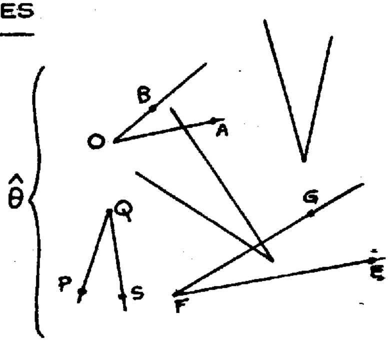
B en B'

C en C'



On reconnaît l'ancien "3ème cas d'égalité" des triangles, devenu "cas d'isométrie".

ANGLES GEOMETRIQUES



I - ANGLES GÉOMÉTRIQUES

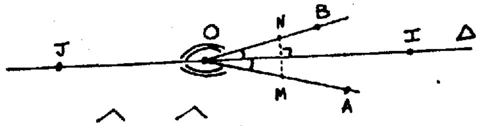
Soit dans le plan euclidien $\mathcal{P}$ un couple de demi-droites de même origine ([OA), [OB))
L'ensemble des couples de demi-droites isométriques au couple ([OA), [OB)) est un angle-géométrique $\hat{\theta}$.

Chacun de ces couples est un "représentant" de $\hat{\theta}$

L'angle géométrique $\hat{\theta}$ représenté par le couple de demi-droites ([OA), [OB)) peut être noté $\widehat{AOB}$: $\hat{\theta} = \widehat{AOB} = \widehat{PQS} = \widehat{EFG} = \ldots$
L'angle géométrique se définit donc à partir des couples de demi-droites de même origine comme le vecteur à partir des bipoints, au moyen d'une relation d'équivalence.

Notons que l'angle-géométrique $\widehat{AOB}$ n'a ni sommet, ni côtés, ni bissectrice (aussi démuni que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ qui n'a ni origine, ni extrémité, ni milieu). Par contre, chaque représentant de $\hat{\theta}$ a un sommet, deux côtés, et une bissectrice, qui est l'axe de la symétrie échangeant ses deux côtés.

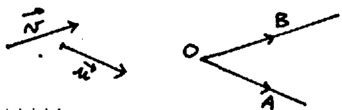
Soit $\Delta = (IJ)$ l'axe de la symétrie échangeant [OA) et [OB)
L'isométrie S_Δ transforme ...



... ([OA), [OB)) en ([OB), [OA)) donc $\widehat{AOB} = \widehat{BOA}$ (aucune idée de "sens" dans les angles-géométriques)
... ([OI), [OA)) en ([OI), [OB)) donc $\widehat{IOA} = \widehat{IOB}$
... ([OJ), [OA)) en ([OJ), [OB)) donc $\widehat{JOA} = \widehat{JOB}$

Angle géométrique de 2 vecteurs. Soit 2 vecteurs non nuls $\vec{u}$, $\vec{v}$.
Représentons-les par deux bipoints de même origine (O, A) (O, B). L'angle-géométrique de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est l'angle-géométrique des demi-droites [OA) et [OB)

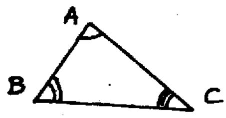
$$\widehat{\vec{u}, \vec{v}} = \widehat{AOB}$$



L'angle géométrique de 2 axes est l'angle-géométrique de leurs vecteurs unitaires

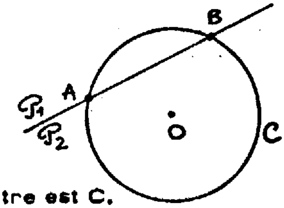
$$\widehat{\mathcal{A}, \mathcal{A}'} = \widehat{\vec{u}, \vec{u}'}$$

<u>Les angles-géométriques d'un triangle</u> (A, B, C) sont les angles des demi-droites [AB), [AC) ; [BA), [BC) ; [CA), [CB)



$\widehat{A} = \widehat{BAC}$ ... etc.

II - ARCS DE CERCLE



★ Soit un cercle C, 2 points distincts A, B de C et $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ les deux demi-plans limités par (AB) $\mathcal{P}_1 \cap C$ et $\mathcal{P}_2 \cap C$ sont les deux "<u>arcs</u>" de C limités par A et B.
Si A = B , l'un des arcs est réduit à un point ; l'autre est C.

★ Dans l'ensemble Ω des arcs d'un cercle C on définit une "<u>K-Mesure</u>" associée à chaque réel K fixé strictement positif, K étant la K-mesure du demi-cercle. Pour K = 180, pour K = 200, pour K = π on retrouve les <u>mesures habituelles en degrés, grades ou radians.</u> Entre les différentes K-mesures d'un même arc il existe des rapports constants que l'on retrouve en recourant au demi-cercle. Par exemple si α, β, γ sont les mesures en degrés, grades, radians d'un même arc, $\frac{\alpha}{180} = \frac{\beta}{200} = \frac{\gamma}{\pi}$

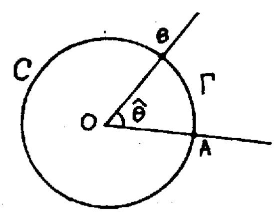
D'où, par exemple, $\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\pi}{180}$ ... etc.

★ La mesure de la longueur du cercle et des arcs de cercle ne figure pas au programme de 3ème. Il serait bon d'en faire rappel à l'occasion des K-mesures :

L'unité de longueur étant fixée, la mesure de la longueur d'un cercle de rayon r est le réel $L = 2\pi . r$

Si un arc du même cercle a pour mesure-en-radians γ , la mesure de sa longueur est le réel ℓ tel que $\frac{\ell}{\pi r} = \frac{\alpha}{\pi}$; $\ell = r . \alpha$.

III - A partir de la K-mesure des arcs on définit le <u>K-écart angulaire des angles-géométriques</u>



Soit un angle-géométrique $\hat{\theta}$. Représentons-le par un couple de demi-droites de même origine O, coupant en A et B un cercle C de centre O.

Si A et B ne sont ni diamétralement opposés, ni confondus, l'arc Γ de C "associé" au représentant ([OA), [OB)) de $\hat{\theta}$ est celui des deux arcs de C limités par A et B qui est situé dans le demi-plan de bord (AB) ne contenant pas O. Par définition, le K-écart angulaire de $\hat{\theta}$ <u>est la K-mesure de Γ</u>.
<u>On le note $E_k(\hat{\theta})$</u>

Par exemple si $\hat{\theta}$ est un angle droit $E_k(\hat{\theta}) = \frac{K}{2}$.

Dans le cas particulier où A et B sont diamétralement opposés, c'est-à-dire où $\hat{\theta}$ est "l'angle plat", $E_k(\hat{\theta}) = K$.

Dans le cas particulier où A et B sont confondus, c'est-à-dire où $\hat{\theta}$ est "l'angle nul", $E_k(\hat{\theta}) = 0$.

On notera que $\underline{\forall \hat{\theta} \quad 0 \leq E_k(\hat{\theta}) \leq K}$ ... ce qui nous rappellera peut-être les "angles saillants" d'autrefois.

Aux valeurs usuelles 180, 200, π de K correspondent les écarts angulaires évalués en degrés, grades ou radians.

K étant fixé, les angles-géométriques s'ordonnent comme leurs K-écarts angulaires ; et l'ordre ainsi défini est indépendant de K. On définit comme autrefois les angles-géométriques aigus ou obtus.

On dit que deux angles-géométriques sont supplémentaires pour exprimer que la somme de leurs K-écarts angulaires est K, on dit qu'ils sont complémentaires pour exprimer que cette somme est $\frac{K}{2}$

On démontre que la somme des K-écarts angulaires des trois angles d'un triangle est K.

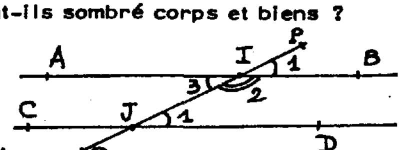
Quelques observations

1) On a noté qu'en 3ème on ne mesure pas les angles-géométriques : on évalue leur K-écart angulaire ; on n'additionne pas les angles-géométriques : on additionne leurs K-écarts angulaires.

   Mais, résultat de la coupure entre les deux cycles, les professeurs de seconde, matheux ou physiciens, ignorent pour la plupart la géométrie de 3ème ; de sorte que le langage des angles-géométriques ne vit que de mal au B.E.P.C. Et il faut bien constater que dans la majorité des classes de seconde on "mesure les angles et on les additionne".

2) Les angles "alternes-internes" et autres ont-ils sombré corps et biens ?

   Soit deux droites parallèles (AB) et (CD) coupées en I et J par une sécante (PQ)



★ La translation de vecteur directeur $\overrightarrow{IJ}$ transforme ([IP), [IB)) en ([JP), [JD)).

   Donc $\widehat{PIB} = \widehat{PJD}$; brièvement $\widehat{I_1} = \widehat{J_1}$. Il en résulte que $\widehat{I_2}$ et $\widehat{J_1}$ sont supplémentaires et que $\widehat{I_3} = \widehat{J_1}$... etc.

★ On pouvait aussi bien utiliser la symétrie de centre O milieu de [IJ].

** Bref, avec ces isométries, les théorèmes historiques sur les parallèles et sécantes deviennent tellement évidents qu'on ne les signale même plus.

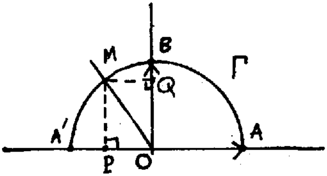
3) <u>Et les "cas d'égalité" des triangles ?</u>

On peut démontrer des "cas d'isométrie" qui leur ressemblent comme des frères ; mais à part le 3ème, déjà signalé, leur intérêt ne paraît pas évident.

4) <u>Et les "cas de similitude" ?</u>

Plus de "triangles semblables" en troisième ni en seconde. Et on s'en passe très bien grâce à la trigonométrie.

TRIGONOMETRIE EN TROISIEME



★ K étant un réel fixé strictement positif, et u un réel de $[O, K]$, on définit comme suit $\underline{\cos_k u \text{ et } \sin_k o}$:

Soit $(O, \vec{OA}, \vec{OB})$ un repère orthonormé du plan euclidien $\mathscr{P}$; auquel on adjoint le point $A'(-1, 0)$ et le demi-cercle Γ de diamètre $[AA']$ passant par B.

Il existe un angle-géométrique unique $\hat{\theta}$ tel que $E_k(\hat{\theta}) = u$ et un point M unique de Γ tel que $\widehat{AOM} = \hat{\theta}$. Par définition $\cos_k u$ et $\sin_k u$ sont les coordonnées de M dans le repère $(O, \vec{OA}, \vec{OB})$

$$\boxed{\begin{aligned} \cos_k u &= \overline{OP} \\ \sin_k u &= \overline{OQ} \end{aligned}}$$

Ainsi, étant donné un angle-géométrique $\hat{\theta}$, ce n'est pas $\cos\hat{\theta}$ ni $\sin\hat{\theta}$ que l'on définit mais $\cos_k(E_k(\hat{\theta}))$ et $\sin_k(E_k(\hat{\theta}))$, cela pour chaque réel K strictement positif.

Par exemple, si $\hat{\theta}$ est tel que $E_{180}(\hat{\theta}) = 28$, l'orthodoxie veut que l'on parle de $\cos_{180} 28$; mais le commentaire du programme de 3ème admet <u>l'abus de langage qui consiste à remplacer $\cos_{180} 28$ par $\cos 28°$</u>. et plus généralement <u>$\cos_k(E_k(\hat{\theta}))$ par $\cos\hat{\theta}$</u>; *ce qui ne choquera pas grand monde puisque le nombre* $\cos_k(E_k(\hat{\theta}))$, indépendant du choix de K, est déterminé par $\hat{\theta}$ seul.

D'ailleurs quand, en seconde, professeurs de mathématiques, professeurs de physique ou élèves écrivent $\cos 28°$, qui d'entre eux a l'impression de commettre un abus de langage ?

Ces élèves ont oublié les définitions de 3ème, la plupart des professeurs ne les ont jamais sues, et tous, ou à peu près, sont persuadés que la trigonométrie a commencé par la présentation du cosinus et du sinus d'un angle :

$$\cos\hat{\theta} = \overline{OP}$$

$$\sin\hat{\theta} = \overline{OQ}$$

De sorte que cos28° est pensé non comme une écriture tolérée de $\cos_{180} 28$, mais tout simplement comme le cosinus de l'angle 28°. Et où est le mal ? On définira en 1ère - sans révision déchirante - d'autres angles, d'autres cosinus et d'autres sinus. En attendant, utilisons en seconde des cosinus et des sinus fréquentables par tous.

★ Ces aises prises, les professeurs de physique de seconde sont avisés que leurs élèves, au sortir de la troisième, sont censés...

... 1) Savoir que

$$\forall\alpha \in [0, 180] \quad \cos^2\alpha° + \sin^2\alpha° = 1$$

$$\forall\alpha \in [0, 180] \quad \cos(180-\alpha)° = -\cos\alpha° \text{ et } \sin(180-\alpha)° = \sin\alpha°$$

$$\forall\alpha \in [0, 90] \quad \cos(90-\alpha)° = \sin\alpha° \text{ et } \sin(90-\alpha)° = \cos\alpha°$$

$$\forall\alpha \in [0, 180]-\{90\} \quad \mathrm{tg}\,\alpha° = \frac{\sin\alpha°}{\cos\alpha°}$$

... 2) Posséder par coeur les sin, cos et tg des angles 0°, 30°, 45°, 60°, 90°, 180°

... 3) Connaître les formules de trigonométrie dans les triangles rectangles.

... 4) Savoir utiliser les tables de trigonométrie à 3 ou 4 décimales.

Mais l'expérience montre qu'à l'entrée en seconde ils en savent bien moins que ça ! le professeur de mathématiques devra donc lancer dès le début de l'année une solide révision de trigonométrie. Son collègue de physique lui en saura gré.

CONCLUSION

Si nous sommes conscients du fait que les paragraphes de ce document qui concernent les aspects théoriques nécessitent un approfondissement, nous souhaitons que le lecteur, qu'il participe ou non à un groupe de recherche math-physique de l'I.R.E.M., fasse part de ses critiques et de ses réponses aux questions que nous nous posons.

le dessin de Gill

CORPS TRIVIAL

NOTE SUR LA REPRESENTATION COMPLEXE DES GRANDEURS SINUSOIDALES EN ELECTRICITE

* *
*

Daniel TESTARD, I.R.E.M. d'AIX-MARSEILLE

La présentation habituelle de la notation complexe des grandeurs sinusoïdales de fréquence donnée, utilisant le vecteur de Fresnel et son interprétation dans le plan complexe, a l'inconvénient , sérieux au niveau de l'application, d'amener certains élèves à interpréter, tous calculs faits , la partie réelle de la représentation complexe comme l'amplitude du signal sinusoïdal.

Nous utilisons ici une autre méthode. Elle a été testée avec des élèves connaissant assez bien l'algèbre linéaire : un élève de terminale est en général capable de traiter le problème-classique aux épreuves du baccalauréat de "l'espace des fonctions qui sont de la forme... (par exemple $(a\cos t + b\sin t)e^{t}$) et sa structure d'espace vectoriel" (la dérivation apparaissant comme opérateur linéaire dont l'inverse est la recherche d'une primitive particulière, expression de ces opérateurs dans une base, etc.). En général, on constate que les résultats sont plutôt bons tant du point de vue de l'intérêt des élèves, qui ont l'occasion de "rentabiliser" sur un exemple simple les connaissances abstraites et générales qu'ils ont acquises en algèbre linéaire, que pour éviter la confusion signalée plus haut puisqu'à aucun moment nous n'aurons l'occasion de projeter sur l'axe réel, opération qui conduit à l'erreur classique : confusion entre amplitude et amplitude à l'origine.

L'objet de notre travail est un ensemble de fonctions $\mathcal{F}$ de la variable t (temps) qui sont de la forme :

$$t \rightarrow a\cos\omega t + b\sin\omega t \qquad a\in\mathbb{R},\ b\in\mathbb{R}$$

où ω est une constante qui est la pulsation du régime sinusoïdal auquel on s'intéresse.

Da façon équivalente les éléments de $\mathcal{F}$ peuvent être écrits sous la forme :

$$t \rightarrow A\cos(\omega t + \varphi) \qquad A \in R^{+},\ \varphi \in [0, 2\pi[$$

Assez vite, on est amené à introduire sur l'ensemble $\mathcal{F}$ une structure d'espace vectoriel réel, obtenue en faisant la somme, à chaque instant, des fonctions : $(f \in \mathcal{F},\ g \in \mathcal{F})\quad (f+g)(t) = f(t) + g(t)$ et en multipliant ces fonctions par des nombres réels $(\lambda \in R,\ f \in \mathcal{F})\ (\lambda f)(t) = \lambda f(t)$ également à chaque instant.

Cette structure d'espace vectoriel réel est, en fait, imposée par nos préoccupations en électricité : on utilise à chaque instant les lois des circuits, conduisant par exemple à ajouter, à chaque instant, les intensités convergeant vers un noeud, les tensions d'une maille ou encore à calculer la tension aux bornes d'une résistance connaissant l'intensité qui la parcourt en appliquant à chaque instant la loi d'Ohm :

$$\forall t \in R \qquad V(t) = R\, I(t)$$

Il est immédiat que pour cette structure d'espace vectoriel réel les deux fonctions γ et σ définies par :

$$\gamma(t) = \cos \omega t$$

$$\sigma(t) = \sin \omega t$$

forment une base et $\mathcal{F}$ est donc de dimension 2.

Le seul résultat mathématique utilisé dans ce qui suit est le suivant.

Proposition : Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie. On suppose qu'il existe un opérateur linéaire J de E dans E tel que $J^2 = -\mathbb{I}$ ($\mathbb{I}$ = identité de E). Alors :

i) La dimension de l'espace vectoriel E est paire (égale à $2p$ où p est un certain entier)

ii) Il existe une structure d'espace vectoriel complexe sur E telle que la multiplication par le nombre complexe $\alpha + i\beta$ du vecteur $x \in E$ soit définie par

$$(\alpha + i\beta)\, x = \alpha x + \beta\, Jx$$

$(\alpha \in R,\ \beta \in R,\ x \in E)$

iii) La dimension de l'espace vectoriel complexe E défini en ii) est p.

IV) Un opérateur linéaire A de E dans E (pour la structure réelle sur E) est un opérateur linéaire pour la structure complexe de E définie en ii) si et seulement si :

$$A J = J A$$

La démonstration de cette proposition n'est pas difficile et constitue un excellent exercice à propos des notions de structure d'espace vectoriel et d'opérateur linéaire.

Nous envisageons de l'appliquer à l'espace vectoriel réel $\mathcal{F}$ en utilisant un opérateur J "naturel d'un point de vue physique". Le résultat sera que $\mathcal{F}$ est un espace vectoriel complexe de dimension 1, identifiable au corps des complexes dès que l'on aura choisi une base (pour la structure complexe) laquelle sera constituée d'un seul vecteur.

Nous commençons par l'étude de quelques opérateurs sur $\mathcal{F}$ (linéaires pour la structure réelle).

a) Déphasage de φ C'est une application $\mathcal{C}^{\varphi}$ de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$ telle que l'image de la fonction

$t \to A \cos(\omega t + \phi)$ soit la fonction :

$t \to A \cos(\omega t + \phi - \varphi)$ où il est entendu que $\phi - \varphi$ est défini modulo 2π.

On vérifie que :

i) $[\mathcal{C}^{\varphi}(f)](t) = f(t - \frac{\varphi}{\omega})$ $\qquad \forall f \in \mathcal{F}$

ii) $\mathcal{C}^{\varphi}$ est linéaire

iii) $\mathcal{C}^{-\frac{\pi}{2}} = J$ est tel que $J^2 = -\mathbb{I}$ (où $\mathbb{I}$ est l'identité sur $\mathcal{F}$)

IV) $\mathcal{C}^{\varphi} \circ \mathcal{C}^{\varphi'} = \mathcal{C}^{\varphi+\varphi'}$ (où $\varphi + \varphi'$ est défini modulo 2π).

Démonstration

i) est immédiat.

ii) se vérifie selon : $(\forall f \in \mathcal{F}, \forall g \in \mathcal{F}, \forall t \in \mathbb{R})$

$$[\mathcal{C}^{\varphi}(f+g)](t) = (f+g)(t - \frac{\varphi}{\omega}) =$$

$$f(t-\frac{\varphi}{\omega})+g(t-\frac{\varphi}{\omega}) = (\mathcal{G}^{\varphi}f)(t)+(\mathcal{G}^{\varphi}g)t = (\mathcal{G}^{\varphi}(f)+\mathcal{G}^{\varphi}(g))(t)$$

d'où

$$\mathcal{G}^{\varphi}(f+g) = \mathcal{G}^{\varphi}(f)+\mathcal{G}^{\varphi}(g)$$

De même $\forall \lambda \in R$, $\forall f \in \mathcal{F}$

$$\mathcal{G}^{\varphi}(\lambda f) = \lambda\, \mathcal{G}^{\varphi}(f)$$

iii) Compte tenu de ii) doit être vérifié sur les éléments d'une base, or :

$$\forall t \in \mathbb{R},\quad (J\gamma)(t) = \cos(\omega t+\frac{\pi}{2}) = -\sin\omega t = -\sigma(t)$$

$$(J\sigma)(t) = \sin(\omega t+\frac{\pi}{2}) = \cos\omega t = \gamma(t)$$

soit : $J\gamma = -\sigma$ et $J\sigma = \gamma$

d'où : $J^2\gamma = -\gamma \qquad J^2\sigma = -\sigma$.

IV) se vérifie immédiatement :

$$(\mathcal{G}^{\varphi+\varphi'}(f))(t) = f(t-\frac{\varphi+\varphi'}{\omega}) = f(t-\frac{\varphi}{\omega}-\frac{\varphi'}{\omega}) =$$

$$(\mathcal{G}^{\varphi'}(f))(t-\frac{\varphi}{\omega}) = (\mathcal{G}^{\varphi}(\mathcal{G}^{\varphi'}(f))(t)$$

b) La réponse en tension ou en intensité d'un dipole linéaire passif.

Lorsque l'on branche entre les deux extrémités d'une portion de circuit (ou encore entre les bornes d'un dipole) une source de telle sorte que les fils d'alimentation soient parcourus à l'instant t par un courant $I(t)$ il peut se faire, lorsque $I \in \mathcal{F}$ que la tension entre les bornes du dipole $V(t)$, à l'instant t, soit telle que $V \in \mathcal{F}$ et que l'application qui associe V à I soit une application linéaire pour la structure d'espace réel de $\mathcal{F}$. Lorsque ce sera le cas on dira que le dipole est linéaire passif. L'application $I \to V$ dans $\mathcal{F}$ sera dite être la réponse en tension du dipole (étant sous entendu en régime sinusoïdal de pulsation ω). On écrira :

$$V = \mathcal{Z}(I)$$

On introduirait de même la <u>réponse en intensité du dipole</u> : c'est l'application $\mathcal{Y}$ (linéaire pour un dipole linéaire passif) associant I à V :

$$I = \mathcal{Y}(V)$$

C'est aussi l'application inverse (donc linéaire de $\mathcal{Z}$.

Nous allons maintenant voir que les applications linéaires qui décrivent les réponses en intensité ou en tension ne sont pas les applications linéaires les plus générales de $\mathcal{F}$ (pour la structure d'espace vectoriel réel). Il est en effet physiquement clair que si, par un artifice quelconque on produit un déphasage d'angle φ pour l'intensité parcourant le dipole, et pourvu que le dipole garde des caractéristiques indépendantes du temps, la réponse doit être telle que la tension aux bornes doit elle aussi être déphasée et du même angle φ. Ceci se traduit par l'égalité entre opérateurs linéaires :

$$\mathcal{C}^{\varphi}\,\mathcal{Z} = \mathcal{Z}\,\mathcal{C}^{\varphi}$$

En utilisant la proposition énoncée plus haut (I) II) et IV)) on voit donc que à condition de définir sur $\mathcal{F}$ uns structure d'espace vectoriel complexe utilisant l'opérateur

$$J = \mathcal{C}^{-\pi/2}$$

les opérateurs de réponse $\mathcal{Z}$ ou $\mathcal{Y}$ (ainsi d'ailleurs que les déphasages) pourront être décrits comme des opérateurs <u>linéaires pour cette structure complexe</u> .

La dimension complexe de $\mathcal{F}$ est 1 et par suite les calculs seront très simples une fois choisie une base pour projeter les fonctions de $\mathcal{F}$ et pour exprimer la matrice (réduite à un seul élément qui est un nombre complexe) des fonctions de réponse. Deux sortes de bases sont couramment utilisées :

La base naturelle constituée du seul élément γ de $\mathcal{F}$ et la base des valeurs efficaces dont l'unique vecteur de base est $\sqrt{2}\,\gamma$.
On passera facilement des valeurs naturelles aux valeurs efficaces en divisant par $\sqrt{2}$ les coordonnées et en conservant les mêmes matrices pour les fonctions réponses. Dorénavant nous utiliserons la base naturelle. Par définition,nous écrirons :

$$V = \underset{\sim}{V}\,\gamma \qquad\qquad \underset{\sim}{V} \in \mathbb{C}$$

pour une fonction V de $\mathcal{F}$. $\underset{\sim}{V}$ est la coordonnée de V dans la base $\{\gamma\}$ pour la structure complexe introduite. On dit que $\underset{\sim}{V}$ est la représentation complexe de la fonction V.

L'unique nombre complexe Z tel que : Z soit (l'unique) élément de matrice de l'opérateur de réponse en tension défini par :

$$\mathcal{Z}(\gamma) = Z\,\gamma$$

est l'impédance complexe du dipole. De même la relation

$$\mathcal{Y}(\gamma) = Y \cdot \gamma \qquad Y \in \mathbb{C}$$

définit le nombre complexe Y qui est l'admittance du dipole (complexe).

Les calculs du type

$$\underset{\sim}{V} = \mathcal{Z}(I)$$

s'effectuent commodément dans la base $\{\gamma\}$ et donnent la loi

$$\underset{\sim}{V} = Z\,\underset{\sim}{I}$$

exprimant une égalité entre nombres complexes.

Dans la pratique les formules données plus haut permettent le calcul des représentations complexes des grandeurs considérées ou l'impédance des dipoles qui nous intéressent. Nous donnons quelques exemples :

a) Représentation complexe de la fonction :

$$t \to a \cos \omega t + b \sin \omega t$$

La fonction est $a\gamma + b\sigma$. Nous avons vu que $J\gamma = -\sigma$ d'où $\sigma = -J\gamma$ soit :

$$a\gamma + b\sigma = a\gamma - b\,J\gamma = (a - ib)\,\gamma$$

d'où :

$$\underset{\sim}{a\gamma + b\sigma} = a - ib .$$

b) Représentation complexe de la fonction :

$$t \to A\cos(\omega t + \varphi)$$

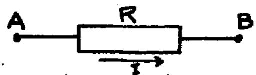
L'identité

$A\cos(\omega t + \varphi) = A\cos\varphi \cos\omega t - A\sin\varphi \sin\omega t$ montre que l'on doit faire $a = A\cos\varphi$, $b = -A\sin\varphi$ dans la formule précédente. On obtient aussi la représentation complexe

$$A\cos\varphi - i\,(-A\sin\varphi) = A\,e^{i\varphi}$$

c) Dipole purement résistif

Dans le cas d'une résistance R, la structure d'espace vectoriel réel suffit. En fait, pour $I = \gamma$ on a avec les conventions de signe rappelées ci-contre :



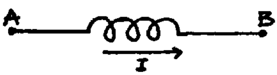
$V = V_A - V_B$

$V = R\,I = R\gamma$

L'impédance complexe est donc dans ce cas simplement R.

d) Dipole purement inductif

Avec les conventions de signe ci-contre, on a :



$V = V_A - V_B$

$$V = L\,\frac{dI}{dt}$$

Si on fait $I = \gamma$, on obtient :

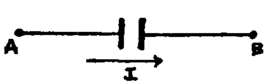
$$V = L\frac{d\gamma}{dt} = -\omega L \sigma = i L \omega \gamma$$

d'où

$$Z = i L \omega$$

e) Dipole capacitif

Les conventions de signe sont données ci-contre. Alors :



$V = V_A - V_B$

$$I = \frac{d}{dt}(CV)$$

Calculons l'admittance complexe et, pour cela, faisons $V = \gamma$:

$$I = C\frac{d\gamma}{dt} = -C\omega\sigma = i\,C\,\omega\,\gamma$$

d'où l'admittance

$$Y = i\,C\,\omega$$

et l'impédance

$$Z = \frac{1}{i\,C\,\omega}$$

Les dipoles plus complexes seront ensuite obtenus grâce aux règles d'addition des impédances ou des admittances qui ne font que traduire la structure additive dans l'ensemble des opérateurs de $\mathcal{F}$.

* mathénigme 1 : la droite achevée.

* mathénigme 2 : les espaces séparés.

L'HOMO MATHEMATICUS ET L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES TELS QU'EN EUX-MEMES...

* *
*

Jean MARION - I.R.E.M. d'AIX-MARSEILLE

L'HOMO MATHEMATICUS

Le caractère essentiel de l'homo mathématicus est mis en évidence par l'aptitude qu'a l'homo sapiens de classer les problèmes en catégories pour chacune desquelles il essaie de concevoir des méthodes de traitement applicables quel que soit le "cas de figure", et pour un problème nouveau qui se pose à lui, reconnaître soit qu'il entre dans l'une des catégories répertoriées, soit qu'il n'y entre pas et essayer alors de forger un outil adapté à son traitement.

L'homo mathématicus est celui qui fait fonctionner l'activité scientifique dans ce qu'elle a d'essentiel, à savoir la mise en oeuvre d'outils pour résoudre des questions qui se posent à un moment donné, et l'évaluation des résultats obtenus au regard des problèmes posés. En fonction de ses aptitudes, le souci de l'efficacité l'ont amené à vouloir garantir la validité de ses assertions par des démonstrations ; dès lors que cette garantie repose sur le raisonnement déductif cette activité est dite mathématique.

L'activité humaine, y compris l'activité scientifique dans chaque branche de la Science comprend une majorité d'actes qui ne sont pas en général d'ordre essentiellement mathématique. Mais une science, au départ plus ou moins empirique, est reconnue comme d'autant plus "exacte" ou "scientifique" que le degré d'imbrication des mathématiques et de cette science est plus important. Toutes les sciences tendent à essayer d'augmenter leur degré d'imbrication avec les mathématiques, et ceci dans le souci d'une plus grande efficacité. Il semble que l'intelligence humaine tend à porter son effort sur une simplicité conceptuelle dans la formulation des fondements de toute activité scientifique ; ainsi les lois fondamentales de la physique peuvent être misesdans une forme mathématique pouvant tenir sur une unique feuille de papier format écolier.

Ainsi d'une part l'approche mathématique d'un problème scienfitique est une approche de base, d'autre part des méthodes mathématiques peuvent être utilisées dans des calculs technologiques et scientifiques que la science de départ n'aurait su conduire à terme.

Il y a donc une spécificité de l'homo mathématicus ; l'évolution des activités humaines en général, scientifiques en particulier a amené l'apparition d'homo mathématicus spécialisés : mathématiciens, physiciens, ingénieurs, etc. Mais les mathématiciens, le professeur de mathématiques, l'ingénieur, etc. ne sauraient rendre compte à eux seuls de la dimension de l'homo mathématicus. Néanmoins, il y a équivalence entre activités de l'homo mathématicus et activités mathématiques.

Il y a donc lieu de faire une différence entre les mathématiques considérées comme activité en soi, qui approfondit les concepts qu'elle manipule, élabore des théories, se pose des problèmes etles activités de l'homo mathématicus qui :

a) forge un langage applicable à toute activité scientifique et permettant d'une part une formulation des problèmes posés dans une forme entrant dans le champ d'application des mathématiques, d'autre part une approche à la base du problème scientifique posé ;

b) développe les mathématiques comme activité en soi ;

c) donne des prestations de services aux autres sciences... qui le lui rendent bien par l'introduction de nouveaux concepts, de nouvelles perspectives.

Autrement dit, au niveau de l'activité humaine, ce qui joue un rôle fondamental ce ne sont pas les mathématiques considérées comme l'un des beaux-arts, mais le champ d'intervention des concepts et des outils mathématiques, la puissance d'investigation de l'homo mathematicus.

L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES ACTUEL : DES RAISONS DE LA CRISE

Dès lors qu'une société décrète la nécessité d'une institution scolaire pour l'ensemble de ses membres elle ne peut prétendre , quelles que soient les motivations idéologico-politico-culturelles qui ont dicté ses choix, ni organiser cette institution en vue de former un seul type de spécialistes, sous peine de ne pouvoir survivre à elle-même, ni même l'organiser pour former différents types de spécialistes tout en instituant une hiérarchie privilégiant un seul type de spécialiste au nom de qui se feraient la sélection, la promotion, etc.

En particulier le rôle de l'enseignement des mathématiques dans l'*institution scolaire ne peut et ne doit pas s'organiser autour du concours* d'entrée à Polytechnique, ou autour de l'agrégation de mathématiques, c'est-à-dire autour des voies d'accès au statut de professionnel des mathématiques ; la méconnaissance de cette règle a abouti de manière quasi-mécanique à un ensemble de distorsions qui sont l'un des facteurs essentiels de la crise que traverse l'enseignement des mathématiques dans beaucoup de pays. En effet cela a conduit à ériger l'enseignement des mathématiques en une activité dont la fin en soi est la formulation de concepts formels dont on ne fait rien et la mise au point de "théories" ; cette conception désincarnée et artificielle de l'activité mathématique, si elle joue un rôle important dans les étapes d'orientations et de sélections des élèves, réduit l'activité mathématique à l'intérieur du système scolaire à des discours du maître dont l'intérêt échappe complètement, et pour cause, aux élèves ; les palliatifs pédagogiques ne changent pas fondamentalement cette situation ; en vertu de quelles raisons cette démarche formelle peut-elle susciter un intérêt vrai chez l'élève dans une activité dont les règles du jeu paraissent soumises au plus grand arbitraire ? Pourquoi le maître demande-t-il d'admettre tel résultat, alors qu'il faut démontrer tel autre qui paraît vraisemblablement évident ? A quoi sert une "droite affine" en dehors de fournir un moyen de décider si je passe ou ne passe pas de 4e en 3e ?

Dans un enseignement des mathématiques conçu dans une telle perspective le maître ne peut répondre à ces questions pertinentes que par un autre discours tout aussi inadapté que le précédent pour convaincre le malheureux élève de la nécessité du raisonnement déductif.

Une autre retombée quasi-mécanique, et non des moindres, d'un tel système est qu'à un moment donné, pour une classe donnée d'élèves dont chacun a un acquis différent, un système de représentations des concepts, de l'espace, etc., différents, a des motivations, des intérêts et des moyens différents, l'institution scolaire, par maître interposé part d'un point décidé a priori et qui n'a aucune signification pour aucun des élèves, pour dérouler linéairement une succession de théories et d'élaboration de concepts, la satisfaction étant complète lorsqu'on a attribué des statuts à des concepts dont la nécessité du fonctionnement échappe totalement.

De plus en plus de voix s'élèvent pour dire que cette démarche conduit à des échecs, car ce qui est important c'est de faire fonctionner les concepts : un concept devient un concept mathématique dès lors qu'on sait le formuler dans le langage mathématique du moment et qu'on sait le faire fonctionner de manière cohérente ; le problème du statut de ce concept, c'est-à-dire de la manière dont il est possible d'intégrer ce concept à un secteur mathématique déjà bien connu, est peu formateur et sans grand intérêt pour l'élève ; il est en fait digne d'intérêt à peu près uniquement pour le professionnel des mathématiques ; au niveau de l'évaluation de la formation, on ne peut être sûr qu'un élève a bien compris tel concept que s'il sait le faire fonctionner de manière cohérente dans des problèmes variés.

Une prise de conscience de l'échec de la pratique qui consiste à "débiter" linéairement des théories à partir d'axiomatiques plus ou moins globales semble se faire jour ; certains proposent de lui substituer une démarche "botaniste" qui propose l'élaboration des concepts à partir de l'"herbier" des exemples ; d'autres, de lui substituer une démarche "physiologiste" qui propose l'élaboration de concepts à partir de l'étude de problèmes où ces concepts n'interviennent pas de façon isolée.

Pour pallier la désincarnation des mathématiques enseignées et l'inappétence que cela provoque chez beaucoup d'élèves, certains préconisent des activités supplémentaires qui apparaissent en fait comme un

cataplasme d'importation et qui a pour nom : interdisciplinarité. Or il est clair, pour prendre un exemple dans un domaine tout à fait différent que si l'on propose des "clubs-3ème âge", des "logements 3ème âge", etc., cela ne prouve qu'une chose : la société produit un phénomène de rejet vis à vis de cette catégorie de la population, et, dans un souci de justice ou d'éthique sociale, propose des solutions estimées compensatoires, mais qui contribuent encore plus à faire des personnes âgées un corpus extra-socius, au lieu d'avoir une dynamique qui intègre dans un statut et une fonction sociale à part entière les gens dits du 3ème âge.
En d'autres termes, l'interdisciplinarité ne doit pas consister en des activités destinées à illustrer et justifier l'existence des mathématiques pures et dures, mais devrait être intégrée complètement. Enfin, une autre cause de l'échec du système actuel est le manque de formation scientifique et en particulier mathématique d'une fraction notable des enseignants en mathématiques.

PROPOSITION D'UNE NOUVELLE PERSPECTIVE POUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES

Dans le cadre de la scolarité obligatoire, un enseignement des mathématiques ne peut se justifier que s'il est conçu pour favoriser le développement de l'homo mathématicus chez tout individu et non pas pour organiser la fabrication de futurs professionnels des mathématiques. Le problème de la formation de futurs mathématiciens, de futurs mireurs d'oeufs, de futurs avocats, etc., ressort de la mission des écoles professionnelles. Parce que l'homo mathématicus est une composante universelle de la condition humaine qui a un rôle important dans quelque civilisation et quelque société que ce soit, l'institution scolaire doit prendre en charge son développement et l'organiser d'un *double point de vue :*

a) du point de vue de la société qui l'engendre dans la perspective d'un développement équilibré ou d'une évolution vers un choix qu'elle estime meilleur, choix pour lequel le spécialiste des mathématiques n'a aucune compétence particulière de décider.

b) du point de vue de l'individu, en le prenant à chaque instant en l'état et non en un point arbitrairement décidé, en développant au mieux ses possibilités d'homo mathématicus et qui permette en fonction de ses possibilités, de ses intérêts, de ses motivations, de forger son devenir culturel, professionnel, social, etc., sans hiérarchisation indexée sur la liste des ouvrages de BOURBAKI N.

Dans cette perspective, l'élaboration de concepts mathématiques, encore moins de "théories" ne peut être considérée comme une fin en soi ; l'objet de l'enseignement des mathématiques dans la scolarité obligatoire et même pour une grande part, au delà, doit être l'élaboration de méthodes mathématiques d'approche, de formulation et de traitement de problèmes d'origines quelconques, y compris, accessoirement d'origine mathématique. Cela implique et intègre nécessairement des activités interdisciplinaires, intersectorielles, et que l'on commence par la prise de connaissance et la maîtrise du fonctionnement des concepts sur des exemples divers et concrets. On pourrait penser que les exemples concrets, parce qu'ils sont en général très riches de concepts et de structures, devraient venir en dernier, et commencer les approches sur des modèles abstraits, dépouillés et sans "bruits de fond" ; or, d'une part cette démarche désincarnée et artificielle a fait la preuve de son échec, d'autre part, la psychologie génétique nous garantit que les "bruits de fond" ne sont pas un obstacle à l'apprentissage.

La maîtrise du fonctionnement des concepts sur des exemples est l'étape nécessaire qui permet d'accéder au fonctionnement de ces concepts dans le cas général ; là encore c'est le souci de l'efficacité dans la résolution de problèmes réels qui doit motiver et justifier cette démarche et ainsi passer à l'élaboration et la pratique de méthodes mathématiques dans des domaines d'intervention les plus variés. Ajoutons que la "rigueur", en retour sera justifiée non pas comme une idéologie, mais comme une nécessité de validation, que les "démonstrations" basées sur le raisonnement déductif seront justifiées par le souci de l'efficacité.

Dans la démarche proposée, il peut se produire dans un certain nombre de cas, en fonction du problème qu'on cherche à résoudre, des acquis précédents, du degré d'approfondissement souhaité, etc., que le développement d'une forme rigoureuse de la méthode mathématique que l'on cherche à élaborer ne puisse être poursuivie jusqu'au bout ; c'est certes un facteur handicapant pour le professionnel des mathématiques ; cela ne l'est pas pour le développement de l'homo mathematicus qui peut se rendre compte - et de la relativité de la *rigueur* - et de la *possibilité d'utiliser* la méthode sous réserve d'arguments raisonnablement convaincants assurant une bonne adéquation entre les hypothèses mathématiques et les données du problème réel.

LA MISE EN OEUVRE

Elle repose fondamentalement sur trois axes :

- la structure de l'institution scolaire,
- l'élaboration de "programmes",
- la formation des personnes qui, au sein de l'institution seront chargées d'enseigner ces "programmes".

a) L'institution scolaire, de par son existence même, engendre une fonction séparatrice qui organise plus ou moins une coupure avec le vécu des activités extra-scolaires de chaque élève, et une fonction laminante qui résulte de l'impossibilité par l'institution de prendre en compte tous les paramètres de tous les élèves qu'elle gère. Il y a donc lieu de chercher à minimiser ces deux fonctions ; s'il paraît facile de réduire au minimum la fonction séparatrice, la solution apparaît plus difficile en ce qui concerne la fonction laminante ; en tout état de cause la connaissance et la prise en compte de certains paramètres de chaque élève, (sinon de tous les paramètres) est nécessaire. Ainsi les notions du "programme" (quelle que soit la forme du programme) d'une classe peuvent se partager en trois catégories :

- *celles qui ont déjà été étudiées au cours des années précédentes* et qui à la fin de l'année doivent être définitivement comprises ;
- celles qui ont déjà été étudiées mais qui seront encore en cours d'acquisition l'année en cours ;
- celles qui feront l'objet d'un premier apprentissage.

En ce qui concerne les deux premières catégories, le problème de liaison entre deux classes consécutives est essentiel, et l'on sait que les connaissances des élèves et leur capacité à les utiliser, sont très diverses ; il est indispensable de les analyser et de situer chacun des élèves l'un des instruments possibles pour ce travail est l'évaluation-diagnostic dont l'objet est d'essayer de mesurer, et ceci sans jugement, les connaissances des élèves et leur capacité à les faire opérer. Les questionnaires proposés ne doivent pas être notés puisqu'il s'agit d'analyser les comportements des élèves, question par question, et de tenir compte ultérieurement de cette diversité.

b) Il est clair que la notion de "Programme" conçu comme liste de rubriques de contenus est totalement inadaptée à la conception de l'enseignement des mathématiques qui vient d'être proposé ; cette conception implique que le "Programme" soit explicité en termes d'objectifs opératoires et de niveaux d'approfondissement.
Ainsi la rubrique "translations" ne signifie rien en soi, ou contient ce que l'on veut, ce qui revient au même. Le fabricant du "programme" entend-il par là la donnée de la "définition" des translations ?, l'étude de certaines classes de propriétés pour un groupe opérant par translations ? les propriétés qu'ont les translations de laisser certaines mesures invariantes ? doit-on proscrire l'intervention de ce concept en technologie, en mécanique ? Quel degré de savoir faire avec les translations doit acquérir l'élève ? Doit-on introduire la notion de translation au moment de l'étude du plan affine parce que la rubrique "translation" fait suite à la rubrique "plan affine" ?

c) Il est évident que la réussite d'un enseignement des mathématiques tel que celui qui est proposé (et tel que tout autre d'ailleurs) est subordonné à un plan de formation des maîtres ad hoc. Il implique que l'enseignant en mathématiques, outre une formation mathématique de haut niveau ait une solide culture scientifique qui intègre son savoir mathématique et se soit livré à un travail de réflexion approfondi sur ses connaissances ; ainsi un candidat au CAPES mathématique connaît en principe parfaitement bien la formule dite de l'intégration par partie, son domaine de validité, et son utilisation dans la recherche d'intégrales ou de primitives ; mais peut-être n'a-t-il jamais pris connaissance, au cours de sa formation initiale, que l'intégration par partie fournissait également un outil puissant dans un grand nombre de problèmes d'approximation. Cette formation scientifique initiale doit se compléter de connaissances en Sciences de l'Education et doit se poursuivre par une formation continue pensée, non pas en termes de "recyclage" qui n'essaient en fait que de combler des lacunes de la formation initiale, mais en termes d'activités de réflexion et d'approfondissement.

NOTES DE LECTURE ET PARUTIONS

QUELQUES ASPECTS DE LA PENSEE D'UN MATHEMATICIEN

(Paul LEVY - Librairie Scientifique et Technique - Albert Blanchard. 1970)

Cet ouvrage est composé de deux parties distinctes : une première dans laquelle l'auteur égraine ses souvenirs mathématiques et une seconde où l'évolution de ses idées philosophiques est évoquée.

La contribution de cet ouvrage à l'histoire du développement des mathématiques (et tout particulièrement du calcul des probabilités) pendant la première moitié du XXe siècle nous paraît d'un intérêt certain et ne se limite pas à l'aspect anecdotique, quoique cette composante du récit soit particulièrement attrayante par les problèmes qu'elle soulève : tribulations d'un génie précoce en milieu scientifique, démêlés avec les systèmes de publication, de diffusion et de propriété des résultats scientifiques...

La seconde partie, ne serait-ce que par les réflexions d'ordre épistémologique sur les fondements du calcul des probabilités (et plus généralement des mathématiques), nous paraît correspondre à ce que l'on peut attendre d'un auteur dont les travaux ont si profondément marqué le développement du calcul moderne des probabilités.

Bien que nous ayons éprouvé un grand plaisir à lire cet ouvrage, nous voudrions terminer par deux critiques, ou avertissements aux éventuels lecteurs :

- bien que l'auteur prétende s'adresser à une classe de lecteurs aussi étendue que possible, il nous semble que des connaissances élémentaires ne sont pas suffisantes à la compréhension de certains "passages techniques" de la première partie de l'ouvrage et que seuls de vrais spécialistes des mathématiques en question peuvent en profiter ; toutefois il est bon de signaler que ces passages peuvent être "sautés" sans inconvénient pour la lecture de l'ouvrage.

- sans vouloir minimiser la contribution de l'auteur au développement du calcul des probabilités il nous paraît raisonnable, pour avoir une idée globale du rapide développement de cette théorie pendant cette première moitié du XXe siècle, de compléter la lecture de la première partie de l'ouvrage par celle d'articles ou de biographies sur l'apport d'autres écoles que l'école française (par exemple, les chapitres IV et V du livre de L.E. MAISTROV ,"Probability Theory, a historical sketch," traduit du russe, ou encore les souvenirs de H. CRAMER publiés dans la revue Annals of Probability - tome 4 (1976) pages 509 à 546, sous le titre "Half a century with Probability theory : Some personnal recollections," ou encore UHLAM, "Adventures of a Mathematician."

R. C.

L'INFORMATIQUE AU SERVICE DE LA CONJECTURE DES QUATRE COULEURS

(Jacques VELU - La Recherche - Mars 1977 - pages 295 à 297)

Bien que les explications sur les techniques de réduction semblent difficilement accessibles aux non-initiés, cet article nous paraît pouvoir intéresser un public très large car il pose de façon très simple le problème des quatre couleurs et l'importante querelle provoquée par la solution proposée par K. APPEL W. HAKEN et J. KOCH, au sujet de l'apport des moyens informatiques dans les démonstrations mathématiques.

R. C.

QUELQUES APPORTS DE L'INFORMATIQUE A L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES

(Publication de l'A.M.E.P. n° 20)

Deux types de lecteurs devraient pouvoir tirer profit de la lecture de cette brochure : d'une part les enseignants déjà engagés dans une réflexion ou une expérience d'utilisation, dans les classes, de moyens informatiques (allant sans exclusive, de la calculatrice de poche la plus simple jusqu'à l'ordinateur le plus performant), et d'autre part, les non-initiés curieux de savoir ce qu'est ou/et ce que pourra être l'"informatique" dans l'enseignement secondaire.

L'introduction ne se limite pas à l'exposé des motivations qui ont conduit à la réalisation de cet ouvrage mais fait aussi un rapide historique de l'introduction de l'informatique dans l'enseignement secondaire : -

- définition des objectifs (en citant de larges extraits du rapport de W. MERCOUROFF sur "L'expérience française d'introduction de l'informatique dans l'enseignement secondaire") ;
- action du Ministère (formations "approfondie" et "légère" des enseignants, mise en place d'une structure de coordination à l'I.N.R.D.P., équipement des établissements...) ;
- action menée par les I.R.E.M. (finalités, secteurs d'intérêts, public visé, matériel, recherches).

Malheureusement les textes cités datent quelque peu car ils sont de Juin 1975 et depuis deux faits nouveaux sont venus bouleverser les données du problème et modifier les stratégies :

1) les calculatrices de poche ont fait une entrée en force dans les établissements : c'est un état de fait. Le problème est de savoir comment utiliser de façon rationnelle et intégrer au cours ces gadgets dont les élèves font trop souvent un usage aberrant.

2) la Mission à l'Informatique est mise en sommeil, la formation lourde et l'équipement des lycées sont interrompus, ce qui jette une grave hypothèque sur la façon dont l'introduction de l'informatique pouvait être envisagée.

Le reste de la brochure est une succession d'une trentaine d'articles (anciens ou nouveaux) structurés en cinq chapitres : ainsi, et sans que l'homogénéité et la lisibilité de la brochure en souffrent, apparaissent clairement les différences (et pourquoi ne pas le dire les oppositions) entre les diverses directions dans lesquelles se sont engagées les recherches et les expériences. Les auteurs des articles sont, pour la grande majorité, des enseignants de Mathématique formés en autodidacte, sur le tas, à l'informatique, d'où des dilemnes du type suivant : "Est-il dangereux d'associer nos élèves à nos propres essais et maladresses dans notre apprentissage de l'art d'utiliser un ordinateur ? Est-il au contraire plus dangereux encore de les laisser dans l'ignorance, le mythe, l'incompréhension d'un évènement de civilisation aussi important que celui de l'informatique et de ses applications ?", d'où aussi certains excès dûs souvent à l'emploi injustifié, voire dangereux de matériels ou de techniques inadaptés et inutilement complexes et obscurantistes, d'où enfin et surtout, le sérieux et l'enthousiasme de l'équipe de rédaction. Le lecteur sera aussi sensible à l'honnêteté et à la sympathique tendance à l'autocritique qui se dégage de cet ouvrage collectif.

Outre de très nombreux exemples (Arithmétique - Analyse - Géométrie - Statistiques...) d'utilisation de moyens informatiques dans le cours, le lecteur trouvera dans la brochure des articles de fond sur les langages, l'algorithmique et les méthodes de l'informatique.

Signalons pour terminer que les responsables ont eu l'initiative heureuse de réunir dans le dernier chapitre des informations très précieuses : concernant notamment des caractéristiques des calculatrices utilisées, indications bibliographiques, liste du matériel existant dans les I.R.E.M., liste des Lycées équipés d'ordinateurs, ...

R. C.

REGIONALE A.P.M.E.P. D'AIX-MARSEILLE

ACTIVITES DU SECOND TRIMESTRE

1977 - 1978

Toutes les réunions se tiendront au Lycée St Charles

45, bd Camille Flammarion - Marseille
(salle 51)

Mercredi 11 Janvier - 14 h 45

Des calculatrices dans la classe. Pourquoi ? Comment ?

Mercredi 1er Février - 16 h

Calcul scientifique - Calcul mathématique
(M. MARTINET, faculté des Sciences - St Charles)

Mercredi 1er Mars - 14 h 45

Questions de "simplicité" dans les groupes orthogonaux
(M. BONNET, faculté des Sciences - St Charles)

Mercredi 29 Mars - 14 h 45

Géométrie ancienne et moderne : les rotations et miroirs qui conservent un réseau à 3 dimensions.
(Mme PECAUT, C.S.U. Avignon)

les derniers numéros du
Bulletin Inter - I.R.E.M.

n° 13 octobre 1976
"Fonctions sociales de l'Enseignement des Mathématiques".
(compte-rendu du Colloque organisé par l'I.R.E.M. de Caen, 14-15 mai 1976)

n° 14 mars 1977
"Le modèle Permama (perfectionnement des maîtres en mathématiques) de l'Université du Québec.

à votre disposition, à l'I.R.E.M.,
le rapport du Groupe :
- Statistiques & Probabilités -
sur le thème : "Exploitation des mesures en physique."
lors du Colloque Math-Physique
de la Baume Sainte-Marie
20-21 mai 1977

10

I. R. E. M.
Institut de recherche
sur l'enseignement des mathématiques

70, route Léon Lachamp
13288 MARSEILLE cedex 2

tél. 41. 39. 40. - 41. 01. 40.