

INFORMATION MATHE MATIQUE

IREM
MARSEILLE

INFORMATION

MATHEMATIQUE

Publication de l'I.R.E.M. de Marseille

RESPONSABLE DE LA PUBLICATION

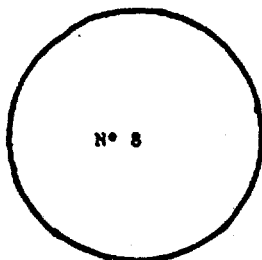
J.C. Beniamino

I. R. E. M.

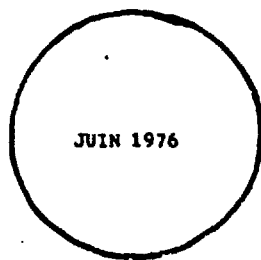
70, Route Léon Lachamp

13009 - MARSEILLE

(Tél. 41.15.40 poste 32.10 / 41.39.40)



INFORMATION MATHÉMATIQUE



S O M M A I R E

* SOMMAIRE.....	1
* EDITORIAL - La Rédaction -	2
* MATERIAUX A L'USAGE D'UN THEME (Robert ROLLAND - Directeur de l'I.R.E.M. de MARSEILLE).....	3
* ETUDE DES ANTIDÉPLACEMENTS DANS UN ESPACE AFFINE DE DIMENSION 3 (J.C. BENIAMINO - I.R.E.M. de MARSEILLE).....	7
* CALCUL D'INTEGRALES (René CARMONA - I.R.E.M. de MARSEILLE).....	11
* METHODE DE SIMPSON (Melle. Solange GRIMAL - I.R.E.M. de MARSEILLE).....	23
* SUR LA SOUS-EVALUATION DE L'EVALUATION (Jean MARION - I.R.E.M. de MARSEILLE).....	27
* COMPTE-RENDU DE L'EXPERIENCE INTITULEE "TEST D'ETUDE D'UN TEST" (Jean MARION - I.R.E.M. de MARSEILLE).....	30

EDITORIAL

GROUPE DE TRAVAIL "ANALYSE"

Un groupe de travail sur l'analyse a commencé à fonctionner cette année dans les locaux de l'I.R.E.M. Son but est de promouvoir l'enseignement de l'analyse dans le second degré en insistant sur l'aspect calculatoire (majorations, minoration, algorithmes...)

Il apparaît en effet actuellement sur le marché des calculatrices de poche à des prix de plus en plus bas et ce phénomène incite de nombreux élèves à se munir de cet outil dans un souci évident... d'efficacité.

Il importait donc de ne pas refuser le concours matériel ainsi fourni mais de l'utiliser pour une initiation aux méthodes du calcul numérique. Les machines peuvent servir à une introduction et une compréhension différente des objets de l'analyse classique.

Vous trouverez ci-après deux articles résultats du travail thématique de quelques membres de ce groupe.

Ceux de nos collègues qui seraient intéressés par ces activités pour l'année 1976-1977 sont priés d'entre en contact avec J.L. OVAERT. Il n'est pas prévu une expérimentation au niveau scolaire avant la rentrée 77.

MATERIAUX A L'USAGE D'UN THEME

par Robert ROLLAND

IREM D'AIX-MARSEILLE

Cette rubrique est destinée à présenter des thèmes ou des questions, et des matériaux et outils mathématiques qui permettent d'éclairer la situation.

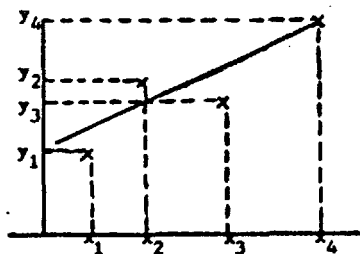
On devrait pouvoir en tirer des sujets de réflexion, et peut être aussi de la matière pour construire des problèmes.

Bien entendu, il ne faut pas s'attendre à voir un thème cerné dans un seul article; au contraire, il peut être repris, enrichi, abordé sous un autre angle dans des bulletins ultérieurs.

Du point de vue de la rédaction, l'esprit de cette rubrique peut nous permettre une certaine licence dans la forme et nous libérer un peu de la rigueur stérilisante des exposés traditionnels : j'espère que beaucoup en profiteront!

DE L'ART ET LA MANIERE DE FAIRE PASSER UNE DROITE PAR n POINTS.

Rassurez-vous, je ne vais pas démontrer que tous les points d'un plan sont alignés (ce qui est d'ailleurs assez facile, grâce à une récurrence, et à un tour de passe passe). Le problème que je voudrais présenter est le suivant :



des mesures faites pour des valeurs $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ ont donné des résultats

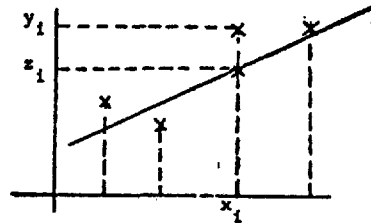
$y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$.

Il s'agit alors de trouver une droite qui "s'adapte le mieux possible à ces points",

c'est-à-dire qui "passe presque par ces points".

Il faut évidemment donner un sens précis à ce que nous entendons par là, et en fait on peut en donner plusieurs, suivant ce que l'on veut faire par la suite.

On peut par exemple chercher une droite D telle que



$\max_{1 \leq i \leq n} |y_i - z_i|$ soit le plus

petit possible, ou encore chercher une droite D

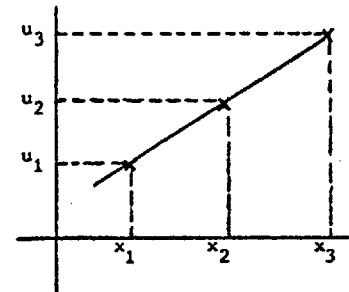
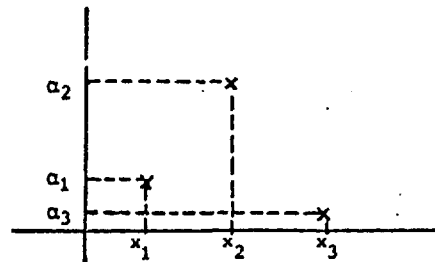
telle que $\sum_{i=1}^n (y_i - z_i)^2$ soit le plus petit possible

(Approximation des moindres

carrés) et ce ne sont pas là les seules façons de procéder.

Nous allons étudier quelque peu ici le problème de l'approximation des moindres carrés : c'est-à-dire la recherche d'une droite D telle que $\sum_{i=1}^n (y_i - z_i)^2$ soit minimum.

Afin de mieux démontrer le mécanisme de la méthode nous allons nous intéresser au cas de 3 points seulement, et nous supposons en outre pour simplifier les calculs que $x_2 = x_1 + h$ et $x_3 = x_1 + 2h$, où $h \in \mathbb{R}^{+*}$.



Munissons l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire euclidien habituel :

$$\langle (a_1, a_2, a_3) ; (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \rangle = a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + a_3\beta_3$$

et soit d la distance euclidienne qui en dérive :

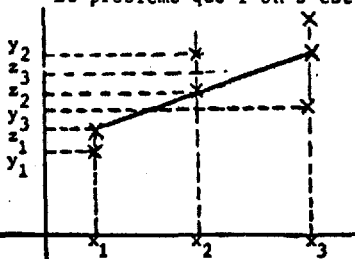
$$d((a_1, a_2, a_3) ; (\beta_1, \beta_2, \beta_3)) = \sqrt{(a_1 - \beta_1)^2 + (a_2 - \beta_2)^2 + (a_3 - \beta_3)^2}$$

soit F le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ constitué par les (u_1, u_2, u_3) tels que les points $(x_1, u_1), (x_2, u_2), (x_3, u_3)$ soient alignés.

$$F = \{ (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3 ; u_2 = \frac{u_1 + u_3}{2} \}$$

Il est facile de voir que F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2 (les vecteurs $(1,1,1)$ et $(-1,0,1)$ en forment une base par exemple).

Le problème que l'on s'est posé peut alors s'exprimer ainsi :



Etant donné $Y = (y_1, y_2, y_3)$:
un élément de $\mathbb{R}^3$,

trouver $Z = (z_1, z_2, z_3)$

dans F tel que pour tout

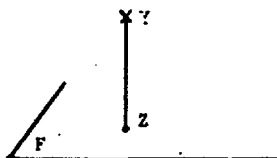
$U = (u_1, u_2, u_3)$ de F on ait :

$d(Y, Z) \leq d(Y, U)$

c'est-à-dire on cherche Z

si il existe, dans F tel que

$$d(Y, Z) = \inf_{U \in F} d(Y, U) = d(Y, F)$$



on sait alors qu'il existe une
solution et une seule à ce pro-
blème, et que c'est la projec-
tion orthogonale

$P_F(Y)$ de $Y = (y_1, y_2, y_3)$
sur le plan F .

(il est très important de remarquer l'intérêt de la projec-
tion orthogonale en tant que réalisation de la "plus courte
distance" d'un point à un sous espace).

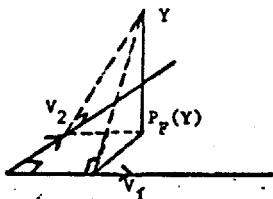
Le problème est alors de déterminer cette projection ortho-
gonale. Cela est très facile à faire si l'on connaît une
base orthonormée (V_1, V_2) de F car alors

$$P_F(Y) = P_{V_1}(Y) + P_{V_2}(Y)$$

et l'on sait d'autre part que

$$P_{V_1}(Y) = \langle Y, V_1 \rangle V_1$$

$$P_{V_2}(Y) = \langle Y, V_2 \rangle V_2$$



$$\text{donc } P_F(Y) = \langle Y, V_1 \rangle V_1 + \langle Y, V_2 \rangle V_2$$

Il est donc très important de savoir construire une base orthonormée dans un espace euclidien. Bien entendu il est facile ici de voir que les vecteurs

$$v_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \quad \text{et} \quad v_2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

forment une base orthonormée de F , mais il n'est pas toujours possible de subodorer aussi aisément une base orthonormée dans un espace euclidien. Il existe une méthode classique de construction (procédé d'orthonormalisation de Schmidt) dont nous pourrions parler une autre fois.

EXERCICE

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = 2$$

$$x_3 = 3$$

$$y_1 = 1$$

$$y_2 = 3/2$$

$$y_3 = 3$$

Déterminer l'équation de la droite D qui répond à la question.

La même étude peut évidemment être faite pour n points quelconques $x_1, x_2, \dots, x_n$.

ETUDE DES ANTIDÉPLACEMENTS
DANS UN ESPACE AFFINE DE DIMENSION 3

par C. BENIAMINO
IREM D'AIX-MARSEILLE

Cette étude se déroule dans le cadre du programme de terminale C et l'objectif poursuivi est d'obtenir des formes réduites simples à manipuler. Si le programme permet d'étudier complètement les antidéplacements dont l'endomorphisme vectoriel orthogonal associé est une symétrie vectorielle orthogonale par rapport à un plan, par contre il n'autorise qu'à l'étude de la seule symétrie centrale dans le cas où l'endomorphisme vectoriel est le produit de trois symétries vectorielles orthogonales par rapport à un plan. C'est ce dernier point que nous étudierons. Les notations utilisées sont $\mathcal{E}$ pour l'espace affine, E pour l'espace vectoriel, f pour une isométrie, $\bar{f}$ pour l'endomorphisme associé, D une droite $\bar{D}$ sa direction (droite vectorielle) etc...

1 - ETUDE DU CAS OU LA TRANSFORMATION ORTHOGONALE ASSOCIEE EST UNE SYMETRIE VECTORIELLE PLANE.

Si cet antidéplacement admet un point invariant A , on sait qu'il admet alors un plan de points invariants, plan passant par A dans la direction du plan de la symétrie vectorielle.

Si cet antidéplacement est sans point double et admet AA' pour couple homologue on peut le considérer comme le produit de la symétrie S par rapport à un plan passant par A dans la direction du plan de la symétrie vectorielle et de la translation de vecteur $\vec{AA'}$: $S \circ \mathcal{E} \vec{AA'}$

On décompose $\vec{AA'}$ suivant deux vecteurs U et V l'un orthogonal à la direction du plan de la symétrie, l'autre dans ce plan $\vec{AA'} = U + V$

$$S \circ \mathcal{E} \vec{AA'} = S \circ \mathcal{E} U \circ \mathcal{E} V = S' \circ \mathcal{E} V$$

car le produit d'une symétrie par rapport à un plan et d'une translation de vecteur orthogonal à la direction de ce plan est encore

une symétrie par rapport à un plan parallèle au premier.

$S' \cdot \mathcal{E}v = \mathcal{E}v \cdot S'$ comme on peut le constater en choisissant un couple homologue quelconque.

Cette dernière forme est unique. Supposons en effet

$$S_1 \cdot \mathcal{E}v_1 = S_2 \cdot \mathcal{E}v_2$$

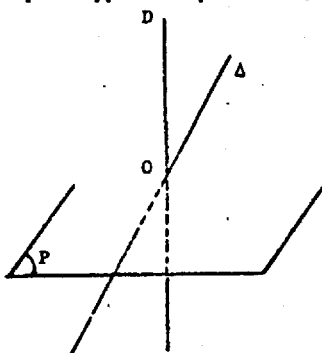
il vient

$$S_2 \cdot S_1 = \mathcal{E}v_2 - v_1$$

Ce qui montre que $v_2 - v_1$ est orthogonal à la direction commune des plans P_2 et P_1 d'où $v_2 - v_1 = 0$ et $S_2 = S_1$.

11 - ETUDE DU CAS OU LA TRANSFORMATION ORTHOGONALE ASSOCIEE EST UN PRODUIT DE TROIS SYMETRIES VECTORIELLES PLANES.

Lemme - Le produit d'une rotation d'axe Δ et d'une symétrie par rapport au plan P , se ramène de manière unique (sauf dans un seul cas) à celui d'une rotation d'axe Δ' et d'une symétrie par rapport au plan P' ; P' et Δ' étant orthogonaux.



Soit $O = \Delta \cap P$ (le cas où Δ et P sont sans point commun n'est pas à considérer ici). S_P est la symétrie par rapport au plan P . S_O la symétrie centrale, (D) la rotation involutive d'axe R la rotation d'axe Δ , d'angle θ . D désigne la droite orthogonale à P au point O . On peut écrire $S_P = S_O \cdot (D)$

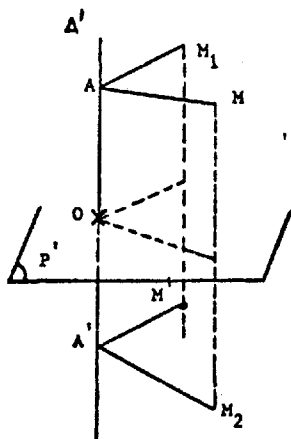
$R \cdot S_P = R \cdot S_O \cdot (D) = R \cdot (D) \cdot S_O = R' \cdot S_O$ où R' est une rotation dont l'axe Δ' passe par O .

On a $S_O = (\Delta') \cdot S_{P'}$, P' désignant le plan orthogonal à la droite Δ' et passant par O .

$R \cdot S_P = R' \cdot (\Delta') \cdot S_{P'} = R_1 \cdot S_{P'}$ où R_1 est une rotation dont l'axe est Δ' .

Montrons que cette dernière forme est commutative

$$R_1 \circ S_{P'} = S_{P'} \circ R_1$$



$$\text{si } U \in E \quad U = V + W \quad V \in \overline{\Delta'} \quad W \in \overline{P'}$$

$$\overline{R_1}(U) = V + R_1(W)$$

$$\overline{S_{P'}}(R_1(U)) = -V + R_1(W)$$

$$\overline{S_{P'}}(U) = -V + W$$

$$\overline{R_1}(\overline{S_{P'}}(U)) = -V + R_1(W)$$

donc $\overline{R_1} \circ \overline{S_{P'}} = \overline{S_{P'}} \circ \overline{R_1}$, et comme de plus il est facile de vérifier, en prenant un point A quelconque sur Δ' et son image A' dans $S_{P'}$, que $S_{P'} \circ R_1$ et $R_1 \circ S_{P'}$ ont AA' pour couple homologue commun, on peut conclure à l'égalité

$$S_{P'} \circ R_1 = R_1 \circ S_{P'}$$

Nous n'aborderons pas ici le problème de l'unicité de cette réduction mais remarquons que dans le cas du produit $(D) \downarrow S_P$ avec D et P orthogonaux il n'y a pas unicité.

ETUDE DU CAS GENERAL

g est défini par le produit $\overline{g}$ de trois symétries vectorielles par rapport aux plans $\overline{P_1} \overline{P_2} \overline{P_3}$ et par le couple homologue AA' . $P_1 P_2 P_3$ seront trois plans passant par A' de directions respectives $\overline{P_1} \overline{P_2} \overline{P_3}$; on peut écrire alors

$$g = S_{P_1} \circ S_{P_2} \circ S_{P_3} \circ \overline{AA'}$$

$g = R \circ S_P \circ \overline{AA'}$, où l'axe de R est orthogonal au plan P de la symétrie.

$$\text{On écrit } \overline{AA'} = V + W \quad V \in \overline{D} \quad W \in \overline{P}$$

$$R \circ S_P \circ \overline{AA'} = R \circ S_P \circ \overline{V} \circ \overline{W} = R \circ S_{P'} \circ \overline{W} = R \circ \overline{W} \circ S_{P'}$$

où P' est un plan parallèle au plan P; $R \circ \overline{W} = R'$

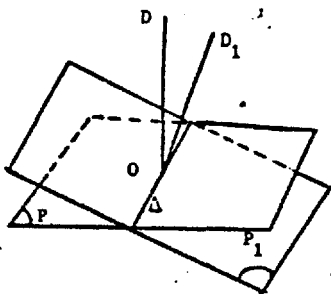
R' étant une rotation dont l'axe Δ' est parallèle à celui de la rotation R.

$$g = S_{P_1} \circ S_{P_2} \circ S_{P_3} \circ \overline{AA'} = S_{P'} \circ R' = R' \circ S_{P'}$$

O étant le point d'intersection de l'axe Δ' et du plan P' ,

O est un point invariant par g et c'est le seul point invariant

ETUDIONS MAINTENANT L'UNICITE DE CETTE REDUCTION.



si $g = R \circ S = R_1 \circ S_1$ les deux axes D et D_1

so orthogonaux aux deux plans P et P_1

D et D_1 se coupent au point O seul point

invariant par g . On pose $\Delta = P \cap P_1$

Δ est orthogonale au plan (D, D_1)

$$R \circ S = R_1 \circ S_1 \Rightarrow R \circ (D) \circ S_0 = R_1 \circ (D_1) \circ S_0$$

$$\text{Si } R \neq (D) \quad R \circ (D) \neq \mathcal{I}$$

$R \circ (D) = R_1 \circ (D_1)$ ces deux rotations sont
égales et ont donc le même axe $D = D_1 \Rightarrow S = S_1 \Rightarrow R = R_1$

$$\text{Si } R = (D) \quad S_0 = R_1 \circ (D_1) \circ S_0 \quad R_1 \circ (D_1) = \mathcal{I} \quad R_1 = (D_1)$$

la décomposition n'est pas unique.

CONCLUSION :

Tout antidéplacement de $\mathcal{G}$ dont le support vectoriel est une transformation orthogonale admettant O pour seul vecteur invariant, admet un point double unique et est le produit commutatif d'une rotation et d'une symétrie l'axe de la rotation étant orthogonal au plan de la symétrie. Sauf dans le cas d'une symétrie centrale cette dernière forme est unique.

CALCUL D'INTEGRALES

PAR RENE CARMONA

IREM D'AIX-MARSEILLE

Le groupe d'analyse de l'I.R.F.M. s'est posé le problème de l'amélioration de l'enseignement de l'Analyse dans le 2^o cycle. Le texte qui suit émane du sous-groupe chargé plus spécialement de l'intégration. C'est un document de réflexion scientifique qui n'est en aucune façon destiné à une application pédagogique immédiate. Il s'est agi essentiellement d'examiner si la notion d'intégrabilité n'est pas plus facile à exposer pour d'autres classes de fonctions que les fonctions continues et à regrouper autour de la formule d'intégration par parties les démonstrations de certains algorithmes de calculs numériques d'intégrales définies.

1 - INTEGRABILITE DES FONCTIONS LIPSCHITZIENNES.

Il est mal aisé de démontrer qu'une fonction f réelle, continue sur un intervalle fermé borné $[a,b]$ y est intégrable. Nous commençons par donner cette démonstration dans un cas particulier, celui où la fonction f est Lipschitzienne :

f est dite Lipschitzienne sur $[a,b]$ si il existe une constante $k > 0$ telle que pour tout $x \in [a,b]$ et pour tout $y \in [a,b]$ on ait :

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$$

Notons au passage que le théorème des accroissements finis nous permet d'affirmer que les fonctions réelles dérivables sur $[a,b]$ dont la dérivée est continue sur $[a,b]$, ou plus généralement, les fonctions continues sur $[a,b]$, dérivables sur $]a,b[$ dont la dérivée est bornée sur $]a,b[$, sont Lipschitziennes sur $[a,b]$, la constante k pouvant être prise supérieure ou égale à :

$$\sup_{x \in]a,b[} |f'(x)| \quad (1.1)$$

Ceci prouve que l'hypothèse de Lipschitz n'est pas trop restrictive puisque cette hypothèse sera vérifiée par la majorité des fonctions étudiées en classe de terminale et en 1^o cycle de l'enseignement supérieur.

Il n'est pas difficile de démontrer (et nous supposeron dans le cadre de cet exposé, qu'une telle démonstration est déjà faite) que toute fonction Lipschitzienne sur $[a,b]$ est continue, et même uniformément continue sur $[a,b]$, qu'elle y est bornée et qu'elle y atteint ses bornes.

Soit $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ une subdivision de $[a,b]$ (ie: $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$) et posons :

$$I_j = [x_{j-1}, x_j] \quad j = 1, 2, \dots, n$$

f est bornée et atteint ses bornes sur I_j pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$ par conséquent, pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$ il existe $m_j \in I_j$ et $M_j \in I_j$ tels que :

$$f(m_j) = \inf_{x \in I_j} f(x) \quad (1.2)$$

et :

$$f(M_j) = \sup_{x \in I_j} f(x) \quad (1.3)$$

Posons :

$$f_m = \sum_{j=1}^n f(m_j) \chi_{[x_{j-1}, x_j]} \quad (1.4)$$

et :

$$f_M = \sum_{j=1}^n f(M_j) \chi_{[x_{j-1}, x_j]} \quad (1.5)$$

où, pour tout ensemble A , χ_A désigne la fonction caractéristique de A :

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases} .$$

f_m et f_M étant des fonctions en escaliers, leurs intégrales $\mathcal{J}(f_m)$ et $\mathcal{J}(f_M)$ sont définies et valent :

$$\mathcal{J}(f_m) = \sum_{j=1}^n (x_j - x_{j-1}) f(m_j) ,$$

$$\mathcal{J}(f_M) = \sum_{j=1}^n (x_j - x_{j-1}) f(M_j) .$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} |\mathcal{J}(f_m) - \mathcal{J}(f_M)| &= \mathcal{J}(f_M) - \mathcal{J}(f_m) \\ &= \sum_{j=1}^n (x_j - x_{j-1}) (f(M_j) - f(m_j)) \\ &\leq \sum_{j=1}^n k (x_j - x_{j-1})^2 . \end{aligned}$$

Remarquons que dans le cas où la subdivision est "régulière", c'est-à-dire constituée par les points d'un partage de l'intervalle $[a, b]$ en n sous intervalles de longueurs égales :

$$x_j = a + j \frac{b-a}{n} \quad j = 0, 1, \dots, n \quad (1.6)$$

nous avons :

$$x_j - x_{j-1} = \frac{b-a}{n} \quad j = 1, \dots, n$$

et l'estimation ci-dessus devient alors :

$$0 \leq \mathcal{J}(f_M) - \mathcal{J}(f_m) \leq k \frac{(b-a)^2}{n} \quad (1.7)$$

Venons en maintenant à la démonstration proprement dite de l'intégrabilité, soit U (resp L) la borne inférieure (resp. supérieure) des nombres $\mathcal{J}(g)$ pour g fonction en escalier majorant (resp. minorant) f sur $[a, b]$; nous avons toujours :

$$L \leq U ,$$

et démontrer que f est intégrable c'est démontrer qu'en fait :

$$L = U \quad .$$

Pour cela nous allons démontrer que pour tout

$\epsilon > 0$:

$$U - L < \epsilon \quad .$$

Fixons $\epsilon > 0$ et soit $n = n(\epsilon)$ un entier tel que :

$$n > k \frac{(b-a)^2}{\epsilon} \quad (1.8)$$

soient f_m et f_M les fonctions définies par les formules (1.4) et (1.5) et la subdivision régulière (1.6) construite à partir de l'entier n obtenu ci-dessus : f_m est une fonction en escaliers, qui, d'après (1.2), minore f sur $[a, b]$ et donc

$$J(f_m) \leq L \quad ,$$

et f_M est une fonction en escaliers qui, d'après (1.3), majore f sur $[a, b]$ et donc :

$$U \leq J(f_M) \quad .$$

Nous avons donc :

$$\begin{aligned} U - L &\leq J(f_M) - J(f_m) \\ &\leq k \frac{(b-a)^2}{n} \end{aligned} \quad (\text{à cause de (1.7)})$$

$$< \epsilon \quad . \quad (\text{à cause de (1.8)})$$

Soit maintenant $\{\xi_j; j=1, \dots, n\}$ des points de $[a, b]$ tels que :

$$\xi_j \in I_j \quad , \quad j = 1, \dots, n,$$

et étudions la quantité :

$$S = \sum_{j=1}^n (x_j - x_{j-1}) f(\xi_j) \quad .$$

Puisque nous avons démontré que f était intégrable, notons J son intégrale sur $[a,b]$; en fait :

$$J = U = L .$$

De par la définition de f_m et f_M nous avons :

$$J(f_m) \leq S \leq J(f_M) ,$$

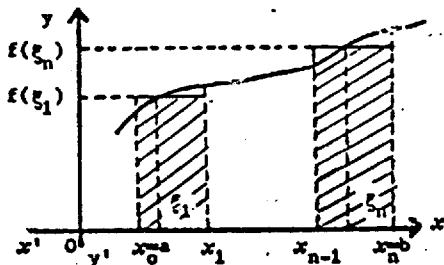
(puisque pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, $f(m_j) \leq f(\xi_j) \leq f(M_j)$)
et par conséquent :

$$|J - S| < \epsilon .$$

Ceci signifie que la quantité S , appelée somme de Riemann associée à la subdivision $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ et à la suite de points $\{\xi_j; j=1, \dots, n\}$, est une valeur approchée de J à ϵ près. Nous tenons donc là un algorithme de calcul qui nous fournit un exercice de programmation :

- étant donné f et $[a,b]$ on évalue k (hors programme) par (1.1).
- étant donné la précision ϵ voulue on détermine n par la formule (1.8) puis on choisit les points ξ_j dans la subdivision donnée par (1.6) et on calcule S qui nous fournit une valeur approchée de J à ϵ près (ceci n'est pas vrai en réalité car on ne tient pas compte, volontairement, des erreurs commises pour l'évaluation des $f(\xi_j)$ et de la propagation de ces erreurs).

REMARQUE : cette méthode de calcul peut être appelée méthode des rectangles : en effet remplacer le calcul de J par le calcul de S c'est en fait remplacer le calcul de l'aire comprise entre la courbe, l'axe des x et les verticales d'équations $x = a$ et $x = b$, par le calcul de la somme des aires des rectangles hachurés ci-contre.



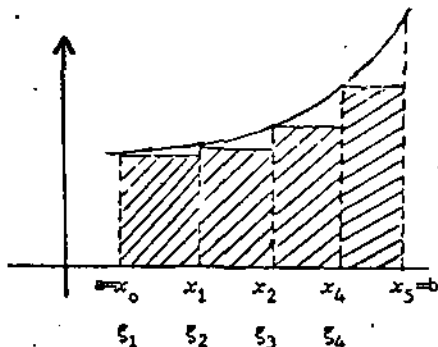
Considérons maintenant une subdivision régulière $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ de $[a, b]$ et choisissons pour ξ_j les extrémités gauches des intervalles I_j

(ie: $\xi_j = x_{j-1}$, $j=1, \dots, n$).
Nous obtenons la somme de Riemann :

$$S_g = \sum_{j=1}^n (x_j - x_{j-1}) f(x_{j-1})$$

$$= \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^n f(x_{j-1})$$

qui correspond à l'aire hachurée ci-contre.



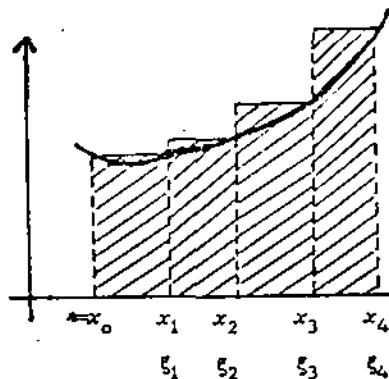
Prenons maintenant pour ξ_j les extrémités droites des intervalles I_j

(ie: $\xi_j = x_j$, $j=1, \dots, n$).
Nous obtenons la somme de Riemann :

$$S_d = \sum_{j=1}^n (x_j - x_{j-1}) f(x_j)$$

$$= \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^n f(x_j)$$

qui correspond à l'aire hachurée ci-contre.



S_g et S_d sont des valeurs approchées de $\int_a^b f(x) dx$ à $k \frac{(b-a)^2}{n}$ près, par conséquent, leur demi-somme :

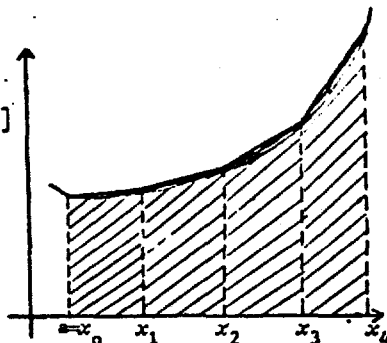
$$T = \frac{1}{2} (S_g + S_d),$$

est aussi une valeur approchée de $\int_a^b f(x) dx$ à $k \frac{(b-a)^2}{n}$ près.

Remarquons que :

$$T = \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} (x_j - x_{j-1}) [f(x_j) + f(x_{j-1})]$$

correspond non plus à une somme d'aires de rectangles mais à la somme des aires de trapèzes hachurés ci-contre.



Remplacer le calcul $\bar{J}$ par celui de T s'appelle utiliser la méthode des trapèzes.

Bien qu'elle soit plus suggestive, cette méthode de présentation de la méthode des trapèzes n'est pas efficace car l'estimation de l'erreur est grossière. Nous verrons au paragraphe suivant comment on peut retrouver la méthode des trapèzes avec une bien meilleure estimation de l'erreur.

$$T = \frac{b-a}{2n} [f(a) + 2f(a + \frac{b-a}{n}) + \dots + 2f(a + (n-1) \frac{b-a}{n}) + f(b)]$$

est la formule que l'on obtient en utilisant le fait que la subdivision est régulière.

2 - UTILISATION DE LA FORMULE D'INTEGRATION PAR PARTIES.

Le problème est toujours le même (calculer l'intégrale d'une fonction f sur un intervalle fermé borné $[a, b]$) mais nous supposons que f est deux fois dérivable sur $[a, b]$ et que sa dérivée seconde y est continue.

Choisissons deux constantes k_1 et k_2 telles que :

$$k_1 \geq \sup_{x \in [a, b]} |f'(x)|, \quad (2.1)$$

et :

$$k_2 \geq \sup_{x \in [a, b]} |f''(x)|. \quad (2.3)$$

Pour fixer les notations nous considérons une subdivision $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ de $[a, b]$; nous la supposons régulière, non pas parce que ce que nous dirons n'est vrai que dans ce cas, mais uniquement pour alléger l'écriture des formules afin qu'elles puissent être comparées plus facilement. Nous calculerons l'intégrale de f sur $[a, b]$ en utilisant la formule :

$$\int_a^b f(t) dt = \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(t) dt, \quad (2.3)$$

et en évaluant chacune des intégrales du membre de droite de (2.3) par une ou plusieurs intégrations par parties

2.1.

$$\int_a^\beta f(t) dt = [(t+k)f(t)]_a^\beta - \int_a^\beta (t+k)f'(t) dt \quad (2.4)$$

k étant une constante dont nous avons le choix; prenons pour commencer $k = -\alpha$:

$$\int_a^\beta f(t) dt = (\beta - \alpha)f(\beta) - \int_a^\beta (t - \alpha)f'(t) dt, \quad (2.5)$$

remplaçons α par x_{j-1} , β par x_j et reportons (2.5) en (2.3). Nous obtenons :

$$\int_a^b f(t) dt = \sum_{j=1}^n (x_j - x_{j-1})f(x_j) - \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} (t - x_{j-1})f'(t) dt$$

Prendre pour valeur approchée de :

$$J = \int_a^b f(t) dt,$$

la valeur du premier $\sum$ c'est en fait utiliser une formule des rectangles puisque ce $\sum$ n'est rien d'autre que la somme de Riemann S_d déjà rencontrée. Mais ici nous avons une formule exacte qui nous donne une valeur exacte (c'est le deuxième $\sum$) de l'erreur commise en faisant cette approximation = essayons de majorer cette erreur :

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} (t-x_{j-1}) f'(t) dt \right| &\leq \sum_{j=1}^n \left| \int_{x_{j-1}}^{x_j} (t-x_{j-1}) f'(t) dt \right| \\
&\leq \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} (t-x_{j-1}) |f'(t)| dt \\
&\leq k_1 \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} (t-x_{j-1}) dt \\
&\leq k_1 \sum_{j=1}^n \left[\frac{1}{2} (t-x_{j-1})^2 \right]_{x_{j-1}}^{x_j} \\
&\leq \frac{k_1}{2} \sum_{j=1}^n (x_j - x_{j-1})^2 \\
&= \frac{(b-a)^2}{2n} k_1 \quad (2.6)
\end{aligned}$$

La majoration de l'erreur est plus fine ici : nous avons "gagné" un coefficient un demi. Essayons de justifier ce gain sur un exemple.

soit à calculer $\int_0^1 e^{-t^2} dt$ à 10^{-3} près.

avec la formule d'erreur du §1 nous devons prendre

$$n \geq \frac{k_1(b-a)^2}{\epsilon} = \frac{10^3}{4} = 250$$

en prenant :

$$k_1 = \frac{1}{4} \geq \frac{\sqrt{2}}{e} = \sup_{x \in [0,1]} |-2t e^{-t^2}|$$

Pour évaluer l'intégrale à 10^{-3} près il nous faut donc partager l'intervalle en 250 sous intervalles de longueurs égales : nous aurons à évaluer 251 fois la fonction e^{-t^2} , sommer les valeurs obtenues et diviser par 250. Par contre si nous utilisons l'estimation du reste obtenue dans ce paragraphe nous devons prendre :

$$n \geq \frac{k_1(b-a)^2}{2 \epsilon} = 125.$$

Il nous suffit d'évaluer 126 fois e^{-t^2} aux points de la subdivision régulière $(x_0, x_1, \dots, x_{125}) \dots$.

Le gain est énorme, pour un simple petit coefficient 2, d'où : la majoration de l'erreur commise doit être faite avec le plus grand soin.

Terminons cette première partie en remarquant sans démonstration que si nous choisissons $k = -\beta$ dans la formule (2.4), si nous remplaçons ensuite α par x_{j-1} et β par x_j et si nous reportons le tout dans (2.3) nous obtenons la formule des rectangles correspondant à la somme de Riemann S_B et un calcul analogue au précédent montre que l'erreur commise est à nouveau majorée par (2.6)

2.2.

Nous utilisons maintenant deux intégrations par parties successives :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = [(t+k)f(t)]_{\alpha}^{\beta} - \left[\left(\frac{1}{2}t^2 + kt + k' \right) f'(t) \right]_{\alpha}^{\beta} + \int_{\alpha}^{\beta} \left(\frac{1}{2}t^2 + kt + k' \right) f''(t) dt \quad (2)$$

et nous choisissons les constantes k et k' de telle sorte que le deuxième terme tout intégré soit nul de façon à ce que seul le premier terme tout intégré intervienne dans la formule de calcul approché et seule l'intégrale intervienne dans l'erreur commise.

$$\left[\left(\frac{1}{2} t^2 + kt + k' \right) f'(t) \right]_{\alpha}^{\beta} = 0 \text{ quelle que soit la fonction } f$$

si on choisit :

$$k = -\frac{\alpha + \beta}{2} \text{ et } k' = \frac{\alpha\beta}{2}.$$

La formule (2.7) devient alors

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = \left[\left(t - \frac{\alpha + \beta}{2} \right) f(t) \right]_{\alpha}^{\beta} + \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (t^2 - (\alpha + \beta)t + \alpha\beta) f''(t) dt$$

ou encore :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = \frac{1}{2} (\beta - \alpha) [f(\beta) + f(\alpha)] + \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [t^2 - (\alpha + \beta)t + \alpha\beta] f''(t) dt \quad (2.8)$$

Dans la formule (2.8) ci-dessus remplaçons α par x_{j-1} , β par x_j et reportons le résultat obtenu dans la formule (2.3); nous obtenons :

$$\int_a^b f(t) dt = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (x_j - x_{j-1}) [f(x_{j-1}) + f(x_j)] + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} [t^2 - (x_{j-1} + x_j)t + x_{j-1}x_j] f''(t) dt$$

Nous avons ainsi retrouvé la formule des trapèzes mais à nouveau notre formule nous donne la valeur exacte de l'erreur commise : voyons s'il n'est pas possible de majorer cette erreur de façon à avoir une majoration plus fine qu'au paragraphe 1.

$$\left| \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} [t^2 - (x_{j-1} + x_j)t + x_{j-1}x_j] f''(t) dt \right| \leq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} |f''(t)| dt$$

$$\leq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} |f''(t)| dt$$

$$\leq \frac{k_2}{2} \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} |dt|$$

$$\begin{aligned}
\int_{x_{j-1}}^{x_j} |dt| &= \int_{x_{j-1}}^{x_j} |(t-x_{j-1})(t-x_j)| dt \\
&= - \int_{x_{j-1}}^{x_j} (x_{j-1})(t-x_j) dt \\
&= - \left[\frac{1}{3} t^3 - \frac{1}{2} (x_{j-1}+x_j) t^2 + x_{j-1} x_j t \right]_{x_{j-1}}^{x_j} \\
&= \frac{1}{6} [x_j - x_{j-1}]^3
\end{aligned}$$

Donc finalement l'erreur est majorée par

$$\frac{k_2}{2} \sum_{j=1}^n \frac{1}{6} [x_j - x_{j-1}]^3 = \frac{k_2}{12} \frac{(b-a)^3}{n^2}$$

Revenons à l'exemple du calcul de $\int_0^1 e^{-t^2} dt$ (on prendra $k_2 = 1$ qui est le sup sur $[0,1]$ de la dérivée seconde de l'intégrande); avec la formule d'erreur ci-dessus, puisque $b-a = 1$ vouloir une erreur inférieure à 10^{-3} c'est vouloir

$$\frac{1}{12 n^2} \leq 10^{-3} \quad \text{soit } n \geq \sqrt{\frac{1000}{12}}$$

$n = 10$ suffit pour avoir une erreur inférieure à 10^{-3} alors qu'avec la majoration du §1 on aurait besoin, toujours pour la formule des trapèzes de $n = 250$.

Nombre de méthodes de calcul approché d'intégrales définies sont des méthodes d'interpolation.

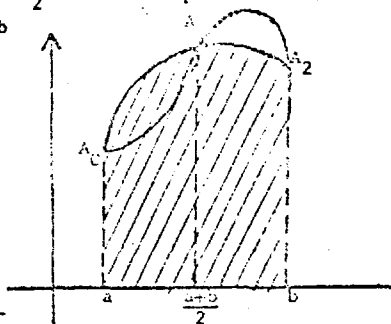
Pour évaluer $\int_a^b f(x)dx$, on fait passer une courbe parabolique d'ordre k par $(k+1)$ points $A_0, A_1, \dots, A_k$, pris sur la courbe d'équation $y=f(x)$ entre les deux points d'abscisses a et b . Si $y=P(x)=a_0+a_1x+\dots+a_kx^k$ est l'équation de cette courbe parabolique, $\int_a^b P(x)dx$ sera donc considérée comme une valeur approchée de l'intégrale à évaluer.

La méthode des trapèzes, par exemple, entre dans ce cadre, l'ordre d'interpolation étant $k=1$ et les points A_0 et A_1 étant les points d'abscisses respectives a et b .

De même la méthode de SIMPSON est obtenue en prenant $k=2$, les points A_0, A_1 et A_2 étant les points d'abscisses respectives $a, \frac{a+b}{2}$, et b

(Fig. ci-contre). Cette méthode donne en général une bien meilleure approximation que celles précédemment citées, comme le montre le calcul d'erreur ci-après.

Il faut aussi signaler qu'un choix différent des points d'interpolation (points non nécessairement équirépartis) donne lieu à des méthodes plus fines (ex. : méthode de GAUSS).



Voici comment obtenir la méthode de SIMPSON, ainsi qu'une majoration de l'erreur commise, uniquement par des procédés d'intégration par parties, moyennant quelques hypothèses sur f .

On suppose que f est continu et dérivable au 4ème ordre sur $[a, b]$ et que sa dérivée 4ème y est continue.

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(t)dt + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(t)dt$$

on considère $\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(t)dt = \int_a^{\frac{a+b}{2}} P^{(4)}(t)f(t)dt$
où $P^{(4)}$ est la dérivée quatrième d'un polynôme P de degré 4 dont le coefficient de tête est $\frac{1}{4!}$

en intégrant 4 fois par parties, il vient :

$$(1) \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(t)dt = \left[P'''(t)f(t) - P''(t)f'(t) + P'(t)f''(t) - P(t)f'''(t) \right]_a^{\frac{a+b}{2}} + \int_a^{\frac{a+b}{2}} P(t)f^{(4)}(t)dt$$

de plus $\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(t)dt = \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(b+a-t)dt$ en appliquant

(1) à la fonction $g : t \mapsto f(b+a-t)$ on obtient :

$$(2) \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(t)dt = \int_a^{\frac{a+b}{2}} g(t)dt = \left[P'''(t)g(t) - P''(t)g'(t) + P'(t)g''(t) - P(t)g'''(t) \right]_a^{\frac{a+b}{2}} + \int_a^{\frac{a+b}{2}} P(t)g^{(4)}(t)dt$$

en remarquant que :

$$g\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) ; g(a) = f(b)$$

$$g'\left(\frac{a+b}{2}\right) = -f'\left(\frac{a+b}{2}\right) ; g'(a) = -f'(b)$$

$$g''\left(\frac{a+b}{2}\right) = f''\left(\frac{a+b}{2}\right) ; g''(a) = f''(b)$$

$$g'''\left(\frac{a+b}{2}\right) = -f'''\left(\frac{a+b}{2}\right) ; g'''(a) = -f'''(b)$$

$$\text{on obtient : } \int_a^b f(t) dt = \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(t) dt + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(t) dt =$$

$$P'''(\frac{a+b}{2})f(\frac{a+b}{2}) + 2 P'(\frac{a+b}{2})f''(\frac{a+b}{2}) - P'''(a)(f(a)+f(b)) + P''(a)(f'(a)-f'(b)) - P'(a)(f''(a) + f''(b)) + P(a)(f'''(a)-f'''(b)) + R \quad (3)$$

$$\text{en posant } R = \int_a^{\frac{a+b}{2}} P(t)(f(t)+f(a+b-t)) dt$$

on fait en sorte d'éliminer les termes faisant intervenir des dérivées de f . Il suffit de choisir P tel que :

$$P(a) = P'(a) = P''(a) = 0$$

et

$$P'(\frac{a+b}{2}) = 0$$

donc $P(t) = \frac{1}{4!} (t-a)^3(t-\lambda)$ où λ est déterminé par la condition $P'(\frac{a+b}{2}) = 0$

$$P'(t) = \frac{1}{4!} [3(t-a)^2(t-\lambda) + (t-a)^3] = (t-a)^2 [4t - 3\lambda - a]$$

il suffit donc de choisir :

$$\lambda = \frac{a+2b}{3}$$

$$\text{alors } P''(t) = \frac{1}{4!} [4(t-a)(3t-2a-b)]$$

$$\text{et } P'''(t) = \frac{1}{4!} [24t - 20a - 4b]$$

$$\text{Par suite } P'''(\frac{a+b}{2}) = \frac{b-a}{3} \quad \text{et} \quad P'''(a) = \frac{a-b}{6}$$

la relation (3) donne alors

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t) dt &= 2 \frac{b-a}{3} f(\frac{a+b}{2}) + \frac{b-a}{6} (f(a)+f(b)) + R \\ &= \frac{b-a}{6} [f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)] + R \end{aligned}$$

majoration de $|R|$

$$|R| = \left| \frac{1}{4!} \int_a^{\frac{a+b}{2}} (t-a)^3 (t - \frac{2b+a}{3}) (f^{(4)}(t) + f^{(4)}(a+b-t)) dt \right|$$

en remarquant que $\forall t \in [a, \frac{a+b}{2}] \quad (t-a)^3 (t - \frac{2b+a}{3}) \leq 0$

on obtient la majoration suivante :

$$|R| \leq \frac{1}{4!} \cdot 2 \|f^{(4)}\|_{\infty} \cdot \int_a^{\frac{a+b}{2}} (t-a)^3 (\frac{2b+a}{3} - t) dt$$

$$\begin{aligned} \text{or } \int_a^{\frac{a+b}{2}} (t-a)^3 \left(\frac{2b+a}{3} - t\right) dt &= \left[\frac{1}{4} (t-a)^4 \left(\frac{2b+a}{3} - t\right) \right]_a^{\frac{a+b}{2}} + \frac{1}{4} \int_a^{\frac{a+b}{2}} (t-a)^4 dt \\ &= \frac{1}{4} \left[(t-a)^4 \left(\frac{2b+a}{3} - t\right) + \frac{(t-a)^5}{5} \right]_a^{\frac{a+b}{2}} \\ &= \frac{1}{4} \left[\left(\frac{b-a}{2}\right)^4 \left(\frac{b-a}{6}\right) + \frac{1}{5} \left(\frac{b-a}{2}\right)^5 \right] = \frac{(b-a)^5}{240} \end{aligned}$$

d'où

$$|R| \leq \left(\frac{b-a}{2880}\right)^5 \|f^{(4)}\|_{\infty}$$

Si on divise l'intervalle $[a, b]$ en n intervalles réguliers et si l'on applique la méthode précédente à chacun de ces n intervalles, on obtient :

$$\int_a^b f(t) dt = \left(\frac{b-a}{6n}\right) \left[4\left(f_{\frac{1}{2}} + f_{\frac{3}{2}} + \dots + f_{\frac{2n-1}{2}}\right) + 2(f_1 + f_2 + \dots + f_{n-1}) + (f_0 + f_n) \right] + R$$

$$\text{avec } \forall i \in \{0, 1, \dots, n\} \quad f_i = f(x_i) = f\left(a + i \frac{b-a}{n}\right)$$

$$\forall i \in \{1, 3, \dots, 2n-1\} \quad f_{\frac{i}{2}} = f\left(x_{\frac{i}{2}}\right) = f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right)$$

$$\text{de plus } |R| \leq \left(\frac{b-a}{4}\right)^5 \cdot \frac{1}{2880} \|f^{(4)}\|_{\infty}$$

SUR LA SOUS-EVALUATION DE L'EVALUATION

Jean MARION - I.R.E.M. d'Aix-Marseille

Le 3ème Congrès International sur l'Enseignement des Mathématiques organisé par la Commission Internationale sur l'Enseignement des Mathématiques (C.I.E.M.) sous le patronnage de l'U.N.E.S.C.O. se tiendra à KARLSRUHE en Août 1976. Grâce à l'action de A. REVUZ les I.R.E.M. ont pu organiser leur participation à ce congrès; dans la liste des groupes de travail du congrès, figure le groupe catalogué B_2 : " Methods and results of evaluation with respect to mathematics teaching ", le rapporteur national de ce groupe n'étant autre que notre collègue P. BUISSON, Directeur de l'I.R.E.M. de ROUEN. Il n'est pas douteux que parmi les différents thèmes abordés par la C.I.E.M., celui du groupe B_2 est celui qui, potentiellement, a le contenu le plus explosif : comment éviter d'aborder franchement le problème plus général de la place de l'évaluation sommatoire dans les systèmes éducatifs, telle doit probablement être la préoccupation dominante du rapporteur international (KILL PATRICK) du groupe B_2 .

Pour le mathématicien, le technicien naïf, faire de "l'évaluation" c'est tester, puis analyser les données de ces tests et des correspondances, chiffrer certaines informations; à cette fin il dispose d'un outil mathématique actuellement considéré comme essentiel : l'analyse factorielle, et c'est la raison pour laquelle, avec les experts en Sciences Psycho-pédagogiques, les (ou du moins certains) enseignants en mathématiques plus que ceux des autres disciplines s'interrogent de plus en plus sur le rôle de l'évaluation. En effet, le problème n'est pas réductible à des techniques. Pour essayer de faire comprendre ce que je veux dire, je dirais que si vous me demandez ce qu'on entend par "évaluation" je ne vous donnerai une réponse opératoire que si vous me précisez d'abord qu'est-ce que vous voulez évaluer et pourquoi vous voulez le faire! De plus si vous interrogez un groupe de personnes même supposées connaissant le sujet, vous n'aurez certainement pas unicité dans le contenu des réponses... mais vous aurez l'existence, car l'évaluation existe, et pas seulement quand vous "corrigez" des copies :

a) quand vous posez des questions :

- en début d'un cours pour juger si les prérequis indispensables pour atteindre les objectifs de ce cours sont bien acquis,
- tout au long du déroulement de la séquence afin de catalyser les démarches mentales de l'élève et de vous assurer de la compréhension au fur et à mesure du nouveau concept introduit, de l'algorithme établi, etc,
- en fin de séance pour voir si l'objectif fixe est atteint, pour voir si l'élève est opératoire pour cet objectif, etc : vous évaluez (évaluation formative)

b) quand vous :

- soumettez vos élèves à des exercices de contrôle, des tests, des "compositions",
- participez à un jury d'examen,
- participez à un conseil de classe ou d'orientation : vous évaluez (évaluation sommatoire, ou normative). Mais vous évaluez quoi? qui?

Si l'évaluation formative soulève relativement peu de polémiques il n'en va pas de même de l'évaluation normative ou sommatoire. Quand on note telle copie de tel candidat au baccalauréat qu'a "évalué" cette note exactement? Ça peut être :

- la qualité de la question posée et du fabricant de la question,
- la qualité de l'orientation antérieure du candidat,
- la qualité de son professeur,
- l'environnement social ou culturel du candidat,
- l'adaptation du système éducatif,
- l'état de santé du correcteur,
- etc, etc, etc.

Dans le volume de ses tâches la fonction d'évaluateur de l'enseignant a une place extrêmement importante et se retombees pour le devenir des élèves encore plus importantes. Paradoxalement, dans les cadres actuels de la formation des enseignants, on n'y prépare pas; dans le meilleur des cas, on parle un peu du bout des lèvres des problèmes de la notation; c'est vrai qu'il y a quelques années des voix se sont élevées pour condamner, étudées à l'appui, le dogme de l'infailibilité docimologique; y a-t-il eu des retombees réelles? Toute évaluation sommatoire ne doit elle pas intervenir qu'après qu'aient été établies des classifications respectant un arrangement

hiérarchique des niveaux d'activité, et si oui, suivant quels critères de hiérarchisation? (taxonomies). De tels problèmes sont-ils abordés de manière sérieuse par exemple dans les C.P.R.?

Les problèmes liés à l'évaluation dans l'enseigner dépassant largement le cadre des mathématiques, mais les enseignants de cette discipline y ont une responsabilité particulière, dans la mesure où :

- a) les mathématiques sont actuellement la discipline déterminante pour décider de l'orientation, voire de la sélection dans le secondaire.
- b) les mathématiques fournissent ou prétendent apporter les outils scientifiques (donc sérieux et irréfutablement objectifs!!) pour faire de l'évaluation.

Nous espérons que ces quelques réflexions auront un effet sensibilisateur sur l'importance des problèmes de l'évaluation, sur la part que chacun de nous y consacre, sur les moyens et outils qu'il possède pour ce faire, sur la finalité de ce travail d'évaluateur et sur une déontologie de l'évaluation.

* *
*

COMPTE-RENDU DE L'EXPERIENCE INTITULEE

" TEST D'ETUDE D'UN TEST "

par Jean MARION

IREM D'AIX- MARSEILLE

I - LES CONDITIONS DE L'ENQUETE

Dans le précédent bulletin publié par l'I.R.E.M de MARSEILLE, se trouvait encarté un document de deux pages dont le texte était le suivant :

TEST D'ETUDE D'UN TEST

par : Jean MARION

A - LE TEXTE DU TEST :

" 3 personnes de nationalités différentes, exerçant un métier différent, habitent une maison différente, ont un animal différent et habitent chacune une maison de couleur différente. De plus :

- (a) - Les 3 maisons sont alignées ;
- (b) - L'Anglais habite la maison rouge ;
- (c) - On boit du café dans la maison verte ;
- (d) - L'Italien boit du thé ;
- (e) - La maison verte est à côté et à droite de la maison blanche ;
- (f) - Le sculpteur a un archange ;
- (g) - Le diplomate habite la maison jaune ;
- (h) - On boit du lait dans la maison du milieu ;
- (i) - Le Norvégien habite la troisième maison à gauche ;
- (j) - Le médecin habite une maison qui est à côté de celle où est le coiffeur ;
- (k) - La maison jaune est à côté de celle où est le coiffeur ;
- (l) - Le violoniste boit du jus d'orange ;
- (m) - Le Japonais est architecte ;
- (n) - La maison bleue est à côté de celle du Norvégien ;
- (o) - Le chien appartient à l'Espagnol . "

B - QUESTIONS DU TEST :

Le texte ci-dessus vous permet-il de déterminer sans ambiguïté :
qui boit de l'eau ? et qui possède un arche , Qui possède ?

(a) C'est qui boit de l'eau

(b) C'est qui a un arche

C - QUESTIONS SUR LE TEST :

(C-1) : Le texte vous paraît-il surabondant et informatif ?

(C-2) : Si oui, quelle partie du texte pourriez-vous supprimer, qui vous paraît apporter des informations surabondantes ?

.....

(2-c) Le test vous paraît-il en contradiction insuffisante ? ☐

(2-d) Si oui, quelles informations minimales manque-t-il ?

.....

II - QUESTIONNAIRE SUR L'UTILISATION DE CE TEST.

(3-a) Pensez-vous que la demande de ce test à faire par des élèves permette de déceler, à l'examen des réponses aux questions **II**, l'aptitude au raisonnement déductif :

• pour des élèves de 6ème-5ème ?

☐

• pour des élèves de 4ème-3ème ?

☐

• pour des élèves de 2ème ?

☐

• pour des élèves du lycée, terminale ?

☐

(3-b) Pensez-vous plutôt que **II** et **II** devraient être "soumis" aux élèves comme exercices d'application faisant suite à une "initiation au langage de la logique formelle" ?

☐

(3-c) Pensez-vous au contraire que **II** et **II** pourraient être "soumis" aux élèves pour leur mener à déceler le concept de déduction ou d'implication ?

☐

III - SUGGERIONS

Faisons appel à votre bon vouloir dans nous vous remercions par avance, d'avoir voulu répondre de :

(3-1) Répondre aux questions de **II** et de **II** dans un premier temps ;

(3-2) Soumettre ce test à nos élèves, à l'un ou plusieurs de vos classes (préciser ici les classes si vous faites cette expérience à 6ème, 5ème, 4ème...)

(3-3) Répondre ensuite aux questions **II** ;

(3-4) Faire part à l'I.R.E.M. (J.MARION, I.R.E.M. 79, route d'En Luchamp 13009 MARSEILLE), dans une lettre que vous joindrez à ce questionnaire dûment rempli, de vos observations sur le matériel, tout vos élèves ont "appréhendé" ce test ; éventuellement précisez le déroulement de leur parcours et les conditions de l'épreuve (temps limité, etc...)

Un compte-rendu des réponses aura été fait dans un prochain bulletin.

17

Précisons que ce bulletin est en principe adressé à tous les établissements CET, CES, Lycées de l'Académie d'AIX-MARSEILLE. Il était fait appel aux volontaires pour répondre au questionnaire sur un test qui n'avait aucune prétention à la nouveauté mais qui, jusqu'à présent, n'a été proposé à des élèves pendant un cours de mathématique de manière très exceptionnelle. L'invitation qui était faite aux

collègues de renvoyer un dossier-réponses avec lettres circonstanciées demandant un travail non trivial de la part de nos collègues. Aussi si 29 collègues ont répondu par un dossier à cette invitation, ce qui peut sembler peu, nous savons par ailleurs que beaucoup plus ont fait subir le test à leurs élèves. Nous remercions vivement tous les collègues qui ont bien voulu participer à cette enquête.

II - LES OBJECTIFS

Ils étaient de plusieurs ordres et à plusieurs niveaux :

1) Un tel test formulé dans un tel langage donné aux élèves par un professeur de mathématiques pendant des moments habituellement consacrés à des activités mathématiques, met les élèves en face d'une situation, que l'arsenal des réponses (instinctives ou scolairement acquises en mathématiques) dont ils disposent, ne permet pas d'en venir rapidement à bout. Il permet donc, à qui observe l'élève mis en face du problème qui lui est posé, de voir comment cet élève s'adapte à ce problème qui pour lui est de type nouveau.

2) A un moment donné, chaque élève dispose d'un acquis de "souvenirs efficaces" constitués d'un répertoire d'automatismes acquis, d'"îlots" de culture générale, d'un bréviaire de "procédologie" ; les tests traditionnellement soumis aux élèves en mathématiques ne permettent en général d'évaluer que, soit les dimensions du bréviaire de procédologies dans une direction précise, soit les performances algorithmiques ; par son étrangeté ou son exotisme (du point de vue de l'élève) nous pensons que ce test peut permettre d'apprécier les performances heuristiques.

Les questions que l'on peut alors se poser sont les suivantes :

Dans la mesure où une bonne réponse au test ne résulte pas d'une adaptation triviale d'une recette procédologique ou algorithmique maintes fois enseignée, y a-t-il bonne coïncidence pour un niveau donné, entre l'ensemble des élèves ayant donné une bonne réponse

au test, l'ensemble de ceux qui sont considérés comme bons en mathématiques, et l'ensemble de ceux dont on estime qu'ils sont "doués d'esprit logique" ? Les réponses ne sont pas évidentes à donner à priori.

3) L'attitude des collègues face à la logique est assez ambiguë. Du point de vue d'une intelligence artificielle (logique mais bête) il y a à trouver un "état" parmi $[5]^5 = 120^5 = 24.883.200.000$ états possibles. Compte tenu des différentes contraintes que sont les phrases du test, on peut concevoir une programmation donnant la solution, donc bonne du point de vue logique, mais mauvaise d'un point de vue "économique" parce que comportant un grand nombre d'opérations à réaliser. Or les élèves ne cherchent pas une liste plus ou moins exhaustive de toutes les à-priori solutions, mais organisent les démarches d'élimination pour arriver "rapidement" au résultat. Par suite, ce test permet que faiblement d'évaluer des aptitudes à "logiquer" et est peu illustrant des concepts d'implication. Des oui à la question "Pensez-vous que ce test permet d'évaluer l'aptitude à la logique ?" ou à la question : "Pensez-vous que ce test peut-être un "introduceur" aux concepts de déduction, d'implication etc.." mettent en évidence une tendance à croire que la démarche "eurékatique" d'un élève mis en situation de problème est calquée sur celle de l'ordinateur. Les travaux récents en sciences de l'Education, en Didactique montrent clairement que cette tendance est fâcheuse. Il était donc intéressant d'évaluer la proportion de collègues contaminés plus ou moins inconsciemment par cette tendance et de profiter de l'occasion pour les sensibiliser sur ce problème (ce que je suis en train de faire !)

4) Enfin, l'objectif peut-être le plus important, volontairement le moins apparent, mais qui laissait percer le bout de son oreille dans la suggestion (5 - 4) où il était demandé de bien vouloir donner des précisions complémentaires notamment en ce qui concerne

la démarche de recherche des élèves, était de mettre modestement les professeurs dans . . . bain heuristique : combien de collègues répondraient le besoin d'observer et décrire les processus de recherche de leurs élèves sur le "problème" qui leur était soumis ?

III - LES REPONSES AU TEST D'ETUDE (parvenues avant le 27.2.76)

- Nombre de collègues ayant renvoyé à l'IREM le questionnaire après y avoir répondu 29
- Description des classes dans lesquelles a été expérimenté le test :

TYPE	Nombre de classes dans le type
6ème type I	7
6ème type II	2
5ème type I	3
5ème type II	2
4ème type I	2
4ème type II	1
3ème type I	1
3ème type II	0
2ème A,C, AB	7
1re A,B,C,D,E & terminales	6
1re Année de C.A.P	1
2ème Année de C.A.P	0
3ème Année de C.A.P	1
1re Année de B.E.P	3
2ème Année de B.E.P	1

Certains collègues n'ayant pas précisé, soit l'effectif des classes "testées", soit les conditions de l'épreuve (temps limité ou non etc ...) soit le décompte des bonnes réponses, il ne m'est pas possible de fournir des résultats globaux concernant ces différents points.

Je profite de l'occasion, pour remercier tout particulièrement nos collègues du C.E.T 13 0006 -L d'AIX en-PROVENCE dont les comptes-rendus de l'expérience ont été des modèles du genre. Certains collègues m'ont également adressé les copies des élèves ce qui permet dans pas mal de cas de reconstituer le cheminement de leurs recherches.

IV - LES REPONSES A LA PARTIE (2) : "QUESTIONS DU TEST"

Résultats : 26 des 29 collègues répondants donnent les "bonnes" réponses :

- a) le Norvégien boit de l'eau
- b) le Japonais a un zèbre

Les 3 autres collègues estiment que l'énoncé ne précisant pas que l'une des personnes boit de l'eau, et que l'une d'entre-elles possède un zèbre, il ne peut être répondu aux questions.

Commentaires

1) Les 3 collègues ci-dessus, mettent en évidence la difficulté qu'il y a à trouver une formulation ne laissant aucun échappatoire à l'ambiguïté ; il n'en reste pas moins vrai que cela n'a pas empêché les élèves, à quelques exceptions près, de donner une réponse, pensant que si l'on demandait "qui boit de l'eau" ou "qui a un zèbre", c'est que nécessairement il y avait parmi les personnages du test, l'un qui devait boire de l'eau, l'un qui possédait un zèbre.

On rencontre là, une circonstance fréquente à savoir que la formulation même de la question apporte des informations, soit pour palier l'insuffisance de celles apportées par le texte du test, soit pour être plus directif vers la délimitation du domaine de recherche.

2) Aux questions "qui boit de l'eau" ou "qui possède un zèbre" :

* les élèves ont caractérisé diversement les personnes :

- par la nationalité : c'est "le Norvégien qui boit de l'eau"
- par la profession : c'est "l'acrobate qui a un zèbre"
- par la couleur de la maison : c'est "celui qui habite la maison 'aune qui boit de l'eau"

* les collègues ont caractérisé les personnes uniquement par la nationalité :

La caractérisation est donc différemment perçue chez l'enfant et chez l'adulte ; l'analyse des copies des élèves montre que plus le niveau de la classe s'élève, plus les réponses sont données par caractérisation par la nationalité.

V - LES REPONSES A LA PARTIE (3) : "QUESTIONS SUR LE TEST"

Résultats :

- 1 collègue estime qu'il faut supprimer tout le texte qui est totalement inutile ... et lui substituer les 2 réponses !
- 3 autres collègues pensent qu'il y a lieu d'ajouter que l'une des personnes boit de l'eau et que l'une des personnes possède un zèbre.
- les $29 - 4 = 25$ autres collègues pensent que le texte est ni lacunier ni surabondant.

Commentaires :

L'imprécision de l'énoncé était volontaire ; dans l'immense majorité

des cas, cette imprécision a commandé un premier effort qui a été d'enrichir les données par l'analyse du libellé des questions du test, l'énoncé des données ne précisant les noms que de 4 animaux et de 4 boissons, le "raisonnement" du testé étant en gros celui-ci : "Nous pouvons poser comme axiome que le fabricant du test n'est pas "farfelu ; il ne demanderait donc pas qui boit de l'eau, (resp : qui "a un zèbre) si la 5° boisson non précisée était la verveine (resp : "si le 5° animal non précisé était un hippocampe) , donc la 5° boisson "est l'eau, le 5° animal est le zèbre) ".

Quelques exceptions ont refusé l'axiome du non farfelutisme ce qui autorisait à répondre n'importe quoi ... ou à ne pas répondre. L'acception de l'axiome ci-dessus peut s'interpréter comme une représentation d'un certain pragmatisme imaginatif qui, un problème posé, tient absolument à se donner un domaine de recherche (qui est peut-être discutable) ; le refus de cet axiome peut s'interpréter comme une attitude représentative d'un formalisme étroit.

VI - LES REPONSES A LA PARTIE (4) : "QUESTIONS SUR L'UTILISATION"

1) En ce qui concerne la question (4-1) on peut rassembler les réponses suivant le tableau suivant :

Ce test permet-il de déceler l'aptitude au raisonnement déductif pour les classes de:	Nbre de oui	Nbre de non	Nbre de réponses	Total
6° - 5°	10	9	10	29
4° - 3°	12	8	9	29
2°	18	0	11	29
1re - Terminales	18	0	11	29
TOTAUX	58	17	41	

A l'évidence, les collègues font une nette différence entre le 1er cycle où les non figurent dans une proportion à peine inférieure à celle des oui, et le 2^o cycle où il n'y a aucune réponse négative. Dans tous les cas, le nombre de non-réponses -ou d'abstentions - est (sensiblement égal aux oui pour le 1er cycle, inférieure de 2/3 par rapport aux non dans le 2^o cycle) est important. L'analyse des réponses montre que à 5 exceptions près, les non-réponses des collègues ont lieu pour les niveaux dans lesquels ils n'ont pas expérimenté le test.

En ce qui concerne la question (4-2) :

- . 2 collègues ont répondu oui
- . 6 collègues se sont abstenus
- . 21 collègues ont répondu non

Le non est donc ici franc et massif mais les significations de ce non sont multiples :

- * non : parcequ'il n'y a pas lieu de faire une initiation au langage de la logique formelle.
- * non : parcequ'il n'y a pas lieu de faire des exercices d'application faisant suite à une initiation à la logique formelle
- * non : parce que ce n'est pas un exercice d'application.

En ce qui concerne la question (4-3) :

- . 1 collègue a répondu non
- . 8 collègues se sont abstenus
- . 20 collègues ont répondu oui

Les 2 collègues ayant répondu oui à la question (4-2) ont également répondu oui à la question (4-3)

VII - EXPLOITATION DES LETTRES ACCOMPAGNANT LES REPONSES

Des lettres que m'ont adressées la plupart des collègues répondants il ressort tout d'abord que :

- a) les élèves ont été surpris, puis très intéressés par la recherche de la solution.

- b) l'ensemble des élèves ayant trouvé les bonnes réponses, ne coïncidait pas, assez souvent, avec l'ensemble des "bons" élèves en mathématiques. Ainsi : "je ne vous cache pas que j'en suis étonné ... et satisfait " (SEQUIN - ARLES)
- "Ce ne sont pas ceux qui ont les meilleurs résultats habituellement qui ont trouvé les premiers " (ALLARI - SALON-de-PROVENCE)
- "Ce genre d'exercice a beaucoup plu aux élèves " (Mme CACHARD - AIX-en-PROVENCE) etc ...

L'intérêt manifesté par de nombreux collègues pour ce test s'est traduit par de nombreux échanges de correspondance.

Ainsi un fructueux échange de points de vue sur l'heuristique avec notre collègue SEQUIN d'ARLES, ainsi le test suivant, assez proche du notre, d'un certain point de vue, mais formulé dans un langage et placé dans un contexte "très mathématique" que m'a adressé notre collègue ALLARI.

"Sur l'ensemble $E = \{ a, b, c, d, e \}$ est définie une loi (§) la table de composition de cette loi n'est pas connue. A vous de la dresser, compte tenu des propriétés ci-dessus :

- P1. Certains résultats sont donnés dans la table.
- P2. L'élément C figure 2 fois dans la dernière ligne et 2 fois dans la dernière colonne.
- P3. E est l'élément neutre.
- P4. C est l'unique symétrique de C.
- P5. $(A \S B) \S C = E$ et $E \S (A \S D) = E$.
- P6. $(C \S D) \S (D \S C) = D$.
- P7. Sur chacune des 4 premières lignes, figure une fois et une seule chaque élément de E.

Remarque : l'ordre des propriétés n'a aucune importance. Une fois que la table de composition est terminée, répondez aux questions suivantes :

§	E	A	B	C	D
E					
A				D	
B		E	D	A	
C		D	A		
D			E		

2° Cette loi est-elle commutative sur E ?

3° Est-elle associative sur E ?
pouvez-vous donner un sens à l'écriture $A \S B \S C$

4° Quels sont les éléments de E qui ont un symétrique ?

5° Calculer $(A \S B) \S (C \S C) \S (A \S D) =$
puis $(A \S (B \S C)) \S (C \S (A \S D))$

6° Résoudre les équations suivantes d'inconnue X :

1/ $((A \S B) \S (C \S B)) \S X = C .$

2/ $((A \S B) \S C) \S B \S X = C . "$

Ainsi que nous l'avons précisé dans l'énoncé des objectifs de l'enquête nous voulions :

1°) Etablir un diagnostic sur :

(a) le test proprement dit, la réaction des élèves face à un tel test.

(b) l'aptitude chez nos collègues à différencier des comportements heuristiques d'une part avec des comportements purement hypothéco-déductifs bien "enchaînés" ou bien "impliqués" du logicien formel d'autre part.

2°) Amener nos collègues à se livrer à une observation clinique des comportements heuristiques des élèves soumis au test qui soit autre chose qu'un exercice didactique de routine, à décrire les différentes phases du processus heuristique suivi par leurs élèves.

5 collègues seulement - 2 assez explicitement - 3 de manière plus diffuse - ont exprimé que ce test pouvait permettre d'apprécier les performances heuristiques des élèves, mais 16 collègues ont décrit le processus heuristique suivi par leurs élèves (les 5 précédents + 11 autres); les différentes démarches décrites reflètent toutes une description en un certain nombre de phases, et ceci quel que soit le niveau des élèves.

1ère phase : la phase de préparation :

La mise en train se fait sous le sceau de la surprise : l'énoncé n'est pas un texte mathématique. Pour les plus jeunes élèves la séance débute par une demande d'explications du vocabulaire utilisé : que signifie "ambiguïté", diplomate? qu'est-ce qu'un cobaye? Suit une conversation maïeutique : outre l'opération de précision de l'énoncé, on s'interroge surtout chez les jeunes élèves pour savoir si la couleur des animaux doit influencer sur la couleur des maisons, si le zèbre supporte suffisamment le froid pour qu'un norvégien en possède ! L'analyse du libellé de la question permet de conclure que la 5ème des boissons et le cinquième animal qui interviennent sont respectivement l'eau et le zèbre.

2ème phase : la phase de bricolage :

On essaie au hasard : "on ne dit pas ce que l'anglais boit, ce pourrait être lui qui boit de l'eau" "ça ne peut pas être l'italien, (qui boit du thé) ni le violoniste (qui boit du jus d'orange) etc..."

"dessinons les maisons avec les couleurs : il y en a une rouge, une verte, une blanche, une jaune, une bleue"... "oui mais les maisons sont alignées, est-ce que la première à gauche est la jaune?"...

Suivant les cas, soit les élèves en arrivent à concevoir de dresser un tableau du type :

	1ère maison	2ème maison	3ème maison	4ème maison	5ème maison
Couleur					
Nation					
Boisson					
Métier					
Animal					

Soit le professeur donne ce "conseil heuristique" à ses élèves., C'est au cours de cette phase que l'on découvre dans l'amas des données un schéma d'ordonnement des données significatives qui influent sur la solution.

3ème phase : l'incubation et l'inspiration :

A ce stade l'élève chercheur est encombré d'une masse d'informations, il a un outil pour le traiter : un tableau à 5 lignes et 5 colonnes; il "case" les informations immédiatement "casables", refait le bilan de ses tentatives de la phase de bricolage éliminant les tentatives infructueuses, cherche les contraintes qui le plus rapidement possible sont susceptibles de "remplir une case"; le "noeud" de la découverte réside alors dans l'idée de faire des hypothèses à étages et de voir en fonction des contraintes en prenant d'abord les contraintes les plus "cernables" de façon à éliminer d'emblée et à chaque étape un nombre important de solutions potentielles (l'ordinateur lui, examine toutes les solutions potentielles les unes après les autres et les compare aux diverses contraintes). Enfin on trouve une solution.

Notons que personne (parmi les élèves) ne s'est soucié de l'unicité de la solution.

VIII - CONCLUSIONS

Les conclusions proprement dites de l'enquête, nous les avons exprimées au fur et à mesure de commentaires sur l'analyse des réponses aux questions posées, et nous n'y reviendrons pas. Ce n'est que très récemment que des enseignants en mathématiques, des praticiens se sont intéressés aux problèmes heuristiques; en France, quelques travaux ont été faits dans certains I.R.E.M. (MONTPELLIER, STRASBOURG). On peut espérer qu'un jour, tout enseignant soit familiarisé avec l'heuristique (là encore un problème de formation des maîtres !). En attendant, pour tous ceux qui seraient intéressés par des problèmes de cet ordre nous proposons une petite bibliographie qui n'a aucune prétention à l'exhaustivité, très abordable par des "commençants" en heuristique.:

ALBE : Colloque sur l'Heuristique - Bulletin Inter IREM
1^{er} Spécial de MARS 1975.

GARDNER : Les casse-têtes mathématiques de Sam LOYD -
Tomes 1 et 2 - DUNOD.

GLAESER : Une petite aventure mathématique : Bulletin
APMEP N° 281 - 1972.

GLAESER : Cours d'Heuristique Générale - D.E.A. de
Didactique - Université L. PASTEUR - STRASBOURG.

IREM DE MONTPELLIER : Heuristique - Compte-rendu des
travaux d'une équipe - 1974.

N.B. : Les articles ou documents ci-dessus comportent
eux-mêmes des bibliographies beaucoup plus complètes

-1-1-1-1-1-1-1-1-

ANNEXE

Certains stagiaires du groupe informatique 1er cycle (notamment M. VIGUIE H. - C.E.S. CAPELETTE 1) animé par M. DIDIER F. ont traité ce problème sur ordinateur, vous trouverez ci-dessous quelques précisions sur l'algorithme utilisé ainsi que le programme écrit en BASIC.

1) - ALGORITHME :

Le problème que nous nous proposons de résoudre est de trouver pour chaque maison les caractéristiques qui lui sont associées (quelle est sa couleur, de quelle nationalité est la personne qui l'habite, quelle est la profession de cette personne, quel animal possède-t-elle, que boit-elle).

Pour cela on utilise un tableau M (5,5), l'indice colonne correspond au rang de la maison en allant de la gauche vers la droite (i.e colonne 1 = maison la plus à gauche, ..., colonne 3 = maison du milieu, ..., colonne 5 = maison la plus à droite). La ligne 1 représentera les couleurs, la ligne 2 représentera les nationalités, la ligne 3 représentera les professions, la ligne 4 représentera les animaux et la ligne 5 représentera les boissons.

Pour des raisons de commodités de programmation nous allons remplir les cases du tableau M non pas avec des mots mais avec des entiers, de la façon suivante :

- chaque ligne du tableau M contiendra les entiers : 1,2,3,4,5, c'est-à-dire que chaque caractéristique ayant 5 éléments, on a construit une bijection entre chaque caractéristique et l'ensemble {1,2,3,4,5}.

Pour une caractéristique, on a choisi parmi les 5! bijections possibles celle associée à l'ordre alphabétique, exemple :

Pour la caractéristique couleur :

bleu —→ 2
jaune —→ 3
rouge —→ 4
blanc —→ 1
vert —→ 5

Le programme devra donc placer dans les cases de chaque ligne les nombres 1,2,3,4,5 ce qui fait pour une ligne 5! possibilités et pour le tableau M, $(5!)^5$ possibilités. Parmi les $(5!)^5$ possibilités le programme devra faire imprimer celles qui vérifient les contraintes données par le texte.

En fait dans la pratique on procède de façon un peu différente :

1°) $K = 1$

2°) peut on placer une nouvelle permutation sur la ligne K (il y en a 120 à placer)

- si oui aller en 4

- si non aller en 3

3°) décrémenter K de 1 ($K = K - 1$)

- si $K = 0$ aller à 7

- si $K \neq 0$ aller à 2

4°) Si les contraintes portent sur les caractéristiques des lignes 1,2,...,K sont vérifiées alors aller en 5 sinon aller en 2.

5°) incrémenter K de 1 ($K = K + 1$)

- si $K = 6$ aller en 6 sinon aller en 2

6°) Imprimer le tableau M (on a une solution)

- décrémenter K de 1 ($K = K - 1$)

- aller en 2

7°) FIN le programme est terminé)

Cette façon de procéder nous permet en fait d'envisager beaucoup moins de $(120)^5$ possibilités. Remarquons également que si on avait choisi une autre indéxation pour les lignes on aurait eu un programme beaucoup plus performant (i.e mettre en ligne 1 la caractéristique dont les contraintes portant sur les maisons et sur elle même sont les plus précises, en ligne 2 la caractéristique dont les contraintes portant sur les maisons, sur la caractéristique placée en ligne 1 et sur elle-même sont les plus précises, etc...)

2) - PROGRAMME :

Le programme comprend :

a) un programme principal (lignes 5 à 150)

ce programme à la structure indiquée précédemment, c'est lui qui énumère les permutations dans le tableau M et qui imprime

ce dernier lorsqu'une solution est trouvée. En fait son écriture est alourdie par les ordres d'impressions (ligne 101 à 112) car on a voulu qu'il imprime les mots et non pas les entiers associés à ces derniers. D'autre part, pour des raisons de commodités, il a fait écrire non pas le tableau M, mais son transposé.

En outre, il fait appel à divers sous-programme chargés de vérifier les contraintes.

b) des sous-programmes

ils sont appelés par le programme principal et sont au nombre de 5 (lignes 155 à 185, 190 à 225, 230 à 280, 285 à 430, 435 à 515). On trouvera en commentaire dans le listing les contraintes qu'ils sont chargés de vérifier.

```

5   DIM M(5,5),B(5,5)
10  MAT B=ZER
15  LET K=1
20  LET Y=1
25  LET I=1
30  IF B(K,I)=0 GOTO 70
35  LET I=I+1
40  IF I<=5 GOTO 30
45  LET Y=Y+1
50  IF Y=0 GOTO 135
55  LET I=M(K,Y)
60  LET B(K,I)=0
65  GOTO 35
70  LET M(K,Y)=1
75  LET B(K,I)=1
80  LET Y=Y+1
85  IF Y<=5 GOTO 25
90  ON K GOSUB 155,190,230,285,435
95  LET K=K+1
100 IF K<=5 GOTO 20
101 LET A$="BLANC"      BLEU      JAUNE      RJUGE      VERT      "
102 LET B$="ANGLAIS"    ESPAGNOL ITALIEN    JAPONAIS    NORVEGIEN "
103 LET C$="ACROBATE"    DIPLOMATE MEDECIN    SCULPTEUR    VIOLENISTE"
104 LET D$="CHIEF"      CJBAYS    ESCARGOT    RENARD      ZEBRE      "
105 LET E$="CAFE"        EAU        LAIT        ORANGE      THE        "
106 FOR B=1 TO 5
107 PRINT A$(M(1,B)-1)*10+1,10);
108 PRINT B$(M(2,B)-1)*10+1,10);
109 PRINT C$(M(3,B)-1)*10+1,10);
110 PRINT D$(M(4,B)-1)*10+1,10);
111 PRINT E$(M(5,B)-1)*10+1,10)
112 NEXT B
135 LET K=K-1
140 IF K=0 GOTO 520
145 LET Y=6
150 GOTO 45
155 REM "LA MAISON VERTE EST A COTE ET A DROITE DE LA MAISON BLANCHE
156 FOR J=1 TO 4
160 IF M(1,J) # 1 GOTO 170

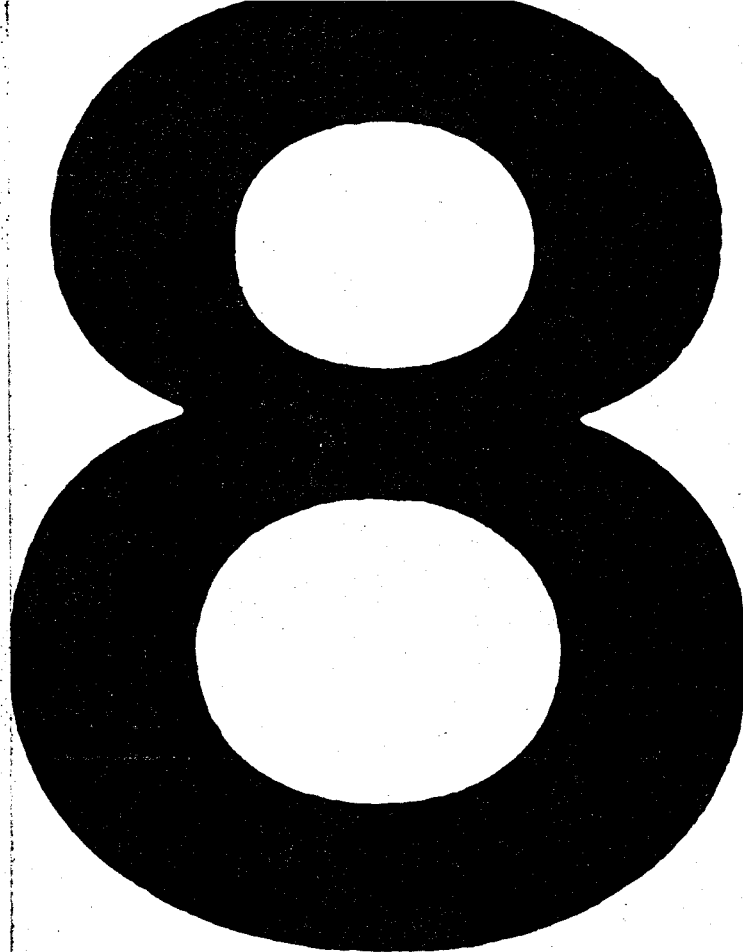
```

165 GOTO 180
 170 NEXT J
 175 RETURN 45
 180 IF H(1,J)+1#5 RETURN 45
 185 RETURN 95
 186 REM"LE ANGLAIS HABITE LA MAISON ROUGE"
 190 FOR J=1 TO 5
 195 IF H(2,J)#1 GOTO 205
 200 GOTO 210
 205 NEXT J
 206 REM"LE NORVEGIEN HABITE LA PREMIERE MAISON A GAUCHE"
 210 IF H(1,J)#4 RETURN 45
 215 IF H(2,1)#5 RETURN 45
 216 REM"LA MAISON BLEUE EST A CÔTE DE CELLE DU NORVEGIEN"
 220 IF H(1,2)#2 RETURN 45
 225 RETURN 95
 226 REM"LE JAPONAIS EST ACRÔBATE"
 230 FOR J=1 TO 5
 235 IF H(3,J)#1 GOTO 245
 240 GOTO 250
 245 NEXT J
 250 IF H(2,J)#4 RETURN 45
 251 REM"LE DIPLOMATE HABITE LA MAISON JAUNE"
 255 FOR J=1 TO 5
 260 IF H(3,J)#2 GOTO 270
 265 GOTO 275
 270 NEXT J
 275 IF H(1,J)#3 RETURN 45
 280 RETURN 95
 281 REM"LE SCULPTEUR A UN ESCARGOT"
 285 FOR J=1 TO 5
 290 IF H(4,J)#3 GOTO 300
 295 GOTO 305
 300 NEXT J
 305 IF H(3,J)#4 RETURN 45
 306 REM"LE MEDECIN HABITE UNE MAISON QUI EST A CÔTE DE CELLE DU
 307 REM" LE RENARD"
 310 FOR J=1 TO 5
 315 IF H(4,J)#4 GOTO 325
 320 GOTO 330
 325 NEXT J
 330 IF J-1=0 GOTO 340
 335 IF H(3,J-1)=3 GOTO 355
 340 IF J+1=6 GOTO 350
 345 IF H(3,J+1)=3 GOTO 355
 350 RETURN 45
 351 REM" LE CHIEN APPARTIENT A L'ESPAGNOL"
 355 FOR J=1 TO 5
 360 IF H(4,J)#1 GOTO 370
 365 GOTO 375
 370 NEXT J
 375 IF H(2,J)#2 RETURN 45
 376 REM"LA MAISON JAUNE EST A CÔTE DE CELLE QU'EST LE COBAYE"
 380 FOR J=1 TO 5
 385 IF H(4,J)#2 GOTO 395
 390 GOTO 400
 395 NEXT J
 396 REM"ON BOIT DU LAIT DANS LA MAISON DU MILIEU"
 400 FOR X=1 TO 5

405 IF M(1,X)/3 GOTO 415
410 GOTO 420
415 NEXT J
420 IF X=J-1 RETURN 95
425 IF X=J+1 RETURN 95
430 RETURN 45
435 IF M(5,3)/3 RETURN 45
436 REM "LE VIOLONISTE BOIT DU JUS D'ORANGE"
440 FOR J=1 TO 5
445 IF M(5,J)/4 GOTO 455
450 GOTO 460
455 NEXT J
460 IF M(3,J)/5 RETURN 45
461 REM "L'ITALIEN BOIT DU THE"
465 FOR J=1 TO 5
470 IF M(5,J)/5 GOTO 480
475 GOTO 485
480 NEXT J
485 IF M(2,J)/3 RETURN 45
486 REM "UN BOIT DU CAFE DANS LA MAISON VERTE"
490 FOR J=1 TO 5
495 IF M(5,J)/1 GOTO 505
500 GOTO 510
505 NEXT J
510 IF M(1,J)/5 RETURN 45
515 RETURN 95
520 END

RUN

JAUNE	NORVEGIEN	DIPLOMATE	RENAUD	EAU
BLEU	ITALIEN	MEDICIN	COCHAYE	THE
ROUGE	ANGLAIS	SCULPTEUR	ESCARGOT	LAIT
BLANC	ESPAGNOL	VIOLONISTE	CHIEN	ORANGE
VERT	JAPONAIS	ACROBATE	ZEBRE	CAFE
HALT ON LINE: 35				



IREM marseille
institut de recherche
sur l'enseignement des mathématiques

70, route léon lachamp
13009 marseille luminy

Tél. 41.39.40 - 41.15.40