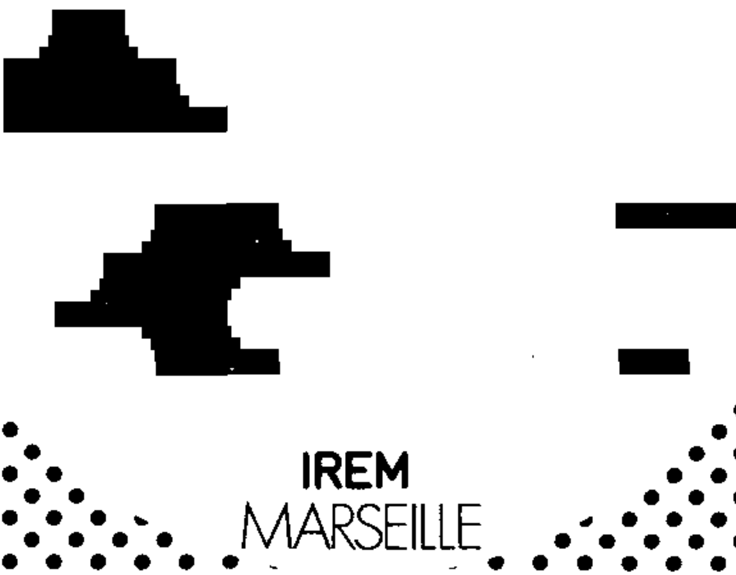
INFORMATION MATHEMATIQUE



IREM

MARSEILLE

INFORMATION

MATHEMATIQUE

Publication de l'I.R.E.M. de Marseille

RESPONSABLES DE LA PUBLICATION

J.C. Beniamino

G. Thomas

INSTITUT DE RECHERCHE

L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES

I. R. E. M.

70, Route Léon Lachamp

13288 - MARSEILLE CEDEX 2

Tél. 41.01.40 poste 32.10 / 41.39.40

N° 9

INFORMATION MATHEMATIQUE

MARS 1977

SOMMAIRE

Dépôt légal 1er Trimestre 197

THEMES D'ACTIVITES DANS LE 1ER CYCLE

* * *

H. MARTINO-GAUCHI - I.R.E.M. d'AIX-MARSEILLE

On se propose dans les trois fiches qui suivent, de construire des abaques permettant de faire des opérations dans $\mathbb{N}$ et dans $\mathbb{Z}$ tout en utilisant les notions de graduation et des propriétés géométriques.

I - ADDITION DANS $\mathbb{N}$

1. Un peu de géométrie

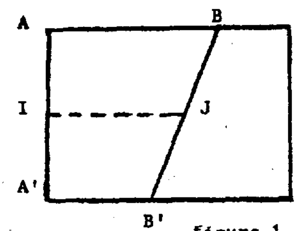


figure 1

Soit un trapèze rectangle ABA'B', I le milieu de AA', J le milieu de BB', en utilisant un rectangle convenable, des découpages, des pliages, on peut mettre en évidence de façon plus ou moins rigoureuse suivant le niveau où l'on se place que si:

$d(A,B) = a$ $d(A',B') = b$ alors $d(I,J) = \frac{a+b}{2}$ et que la droite passant par IJ est parallèle à celle passant par AB .

Désignons par D, D' les demi-droites d'origine A contenant B , d'origine A' contenant B' , Δ celle d'origine I contenant J .

D et D' sont parallèles et perpendiculaires à la droite passant par A et A' . On pose $d(A, B) + d(A', B') = C$. B_k B'_k désignent respectivement des points variables sur D et D' . Nous allons montrer que si $d(A, B_k) + d(A, B'_k) = C$ alors la droite contenant B_k B'_k passe par le point J situé sur Δ et milieu de BB'. En effet soit J_k le milieu de $B_kB'_k$ J_k est donc sur Δ et $d(I, J_k) = \frac{C}{2} = d(I,J)$ d'après ce qui précède.

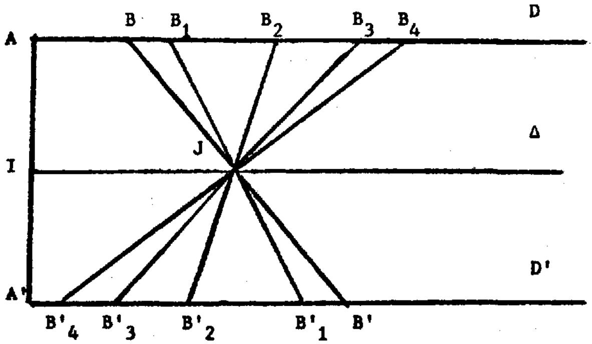


figure 2

2. Construction de l'abaque

Reprenons les droites D, D' et Δ de la figure 2; En utilisant un double décimètre, graduons D et D' de 0 à 10 par exemple. En utilisant toujours un double décimètre, mais comme unité le demi centimètre, graduons Δ de 0 jusqu'à 20 comme l'indique la figure 3.

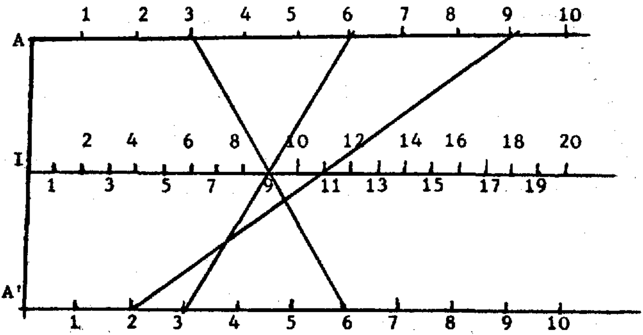


figure 3

Règle d'utilisation :

Lire a sur D , b sur D' , a + b se lit à l'intersection de la droite passant par les points a et b et de Δ .
Ou encore on peut lire a sur D' , b sur D . et a + b se lit comme précédemment. (sur la figure 3, les sommes 3 + 6, 6 + 3 et 9 + 2 ont été ainsi effectuées en utilisant l'abaque.).

3. Soustraction dans $\mathbb{N}$

Soustraire b à a c'est chercher le nombre C qu'il faut ajouter à b pour obtenir a . Il nous suffit donc d'utiliser l'abaque précédent à l'envers.

Règle :

> Soit deux nombre a et b $b \leq a$ on lit a sur Δ b sur D et le résultat a - b se lit à l'intersection de D' et de la droite passant par a et b .

(sur la figure 3, on a effectué les différences 9 - 3, 9 - 6 , 11 - 9
Que se passe-t-il si l'on permute le rôle de D et de D' ?

II - ADDITION DANS $\mathbb{Z}$

1. Nous avons pu remarquer précédemment que l'équation $x + b = a$ n'a de solution que si $a \geq b$. Essayons de soustraire 3 à 2 avec notre abaque. Nous lisons 2 sur Δ , 3 sur D, la droite contenant ces deux points ne coupe pas D' . Nous sommes ainsi amenés à prolonger D' ainsi que D . Effectuons une symétrie de l'abaque par rapport à la droite AA' . Des points symétriques sur D, D' Δ ont le même nom. Adoptons la convention suivante : a étant l'ancien nom désignons par (+ a) les points situés sur D, D' Δ à droite de A , ou I , ou A' par (- a) ceux situés à gauche. On obtient un nouvel abaque.

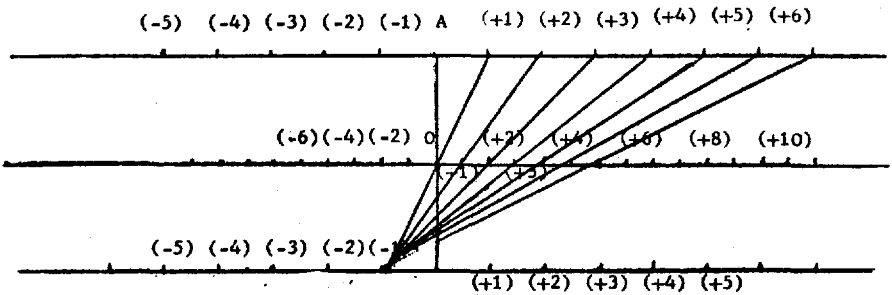


figure 4

a est la valeur absolue des nombres (+a) et (-a)

On peut rechercher tous les couples (a,b) tels que la différence $a - b$ soit égale à (-1). On trouvera tous les couples $(a, a+1)$ (si nous le cherchons à l'aide de l'abaque, a est sur Δ, $a+1$ est sur D).

Remarque :

Une infinité de droites se coupent en un point de D' nommé (-1)
Démontrons ce résultat ou plutôt :

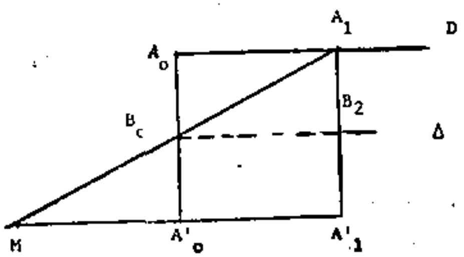


figure 5

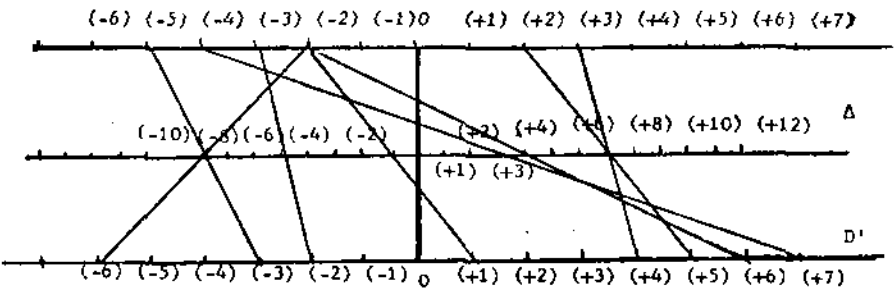
Soit A_o A_1 A'_1 A'_o un rectangle. B_o le milieu de $A_o A'_o$, B_2 le milieu de $A_1 A'_1$ montrons que la droite A_1B_o coupe la droite A'_1A' en un point M tel que A'_o soit le milieu de $A'_1 - M$
Le résultat est évident au niveau de la 4e.

à un niveau inférieur, il faudra comparer les triangles MA'_oB_o et $B_oA_oA_1$ et se contenter de moins de rigueur pour obtenir le résultat.
En appliquant ce résultat plusieurs fois, on établira le résultat cherché.

2. Addition dans $\mathbb{Z}$

Nous venons sans l'expliciter de symétriser l'addition dans $\mathbb{N}$.
Pour effectuer $a + b$ dans $\mathbb{Z}$ avec l'abaque on lit a sur D, b sur D' le résultat $a + b$ se lit sur Δ à l'intersection de la droite contenant a et b.

figure 6



Sur la figure 6, nous avons effectué :

(+3) + (+4) ; (+2) + (+5) ; (-5) + (-3) ; (-2) + (-6) ; (6é) + (+6) ; (-3) + (-2)

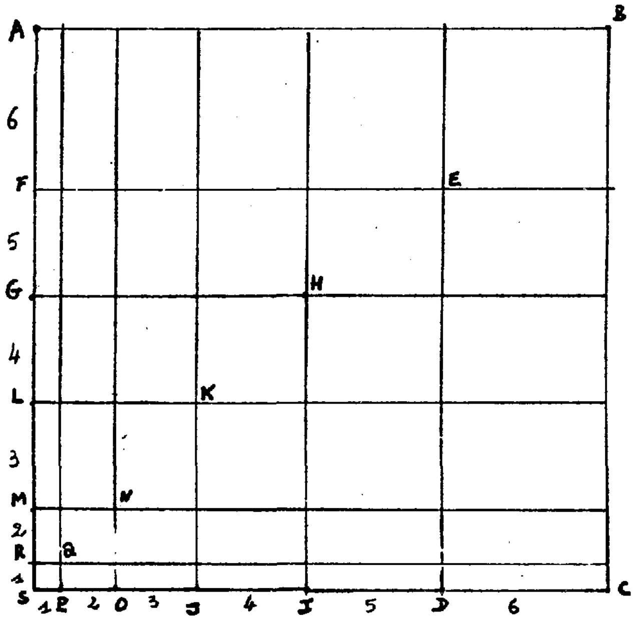
l'abaque permet aussi de faire des soustractions dans $\mathbb{Z}$

pour effectuer a - b on lit a sur Δ ; b sur D ; a - b se lit sur D'.

Les différences (-1) - (-2) ; (+ 3) - (-4) ont été effectuées sur l'abaque de la figure 6.

III - MULTIPLICATION DANS $\mathbb{N}$

Un abaque de la multiplication pourra être obtenu à partir de la formul[e] géométrique donnant l'aire d'un rectangle S = a x b



à l'aide de cette table, on peut obtenir :

$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + 6^3 = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6)^2$

$1 + 3 + 6 + 7 + 9 + 11 = 6^2$

en considérant les polygones ABCDEF, FEDIHG, GHIJKL, LKJOMN, MNOPQR, et PQRS dont les aires sont proportonnelles respectivement à 6^3, 5^3, 4^3, 3^3, 2^3 et 1 et formés respectivement de 11, 9, 7, 5, 3, 1 rectangles.

PRESENTATION DES ANGLES GEOMETRIQUES

ET DES ECARTS ANGULAIRES EN 3EME

* * *

Yvonne MATTEI, Lycée Saint-Exupéry - MARSEILLE

On suppose traités les chapitres suivants : orthogonalité, rapport de projection orthogonale, plan euclidien, distance, théorème de Pythagore, médiatrice, symétrie orthogonale, cercle (définition ; éléments de symétrie).

ANGLE GEOMETRIQUE

1) Approche concrète de la notion :

On fera observer et dessiner des couples de demi-droites de même origine et on calculera à partir de mesures, les rapports de projections orthogonales associés. On choisira en particulier, des situations dans lesquelles certains couples sont obtenus par translation, symétrie centrale, symétrie orthogonale ou même des couples de demi-droites 2 à 2 perpendiculaires ; dans ces cas-là, le résultat pourra être justifié. *(Ne pas oublier des cas où le rapport de projection orthogonale est négatif).*

2) Définition d'un angle :

★ On considère dans l'ensemble $\mathcal{D}$ des couples de demi-droites de même origine la relation $\mathcal{R}$ définie par :

$$(Ox\ ,\ Oy)\ \mathcal{R}\ (O'x'\ ,\ O'y') \Leftrightarrow C\,(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = C\,(\mathcal{A}', \mathcal{B}')$$

où $\mathcal{A}$ est l'axe associé à Ox, $\mathcal{B}$ celui qui est associé à Oy, $\mathcal{A}'$ et $\mathcal{B}'$ associés à $O'x'$ et $O'y'$ respectivement. $C(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ désignant le rapport de projection orthogonale de $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{B}$.

★ On démontre que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

Par définition chaque classe d'équivalence est un angle géométrique.

On notera $(Ox, Oy) \in \widehat{xOy}$

exemples :

Il résulte de la propriété de symétrie du rapport de projection orthogonale que $\widehat{xOy} = \widehat{yOx}$. D'après les propriétés des applications envisagées, les démonstrations pouvant être faites au cours des exercices prévus au début :

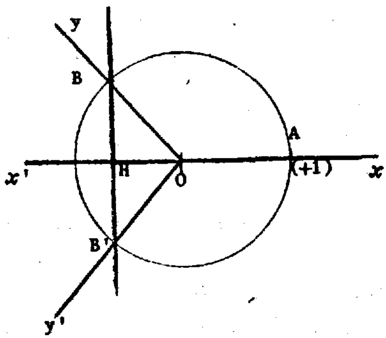
- dans toute translation (Ox, Oy) a pour image $(O'x', O'y')$ appartenant au même angle.
- dans toute symétrie centrale, dans toute symétrie orthogonale, l'angle d'un couple de deux demi-droites est égal à l'angle du couple image.

3) Théorème fondamental

Un angle est caractérisé par le rapport de projection orthogonale associé à ses représentants, c'est-à-dire : à tout angle on peut associer un rapport de projection orthogonale C unique. (d'après la définition). Réciproquement à tout nombre $C \in [-1, 1]$ on peut associer un angle unique. On choisit une demi-droite Ox ; il existe deux demi-droites Oy et Oy' d'origine O et deux seulement telles que

$$C(\mathcal{A}\, B) = C$$

nb pour $C = 1$ et $C = -1$ les demi-droites oy et oy' sont confondues.
construction pour $C = -2/3$ par exemple



il existe 2 points B et B' se projetant en H tel que $\overline{OH} = -\frac{2}{3}$ et appartenant au cercle de centre O et de rayon 1. Mais B et B' sont symétriques par rapport à Ox, donc

$$\widehat{xOy} = \widehat{xOy'}$$

il y a donc un angle et un seul associé C.

4) Angles remarquables

$C = 1$ alors $A = B$ l'angle est appelé angle nul.
$C = -1$ alors A et B sont diamétralement opposés.

L'angle est appelé <u>angle plat</u> ; c'est l'angle $\widehat{xOx'}$ de deux demi-droites opposées.

$C = 0$ alors $H = 0$, les droites Ox et Oy sont perpendiculaires ; l'angle est appelé <u>angle droit</u>.

5) <u>Relation d'ordre dans l'ensemble $\mathcal{G}$ des angles</u>

L'ordre dans $\mathbb{R}$ est transféré sur $\mathcal{G}$; nous dirons si $\widehat{xOy}$ et $\widehat{x'Oy'}$ sont deux angles associés respectivement aux rapports de projection orthogonale C et C' :

$$C' \leq C \Leftrightarrow xOy \preccurlyeq x'Oy'$$

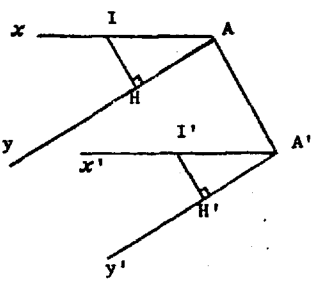
en notant $\preccurlyeq$ la relation. Cette relation peut se lire "précède".

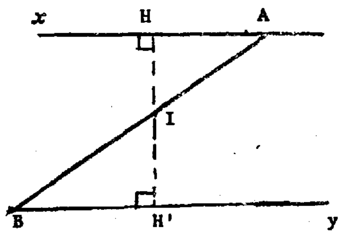
<u>nb</u> si $C > 0$ l'angle est <u>dit aigu</u>

$C < 0$ l'angle est <u>dit obtus</u>

<u>Exercices</u>

1) On peut traiter là de nombreux exercices de recherche d'angles égaux en introduisant les symétries ou les translations.





par la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$

on atteint $\widehat{xAy} = \widehat{x'A'y'}$

par la symétrie de centre I

$\widehat{xAB} = \widehat{ABy}$

en combinant ces figures, on retrouve toutes les situations de couples de demi-droites deux à deux parallèles ou perpendiculaires pour la physique.

2) On peut prouver l'égalité des 2 angles d'un triangle <u>isocèle</u>, des angles d'un <u>triangle équilatéral</u>, des angles opposés du parallèlogramme.

3) On peut définir la bissectrice d'un couple de demi-droites (Ox, Oy) : zOz' est la droite telle que $\widehat{xOz} = \widehat{zOy}$ (et $\widehat{xOz'} = \widehat{z'Oy}$) (on démontre aisément que si la demi-droite Oz est telle que $\widehat{zOx} = \widehat{zOy}$ alors la demi-droite opposée Oz' est telle que $\widehat{xOz'} = \widehat{yOz'}$).

ECART ANGULAIRE D'UN ANGLE GEOMETRIQUE

1) <u>Approche concrète</u> :

Faire des exercices pratiques sur l'usage du rapporteur et observer les "mesures" faites avec les rapporteurs gradués en degrés ou en grades.
Faire construire des rapporteurs en carton gradués en unités arbitraires (l'observation des "techniques de graduation" est très formatrice pour les élèves) [on fixe k pour le plat avec $k = 100$; 50 ; 70 par exemple].

Une graduation expérimentale en radians et la définition du radian est alors assez naturelle.
Envisager les cas où la réunion de 2 secteurs angulaires adjacents est un saillant ou un rentrant.

2) <u>Axiomatisation</u> :

Quel que soit le réel positif k , il existe une application bijective de l'ensemble <u>G des angles dans $[0, k]$</u> telle que

* l'angle nul ait pour image 0
* l'angle plat ait pour image k
* si α est l'image d'un angle de représentant (Ox, Oy) et β l'image d'un angle de représentant (Oy, Oz) , Oz et Oy étant situés de part et d'autre de Ox alors $\widehat{xOz}$ a pour image :

$$\alpha + \beta \text{ si } \alpha + \beta \leq k$$
$$2k - (\alpha + \beta) \text{ si } \alpha + \beta > k$$

α est appelé <u>écart angulaire de l'angle $\widehat{xOy}$</u> dans le système k et l'on note

$$\boxed{\alpha = E_k(\widehat{xOy})}$$

on indiquera alors qu'on utilise essentiellement $k = 180$, $k = 200$, $k = \pi$, on établit que l'angle droit a pour image $\frac{k}{2}$

3) <u>Conséquences immédiates</u>

On déduit aisément la somme des écarts angulaires d'un triangle, d'un quadruplet convexe ; l'écart angulaire des angles du triangle équilatéral, du triangle rectangle isocèle, etc .

4) <u>Angles complémentaires ou supplémentaires</u>

Même définition que dans la présentation habituelle du programme.

On peut alors introduire les notions de trigonométrie soit à partir du rapport de projection orthogonale :

Si $E_k(\widehat{xOy}) = \alpha$ et si $C(\mathcal{A},\mathcal{B}) = C$ avec $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ les axes associés à Ox et Oy on aura par définition :

$$\cos \alpha = C$$
$$\sin \alpha = \sqrt{1 - C^2}$$

soit à partir des coordonnées du point M du demi-cercle de centre O , de rayon 1 tel que $E_k(\widehat{AOM}) = \alpha$, A étant le point du demi cercle de coordonnées (1, 0).

Dans cette optique, on traite après les isométries et les propriétés de conservation des angles.

Les cercles isométriques et la notion d'arcs de cercle peuvent être traités après.

<u>Remarque sur la méthode</u> :

L'introduction des angles géométrique proposée n'utilisant pas les isométries peut se faire plus tôt alors que l'utilisation en 3ème des isométries est lourde. Elle ne présente pas plus de difficultés pour les élèves que celle qui est proposée par les programmes officiels.

L'introduction axiomatique des écarts angulaires présentée ici de façon rigoureuse est beaucoup plus abstraite et "passe" moins bien auprès des élèves.

On peut se contenter d'une approche concrète et de résultats admis. On peut aussi, et c'est peut-être une assez bonne méthode traiter après les angles géométriques, la notion d'arc de cercle sans utiliser les isométries mais seulement des symétries et des translations. On introduit alors l'écart angulaire à l'aide des "mesures d'arcs" comme le propose le programme.

L'avantage des méthodes proposées est dans son analogie avec les notions introduites en 1ère C et D.

A PROPOS DE LA RESOLUTION DES EQUATIONS DANS L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE

(De la définition en compréhension d'une partie d'un ensemble vers sa définition en extension)

Gilles THOMAS, I.R.E.M. de MARSEILLE

Il nous est souvent reproché une formalisation abusive du raisonnement dans l'enseignement secondaire, les automatismes de calcul ayant été remplacés par des automatismes de formalisation des démonstrations à tel point que certains élèves de Terminale, par exemple, jonglent avec les symboles mathématiques et les règles de logique sans trop savoir de quoi ils traitent en réalité.

Mais lorsque la formalisation d'un raisonnement exige de l'élève un effort de réflexion pour préciser les hypothèses, les outils mathématiques utilisés, leurs conditions d'utilisation, alors cette formalisation peut rendre de grands services à l'élève et au professeur.

La résolution d'équations dans le secondaire semble répondre assez bien au souci de présenter un travail précis et clair dans ce sens.

I - QUELQUES QUESTIONS

Proposons à des élèves de 3ème ou de seconde le texte suivant :

"Résoudre l'équation $(1 + a)x + 1 = a$" et observons.

Des élèves se mettent immédiatement au travail et concluent après avoir discuté ou non suivant les valeurs de a. Ils donnent des ensembles de solutions qu'ils notent S.

Qu'est-ce que cela prouve ?

Y aurait-il une hiérarchie du rang de la lettre dans l'alphabet qui donne à x la qualité d'inconnue, et à a celle de paramètr ou de constante ? (mais, au fait, qu'appelle-t-on "constante" dans un problème de ce genre ?).

D'autres élèves, souhaitons-le, posent les questions suivantes :

"Dans quel ensemble doit-on travailler ?"

"Quelle est l'inconnue ?"

"Qu'est-ce que c'est que a ?"

"Doit-on résoudre et discuter ?" (ou discuter, puis résoudre, etc....

II - FORMALISATION DE LA RESOLUTION D'UNE EQUATION

Soit E un ensemble (ensemble de référence)

Soit P (v) une forme propositionnelle à une variable (notée v) définie dans E, exprimée sous la forme d'une égalité.

On définit, en compréhension, la partie S de E par :

$$S = \{v \,;\, v \in E / P(v)\}$$

"Résoudre, dans E, l'équation P(v)" signifie :

1) - obtenir, à partir de sa définition en compréhension, la définition

en extension de S, lorsque cela est possible ;

2) – Lorsque cela n'est pas possible, caractériser S au mieux d'après le contexte ;

3) – S s'appelle "ensemble des solutions de l'équation $P(v)$ dans E"

4) – $P(v)$ peut s'appeler "propriété caractéristique de S" (ou équation de S).

La présentation de la résolution, dans E, de l'équation $P(v)$ est analogue à la présentation d'une dissertation française (1)

INTRODUCTION : $S = \{v\ ;\ v \in E / P(v)\}$

DEVELOPPEMENT :

$$\begin{aligned}(\forall v \in E), P(v) &\Leftrightarrow \dots\\ &\Leftrightarrow \dots\\ &\Leftrightarrow \dots\end{aligned}$$

CONCLUSION : $S = \{\ \dots\}$

Dans la phase de développement, on remplace une propriété caractéristique de S par une autre propriété caractéristique (équivalente logiquement à la précédente, bien sûr) de façon à progresser vers la connaissance des éléments de S.

(1) N.D.L.A. Cela se fait-il toujours ?

III - EXEMPLES

III - 1 - Classe de 3ème

a) - Résolution d'une équation du 1er degré dans R

. $S = \{ x ; x \in R / 4x + 5 = 2x - 3\}$

$$(\forall x \in R) \; 4x + 5 = 2x - 3 \Leftrightarrow 4x - 2x = -3 - 5$$

$$\Leftrightarrow 2x = -8$$

$$\Leftrightarrow x = -4$$

. $S = \{-4\}$

b) - Résolution de systèmes de deux équations du 1er degré dans R^2

b-1) . $S = \{(x, y) ; (x, y) \in R^2 / 2x + 3y = 1 \text{ ET } 10y + 4x = -2\}$

$$(\forall (x, y) \in R^2) \begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 10y + 4x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ +4x + 10y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ +2x + 5y = -1 \end{cases}$$

Le déterminant est égal à 4 donc S est un singleton (Toute méthode conduisant à une solution conduit à la solution, y compris la découverte d'une solution évidente).

. $S = \{(2, -1)\}$

b-2) . $S = \{(x, y) ; (x, y) \in R^2 / 3x - 5y = 2 \text{ ET } -6x + 10y = -4\}$

$$(\forall (x, y) \in R^2) \begin{cases} 3x - 5y = 2 \\ -6x + 10y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 5y = 2 \\ 3x - 5y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow 3x - 5y = 2$$

. $S = \{(x, y) ; (x, y) \in R^2 / 3x - 5y = 2\}$

III - 2 - Classe de seconde

a) - Systèmes liés, systèmes libres de vecteurs

"Soit T l'espace vectoriel réel des fonctions trinômes définies sur R

$$f : R \rightarrow R \qquad g : R \rightarrow R \qquad h : R \rightarrow R$$

$$x \longmapsto f(x) = 2 \qquad x \longmapsto g(x) = 1+x \qquad x \longmapsto h(x) = x^2$$

Le système (f, g, h) est-il libre ?"

$\forall u \in T,\ \exists\ (a, b, c) \in R^3, (a, b, c)$ unique$/\forall x \in R, u(x) = a + bx + cx^2$

. $S = \{(\lambda, \mu, \nu),\ (\lambda, \mu, \nu) \in R^3 / u = \lambda f + \mu g + \nu h\}$

$$u = \lambda f + \mu g + \nu h \Leftrightarrow \forall x \in R, u(x) = [\lambda f + \mu g + \nu h](x)$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in R, a + bx + cx^2 = 2\lambda + \mu(1 + x) + \nu x^2$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in R, a + bx + cx^2 = (2\lambda + \mu) + \mu x + \nu x^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2\lambda + \mu \\ b = \mu \\ c = \nu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{a-b}{2} \\ \mu = b \\ \nu = c \end{cases}$$

. $S = \{(\frac{a-b}{2}, b, c)\}$

Donc le système (f, g, h) est libre. (On peut rappeler ici la définition).

b) - Noyau, image d'une application linéaire

"Le plan vectoriel V est rapporté à la base $(\vec{i}, \vec{j})$, on désigne par φ l'application linéaire de V dans V définie par :

$\varphi(\vec{i}) = 5\vec{i} + 3\vec{j}$ et $\varphi(\vec{j}) = 4\vec{i} + 6\vec{j}$

Déterminer le noyau puis l'image de φ"

$\forall u \in V$, $\exists (x, y) \in R^2$, (x, y) unique/$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$

$\star$ $\text{Ker}\,\varphi = \{\vec{u}, \vec{u} \in V / \varphi(\vec{u}) = \vec{\theta}\}$

. $S = \{(x, y), (x, y) \in R^2 / \varphi(x\vec{i} + y\vec{j}) = \vec{\theta}\}$

$\varphi(x\vec{i} + y\vec{j}) = \vec{\theta} \Leftrightarrow x(5\vec{i} + 3\vec{j}) + y(4\vec{i} + 6\vec{j}) = \vec{\theta}$

$\Leftrightarrow (5x + 4y)\vec{i} + (3x + 6y)\vec{j} = 0\vec{i} + 0\vec{j}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 4y = 0 \\ 3x + 6y = 0 \end{cases}$$

Le déterminant est égal à 18 donc S est un singleton.
Nous connaissons la solution $(0, 0)$ donc

. $S = \{(0, 0)\}$

Conclusion : $\text{Ker}\,\varphi = \{\vec{\theta}\}$

$\star$ $\text{Im}\,\varphi = \{\vec{v}, \vec{v} \in V / \exists \vec{u} \in V$ tel que $\varphi(\vec{u}) = \vec{v}\}$

$\forall \vec{v} \in V$, définissons $S_{(\vec{v})} = \{\vec{u} \in V / \varphi(\vec{u}) = \vec{v}\}$

d'autre part, $\forall \vec{v} \in V$, $\exists (a, b) \in R^2$, (a, b) unique/$\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j}$

. $S_{(a, b)} = \{(x, y) ; (x, y) \in R^2 / \varphi(x\vec{i} + y\vec{j}) = a\vec{i} + b\vec{j}\}$

$\varphi(x\vec{i} + y\vec{j}) = a\vec{i} + b\vec{j} \Leftrightarrow (5x + 4y)\vec{i} + (3x + 6y)\vec{j} = a\vec{i} + b\vec{j}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 4y = a \\ 3x + 6y = b \end{cases}$$

Le déterminant étant égal à 18, $S_{(a, b)}$ est un singleton donc $\forall \vec{v} \in V$, $S(\vec{v})$ est un singleton.

Conclusion : $\text{Im}(\varphi) = V$.

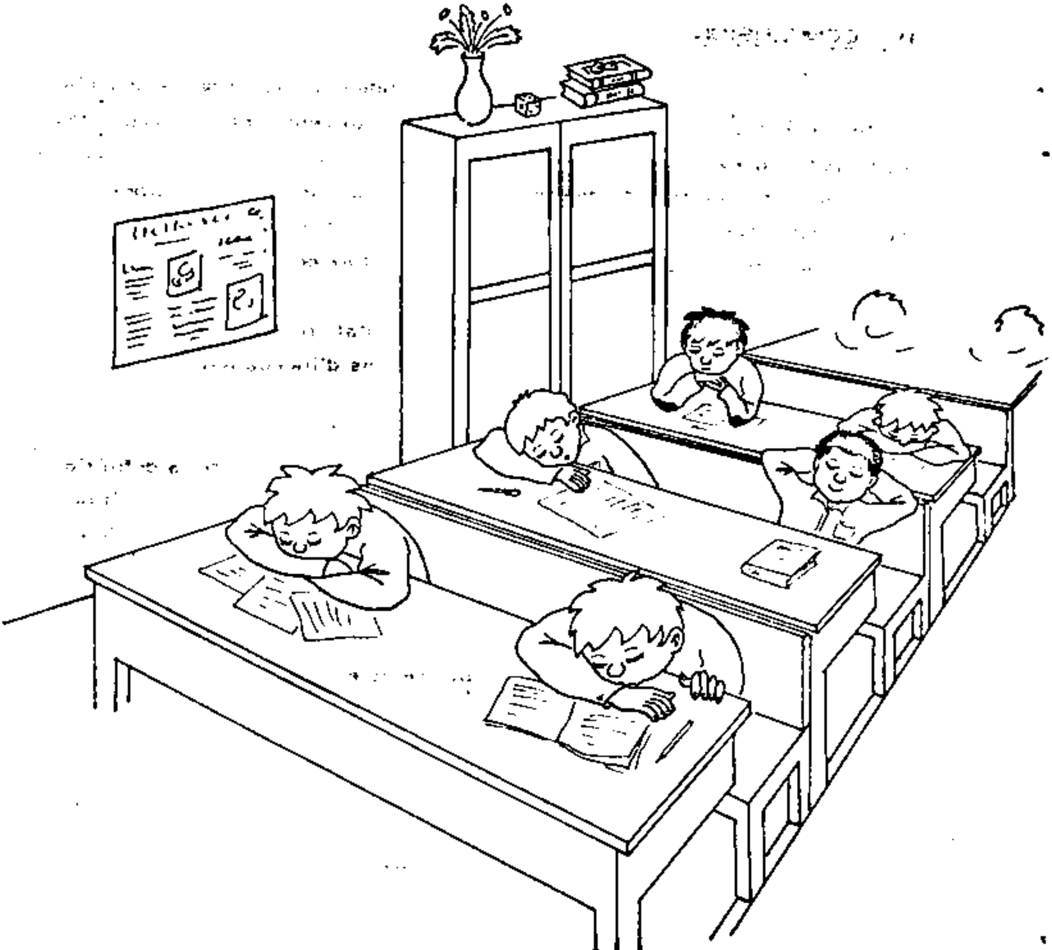
IV - CONCLUSION

Si les élèves de 3ème et seconde ont bien compris grâce à cette présentation, que les équations qu'ils résolvent sont des propriétés caractéristiques d'une partie d'un ensemble, ils seront plus à l'aise en Terminale lors de l'étude des transformations affines, des équations des transformés d'ensembles de points, etc..., domaine où les erreurs proviennent le plus souvent d'un manque de réflexion.

Il va sans dire que cette présentation peut être généralisée et appliquée à d'autres résolutions, résolutions d'inéquations par exemple aux mêmes niveaux de classe.

L'idée de la démarche qui consiste à partir de la définition en compréhension d'une partie d'un ensemble pour en trouver une définition en extension peut être abordée au cycle d'observation à l'occasion d'exercices simples mais réunissant toutes les conditions pour une formalisation future ; résolution d'équations simples dans N, dans Z, résolution d'inéquations lors de l'étude des relations d'ordre dans Z, etc...
l'important étant de préciser l'ensemble de référence et la variable de la forme propositionnelle par une rédaction rigoureuse.

le dessin de Gill



CLASSE MONOTONE

AUTOUR DES EQUATIONS AUX DIFFERENCES FINIES

* * *

Jean MARION - I.R.E.M. d'AIX - MARSEILLE

0 INTRODUCTION

La rubrique «Équations aux différences finies» ne figure dans aucun programme de mathématiques d'aucune classe de l'enseignement secondaire ... et c'est heureux.

Afin qu'il n'y ait aucune équivoque sur le discours qui suit, je précise que cet essai n'a pas pour but de convaincre le lecteur qu'il faut aussi faire de la «théorie des équations aux différences finies» dans l'enseignement secondaire : je passe un temps suffisant et dépense une énergie suffisante à combattre une tendance qui consiste à trouver des biais pour introduire au niveau n ce qui peut se faire au niveau $n + p$ ($p > 0$) pour que l'on ne puisse me suspecter d'apporter une contribution à ladite tendance

Il se trouve que des équations aux différences finies apparaissent dans des problèmes très simples, et que le «thème» des équations aux différences finies est fortement rayonnant, susceptible de déboucher sur de nombreuses activités mathématiques à peu près à tous les niveaux de l'enseignement secondaire, et permettant une approche différente de certaines notions que l'on étudie dans l'enseignement secondaire. Notre propos est d'illustrer ces affirmations par quelques réflexions et par quelques exemples d'activités mathématiques sur ce thème.

1 SUITES INFINIES DE NOMBRES – RÉCURRENCE

Actuellement le vocable «suite» n'apparaît que dans le vocabulaire mathématique de la classe de terminale. Notons tout d'abord que l'enfant est confronté et manipule très tôt des suites *finies* de nombres : la liste des notes inscrites sur son carnet, le relevé qu'il fait chaque semaine du nombre de pièces de 1 F qu'il y a dans sa tirelire, le compte chaque soir du nombre de billes qu'il a gagnées ou perdues, etc ...

On «rencontre» beaucoup moins souvent de manière directe des suites infinies de nombres dans la nature ; on peut les rencontrer, bien avant la classe de terminale au cours de «jeux» sur les nombres. Le groupe «Analyse» de l'IREM de Marseille a mis au point une fiche dont l'objectif est l'introduction du concept de suite infinie, la maîtrise de l'expression «$n^{ième}$ terme de la suite» et la prise de conscience du problème du «devenir» du $n^{ième}$ terme quand n est pris de plus en plus grand.

C'est à partir de la «terminale» que l'on «parle» de récurrence, de suites définies «par récurrence», etc ...

bien avant la «terminale» ... ou sans jamais y avoir été. Même dans le cas des suites finies concrètes qui nous environnent : relevé au jour le jour du compte en banque, suite des avoirs fiscaux (!), factures EDF et plus généralement relevés de consommations de tous ordres : eau, gaz, kilométrage inscrit au compteur de la voiture, etc ..., ce qui est signifiant, beaucoup plus que u_n c'est la valeur $u_{n+1} - u_n$ ou différence première d'ordre n ; au niveau des élèves on conçoit donc qu'il est facile de montrer des exemples concrets de problèmes qui du point de vue mathématique font intervenir un objet appelé suite numérique et une équation :

$$u_{n+1} - u_n = \varphi(n)$$

c'est-à-dire à la fois une équation aux différences finies et une récurrence.

Dans une perspective d'enseignement «en spirale» (cf. textes de BROUSSEAU et de GLAESER), on peut concevoir que par étapes successives on effleure, on touche, on fait fonctionner, et enfin on saisit à pleines mains «la récurrence».

Les fiches 1 et 2 sont des exemples de ce qui pourrait se faire dans ce domaine.

2 ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES PREMIÈRES D'UNE FONCTION

Soit f une fonction numérique, à laquelle on associe la fonction $x \to \Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$, dite différence première de f ; nous pensons que la recherche de solutions d'équations $\Delta f = \varphi$ où φ est une fonction «simple» (simple en ce sens que l'on peut trouver les solutions – ou des solutions – sans l'arsenal impressionnant de la théorie des équations aux différences finies) peut être une source de problèmes intéressants au niveau du 2nd cycle, et plus précisément au niveau Première–Terminale.

Il est évidemment hors de question d'envisager un discours du maître débitant des éléments d'une théorie des équations $\Delta f = \varphi$ (mais il n'est pas exclu que le maître se cultive sur le sujet, par exemple l'exposé relativement élémentaire sur les équations $\Delta f = \varphi$ du livre «Intégrales eulériennes et leurs applications» de R. CAMPBELL).

Il s'agit de fournir des données de problèmes. La fiche 3 est rédigée comme un sujet de travail avec fil conducteur qu'on pourrait donner aux élèves dans le cadre d'activités de travail indépendant.

Annexes :

Fiche 1 : niveau 1er cycle ;
objectif : activités mathématiques élémentaires sur des suites ;
première approche de la récurrence.

Fiche 2 : niveau 3ème–2nde ;
objectif : activités sur des différences premières de suites ;
application à certaines sommations ; exemple des progressions arithmétiques.

Fiche 3 : niveau 1ère–terminale ;
objectif : activités mathématiques autour du concept de différence première d'une fonction

FICHE 1

Niveau : 1er Cycle

Activités mathématiques élémentaires sur les suites de nombres.

Une première approche de la récurrence.

I SUITES DE NOMBRES

1) Depuis que Monsieur X a ouvert son magasin, tous les soirs il inscrit sur un carnet la recette de la journée ; on obtient ainsi une *suite* de nombres ; Monsieur X a appelé r_1 la recette faite le 1er jour, r_2 la recette faite le 2ème jour, r_3 la recette faite le 3ème jour, etc ; ainsi sur le carnet de Monsieur X on peut lire :

$$r_1 = 146 \quad ; \quad r_2 = 257 \quad ; \quad r_3 = 628 \quad ; \quad r_4 = 360 \quad ; \quad r_5 = 859 \quad ; \quad \text{etc ...}$$

La recette faite le 4ème jour après l'ouverture du magasin était donc de 360 F ; r_4 est le 4ème term de la suite.

2) Depuis le 1er Janvier 1971, Monsieur Y habite un ensemble immobilier & où à la fin de chaque mois le préposé de la société de distribution d'eau envoie à Monsieur Y un relevé de consommation d'eau qui porte deux nombres : le premier est le nombre de m^3 qui était affiché au compteur d'eau à la fin du mois précédent, le deuxième est le nombre de m^3 affiché au compteur à la fin du mois en cours.

a) Que représente la différence entre ces deux nombres ?

b) Sur le relevé reçu fin janvier 1971, on lisait $u_0 = 0$, $u_1 = 36{,}2$; sur le relevé reçu fin février 71 on lit : $u_1 = 36{,}2$, $u_2 = 72{,}5$; quel est le premier nombre inscrit sur le relevé de fin mars 1971 ?

c) Si on note u_1 le nombre inscrit sur le compteur fin janvier 71, u_2 le nombre inscrit fin février 71 etc ..., comment notera-t-on le nombre inscrit au compteur fin décembre 1971 ? fin juillet 1972 ? fin avril 1975 ?

d) Il y a maintenant 73 mois que Monsieur Y habite l'ensemble & puisque nous sommes aujourd'hui le 31 janvier 1977 ; il vient de recevoir le relevé pour janvier 1977 ; comment seront notés les deux nombres du relevé d'eau ? Quelle opération doit faire Monsieur Y pour connaître le volume de l'eau qu'il a consommée au cours de janvier 1977 ?

3) On considère la suite :

a) $u_1 = 1$, $u_2 = \frac{1}{2}$, $u_3 = \frac{1}{3}$, $u_4 = \frac{1}{4}$, ..., etc ... ; cette suite de nombres peut-elle être continuée «indéfiniment» ? Que vaut u_{10} ? Quel sera le 20e, le 100e terme de cette suite ?

n étant un entier, quel sera le $n^{\text{ième}}$ terme de cette suite ? et comment le noter ?

On considère l'application $f : \mathbb{N} - \{0\} \to \mathbb{R}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N} - \{0\}$, $f(n) = \frac{1}{n}$.

La phrase suivante : «La suite $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$, ..., est la suite des images par f de $\mathbb{N} - \{0\}$ » vous paraît-elle acceptable ?

b) Soit g l'application de N dans R telle que pour tout entier n : $g(n) = \frac{1}{10^n}$.

Calculer $g(0)$, $g(1)$, $g(10)$; quel est le 5ème terme de la suite définie par g ? Cette suite a-t-elle un nombre fini de termes ?

c) Soit $u_1, u_2, u_3, ..., u_n, ...$ une suite infinie de termes et $u : \mathbf{N} - \{0\} \to \mathbf{R}$ telle que $u(1) = u_1$, $u(2) = u_2$, ... etc ...

Etes-vous d'accord avec la «définition» : «Une suite de nombres est donnée par l'ensemble des images d'un sous-ensemble A de N par une application $f : A \to \mathbf{R}$» ?

4) Pour une prise de contact un peu plus avancée avec la notion de suite, nous renvoyons à la première fiche du sous-groupe «Suite» du groupe «Analyse» de l'IREM de Marseille ; il est souhaitable que le plus tôt possible l'enfant soit familiarisé avec la notion de suite (sans pour autant, dans un premier temps, se préoccuper du «devenir» de u_n quand n devient très grand).

II DIFFÉRENCES PREMIERES

1) Dans tout véhicule automobile, il y a un compteur kilométrique qui enregistre la distance parcourue par le véhicule depuis que celui-ci est en circulation.

Depuis le premier jour où il a acheté sa voiture, Monsieur Z note chaque soir, au moment où il rentre son auto dans son garage, le nombre indiqué au compteur kilométrique ; il appelle u_1 le nombre inscrit au compteur le 1er jour, u_2 le nombre inscrit au compteur le 2ème jour, ..., u_n le nombre inscrit au compteur le $n^{\text{ième}}$ jour, etc ... , u_0 désigne le nombre inscrit au compteur lorsqu'il a acheté sa voiture, avant qu'il ne s'en soit servie ; pour chaque entier n, que représente la différence : $u_{n+1} - u_n$?

2) Soit $u_0, u_1, u_2, ..., u_n, ...$, une suite de nombres ; on appelle différence première de cette suite la fonction $\Delta u : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ telle que $\forall n \in \mathbf{N}$:

$$\Delta u(n) = u_{n+1} - u_n \ .$$

a) On obtient ainsi une nouvelle suite : $\Delta u_0 = u_1 - u_0$, $\Delta u_1 = u_2 - u_1$, ...
$\Delta u_n = u_{n+1} - u_n$, etc ...

b) Connaissant u_0, u_1, u_2, u_3, etc ..., calculer :

- $u_0 + \Delta u_0 + \Delta u_1 + \Delta u_2$
- $u_0 + \Delta u_0 + \Delta u_1 + \Delta u_2 + \Delta u_3$
- $u_0 + \Delta u_0 + \Delta u_1 + \Delta u_2 + \Delta u_3 + \Delta u_4$.

c) Plus généralement, pour une suite $u_0, u_1, u_2, ..., u_n, u_{n+1}, ...$, on connaît $u_0, \Delta u_0, \Delta u_1, \Delta u_2, ..., \Delta u_n$, peut-on calculer u_n ?

3) Soit $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, ... , $u_n = n$, ... , c'est-à-dire la suite des entiers naturels ; on se propose de calculer la somme s_n des n + 1 premiers entiers naturels :

$$s_n = 0 + 1 + 2 + 3 + ... + (n-2) + (n-1) + n \ .$$

Soit alors $s'_n = n + (n-1) + (n-2) + ... + 3 + 2 + 1 + 0$.

a) Justifier l'égalité $s_n = s'_n$; combien y a-t-il de termes dans les sommes s_n et s'_n ?

b) Utilisant le fait que $s_n + s'_n = 2\,s_n$ et écrivant

$$s_n = 0 + 1 + 2 + ... + (n-1) + n$$
$$s'_n = n + (n-1) + (n-2) + ... + 1 + 0$$

justifier le fait que :

$$s_n + s'_n = (0 + n) + [1 + (n-1)] + [2 + (n-2)] + ... + [(n-1) + 1] + [n + 0] \ .$$

c) Combien y a-t-il d'expressions entre crochets dans cette somme, et quelle est la valeur de chaque expression entre crochets ?

d) Les remarques précédentes permettent-elles d'affirmer que pour tout entier n :

$$s_n = \frac{n \times (n+1)}{2} \ ?$$

4) Etant donnée une suite infinie $u_0, u_1, ..., u_n, u_{n+1}, ...$ telle que $u_0 = 0$ et telle que $u_{n+1} - u_n = n$ pour tout entier n, utilisant ce qui a été vu aux questions précédentes, calculer, pour tout entier n, u_n en fonction de n.

5) Lorsque l'on a deux points distincts du plan A et B, cela permet d'obtenir 1 segment : le segment [A,B] . Avec un seul point, on ne peut obtenir aucun segment. Si l'on a trois points distincts non alignés, le nombre de segments que l'on peut obtenir en joignant deux à deux ces points de toute les manières possible est 3.

a) Soient A, B, C, D quatre points distincts du plan, tels que trois quelconques d'entre eux ne soient pas alignés.

Combien de segments sont déterminés en joignant ces points deux à deux de toutes les manières possibles ?

b) Soit n un entier naturel non nul, $A_0, A_1, A_2, ..., A_{n-1}$, n points distincts du plan tels que trois quelconques d'entre eux ne soient pas alignés. On note c_n le nombre de segments que l'on peut obtenir en joignant deux à deux de toutes les manières possibles ces points :
ainsi $c_1 = 0$, $c_2 = 1$, $c_3 = 3$; que valent c_4 et c_5 ?

c) On suppose connu c_n , et soit A_n un (n + 1)-ème point tel que $\{A_0, A_1, ..., A_{n-1}, A_n\}$ soit constitué de n + 1 points distincts tels que trois quelconques d'entre eux ne soit pas alignés ; notons a_n le nombre de segments obtenus en joignant A_n aux points $A_0, ..., A_{n-1}$; justifier le fait que $c_{n+1} = c_n + a_n$. Calculer a_n en fonction de n.

Utiliser les résultats des questions précédentes pour donner, $\forall n \in \mathbb{N} - \{0\}$, une expression de c_n en fonction de n.

FICHE 2

Niveau : 3e–2e

Activités mathématiques sur les différences premières.

Applications à certaines sommations – suites (ou progressions) arithmétiques.

DES SOMMATIONS

1) Soit $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$, une suite infinie de nombres telle que $u_1 = 0$ et telle que $\forall n \in \mathbb{N} - \{0\}$: $u_{n+1} - u_n = n$.

Ecrivons :

$$\begin{aligned} u_2 - u_1 &= 1 \\ u_3 - u_2 &= 2 \\ &\vdots \\ u_{n-1} - u_{n-2} &= n-2 \\ u_n - u_{n-1} &= n-1 \end{aligned}$$

Ajoutant membre à membre ces $n-1$ égalités, calculer u_n en fonction de n.

2) De manière plus générale, k étant un entier naturel non nul, on peut essayer de résoudre le problème suivant :

★ donner une expression simple à manipuler de la somme : $s_k(n) = 0^k + 1^k + 2^k + \ldots + (n-1)^k$, des puissances $k^{\text{ièmes}}$ des n premiers entiers. ★

a) Calculer $s_k(n+1) - s_k(n)$.

b) On a déjà résolu le problème pour $k = 1$:

$$s_1(n) = \frac{n(n-1)}{2} \quad .$$

Attachons-nous à résoudre le problème pour $k = 2$:

$s_2(n) = 1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2$ ou encore $s_2(0) = 0$, $s_2(n+1) - s_2(n) = n^2$.

Pour cela, considérons quatre nombres a, b, c, d, et soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(n) = an^3 + bn^2 + cn + d$.

– On suppose que $f(0) = 0$; que vaut d ?

– On suppose de plus que $f(1) = 0$; en déduire que $f(n) = an^3 + bn^2 - (a+b)n$.

– En déduire que si l'on a aussi $f(2) = f(3) = 0$, alors nécessairement $a = b = c = d = 0$.

– En déduire qu'il existe un unique système de quatre nombres $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ tel que si g est la fonction $n \in \mathbb{N} \mapsto g(n) = \alpha n^3 + \beta n^2 + \gamma n + \delta$, alors :

$$g(n+1) - g(n) = n^2 \qquad n \in \mathbb{N} \text{ et } g(0) = 0 \ .$$

Calculer effectivement $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. En déduire une expression simple en fonction de n, de :

$$s_2(n) = 1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2 \quad .$$

3) a) On a une suite infinie $u_0, u_1, ..., u_n, u_{n+1}$ dont on connaît la valeur du 1er terme : $u_0 = 3$ et telle que $\forall n \in \mathbf{N}$:

$$\Delta u_n = u_{n+1} - u_n = 2 .$$

Ecrivons, les unes au-dessous des autres, les n égalités :

$$\begin{cases} u_1 - 2 = 2 \\ u_2 - u_1 = 2 \\ \vdots \\ u_{n-1} - u_{n-2} = 2 \\ u_n - u_{n-1} = 2 \end{cases}$$

et ajoutons, membre à membre, ces n égalités.
Nous obtenons :

$$u_1 - 2 + u_2 - u_1 + u_3 - u_2 + \ldots + u_{n-1} - u_{n-2} + u_n - u_{n-1} = 2n$$

En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

b) Plus généralement, soit $v_0, v_1, ..., v_n, v_{n+1}, ...$ une suite dont on connaît la valeur k du 1er terme : $v_0 = k$, et telle qu'il existe un nombre $a \in \mathbf{R}$ tel que

$$v_{p+1} - v_p = a \qquad \text{quel que soit } p.$$

Une telle suite est dite suite arithmétique (ou progression arithmétique).

Ecrivons :

$$\begin{aligned} v_1 - v_0 = v_1 - k &= a \\ v_2 - v_1 &= a \\ &\vdots \\ v_n - v_{n-1} &= a \end{aligned}$$

et, utilisant le raisonnement précédent, donner une expression simple de v_n en fonction de n, a et k.

FICHE 3

Niveau : 2nd Cycle

Activités mathématiques autour du concept de différences premières d'une fonction.

I DIFFÉRENCE PREMIERE D'UNE FONCTION

a) Etant donnée une fonction numérique f, on appelle différence première de cette fonction, la fonction $\Delta_1 f : x \mapsto f(x+1) - f(x)$.

En fait, plus généralement, h étant un réel positif non nul donné, on définit la différence première de pas h de f, la fonction :

$$\Delta_h f : x \mapsto f(x+h) - f(x) .$$

b) φ étant une fonction numérique donnée, déterminer toutes les fonctions f vérifiant $\Delta_h f = \varphi$ s'appelle résoudre une équation aux différences finies.

c) Soit E la fonction «partie entière» : $\forall x \in \mathbf{R}$, E(x) est le plus grand élément de $\{n \in \mathbf{Z} \ / \ n \leqslant x\}$; soit M la fonction $x \mapsto M(x) = x - E(x)$; et $\underline{0}$ la fonction identiquement nulle.

Montrer que M est solution de l'équation $\Delta_1 f = \underline{0}$.

d) Soit $h \in \mathbf{R}$ donné. Vérifier que les solutions de l'équation $\Delta_h f = \underline{0}$ constituent un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions numériques.

II FONCTIONS PÉRIODIQUES

a) Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\tau \in \mathbf{R} - \{0\}$ est dit une période pour f si $\forall x \in \mathbf{R}$, $f(x + \tau) = f(x)$.

b) Montrer que si $\tau \in \mathbf{R} - \{0\}$ est une période pour f, alors :

. $\mathbf{Z}_\tau = \{x = n\tau \ / \ n \in \mathbf{Z}\}$ est un sous-groupe additif de $\mathbf{R}$.

. $\forall h \in \mathbf{Z}_\tau$, h est une période pour f.

. $\mathbf{Z}_{-\tau} = \mathbf{Z}_\tau$.

c) On dit que f est périodique de période T si T est une période de f, et si T est le plus petit nombre positif tel que T soit une période de f.

d) Montrer que la fonction M définie en I–c) est périodique de période 1.

e) Soit f une fonction périodique de période 1. Montrer que $\forall x \in \mathbf{R}$, $f(x) = (f \circ M)(x)$.
En déduire que la connaissance des valeurs de f sur [0, 1] détermine entièrement f.

f) $\forall n \in \mathbf{N}$, on note c_n la fonction $x \mapsto \cos(2\pi n x)$ et $s_n : x \mapsto \sin(2\pi n x)$.
Etablir que, $\forall n \in \mathbf{N}$, $\Delta_1 c_n = \Delta_1 s_n = \underline{0}$.

g) Soit $\mathcal{A}$ l'espace vectoriel de toutes les applications de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$
et $\mathcal{T}_h = \{f \in \mathcal{A} \ / \ \Delta_h f = \underline{0}\}$ qui est donc l'ensemble des fonctions qui admettent h comme période
Montrer que $\Delta_h : f \to \Delta_h f$ est un endomorphisme de $\mathcal{A}$ dont $\mathcal{T}_h$ est le noyau.

h) Soit $\varphi \in \mathcal{A}$ donné, g une solution de l'équation $\Delta_h f = \varphi$; soit $g' \in \mathcal{A}$; montrer que g' est solution de $\Delta_h f = \varphi \Longleftrightarrow g - g' \in \mathcal{T}_h$.

III FONCTIONS DONT LA DIFFÉRENCE PREMIERE EST UNE CONSTANTE NON NULLE

a) Soit $k \in \mathbf{R} - \{0\}$, $\underline{k}$ la fonction $x \in \mathbf{R} \to \underline{k}(x) = k \quad \forall x \in \mathbf{R}$.

Cherchons à résoudre $\Delta_1 f = \underline{k}$; soit à chercher les fonctions $f \in \mathcal{A}$ telles que $\forall x \in \mathbf{R}$:

$$f(x+1) - f(x) = k$$

On peut imposer de plus que $f(0) = 0$; montrer que si $\Delta_1 f = \underline{k}$ et $f(0) = 0$, alors $\forall n \in \mathbf{N}$:

$$f(n) = nk$$

b) On pose $\delta_k : x \mapsto \delta_k(x) = kx \quad \forall x \in \mathbf{R}$; vérifier que δ_k est solution de $\Delta_1 f = \underline{k}$ et que $\delta_k \notin \mathcal{T}_1$.

En déduire que toute solution f de $\Delta_1 f = \underline{k}$ est de la forme $f = \delta_k + \gamma$ où γ est une fonction numérique quelconque de période 1.

IV FONCTIONS DONT LA DIFFÉRENCE PREMIERE EST x^k ($k \in \mathbf{N}^*$)

a) On suppose $k = 1$. Montrer que s'il existe un polynome P solution de $f(n+1) - f(n) = n$, $\forall n \in \mathbf{N}$, alors P est solution de $\Delta_1 P(x) = x$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

Montrer qu'il existe un polynome du second degré et un seul P_1 vérifiant $P_1(0) = 0$ et $P_1(x+1) - P_1(x) = x \quad \forall x \in \mathbf{R}$.

Déterminer $P_1(x)$. En déduire que $P_1(n) = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1)$.

b) On suppose $k = 2$. Montrer qu'il existe un polynome et un seul P_2 de degré 3 tel que $P_2(0) = 0$ et $P_2(x+1) - P_2(x) = x^2$, $\forall x \in \mathbf{R}$. Déterminer P_2.

En déduire que $\displaystyle\sum_{p=1}^{k=n-1} p^2 = P_2(n)$

c) Soit k quelconque dans $\mathbf{N}^*$. Montrer qu'il existe un unique polynome P_k de degré $k+1$, tel que $P_k(0) = 0$ et $P_k(x+1) - P_k(x) = x^k \quad \forall x \in \mathbf{R}$.

Etablir alors que $\forall n \in \mathbf{N}^*$: $\displaystyle\sum_{p=0}^{p=n-1} p^k = P_k(n)$

V POLYNOMES BINOMIAUX

a) Soit $\mathcal{N}_0 = \underline{1}$, $\mathcal{N}_1 : x \mapsto x$, $\mathcal{N}_2 : x \mapsto x(x-1)$, et $\forall p \in \mathbf{N}$:

$$\mathcal{N}_{p+1} : x \mapsto (x-p) \cdot \mathcal{N}_p(x).$$

Montrer qu'on obtient ainsi une suite $(\mathcal{N}_p)_p$ de polynomes tels que :

$$(\star) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{N}_p \text{ est de degré } p \\ \Delta_1 \mathcal{N}_p = p \cdot \mathcal{N}_{p-1} \end{array} \right\} \qquad \forall p \in \mathbf{N}^*$$

On comparera $(\star)$ avec la formule de dérivation de $x \mapsto x^p$.

b) Montrer que les polynomes $\mathcal{N}_p$ forment une base de l'espace vectoriel des fonctions polynomes.

c) Soit $\mathcal{Q} = a_0 \mathcal{N}_0 + a_1 \quad _1 + \dots + a_k \mathcal{N}_k$ un polynome de degré k écrit dans la base des $(\mathcal{N}_p)_p$. Montrer que le polynome :

$$R = \alpha \mathcal{N}_0 + \frac{a_0}{1} \mathcal{N}_1 + \frac{a_1}{2} \mathcal{N}_2 + \dots + \frac{a_k}{k+1} \mathcal{N}_{k+1} \quad .$$

est l'unique polynome de degré k + 1 tel que $R(0) = \alpha$ et $\Delta_1 R = \mathcal{Q}$.

d) Soit $\mathcal{V}_0 = \frac{\mathcal{N}_0}{0!}$, $\mathcal{V}_1 = \frac{\mathcal{N}_1}{1!}$, ... , $\mathcal{V}_k = \frac{\mathcal{N}_k}{k!}$ ... etc ...

$\mathcal{V}_k$ est appelé polynome binomial de degré k ; qu'il soit de degré k résulte du fait que $\mathcal{N}_k$ est de degré k ; on le dit binomial pour la raison suivante :

- Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $k \in \mathbf{N}$ on note $\mathcal{V}_k(x) = \binom{x}{k}$.

  Vérifier que $\forall x \in \mathbf{N}$, $x \geqslant k$ on a : $\mathcal{V}_k(x) = \frac{x!}{k!(x-k)!}$.

- Montrer que $\forall k \in \mathbf{N}$: $\Delta_1 \mathcal{V}_{k+1} = \mathcal{V}_k$ et que les $\mathcal{V}_k$ forment une base de l'espace vectoriel des polynomes.

e) Soit $f = \sum_{k:0}^{k:n} a_k \mathcal{V}_k$ une fonction polynome écrite dans la base des $\mathcal{V}_k$. Montrer que l'unique polynome B_f de degré n + 1 vérifiant :

$$B_f(0) = 0 \quad \text{et} \quad \Delta_1 B_f = f$$

est le polynome :

$$B_f = \sum_{k:0}^{k:n} a_k \mathcal{V}_{k+1}$$

f) Etudier l'application : $f \mapsto B_f$ sur l'espace vectoriel des polynomes.

''I PROBLEME : CHERCHER LES FONCTIONS CROISSANTES SOLUTIONS DE $\Delta_1 f(x) = e^{-x}$, $x \geqslant 0$

On cherche les solutions croissantes sur $\mathbf{R}^+$ de l'équation :

$$f(x+1) - f(x) = e^{-x}$$

a) Notons que si f_1 et f_2 sont deux solutions croissantes, alors $\delta = f_1 - f_2 \in \mathcal{T}_1$.
Montrer que $\forall x \in [0, 1[$, $\mathcal{V} \in \mathbf{N}^*$:

$$f_1(\mathcal{V}) - f_2(\mathcal{V}+1) \leqslant \delta(\mathcal{V}+x) \leqslant f_1(\mathcal{V}+1) - f_2(\mathcal{V}) \quad ;$$

utilisant le fait que 1 est période pour δ, que $f_1(\mathcal{V}+1) = f_1(\mathcal{V}) + e^{-\mathcal{V}}$
et $f_2(\mathcal{V}+1) = f_2(\mathcal{V}) + e^{-\mathcal{V}}$ en déduire que :
$\delta(\mathcal{V}) - e^{-\mathcal{V}} \leqslant \delta(x) \leqslant \delta(\mathcal{V}) + e^{-\mathcal{V}}$, et que si de plus $f_1(0) = f_2(0)$, alors δ est une fonction constante.

b) Soit f une solution ; alors $\forall n \in \mathbf{N}$:

$$f(1) - f(0) = e^{-0} = 1$$
$$f(2) - f(1) = e^{-1}$$
$$\vdots$$
$$f(n) - f(n-1) = e^{-(n-1)}$$

En déduire que $f(n) = f(0) + \sum_{k:0}^{k:n-1} (\frac{1}{e})^k$

c) Calculer $\sum_{k=0}^{k=n-1} \left(\frac{1}{e}\right)^k$.

d) En déduire que, α étant un nombre donné, la fonction

$$f_\alpha : x \mapsto \frac{1 - e^{-x}}{1 - e} + \alpha$$

est la seule solution croissante de $\Delta_1 f(x) = e^{-x} \quad (\forall x \geq 0)$ vérifiant $f_\alpha(0) = \alpha$.

<u>LA GEOMETRIE</u> (vue par un élève de 1ère C)

GROUPE DES ISOMETRIES LAISSANT INVARIANT UN POLYGONE REGULIER DE n COTES

J.C. BENIAMINO, I.R.E.M. de MARSEILLE

Dans le plan les isométries conservant des ensembles finis de points sont de deux natures, les rotations et les symétries. On désigne par 0, le centre du polygone régulier et par $A_1 \dots A_n$ les n sommets distincts.

Une rotation qui laisse $\{A_1 \dots A_n\}$ globalement invariant est nécessairement de Centre 0.

Une symétrie qui laisse $\{A_1 \dots A_n\}$ globalement invariant est telle que son axe passe par 0.

(Dans chaque cas on peut dire que le cercle circonscrit est globalement invariant).

Considérons donc la rotation R de Centre 0 d'angle $\frac{2\pi}{n}$ et la symétrie orthogonale S d'axe passant par 0 et par A_1.

R et S ainsi que tous leurs produits sont des isométries laissant $\{A_1 \dots A_n\}$ globalement invariant.

On a donc les isométries .. R ; $R o R = R^2$; R^3; ... ; R^{n-1}

S; $S o R$; $S o R^2$;...;$S o R^{n-1}$

... auxquelles il convient d'ajouter l'identité, ce qui détermine $2n$ éléments.

On obtient par ce procédé toutes les isométries laissant $\{A_1 \dots A_n\}$ invariant.

En effet considérons l'une quelconque d'entre elles, elle est déterminée par son action sur les sommets

$$\text{si} \quad f(A_1) = A_i \quad \text{et} \quad f(A_2) = A_j$$

$$(\overrightarrow{0A_1}, \overrightarrow{0A_2}) = (\overrightarrow{0A_i}, \overrightarrow{0A_j}) \Rightarrow \quad j = i + 1$$

$$\text{ou} \quad (\overrightarrow{0A_1}, \overrightarrow{0A_2}) = (\overrightarrow{0A_j}, \overrightarrow{0A_i}) \Rightarrow \quad j = i - 1$$

dans le premier cas $f = R^{i-1}$

dans le second cas $f = SoR^{i-1}$

Si Δ_n désigne ce groupe (groupe diedral) on a Card $\Delta_n = 2n$.

On remarque ensuite que $SoR \neq RoS$

En fait Δ_n est défini par les relations $R^n = I$ et $S^2 = I$ et $S = RoSoR$

on peut écrire $SoR = So(R^{n-1})^{-1} = S^{-1}o(R^{n-1})^{-1} = (R^{n-1}oS)^{-1}$

Comme $(SoR^i)^{-1} = SoR^i$ (égalité que l'on peut obtenir de deux manières soit en constatant que SoR^i est une symétrie donc involutive, soit en utilisant les relations définies plus haut.

$$R^{-i}oS = R^{-i+1}oR^{-1}oS = R^{-i+1}o(SoR) \text{ etc...})$$

On peut dresser la table de multiplication de ce groupe au moyen des égalités :

$$R^i oR^j = R^{i+j}$$

$$(SoR^i)oR^j = SoR^{i+j} \quad \text{(associativité)}$$

$$(SoR^i)o(SoR^j) = R^{-i}oSoSoR^j = R^{-i+j}$$

$$R^j o(SoR^i) = R^j oR^{-i}oS = R^{j-i}oS = SoR^{i-j}$$

Exemple Δ_6

Δ_6 est formé de I ; R (rotation de centre o d'angle $\pi/3$) ; R^2;R^3;R^4;R^5

S(symétrie) ; SoR ; SoR^2 ; ... ; SoR^5

Considérons E ensemble à trois éléments a, b, c

P étant la permutation circulaire, D la transposition laissant a fixe

DoP est la transposition laissant b fixe ; DoP^2 laisse c fixe.

donc S_3 est un groupe isomorphe à $\{I, R^2, R^4;S;SoR^2;SoR^4\}$

On montre facilement que S_2 est isomorphe à $\{I, R^3\}$

où S_3 et S_2 sont respectivement les groupes symétriques d'ordre 3 et d'ordre 2.

En considérant le groupe produit cartésien $S_3 \times S_2$ on montre que Δ_6 est isomorphe à $S_3 \times S_2$.

ETUDE DES SOUS-GROUPES DE Δ_n

Lemme $(Z/_{nZ} ; +)$ admet des sous groupes propres si et seulement si n n'est pas premier.

★ H un sous-groupe propre de $(Z/_{nZ}, +)$ $H \neq \{o\}$ et $H \neq Z/_{nZ}$

Considérons la relation d'équivalence $p \sim p' \Leftrightarrow p - p' \in H$

On note $\hat{p} = H + p$ la classe de p ; toutes les classes ont le même nombre d'éléments card H et la réunion de ces classes donne $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$

d'où $n = \text{card}\, H \times$ nombre de classes...

★ si $n = pq$ on peut considérer le sous ensemble $\{o, p, 2p, \ldots, (q-1)p\}$ on vérifie que l'on a bien un sous-groupe de $(\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}\ +)$

On pose $\Delta_n^+ = \{I, R, \ldots ; R^{n-1}\}$ Δ_n^+ est donc isomorphe à $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}\ +)$

Si $n = pq$ les sous ensembles de Δ_n^+ égaux à :

$$H_p = \{I, R^p, R^{2p} \ldots , R^{(q-1)p}\}$$ sont des sous groupes de Δ_n^+

Géométriquement on constate que c'est le groupe des rotations laissant invariants les sommets d'un polygone régulier de $q = \frac{n}{p}$ côtés. (Sommets pris parmi ceux du polygone de départ).

On est sûr d'avoir ainsi obtenu tous les sous-groupes de Δ_n^+. En effet soit H l'un quelconque d'entre eux.

- $R \in H$ $H = \Delta_n^+$

- p le plus petit entier tel que $R^p \in H$, alors $\forall p' \in \mathbb{Z}$ $R^{p'} \in H$

  p divise p', de même p divise n

  H est un groupe cyclique engendré par R^p $n = pq$

On cherche maintenant ceux des sous-groupes de Δ_n contenant des isométries négatives ; on obtient toutes les paires $\{I ; SoR^i\}$ i étant un entier quelconque $i < n$

Cherchons donc s'il existe des sous-groupes de Δ_n contenant à la fois des isométries positives et négatives.

Soit K un tel sous-groupe $K \cap \Delta_n^+$ est un sous-groupe de Δ_n^+ . On peut donc énoncer le résultat :

n premier les seuls sous-groupes de Δ_n sont Δ_n^+ et les sous-groupes tels que (I, SoR^i)

Dans le cas où n n'est pas premier $K \cap \Delta_n^+ = Hp$ $(n = pq)$

$\exists i,\ i \in N \quad i < n \qquad SoR^i \in K$

alors nécessairement $(SoR^i)Hp \subset K$

où $(SoR^i)Hp$ désigne les éléments produits de SoR^i par un élément de Hp.

Remarquons que les seules symétries contenues dans K sont celles qui sont de la forme $SoR^i o R^{kp}$

ainsi donc $K = H_p \cup (SoR^i) H_p$

card $K = 2p$ or l'ordre d'un sous-groupe est un diviseur de l'ordre du groupe $2n = 2p \times q'$

Vérifions donc de manière directe que toute partie de Δ_n de la forme $H_p \cup (SoR^i) H_p$ est un sous groupe de Δ_n (faire le calcul en utilisant la table de multiplication de la page 38).

On peut donc détailler les sous-groupes de Δ_n par :

$\{I\}$; Δ_n^+ ; $H_p = \{R^{kp} | k \in N$, p divise n$\}$

$\{I, SoR^i\}$ $i < n$; $H_p \cup SoR^i H_p$; Δ_n

La question que l'on peut se poser maintenant est de savoir lesquels parmi ces sous-groupes sont invariants.

RECHERCHE DES SOUS-GROUPES INVARIANTS DE Δn

Préliminaires d'Algèbre

Classes à droite, classes à gauche, sous-groupe invariant

Soit G un sous-groupe et Δ un sous-groupe de G.

On considère la première relation $p \sim q \Leftrightarrow pq^{-1} \in \Delta$ qui est une relation d'équivalence et qui définit les classes à droite que l'on peut noter Δq.

On considère la seconde relation $p \sim q \Leftrightarrow p^{-1}q \in \Delta$ qui est aussi une relation d'équivalence et qui définit les classes à gauche notées $q \cdot \Delta$.

Si Δ est un sous groupe quelconque, les classes à droite et les classes à gauche ne sont pas égales.

On suppose que Δ est un sous-groupe invariant, on montre que les classes à gauche et les classes à droite sont égales.

$\forall h, h \in G \quad h.\Delta.h^{-1} = \Delta$

Si $pq^{-1} \in \Delta \Leftrightarrow qp^{-1} \in \Delta \Leftrightarrow (p^{-1}q^{-1})\,(qp^{-1})(qp) \in \Delta \quad \Leftrightarrow$
$p^{-1}(p^{-1}q)p \in \Delta \Leftrightarrow p^{-1}q \in \Delta$

On désigne alors par $G/_{\Delta} = N$ le quotient

On établit les relations : si $q \sim q'$ (par l'une ou l'autre des relations plus haut)

$qp \sim q'p$ en effet $qpp^{-1}q'^{-1} \in \Delta$ (première relation)

Si $p \sim p'$ $q'p \sim q'p'$ $p^{-1}q'^{-1} x q' x p' = p^{-1}p' \in \Delta$ (seconde relation)

d'où le résultat $p \sim p'$ $q \sim q' \Rightarrow pq \sim p'q'$

On définit alors sur le quotient $G/_{\Delta}$ une nouvelle loi

$$\Delta_p \times \Delta_q = \Delta_{p.q}$$

On vérifie que N est muni d'une structure de groupe pour cette loi, l'élément neutre étant Δ, l'élément inverse de Δ_p étant Δ_p-1

H_p est un sous-groupe invariant de Δ_n

En effet $R^m \circ R^{kp} \circ R^{-m} = R^{kp}$

et $(S \circ R^m) \circ (R^{kp}) \circ (S \circ R^m)^{-1} = S \circ R^{kp} \circ S = R^{-kp}$

dans tous les cas donc :

$$\forall f, f \in \Delta_n \qquad f^{-1} H_p f = H_p$$

Etudions le même problème pour $H_p \cup S \circ R^i H_p$ en se limitant aux seuls éléments de la forme $S \circ R^{i+kp}$

a) $R^{-m} \circ (S \circ R^{i+kp}) \circ R^m = S \circ R^{2m+i+kp}$

Si le sous-groupe est invariant $2m + kp = k'p$

ou encore $2m = (k-k')p$ quel que soit m et donc $p = 2$

inversement si $p = 2$ $2m = mp$ avec $k' = m + k$

le problème admet une solution.

b) $(s \circ R^m)^{-1} \circ (S \circ R^{i+kp}) \circ (S \circ R^m) = S \circ R^{2m-i-kp} = S \circ R^i \circ R^{2m-2i-kp}$

Si le sous-groupe est invariant $2m - 2i - kp = k'p$

$2(m-i) = (k' - k)p$ quel que soit m donc $p = 2$

inversement si $p = 2$ $2(m-i) = p(m-i)$

quel que soit k, il existe k' tel que $k' - k = m - i$ ...

Ainsi donc les sous-groupes de la forme $H_p \cup SoR^i H_p$ sont invariants si et seulement si $P = 2$.

<u>Conclusion</u> :

n impair non premier, Δ_n admet pour sous-groupes invariants ceux qui sont de la forme H_p ou $n = p \times q$

n pair Δ_n admet en plus des précédents les sous-groupes suivants comme sous-groupes invariants.

$n = 2q$: $H_2 = \{I, R^q\}$; $H_2 \cup SoR^i H_2$.

INFORMATION : L A C O . P. R. E. M.

Au printemps 1975, un groupe de travail ministériel, dit groupe de travail n° 6, estimait que l'ampleur et la technicité des problèmes concernant l'Enseignement des Mathématiques nécessitaient la création d'une Commission Permanente de Réflexion sur l'Enseignement des Mathématiques qui aurait pour mission :

- de définir les objectifs fondamentaux de l'Enseignement des Mathématiques à tous niveaux,
- de faire des propositions concernant les contenus d'enseignement, les méthodes pédagogiques et les types d'activité adaptés aux contenus et aux objectifs retenus, et les recherches pédagogiques qui leur sont liées,
- d'approfondir la réflexion sur la formation initiale et continue des Enseignants en Mathématiques.

A l'initiative essentielle de l'A.P.M. et de l'Assemblée des Directeurs d'I.R.E.M., cette Commission (CO.P.R.E.M.) fut créee le 8 Mai 1976. A cette Commission figurent des membres désignés par les organismes suivants :

* Assemblée des Directeurs d'I.R.E.M.
* A.P.M.E.P.
* Sous-Comité Français du C.I.E.M.
* Union des Professeurs de Mathématiques Spéciales,
* et des observateurs d'organismes représentatifs tels que la S.M.F., C.N.F.M., etc.

Le Secrétariat Général de la CO.P.R.E.M. est assuré par Jean MARION de l'I.R.E.M. de MARSEILLE.

Dans l'immédiat, la CO.P.R.E.M. a mis en place des groupes ayant pour mission d'élaborer des rapports de synthèses sur différents secteurs, ces secteurs étant liés :

- à la définition d'objectifs,
- à l'analyse de l'état actuel dans l'Enseignement des Mathématiques,
- à des contenus (Géométrie, Analyse, Proba-Stat., etc.)
- à des méthodes pédagogiques,
- à la Formation des Maîtres,

Un travail préliminaire a consisté à inventorier les travaux déjà effectués dans les I.R.E.M., l'I.N.R.P., l'A.P.M., etc.

Dans le cas où des groupes de travail existent et n'ont aucune structuration permanente, la Commission s'efforce de favoriser l'organisation d'échanges permanents à l'échelon national.

Sur tous ces problèmes, la CO.P.R.E.M. s'efforce de mer de front une réflexion à long terme et des prises de positions sur des problèmes liés à l'état actuel de l'Enseignement des Mathématiques.

* * *

IREM marseille
institut de recherche
sur l'enseignement des mathématiques

70, route léon lachamp
13009 marseille luminy

Tél. 41.39.40 - 41.15.40