INFORMATION MATHEMATIQUE

IREM
MARSEILLE

6

IREM marseille
institut de recherche
sur l'enseignement des mathématiques

70, route léon lachamp
13009 marseille luminy

Tél. 41.39.40 - 41.15.40

INFORMATION

MATHEMATIQUE

Publication de l'I.R.E.M. de Marseille

RESPONSABLE DE LA PUBLICATION

J.C. Beniamino

SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES

I. R. E. M.
70, Route Léon Lachamp
13009 - MARSEILLE

(Tél. 41.39.40 / 41.15.40 poste 32.10)

INFORMATION MATHEMATIQUE

N° 6

MARS 1975

SOMMAIRE

E D I T O R I A L

" UNE OUVERTURE SUR LES PROBLEMES DE L'ENSEIGNEMENT TECHNIQUE "

Les problèmes relatifs à l'enseignement technique n'ont que peu préoccupé les responsables de l'I.R.E.M. et ceux qui ont eu charge de ce bulletin .

A l'avenir cette injustice sera réparée et nous aurons prochainement un article concernant la conférence de Monsieur LAGARDE sur l'Enseignement Technique .

Nous notons que l'an prochain une branche des activités de l'I.R.E.M. sera tournée vers cet enseignement . Il ne nous reste plus qu'à souhaiter que les professeurs de l'enseignement technique veuillent bien faire parvenir à la rédaction des articles spécifiques des problèmes que cet enseignement pose aux gens qui le pratiquent .

J.C. BENIAMINO

I N T R O D U C T I O N A L A G E O M E T R I E D U P L A N A F F I N E

(Premiers exemples d'axiomes et de raisonnement déductif)

° ° °

René BERNARD - Inspecteur Pédagogique Régional

Le programme du 22 Juillet 1971 apparaît long et lourd à développer, particulièrement la partie "géométrie" .

En effet, l'étude de la droite réelle exige la connaissance de la structure de $\mathbb{R}$, ce qui dans de nombreux cas, repousse ce chapitre au delà du milieu Janvier . Enoncé de Thalès, symétrie et parallélogramme sont, de ce fait, abordés très tard . L'expérience prouve que, malgré les recommandations de la circulaire du 19 février 1973, l'étude des vecteurs n'est trop fréquemment, engagée qu'en fin avril . Cette situation hypothèque lourdement le déroulement normal du programme de troisième et son achèvement

Cette introduction se propose, modestement, en assurant la présentation des vecteurs au plus tôt, d'initier, le plus rapidement possibl les élèves :

- d'une part au maniement d'axiomes, induits à partir d'une étude expérimentale du plan physique,
- d'autre part, aux techniques du raisonnement déductif à partir de schémas ou dessins .

Elle peut donc, très naturellement, trouver sa place dans la progression annuelle, dès le début de l'année scolaire, en la conduisant parallèlement au programme d'algèbre : nombres, droite réelle . Il suffira de vérifier, au moment opportun, qu'en appelant milieu de deux points, le point dont l'abscisse est la demi-somme des abscisses, les axiomes initiaux sont satisfaits . L'axiome ou énoncé de Thalès généralisera l'axiome $\boxed{8}$.

L'un des avantages, que cette introduction entraîne, réside dans la mise à l'écart de la symétrie-point et du parallélogramme, qui auront leur place naturelle en 3ème , l'une comme isométrie, l'autre comme ensemble ponctuel globalement invariant dans cette isométrie, retrouvant ainsi simultanément ses propriétés affines et métriques chères aux élèves .

L'étude des vecteurs n'a pas été détaillée . Il apparaît <u>très souhaitable</u> de distinguer l'étude du groupe additif des vecteurs de celle des translations et de leur composition . Loin de nous, l'ambition des catégories !... Quelques preuves ont été brièvement suggérées ; d'autres sont laissées au soin du lecteur, en particulier celle de : (A,M) et (M,B) équipollents , si M est milieu de (A,B) .

Toutes les remarques, observations, critiques et aussi les résultats d'expérimentation seront bien accueillies .

A - DEFINITION D'UN PLAN MATHEMATIQUE

On appelle plan mathématique P ou plan affine, l'ensemble d'éléments appelés points, ce plan étant un modèle du plan physique. Les propriétés de ce dernier sont traduites par les trois axiomes suivants, appelés axiomes d'incidence (se reporter à la présentation B du commentaire des programmes, circulaire du 22 Novembre 1971).

$\boxed{1}$ Il existe une famille non vide $\mathcal{D}$ de parties propres de P, dont les éléments sont appelés droites ; les points de P n'étant pas tous sur une même droite.

$\boxed{2}$ Par deux points distincts quelconques de P, il existe une et une seule droite du plan, à laquelle ils appartiennent.

$\boxed{3}$ Axiome d'Euclide.

PARALLELISME ENTRE LES DROITES DE P.

- définition du parallélisme de deux droites.
- la relation de parallélisme est une relation d'équivalence.
- une classe d'équivalence est appelée direction de droites.

PROJECTION p, DE DIRECTION DONNEE L, de P SUR UNE DROITE.

- p est une application de P sur D, $D \notin L$.
- propriétés de p.
- projection d'une droite G de P sur une droite D, $D \notin L$

B - APPLICATION μ de P x P dans P

Cette application est fondamentale pour la progression.

- définition d'un bipoint et notation.
- application μ : $P \times P \longrightarrow P$
  $(A,B) \longmapsto \mu\,(A,B)$

> μ est l'application de P x P dans P, qui à tout couple de points de P, ou bipoint, associe un point appelé milieu de ce bipoint. Le milieu est muni des propriétés traduites par les axiomes suivants, appelés "axiomes du milieu", au nombre de cinq.

$\boxed{4}$ Le milieu d'un bipoint dont les éléments sont distincts appartient à la droite définie par ce bipoint.

$\boxed{5}$ Les deux bipoints associés à la même paire de points (distincts) ont même milieu, i.e. (A,B) et (B,A) ont même milieu.

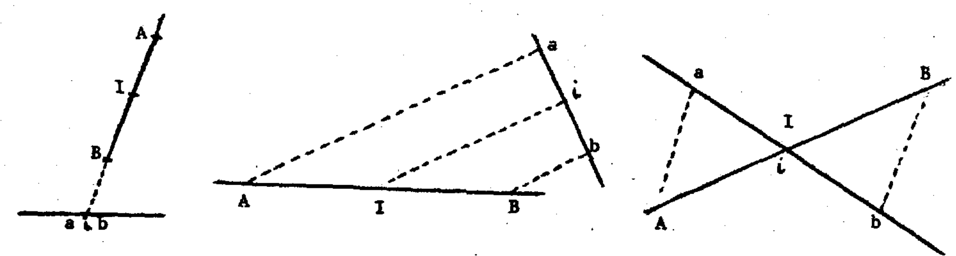
$\boxed{6}$ Quel que soit le point A de P, A est le milieu de (A,A).

$\boxed{7}$ Quels que soient deux points A et I de P, il existe un et un seul point B de P tel que I soit le milieu de (A,B)

N.B : [l'unicité peut être démontrée, à partir de l'existence de B et de l'axiome $\boxed{5}$.

$\boxed{8}$ Le milieu se conserve en projection ou toute projection (même constante) conserve le milieu d'un bipoint.

La projection, de direction L sur une droite D, $D \notin L$, du milieu d'un bipoint est le milieu de la projection de celui-ci.



C - CONSEQUENCES DE L'AXIOME 8

Théorème $\boxed{8.1}$ Si deux bipoints (A,B) et (a,b) distincts ont leur milieux I et i confondus, alors les droites (A a) et (B b) sont parallèles .

- si (A B) et (a b) ont même support, propriété banale .
- si (A B) et (a b) sont des droites distinctes, mener (B b') parallèle à (A a) et appliquer $\boxed{8}$ et $\boxed{7}$ (unicité).

Théorème $\boxed{8.2}$ Etant donnés deux bipoints (A,B) et (a,b) distincts de milieux respectifs I et i distincts , si A et a sont confondus, alors les droites (B b) et (I i) sont parallèles.

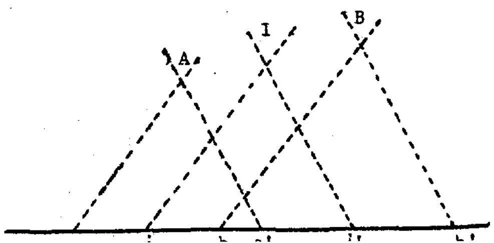
i.e. La droite qui joint les milieux de deux cotés d'un triangle est parallèle au troisième coté.

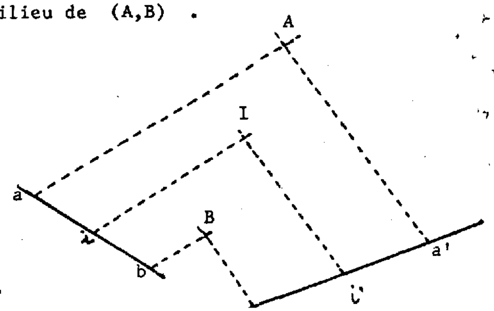
- même preuve que pour $\boxed{8.1}$.

Théorème $\boxed{8.3}$ Etant donnés deux bipoints distincts (A,B) et (a,b) de milieux respectifs I et i , distincts, si les deux droites (A a) et (I i) sont parallèles, alors (B b) leur est parallèle .

- même preuve que $\boxed{8.1}$

Théorème $\boxed{8.4}$ Si les deux projections d'un point I du plan, sur une même droite ou deux droites distinctes, suivant deux directions distinctes, sont les milieux respectifs des projections correspondantes de deux bipoints (A,B), alors I est le milieu de (A,B) .





Preuve .

- D'après $\boxed{7}$ existe un et un seul point C tel que I soit l[e] milieu de (A,C) .
- D'après $\boxed{8}$ (A,C) se projette suivant (a,c) de milieu I .
  Alors {b} = {c} d'après $\boxed{7}$.
- De même, d'après $\boxed{8}$, (A,C) se projette en (a',c') de mili[eu]
  Alors , {b'} = {c'} d'après $\boxed{7}$.
- Donc le point C est sur la parallèle menée par b à (A a)
  est sur la parallèle menée par b' à (A a'
- Donc {B} = {C} et, par suite, I est milieu de (A,B) .

D - RELATION D'EQUIPOLLENCE DANS P x P

Définition : Le bipoint (M,N) est équipollent au bipoint (M',N') si et seulement si les bipoints (M,N') et (N,M') o[nt] même milieu .

Conséquences de cette définition et de l'axiome $\boxed{5}$:

- La relation d'équipollence est réflexive et symétrique .
  Cette dernière propriété nous permettra d'employer par la suite l'énoncé suivant :

  Les deux bipoints (A,B) et (C,D) sont équipollents, si seulement si les deux bipoints (A,D) et (B,C) ont même milieu .

- Si M est le milieu de (A,B) , alors (A,M) et (M,B) sont équipollents .

Propriété de l'échange $\boxed{9}$

Si deux bipoints (A,B) et (C,D) sont équipollents, alors (A,C) et (B,D) sont aussi équipollents ; de même que (D,B) et (C,A) ainsi que (D,C) et (B,A) respectivement .

Propriété fondamentale $\boxed{10}$

> Si deux bipoints sont équipollents, leurs droites-supports sont parallèles .

Preuve : Si (P,Q) éq. (R,J) et si $R \in (M\,N)$ appliquer $\boxed{4}$ et $\boxed{7}$
Si (P,Q) éq. (R,J) et si $R \notin (M\,N)$ appliquer $\boxed{8.1}$

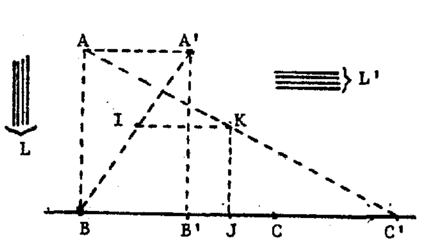
L'équipollence est-elle une relation transitive ?

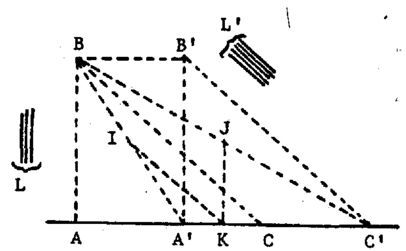
Soient (A,A') éq. (B,B') , (B,B') éq. (C,C')

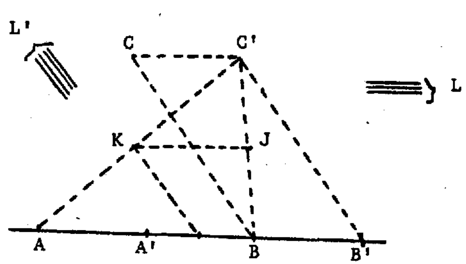
D'après la propriété fondamentale, les trois supports ont la même direction . Trois cas peuvent donc se présenter :

a) les trois supports sont confondus .
b) les trois supports sont distincts .
c) deux des trois supports sont confondus, le troisième distinct.

* Le cas c) conduit à trois figures distinctes particulières suivant le bipoint dont le support est distinct de celui des deux autres .







Preuve : Soit I le milieu commun de (A'B) et (A,B') , soit J celui de (B,C') et (B'C) . Dans les trois cas de figure, (A B) et (A'B') ont même direction L (échange et propriété fondamentale) . De même (B C) et (B'C') ont même direction L' . L et L' sont distinctes, car si L = L' les trois supports seraient confondus ; ce qui n'est pas .

Appelons K le milieu de (A,C') .

Alors, d'après $\boxed{8.2}$, (K I) // (C'B') et, transitivité du parallélisme, $(K\,I) \in L'$

De même, d'après $\boxed{8.2}$, (K J) // (A B) et, transitivité du parallélisme, $(K\,J) \in L$.

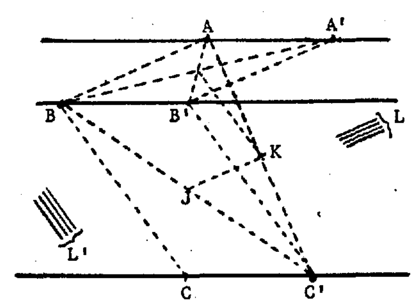
- Donc K se projette, suivant L', en I milieu de (A'B) , projection de (A'C) sur (A'B)

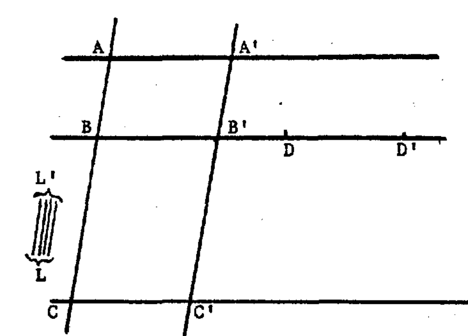
- Donc K se projette, suivant L , en J milieu de (B,C') , projection de (A',C) sur (B C')

D'après $\boxed{8.4}$, K est le milieu de (A'C) et par hypothèse de (A,C')

- Donc (A,A') et (C,C') sont équipollents .

* Le cas b) Le raisonnement précédent s'applique intégralement dans le cas où les directions L et L' sont distinctes, ce qui est vrai lorsque A,B,C ne sont pas alignés (figure de gauche, ci-dessous) .





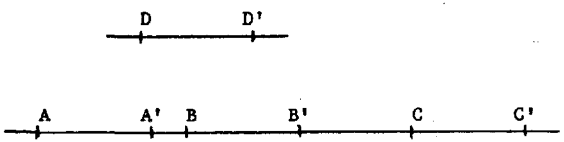
Si $L = L'$, alors A,B,C sont alignés, ainsi que A',B',C' (figure ci-dessus, à droite) . Il s'ensuit que (A C) et (A'C') sont des droites parallèles confondues avec (A B), (B C) et (A'B'), (B'C') respectivement . Se ramener au cas précédent en introduisant sur la droite (B B'), un bipoint "relais" (D,D') équipollent à (B,B') et distinct de celui-ci .

$$\text{Alors} \quad \left\{\begin{array}{l} (A,A') \text{ éq. } (B,B') \\ (B,B') \text{ éq. } (D,D') \end{array}\right\} \text{ inférent } (A,A') \text{ éq. } (D,D') \quad [\text{cas c})]$$

$$\text{Et} \quad \left\{\begin{array}{l} (D,D') \text{ éq. } (B,B') \\ (B,B') \text{ éq. } (C,C') \end{array}\right\} \text{ inférent } (D,D') \text{ éq. } (C,C') \quad [\text{cas c})]$$

Appliquer le cas b) , $L \neq L'$, à (A,A') , (D,D') et (C,C') .

* Le cas a) . Il suffit de prendre un bipoint "relais" (D,D') équipollent, par exemple, à (B,B') de support distinct . Même raisonnement que ci-dessus, en restant dans l'exploitation du cas c) .



Conclusion $\boxed{11}$

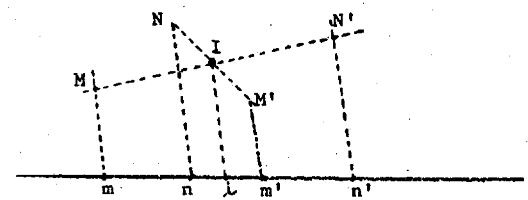
> La relation d'équipollence entre bipoints de $P \times P$ est réflexive, symétrique et transitive . C'est donc une relation d'équivalence .

E - EQUIPOLLENCE ET PROJECTION

Théorème $\boxed{12.1}$ Toute projection non constante conserve l'équipollence .

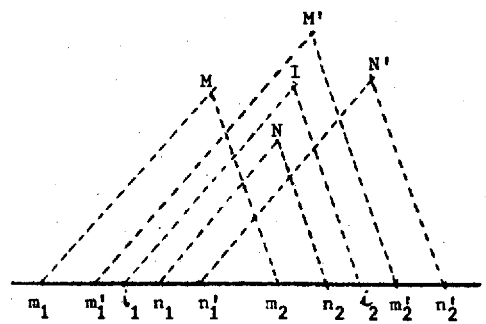
> Si deux bipoints sont équipollents, alors leurs projections sur une même droite, n'appartenant pas à la direction de projection, sont des bipoints équipollents .

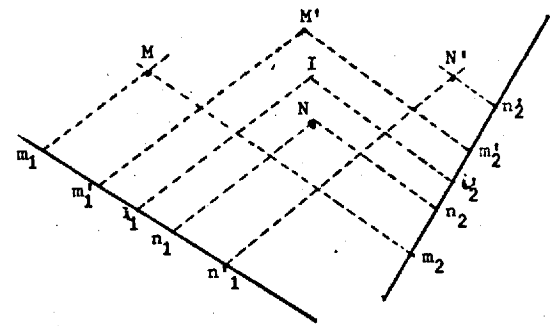
Utiliser l'axiome $\boxed{8}$.



Théorème $\boxed{12.2}$ Conséquence .

> Si deux bipoints se projettent sur une même droite ou deux droites distinctes, suivant deux directions distinctes, selon des bipoints équipollents, alors ils sont eux-mêmes équipollents.





Utiliser le théorème $\boxed{8.4}$.

Propriété caractéristique $\boxed{12}$

> Une condition nécessaire et suffisante pour que deux bipoints soient équipollents est que leurs projections, suivent deux directions distinctes, sur une même droite ou deux droites distinctes, soient elles-mêmes des bipoints équipollents .

- Cette propriété résulte de $\boxed{12.1}$ et de $\boxed{12.2}$

LES DENOMBREMENTS

(CLASSE DE PREMIERE)

* * *

R. ROLLAND - Directeur de l'I.R.E.M. d'AIX-MARSEILLE

Ce document est un essai de présentation des dénombrements en classe de 1ère, qui suit les recommandations de [1] .

L'utilisation des fiches à l'usage des élèves semble tout à fait convenir à l'acquisition de l'intuition et des méthodes que nécessite cette activité ; s'il est important en effet que les élèves aient un certain nombre de connaissances sur ce sujet (formule du binôme , etc...) il est certainement plus important encore qu'ils en apprennent les méthodes et qu'ils y gagnent un certain"sens de la combinatoire".

Bien sûr, les fiches qui suivent doivent être expérimentées dans des classes, et améliorées.

Les premières notions sur les ensembles finis, notamment la définition des ensembles finis, relèvent de l'axiomatique de la théorie des ensembles, et de la construction de $\mathbb{N}$.

On se contentera donc de la notion intuitive d'ensemble fini, ainsi que de la notion d'entier intuitif.

Les problèmes que nous allons nous poser sont du type suivant :

Etant donné un ensemble fini E , nous allons essayer :

a) d'écrire si possible tous les éléments de E
b) de préciser le nombre d'éléments de E

Remarquons toutefois que le problème se pose souvent sous une forme plus concrète et que la première activité à laquelle on est conduit est de préciser l'ensemble que l'on va étudier ; c'est une des questions les plus difficiles pour les élèves et sur laquelle il faut beaucoup insister : trouver un modèle pour une situation physique.

L'activité a) , outre le fait qu'elle permet de voir ce qu'il se passe dans les cas simples, pose aux élèves des problèmes intéressants de classification et d'organisation ; elle peut être nettement améliorée d'ailleurs si le professeur peut utiliser une calculatrice programmable.

.../

Les problèmes du type b) sont évidemment résolus dans les cas particuliers où l'on peut écrire tous les éléments de E . Mais dès que l'on se pose des problèmes plus généraux, il faut raisonner autrement.

L'élève va donc devoir acquérir un certain nombre de "savoir faire" pour résoudre de tels problèmes. Les fiches suivantes sont rédigées à cet effet.

FICHE 1

T_1 : Un berger a 4 chèvres noires et 3 chèvres blanches, combien a-t-il de chèvres ?

Q_1 : Soit E_1 et E_2 deux ensembles finis disjoints et soit $E = E_1 \cup E_2$.
Donner une relation entre card E, card E_1 et card E_2.

Q_2 : Soit E_1, E_2, ... E_k k ensembles finis disjoints ($k \in \mathbb{N}^*$) et soit $E = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_k$
Donner une relation entre card E, Card E_1, card E_2, ... card E_k

Q_3 : Soit E_1 et E_2 deux ensembles finis.
Que peut-on dire de card $(E_1 \cup E_2)$

T_2 : Un berger pour compter ses chèvres compte les pattes ; il en trouve 48. Combien a-t-il de chèvres ?

Q_4 : Soit E un ensemble fini, R une relation d'équivalence sur E, C_1, C_2, ... C_k les classes d'équivalence.
Donner une relation entre card E, card C_1, ..., card C_k.

Q_5 : Si dans l'exemple précédent chacune des k classes d'équivalence a p éléments, que peut-on dire de card E ?

Q_6 : Soit f une surjection de l'ensemble fini E sur l'ensemble fini F.

REMARQUES à l'USAGE du PROFESSEUR

Ces exercices ont pour but de présenter les premiers principes fondamentaux de l'analyse combinatoire :

Théorème de la somme : Q_2
Théorème du quotient : Q_5

sans oublier l'important principe qui consiste à mettre en bijection un ensemble de cardinalité inconnue avec un ensemble de cardinalité connue dont Q_{13} fourni un exemple. Ce sont ces résultats qui devront être constamment appliqués par la suite.

Remarquons que le résultat Q_1 relève de l'axiomatique de la théorie des cardinaux ; la réponse à cette question doit rester intuitive.

Les questions Q_2 et Q_{10} devraient permettre de familiariser les élèves avec le raisonnement par récurrence, qui de toute façon ne pourra pas être évité en analyse combinatoire.

Ici, le professeur fera remarquer que l'important est d'avoir obtenu une partition de l'ensemble E . Bien évidemment, la notion de partition est très liée à la notion de relation d'équivalence. Elle est liée aussi à la notion de surjection.

$F = \{y_1, y_2, \dots y_p\}$

Montrer que :
card E = card $f^{-1}(\{y_1\}) + \dots +$ card $f^{-1}(\{y_p\})$

T_3 :

Q_7 : Dans un plan P rapporté à un repère cartésien, on considère les droites D_1, D_2, D_3, Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4
où (D_i) a pour équation $x = i$ et
où (Δ_j) a pour équation $y = j$
Trouver tous les points d'intersections de ces droites prises deux à deux, et donner leurs coordonnées.
Etudier dans l'ensemble de ces points la relation : "avoir la même 1ère composante".

Q_8 : Ecrire tous les "mots" de deux lettres que l'on peut former avec les lettres a, b, c.

Q_9 : Etant donnés deux ensembles finis E_1 et E_2, quel est le nombre d'éléments de $E_1 \times E_2$?

Q_{10} : Etant donnés k ensembles finis $(k \in N^*)$ $E_1, E_2, E_3, \dots, E_k$ quel est le nombre d'éléments de $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_k$

Q_{11} : En supposant qu'un numéro d'immatriculation est formé de 4 chiffres suivis de 2 lettres, suivies du numéro du département, combien peut-on au plus immatriculer de véhicules dans les Bouches-du-Rhône ?

Dans Q_7 sur un exemple concret, on suggère la relation d'équivalence qui devra donner le résultat dans Q_9.

Le professeur s'assurera que les élèves écrivent les éléments demandés avec méthode, et qu'ils voient bien la partition en classes d'équivalences suggérée par l'énoncé.

"mot" a ici le sens que le professeur précisera de suite ordonnée de lettres.

T_4 :

Q_{12} : Trouver toutes les applications de l'ensemble $\{a, b\}$ dans l'ensemble $\{x, y, z\}$

Q_{13} : E et F étant deux ensembles finis, comparer l'ensemble $\mathcal{F}(E,F)$ de toutes les applications de E dans F avec l'ensemble $F^{\text{card } E}$ produit cartésien de card E ensembles égaux à F.
Quel est le nombre d'éléments de $\mathcal{F}(E,F)$

FICHE 2

T_1 : les injections d'un ensemble fini dans un ensemble fini.

Q_1 : Soit $E = \{a, b, c\}$ et $F = \{a, b\}$
Existe-t-il une injection de E dans F ?

Q_2 : Soit E un ensemble ayant p éléments ($p \in \mathbb{N}^*$) et F un ensemble ayant n éléments ($n \in \mathbb{N}^*$).
A quelle condition existe-t-il une injection de E dans F ?

Q_3 : Reprenons les ensembles E et F de la question Q_2 et supposons que G soit un ensemble ayant aussi p éléments et H un ensemble ayant n éléments
Que pensez-vous du nombre d'injections de E dans F et du nombre d'injections de G dans H ?

Définition :

F étant un ensemble de n éléments ($n \in \mathbb{N}^*$) et p étant un élément de $\mathbb{N}^*$ on appelle arrangement de p objets de F toute application injective de l'ensemble $\{1, 2, ..., p\}$ dans F.

Nous noterons A_n^p le nombre des injections de $\{1, 2, ..., p\}$ dans E.

A ce niveau, le professeur intervient, donne la définition.
Il justifie la notation A_n^p par le résultat Q_3

Q_4 : Ecrire toutes les injections de :
$\{1, 2\}$ dans $\{a, b, c, d\}$
puis écrire toutes les injections de :
$\{1, 2, 3\}$ dans $\{a, b, c, d\}$

La question Q_4 est destinée à préparer le résultat du théorème suivant.
On veillera à ce que les élèves écrivent bien les "arbres".

Théorème :

Si $p > n$ $A_n^p = 0$

Si $p \leq n$ $A_n^p = n(n-1)\ldots(n-p+1) = \dfrac{n\,!}{(n-p)\,!}$

Ici le professeur démontre le théorème par récurrence sur p en utilisant les résultats de la fiche 1 (cf [1])
Il introduit la notation $n\,!$ (pour $n \in \mathbb{N}^*$) et la convention $0\,! = 1$

T_2 : Les bijections d'un ensemble fini sur un ensemble fini.

Le professeur fera remarquer une fois de plus que deux ensembles finis ne peuvent être mis en bijection que s'ils ont même nombre d'éléments.

Q_4 : E, F, G, H étant 4 ensembles ayant chacun n éléments ($n \in \mathbb{N}^*$)
Que peut-on dire du nombre de bijections de E sur F et du nombre de bijections de G sur H.

Définition :

Soit E un ensemble ayant n éléments ($n \in \mathbb{N}^*$) on appelle permutation de n objets de E toute bijection de E sur lui-même. On note P_n le nombre de ces permutations.

Q_5 : Ecrire toutes les permutations de l'ensemble $\{a, b, c\}$

Q_6 : Calculer P_n. ($n \in \mathbb{N}^*$)

Q_7 : Soit E un ensemble ayant n éléments, montrer que l'ensemble des permutations de E muni de la loi de composition des applications est un groupe.

FICHE 3

Les parties à p éléments d'un ensemble fini

Q_1 : Ecrire toutes les parties à 2 éléments de l'ensemble {a, b, c, d}. Puis écrire toutes les parties à 3 éléments de l'ensemble {a, b, c, d}
Comparer avec la question Q_4 de la fiche 2

Q_2 : Soit E un ensemble ayant n éléments ($n \geq 0$) Soit $p \in \mathbb{N}$

* On suppose $p > n$: Combien y-a-t-il de parties de E ayant p éléments ?
* On suppose $p = 0$: Combien y-a-t-il de parties de E ayant p éléments ?
* On suppose $1 \leq p \leq n$. Notons I l'ensemble des injections de $\{1, 2, \ldots, p\}$ dans E, et $\mathcal{P}_p(E)$ l'ensemble des parties de E ayant p éléments.
  Remarquer que si f est un élément de I, l'ensemble $f(\{1, 2, \ldots, p\}) = \{f(1), f(2), \ldots, f(p)\}$ est un sous ensemble de E ayant p éléments.
  Trouver une relation entre card I et card $\mathcal{P}_p(E)$
  Trouver Card $\mathcal{P}_p(E)$

Cette fiche est plus condensée que les pr
Les élèves penseront-ils à remarquer alor
cette fiche, cela ne leur est pas demandé
nombre d'éléments de $\mathcal{P}_p(E)$ ne dépend
p et de card(E) ?

La méthode pour trouver la relation demar
card I et card $\mathcal{P}_p(E)$ est *suggérée* ;
cette partie est difficile, et le profess
certainement amené à introduire la surjec

$$s : I \to \mathcal{P}_p(E)$$
$$f \mapsto s(f) = \{f(1), f(2), \ldots, f(p)\}$$

On appliquera ensuite le résultat Q_6 de

<u>ition</u> :

On appellera Combinaison de p objets pris parmi n objets de E, tout sous ensemble de E ayant p éléments.
On notera $\binom{n}{p}$ ou C_n^p le nombre de ces combinaisons.

<u>ème</u> :

$p > n \qquad \binom{n}{p} = 0$

$\leq p \leq n \qquad \binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!\,(n-p)!}$

Soit E un ensemble ayant n éléments ($n \geq 0$) et soit $p \in \mathbb{N}$.
Montrer qu'il y a autant de sous ensembles de E ayant p éléments que de sous ensembles de E ayant n − p éléments.
En conclure que $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.
Pouvait-on avoir ce résultat par le calcul ?

Soit E un ensemble ayant n éléments $n \geq 1$,
Soit $p \in \mathbb{N}$ et $a \in E$
Combien y a-t-il de sous ensembles de E ayant p éléments qui contiennent le point a ?
Combien y a-t-il de sous ensembles de E ayant p éléments qui ne contiennent pas le point a ?
En conclure que $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$

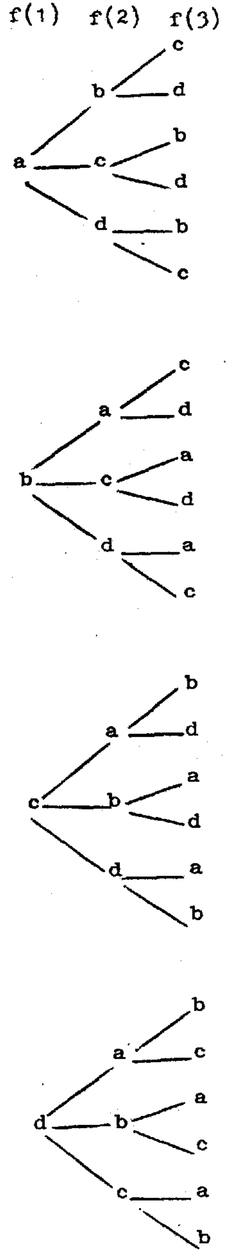
Développer $(a+b)^2$, $(a+b)^3$, $(a+b)^4$, $(a+b)^5$.
Développer $(a+b)^n$.

Quand cette formule aura été démontrée, l
fera construire le triangle de Pascal.

Ici, les élèves ayant le triangle de Pasc
yeux devraient prévoir la formule du binô
Le professeur démontrera cette formule, s
n'y parviennent pas.

ANNEXE 1

Arbre décrivant
toutes les injections
de {1, 2, 3} dans
{a, b, c, d}



° °
°

Ces quelques fiches doivent, bien entendu, être appuyées par des exercices et problèmes, qui seront traités en utilisant les méthodes et les résultats fondamentaux proposés dans les fiches (cf [1]) .

° °
°

[1] R. ROLLAND : A propos de la Combinatoire et de son enseignement dans les classes des Lycées. Publications de l'I.R.E.M. de MARSEILLE 1

[2] L. CHAMBADAL et J.L. OVAERT : Cours de Mathématiques- Gauthier Villars

° °
°

Les professeurs intéressés par l'utilisation de ces fiches da
leurs classes, peuvent en faire la demande à l'I.R.E.M. en pr
s'ils désirent que les fiches fournies contiennent les remarq
à l'usage du professeur ou non.-

° °
°

GEOMETRIE SUR UN ESPACE VECTORIEL

* * *

J.C. BENIAMINO - I.R.E.M. d'AIX-MARSEILLE

V sera un espace vectoriel sur un corps commutatif K. Les opérations seront notées $+$ pour l'addition de deux vecteurs et $.$ pour l'opération externe en faisant figurer en tête le scalaire et en seconde position le vecteur $\lambda . X$ où $\lambda \in K$, $X \in V$ -

Nous définirons sur V un couplage de la manière suivante : une application bilinéaire de $V \times V$ dans K notée $(X, Y) \to XY$ vérifiant donc

$(X_1 + X_2) Y = X_1 Y + X_2 Y$; $X (Y_1 + Y_2) = XY_1 + XY_2$

$(\lambda X) Y = \lambda (XY)$; $X (\lambda Y) = \lambda (XY)$

quels que soient les éléments X_1 X_2 Y_1 Y_2 λ -

Nous dirons qu'un tel couplage définit sur V une structure métrique. Si de plus V est de dimension finie sur K le couplage est entièrement défini par les valeurs scalaires $a_{ij} = A_i \cdot A_j$ $i, j = 1 \dots n$ où $(A_1 \dots A_n)$ est une base de V sur K.

On appelle Noyau à droite du couplage noté N_d le sous ensemble des vecteurs de V, Y tels que : $XY = 0$ $\forall X, X \in V$

On note N_g le noyau à gauche, c'est-à-dire le sous ensemble des vecteurs de V, X tels que : $XY = 0$ $\forall Y, Y \in V$

En général N_d et N_g sont distincts et ce sont deux sous espaces vectoriels de V -

On dit que V muni d'une structure métrique est non singulier si les noyaux du couplage sont nuls. (se réduisent au seul vecteur nul).

.../

I - SYMETRIE DE L'ORTHOGONALITE -

X est dit orthogonal à Y si $YY = 0$ - On se propose alors d'étudier le problème suivant : à quelles conditions la relation $XY = 0$ implique $Y.X = 0$ ou encore dans quels cas peut-on dire X (ou Y) orthogonal à Y (ou X) sans précision.

Nous supposons d'abord que cette condition est vérifiée.

X Y Z étant trois vecteurs quelconques de V on peut écrire la relation évidente

$(XZ)(XY) - (XY)(XZ) = 0$ car K est un corps commutatif

on en déduit alors $X[(XZ)Y - (XY)Z] = 0$ et en tenant compte de la condition.

$[(XZ)Y - (XY)Z]X = 0$ soit encore $(XZ)(YX) - (XY)(ZX) = 0$ (1)

en faisant $X = Z$ et en notant X^2 pour $X.X.$ il vient

$$X^2(YX) - (XY)X^2 = 0$$

Soit $X^2(YX - XY) = 0$ (2)

1°) Supposons donc que $\forall X, X \in V$ tel que $X^2 \neq 0$

On a donc le résultat

$\forall Y, \forall X$ $YX = XY$ le couplage est donc symétrique

2°) Supposons donc le couplage non symétrique : Il existe un couple de vecteurs (X,Y) dans $V \times V$ tel que $YX - XY \neq 0$ on a donc pour ces deux vecteurs $X^2 = 0$ et $Y^2 = 0$ en utilisa la relation 2.

Soit donc Z un vecteur quelconque de V

Si $ZX \neq XZ$ cela donne $Z^2 = 0$ on suppose donc

$ZX = XZ$ mais la relation (1) compte tenu de $YX - XY \neq 0$ fournit $ZX = XZ = 0$ et aussi bien sur $ZY = YZ = 0$

Soit alors $(X + Z)^2 = X^2 + XZ + ZX + Z^2 = Z^2$

mais $(X + Z)Y = XY \neq YX = Y(X + Z)$ donc (1) donne $(X+Z)^2 = 0$

au total $\forall Z$ $Z \in V$ $Z^2 = 0$

A et B étant deux vecteurs quelconques de V il vient

$(A + B)^2 = A^2 = B^2 = 0$ donc $AB + BA = 0$

Conclusion : (les conditions ainsi obtenues étant suffisantes)
Il y a deux géométries dans lesquelles la relation d'orthogonalité est symétrique : la géométrie orthogonale

où $XY = YX \quad \forall X,\ X \in V \quad , \quad \forall Y,\ Y \in V$,

la géométrie symplictique

où $XY + YX = 0 \quad \forall X,\ X \in V,\ \forall Y,\ Y \in V$

II - ETUDE MATRICIELLE

Si $\dim V = n$ et si $(A_1 \cdots A_n)$ est une base de V le couplage sera déterminé par la connaissance de n^2 scalaires dans K.
$g_{ij} = A_i \circ A_j$ Soit G la matrice qu'ils déterminent
Supposons avoir une seconde base $(B_1 \cdots B_n)$ on note $\overline{g}_{ij}$ les quantités analogues et $\overline{G}$ la matrice correspondante.

on a donc : $$B_i = \sum_{v=1}^{v=n} a_{vi} A_i$$

d'où $$B_i \circ B_j = \left(\sum_{v=1}^{v=n} a_{vi} A_v \right) \circ \left(\sum_{\mu=1}^{\mu=n} a_{\mu j} A_\mu \right)$$

Soit $\overline{g}_{ij} = \sum_{v,\mu} a_{vi}\, a_{\mu j}\, g_{v\mu}$ où (v,μ) varient indépendamment de 1 à n

Si A désigne la matrice (a_{ij}) et A^t la matrice transposée de la précédente, on reconnaît dans cette dernière écriture, le produit matriciel :

$$\overline{G} = A^t.G.A$$

En utilisant les déterminants il vient $\det \overline{G} = (\det A)^2 \times \det G$
On appelle $\det G$ le discriminant de la forme bilinéaire initiale relativement à la base $(A_1 \ldots A_n)$; une géométrie sur V détermine donc le discriminent à un facteur carré près -(facteur non nul car c'est le déterminant de la matrice d'un changement de base)- Par un raisonnement de cette nature, il est possible dans le cas où V est un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel de lui attribuer une

Définition d'une isométrie

on dit qu'une application linéaire bijective τ de V sur lui-même est une isométrie quand :

$\forall X ,\ \forall Y \qquad X.Y. = \tau(X).\tau(Y)$

ou encore quand elle conserve le produit scalaire.
$A_1 \ldots A_n$ étant une base de V que nous supposons fixée, τ est défini par la connaissance des vecteurs $(B_1 \ldots B_n)$ où $B_i = \tau(A_i)$ ces derniers vecteurs formant une base.

On définit de manière classique la matrice de l'endomorphisme τ comme étant celle des coefficients :

$$a_{ij} \quad \text{où} \quad B_i = \sum_{j=i}^{j=n} a_{ji} A_j$$

En reprenant les éléments de la démonstration précédente, on constate que :

$$\overline{g}_{ij} = g_{ij} \quad \text{car} \quad B_i \cdot B_j = \tau(A_i) \cdot \tau(A_j) = A_i \cdot A_j$$
$$\forall i,\ \forall j \ ;\ 1 \ldots n$$

On a donc la relation matricielle :

$$G = A^t.\,G.\,A$$

$\det G = (\det A)^2 \times \det G.$ On pose $\det A = \det \tau$
dans le cas où $\det G \neq 0$ il vient $\det \tau = \pm 1$
Si $\det \tau = +1$ on dit que l'on a une rotation
Si $\det \tau = -1$ on dit que l'on a un retournement
Il reste à interpréter la condition $\det G \neq 0$. On peut la retrouver en étudiant les Noyaux du couplage :

$X \in N_g \quad (=) \quad \forall Y,\ Y \in V \qquad X_\circ Y = 0$

en particulier $X_\circ A_1 = 0$, $i = 1 \ldots n$ et si $X = x_1 A_1 + \ldots + x_n A_n$ $(x_1 \ldots x_n)$ apparaissent comme solution non triviale du système linéaire et homogène

$$x_1\, g_{11} + \ldots + x_n\, g_{n1} = 0$$
$$\text{-------------------}$$
$$x_1\, g_{n1} + \ldots + x_n\, g_{nn} = 0$$

la Condition d'existence de cette solution est donc $\det G \neq 0$
On peut donc énoncer : Dans le cas d'un espace non singulier une isométrie est soit une rotation ($\det \tau = +1$) soit un retournement ($\det \tau = -1$)

Remarque : nous venons d'établir que si N_g se réduit au vecteur nul, il en est de même de N_d

III - PROPRIETES D'UNE GEOMETRIE ORTHOGONALE OU SYMPLECTIQUE SUR V DE DIMENSION n -

Si U est un sous espace de V on note U^* le sous espace orthogonal de U on peut donc noter V^* le radical de V

Il est clair que si U est un sous espace de V $\text{rad}\, U = U \cap U^*$.

Si $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_r$ $r \leq n$ si de plus V_i et V_j sont orthogonaux $i \neq j$ on dit que la Somme est orthogonale et on note $V = V_1 \perp \dots \perp V_r$

Supposons donc avoir une somme directe $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_r$ et sur chaque V_i une structure géométrique ; il est possible de munir V d'une structure géométrique en posant :

Si $X = X_1 + \dots + X_r$ et $Y = Y_1 + \dots + Y_r$

$X \circ Y = X_1 \circ Y_1 + \dots + X_r \circ Y_r$ on vérifie que $X \circ Y$ ainsi défini permet de mettre en évidence un couplage sur V dont les restrictions aux V_i sont les couplages initiaux et faisant chaque V_i orthogonal à chaque V_j, au total la somme peut s'écrire $V = V_1 \perp \dots \perp V_r$

Supposons avoir $V = V_1 + \dots + V_r$ non directe nécessairement mais V_i orthogonal à V_j : Soit $X \in \text{rad}\, V$ $X = X_1 + \dots + X_r$

$X_i \in V_i$

$\forall Y, \; Y \in V_i \qquad X \circ Y = (X_1 + \dots + X_r) \circ Y = X_i \circ Y = 0$

donc $X_i \in \text{rad}\, V_i$

inversement soit $X \in \text{rad}\, V_1 + \dots + \text{rad}\, V_r$

$\forall Y, \; Y \in V \qquad Y = Y_1 + \dots + Y_r$

$X \circ Y = (X_1 + \dots + X_r)\,(Y_1 + \dots + Y_r) = 0$

On a donc le résultat $\text{rad}\, V = \text{rad}\, V_1 + \dots + \text{rad}\, V_r$

Supposons avoir $V = V_1 + \dots + V_r$ avec les mêmes hypothèses que plus haut et aussi chaque V_i non singulier, il vient donc $\text{rad}\, V = 0$ et V est non singulier ; la somme est alors direct car si $A_1 + \dots + A_r = 0$ est une décomposition de zéro

Soit B_i, $B_i \in V_i$ $(A_1 + \dots + A_r) \circ B_i = A_i \circ B_i = 0$

donc $A_i \in \text{rad}\, V_i$ et $A_i = 0$; la somme est directe

On peut remarquer qu'en général une géométrie ne "passe pas au quotient". Cependant si V est singulier et si U est un supplémentaire de $\text{rad}\, V$ dans V on peut écrire :

$V = \text{rad}\, V \oplus U$ d'où $\text{rad}\, V = \text{rad}\, V \oplus \text{rad}\, U$

U est donc non singulier de plus U est naturellement isomorphe à $V/\text{rad}\, V$ // $V/\text{rad}\, V$ on pose :

$(X + \text{rad}\, V) \circ (Y + \text{rad}\, V) = X \circ Y$ qui a un sens comme on peut le vérifier aussitôt. $V/\text{rad}\, V$ est donc muni d'une géométrie orthogonale ou symplectique.

Considérons l'application $\varphi : U \to V/\text{rad}\, V$ qui est un isomorphisme, elle vérifie :

$\varphi(X) \circ \varphi(Y) = (X + \text{rad}\, V) \circ (Y + \text{rad}\, V) = X \circ Y$

U et $V/\text{rad}\, V$ sont donc isométriques

Conclusion : le supplémentaire du radical est un espace non singulier isométrique au quotient $V/\text{rad}\, V$

ESPACE ISOTROPE, VECTEUR ISOTROPE, DIMENSION D'UNE GEOMETRIE SYMPLECTIQUE

On dit que V est un espace isotrope si et seulement si $\forall X, \; X \in V, \; \forall Y, \; Y \in V \quad X \circ Y = 0$

On dit qu'un vecteur X de V est isotrope si $X^2 = 0$

Tous les vecteurs d'une géométrie symplectiquesont isotropes

On se limite à des espaces V non singulier munis d'une géométrie orthogonale ou symplectique.

.../

<u>1er Cas dim V = 1</u> $V = < A >$ si A est un vecteur isotrope
$\forall X$, $X \in V$; $\forall Y$, $Y \in V$ $X = \lambda A$, $Y = \mu A$ $X.Y = \lambda\mu A^2 = 0$
donc A n'est pas un vecteur isotrope et aucun vecteur de V n'est isotrope. V dans ce Cas ne peut qu'être muni d'une géométrie orthogonale.

<u>2ème Cas dim V = 2</u> et supposons que dans V il existe un vecteur M isotrope
Soit A non colinéaire à M $V = < A, M >$
$X = \lambda A + \mu M$ pour tout vecteur X de V
$X^2 = \lambda^2 A^2 + \lambda\mu(AM + MA)$
la condition $X^2 = 0$ fournit tous les couples (λ, μ) avec $\mu \neq 0$ $\lambda \neq 0$ pour lesquels elle est vérifiée.
Examinons de plus la Condition $XM = 1$ elle donne $\lambda\ A.M = 1$
(Il est possible de trouver A non colinéaire à M tel que $A.M \neq 0$ car V est non singulier)
ainsi donc on peut trouver un vecteur N tel que $N^2 = 0$,
$NM = 1$ avec $V = < N,M >$
Si V est muni d'une géométrie orthogonale
$\forall X$, $X \in V$ $X = \lambda N + \mu M$ $X^2 = 2\lambda\mu$
N, M sont les vecteurs directeurs de deux droites vectorielles de vecteurs isotropes et il n'y en a pas d'autres.

On dit que l'on a un plan hyperbolique ($X^2 = C^{st} \Leftrightarrow \lambda\mu = C^{st}$
la sphère unité est ici une hyperbole).

<u>Théorème</u> Si V non singulier est muni d'une géométrie orthogonale, si $\dim V = 2$ et si V possède un vecteur isotrope M , alors V est un plan hyperbolique que l'on peut décrire par deux vecteurs M et N isotropes et $M.N = 1$
en géométrie orthogonale, un plan hyperbolique est la somme directe orthogonale de deux droites vectorielles non singulières.

.../

$V = < M, N >$ avec $M^2 = 0$ $N^2 = 0$ $M.N = 1$ est un plan non singulier :
Considérons $A = M + N$ $B = M - N$ A et B sont alors deux vecteurs indépendants avec $A.B = 0$ A et B n'étant pas isotropes les deux droites vectorielles ne sont pas singulières
$V = < A > \perp < B >$

en géométrie symplictique, une telle situation ne peut avoir lieu : en effet, on suppose avoir :
$V = < A > \oplus < B >$ où $A = \alpha M + \beta N$ $B = \gamma M + \delta N$
la condition d'indépendance linéaire de A et B s'écrit :

$\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ si de plus $A.B = 0$ Il vient :

$\alpha\delta - \beta\gamma = 0$ ce qui est contradictoire - En géométrie symplictique il n'est pas possible de décomposer un plan hyperbolique en somme directe orthogonale de deux droites.

<u>Lemme 1</u> V étant un espace vectoriel non singulier, U est un sous espace vectoriel de V , U est régulier si et seulement si U^* est régulier.
U^* étant le sous espace orthogonal de U
Si U est non singulier $\text{rad } U = U \cap U^* = \{0\}$ comme $U^{**} = U$
$\text{rad } U^* = U \cap U^*$ ce qui donne la preuve.
On peut remarquer que dans ce cas $U \oplus U^*$ est une somme directe orthogonale.

<u>Lemme 2</u> Si E est un K-espace vectoriel de dimension finie, si $\hat{E}$ désigne l'espace vectoriel des formes linéaires de E dans K on a $\dim E = \dim \hat{E}$

<u>Lemme 3</u> U étant un sous espace vectoriel de V , V étant non singulier U^* orthogonal à U , il existe un homomorphisme injectif de V/U^* dans $\hat{U}$ V/U^* est l'espace vectoriel des classes modulo U^* , notées $X + U^*$, on définit la somme de deux classes par $(X + U^*) + (X' + U^*) = (X + X' + U^*)$ et le produit par un scalaire par $\lambda(X + U^*) = (\lambda X + U^*)$

Si $A \in V$ on associe à la classe $A + U^* = \bar{A}$ la forme linéaire $\varphi_{\bar{A}}$ sur U définie par $\varphi_{\bar{A}}(X) = A.X$
et on vérifie que cette définition a un sens et que $\varphi_{\bar{A}}$ est bien une forme linéaire.

$\emptyset : V/U^* \to \hat{U}$ $\emptyset$ est un homomorphisme des structures d'espace vectoriel et :

$\mathrm{Ker}\,\emptyset = \{ \bar{X},\ X \in V,\ \forall Y,\ Y \in U \quad X.Y = 0 \} = \bar{0} = 0 + U^*$

$\emptyset$ est donc une application injective d'où
$\dim V/U^* \leq \dim \hat{U} = \dim U$
ou encore si $\dim V = n$, $\dim U = p$, $\dim U^* = q$ $\quad n - p \leq q$

Lemme 4 V étant non singulier, U étant un sous espace non singulier de V, il vient $\dim V = \dim U + \dim U^*$
Soit $V = U \perp U^*$

En effet U étant non singulier $U \cap U^* = \{0\}$ $U \oplus U^*$ est donc un sous espace vectoriel propre de V d'où :
$p + q \leq n$ avec $p + q \geq n$ il vient donc $p + q = n$
soit $V = U \perp U^*$

Etudions un espace V, $\dim V = n$, V non singulier, muni d'une géométrie symplectique.
On peut trouver un couple de vecteurs A, B tels que
$A \circ B = 1$. $P_1 = < A, B >$ étant le plan hyperbolique non singulier associé on a $V = P_1 \perp P_1^*$ où P_1^* est non singulier etc ... $V = P_1 \perp P_2 \perp \ldots \perp P_r \perp V'$

$\dim V' = 1$ est impossible car V' est non singulier donc
$V' = \{ 0 \}$

__Théorème__ : Un espace V muni d'une géométrie symplectique non singulière est de dimension paire ; c'est une somme directe orthogonale de plans hyperboliques.

.../...

Si V est un espace de dimension n, non singulier, muni d'une géométrie orthogonale, on peut trouver un vecteur A non isotrope on pose $D_1 = < A >$

et $V = D_1 \perp D_1^*$ D_1 étant non singulier D_1^* est non singulier..
d'où $V = D_1 \perp D_2 \perp \ldots \perp D_n$

__Théorème__ : Un espace V muni d'une géométrie orthogonale non singulière est une somme directe orthogonale de droites non singulières.

LES CATEGORIES DANS L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE ? POURQUOI PAS ?

-=-=-=-

Léonce FOURES - Faculté des Sciences Saint-Charles

(Exposé fait à la Régionale de l'A.P.M.E.P. le 11 Décembre 1974)

I - QUELQUES PROBLEMES CLASSIQUES

****

1°/ CONSTRUCTION DE Z A PARTIR DE N^+.

Ce problème de construction peut être posé de la manière suivante :

$$\begin{tikzcd} N^+ \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "f"'] & X \arrow[d, "\varphi"] \\ & G \end{tikzcd}$$

Sur N^+ est déjà définie, par recurrence, une addition commutative et associative, définissant donc une structure de semi-groupe.

Soit G un groupe commutatif quelconque et $f : N^+ \to G$ préservant l'addition.

En notant additivement l'addition de G et celle de N^+ : $f(n+m) = f(n) + f(m)$.

Existe t-il un groupe commutatif X et une application $j : N^+ \to X$ préservant l'addition (donc un homomorphisme de semi-groupe, du semi-groupe N^+ au semi-groupe sous-jacent au groupe X) tels qu'il existe, quels que soient G et f, un homomorphisme de groupe unique $\varphi : X \to G$ vérifiant $\varphi \circ j = f$?

$$\begin{tikzcd} N^+ \arrow[r, hook, "j"] \arrow[dr, "f"'] & Z \arrow[d, "\varphi"] \\ & G \end{tikzcd}$$

On sait construire un tel système : le groupe des entiers Z et l'inclusion $j : N \hookrightarrow Z$ satisfont à la condition demandée pour X et j respectivement.

__Vérification :__ Si $\varphi : Z \to G$ existe vérifiant $\varphi(j(n)) = \varphi(n) = f$ on doit avoir : $\varphi(0) = 0$ puisque φ est un homomorphisme de groupe préservant l'élément neutre.

$\forall\, n > 0$, $n = j(n)$ $\quad \varphi(n) = \varphi(j(n)) = f(n)$

$\forall\, n < 0$ $\quad \varphi(n) + \varphi(-n) = \varphi(n+(-n)) = \varphi(0) = 0$

donc $\varphi(n) = -\varphi(-n) = -f(-n)$

__Unicité__ de φ

__Existence de φ.__

On définit $\varphi : Z \to G$ par $\begin{cases} \varphi(0) = 0 \\ \forall\, n > 0 \quad \varphi(n) = f(n) \\ \forall\, n < 0 \quad \varphi(n) = -f(-n) \end{cases}$

La vérification du fait que φ est un homomorphisme, c'est à dire $\varphi(n+m) = \varphi(n) + \varphi(m)$ n'est plus qu'une affaire technique :

si n et m sont tous deux > 0 $\quad \varphi(n+m) = f(n+m) = f(n) + f(m) = \varphi(n) + \varphi(m)$

si $n < 0$ et $m > 0$ avec $m > -n$ $\quad \varphi(n+m) = \varphi(m-(-n)) = f(m) - f(-n) = \varphi(m) + \varphi(n)$

en remarquant que $f(a-b) = f(a) - f(b)$ dans le cas où $0 < b < a$ résulte que $f(a) = f(a-b) + f(b)$

si $n < 0$ et $m > 0$ avec $m < -n$ $\quad \varphi(n+m) = \varphi(m-(-n)) = -f((-n)-m) = -(f(-n)-f(m)) = \varphi(n) + \varphi(m)$

si $n < 0$ et $m < 0$ $\quad \varphi(n+m) = -f(-(n+m)) = -f((-n)+(-m)) = \varphi(n) + \varphi(m)$

Les cas où $m = 0$ ou $n = 0$ se résolvent immédiatement de sorte que φ est bien un homomorphisme de groupe.

2°/ CONSTRUCTION DE Q^+ A PARTIR DE N^+.

Ce problème se pose en termes analogues au précédent à partir de la structure de monoïde (multiplicatif) de N^+.

$$\begin{tikzcd} N^+ \arrow[r, hook, "j"] \arrow[dr, "f"'] & Q^+ \arrow[d, "\varphi"] \\ & G \end{tikzcd}$$

Soit G un groupe commutatif quelconque et $f : N^+ \to G$ préservant la multiplication et l'élément neutre multiplicatif

$f(n\,m) = f(n)\,f(m)$ et $f(1) = \varepsilon$ élément neutre de

Existe-t-il un groupe commutatif X et une application $j : N^+ \to X$ homomorphisme de monoïde tel qu'il existe un homomorphisme de groupe unique $\varphi : X \to G$ vérifiant $\varphi \circ j = f$ quels que soient G et f ?

Le groupe Q^+ des nombres rationnels positifs (classes de fractions par exemple) avec l'inclusion $j : N^+ \to Q^+$ satisfont à cette condition.

Le problème est analogue au précédent à cela près que la structure définie sur N^+ par la multiplication est plus riche que celle définie par l'addition puisqu'il y a dans N^+ un élément neutre multiplicatif. La solution de ce problème est identique à celle du problème précédent la multiplication remplaçant l'addition, $\varphi(j(1)) = \delta$ étant compatible avec $f(1) = \delta$

3°/ CONSTRUCTION DE $\mathbb{Q}$ A PARTIR DE $\mathbb{Z}$.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r, hook, "j"] \arrow[dr, "f"'] & \mathbb{Q} \arrow[d, "\varphi"] \\ & K \end{tikzcd}$$

Recherche d'un corps X et d'un homomorphisme d'anneau $j : \mathbb{Z} \to X$ tel que quels que soient le corps K et l'homomorphisme d'anneau $f : \mathbb{Z} \to K$, il existe un homomorphisme de corps unique $\varphi : X \to K$ tel que $\varphi \circ j = f$.
Le corps des nombres rationnels avec l'inclusion $j : \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ satisfont aux conditions recherchées pour X et j respectivement.

Que $\varphi : \mathbb{Q} \to K$ soit alors très particulier est lié à la structure de corps mais non au problème posé.

Remarque : Dans les trois exemples ci-dessus, j se trouve être une inclusion, le problème peut donc être considéré comme celui d'une extension de $\mathbb{N}^+$ (1° 2°) ou de $\mathbb{Z}$ en un ensemble muni d'une structure plus riche.

4°/ CONSTRUCTION DE L'ANNEAU DES POLYNOMES A n INDETERMINEES SUR UN ANNEAU COMMUTATIF UNITAIRE DONNE A .

$$\begin{tikzcd} A \cup \{t_1,\dots,t_n\} \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "f"'] & A[x_1,\dots,x_n] \arrow[d, "\varphi"] \\ & B \end{tikzcd}$$

On recherche un anneau commutatif unitaire X et une application

$$j : A \cup \{t_1,\dots,t_n\} \to X$$

dont la restriction $\frac{j}{A} : A \to X$ soit un homomorphisme d'anneau, tels que quels que soient l'anneau commutatif unitaire B et l'application $f : A \cup \{t_1,\dots,t_n\} \to B$ dont la restriction $\frac{f}{A} : A \to B$ est un homomorphisme d'anneau, il existe un unique homomorphisme d'anneau $\varphi : X \to B$ vérifiant $\varphi \circ j = f$?

L'anneau des polynômes à n indéterminées $A[x_1,\dots,x_n]$ avec l'injection $j : \begin{array}{l} a \mapsto \bar{a} \\ t_i \mapsto 1x_i \end{array}$ où $\bar{a}$ est un polynôme de degré 0 (appelé aussi polynôme constant par un usage regrettable) satisfait aux conditions recherchées pour X et j respectivement.

5°/ COMPLETION D'UN ESPACE METRIQUE .

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "f"'] & X \arrow[d, "\varphi"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

Soit E un espace métrique. On recherche un espace métrique complet X et une application uniformément continue $j : E \to X$ tels que pour tout espace métrique complet Y et toute application $f : E \to Y$ uniformément continue, $\exists\, \varphi : X \to Y$ unique, uniformément continue vérifiant $\varphi \circ j = f$.

On sait que ce problème admet une solution dans laquelle $j : E \to X$ est une application injective uniformément continue, telle que $j(E)$ soit dense dans X.

Comme cas particulier de ce problème on reconnait la recherche de $\mathbb{R}$ à partir de $\mathbb{Q}$.

6°/ BASE D'UN ESPACE VECTORIEL .

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "f"'] & X \arrow[d, "\varphi"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

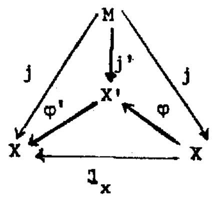
Soit un ensemble A. Soit K un corps fixe. Existe-t-il un espace vectoriel X sur le corps K et une application $j : A \to X$ telle que $\forall$ espace vectoriel Y (sur le corps K) il existe un homomorphisme d'espace vectoriel (c'est à dire une application linéaire) unique $\varphi : X \to Y$ tels que $\varphi \circ j = f$.

Ce problème est souvent considéré d'une manière en quelque sorte inverse : X étant donné on recherche un sous-ensemble $A \subset X$ tel que la propriété précédente ait lieu avec pour application $j : A \to X$ l'inclusion on dit alors que A est une base de l'espace X.

Tous ces exemples procèdent d'une recherche d'une factorisation d'une application $f : M \to Y$ à travers une application fixe $j : M \to X$ et une application $\varphi : X \to Y$ préservant une structure en général plus riche que celle de M. M est muni d'une structure pauvre, X et Y sont munis d'une structure riche de même nature, admettant une structure pauvre sous-jacente du même type que celle de M.

Evidemment f et j préservent la structure pauvre, φ préserve la structure riche .

Le problème est alors celui de la recherche de X et j pouvant servir à factoriser d'une manière unique toute application . La construction de X et j si elle peut se faire, est liée aux structures en présence ; par contre, d'autres propriétés peuvent être déduites de la nature du problème général : X est en particulier déterminé dans tous les cas à un isomorphisme près (un isomorphisme riche bien entendu) comme il ressort du diagramme suivant par lequel on établit $\varphi' \circ \varphi = \mathcal{I}_X$ et de la même manière $\varphi \circ \varphi' = \mathcal{I}_{X'}$.



Les propriétés de X dans chacun des exemples précédents sont de deux sortes :

* celles qui sont des conséquences de la cohérence du diagramme général avec la condition d'unicité pour φ .
* celles qui dépendent des structures particulières en cause .

La théorie des catégories s'intéresse aux propriétés du premier type valable donc pour n'importe quelle structure des objets M, X, Y et qui sont de ce fait appelées universelles .

La comparaison des six exemples précédents appelle d'autres remarques : des problèmes semblables peuvent être posés en des termes très voisins dans différents domaines des mathématiques et il est a priori pensable de "transporter" certaines propriétés d'un domaine mathématique dans un autre par un processus convenable, comme un homomorphisme "transporte" certaines relations d'un groupe dans un autre groupe .

La théorie des catégories propose donc d'établir des ponts entre différents domaines mathématiques, de préciser les propriétés "transportables", de dégager les propriétés entièrement indépendantes des structures, de dégager d'autres propriétés partagées par des larges classes de structures .

II - CATEGORIES

Une catégorie $\mathcal{C}$ est déterminée par :

$\boxed{1}$ Une classe d'objets que nous désignerons par des lettres majuscules A,B,C,...,X,Y,Z... Une classe peut être envisagée comme un "ensemble élargi" au sens suivant : les éléments d'une classe sont de deux sortes ; la relation d'appartenance $a \in b$ ne pouvant être envisagée que si a est de la première sorte . Cette restriction a pour effet de permettre de considérer en particulier la classe de tous les ensembles sans s'exposer aux risques des paradoxes de Russell ...

$\boxed{2}$ A tout couple (A,B) d'objets de $\mathcal{C}$ est associé un ensemble $\mathcal{C}(A,B)$ appelé l'ensemble des morphismes de domaine (ou de source) A et d'image (ou de but) B . On dit aussi morphisme de A vers B . On écrit $f \in \mathcal{C}(A,B)$, ou $f : A \to B$, ou $A \xrightarrow{f} B$.

$\boxed{3}$ A tout triplet (A,B,C) d'objets de $\mathcal{C}$ est associée une loi de *composition* :

$$\mathcal{C}(A,B) \times \mathcal{C}(B,C) \to \mathcal{C}(A,C)$$

si $f : A \to B$, $g : B \to C$ on note $gf : A \to C$ la composition de f et g .

Cette composition s'écrit naturellement :

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \; = \; A \xrightarrow{g \cdot f} C$$

(la notation fg au lieu de gf est aussi utilisée et paraît plus conforme aux habitudes de lecture et d'écriture) .

Trois axiomes lient objets et morphismes pour réaliser la structure de catégorie :

C_1 $\mathcal{C}(A,B) \cap \mathcal{C}(X,Y) = \emptyset$ sauf si $A = X$ et $B = Y$

C_2 La composition est associative .
Soient $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$ $h(gf) = (hg)f$

C_3 A chaque objet A de $\mathcal{C}$ est associé un morphisme $\mathcal{I}_A : A \to A$ appelé identité (sur A) tel que
$\forall f : A \to B$ et $\forall g : C \to A$ $f\,\mathcal{I}_A = f$ et $\mathcal{I}_A\, g = g$

si $\mathcal{I}'_A : A \to A$ possède les mêmes propriétés que $\mathcal{I}_A$ on obtient :

$$\mathcal{I}'_A \mathcal{I}_A = \mathcal{I}_A \quad \text{(propriété de } \mathcal{I}'_A)$$

$$\mathcal{I}'_A \mathcal{I}_A = \mathcal{I}'_A \quad \text{(propriété de } \mathcal{I}_A)$$

Cette démonstration rappelle celle de l'unicité de l'élément neutre dans un groupe : on verra un peu plus loin que la ressemblance est beaucoup plus profonde .

$f : A \to B$ est inversible $\Leftrightarrow \exists\, g : B \to A$ tel que $gf = \mathcal{I}_A$ et $fg = \mathcal{I}_B$
si $\mathcal{C}(A,B)$ contient un morphisme inversible, on dit que A et B sont équivalents : $A \sim B$.

Evidemment ces définitions sont fortement inspirées par le comportement des applications transportant des structures ; on doit cependant remarquer que les éléments sur lesquels opèrent les applications n'interviennent jamais dans les définitions et que les morphismes ne sont pas nécessairement des applications .

Exemples :

$\boxed{\text{I}}$ 1. Catégorie Ens (ou $\mathfrak{S}$) . Les objets sont les ensembles, les morphismes sont les applications . La composition gf des morphismes $f : A \to B$ et $g : B \to C$ est la composition usuelle $gf = g \circ f$ mais n'est réalisable dans la catégorie Ens que si l'ensemble de définition de g est l'ensemble dans lequel f prend ses valeurs, alors que $g \circ f$ est défini si $\operatorname{im} f \subset \operatorname{dom} g$.

2 Catégorie Top des espaces topologiques et des applications continues .

3 Catégorie $\text{Top}_\star$ des espaces topologiques munis d'un point de base, et des applications continues préservant les points de base

(Remarquer que dans ces deux dernières catégories les morphismes inversibles ne sont pas les morphismes bijectifs, mais les homéomorphismes .

5 Catégorie $\mathcal{A}b$ des groupes commutatifs et des homomorphismes de groupes .

6 Catégorie $\mathcal{V}_k$ des espaces vectoriels sur un corps K

Dans ces trois dernières catégories ainsi que dans la première, les morphismes inversibles sont les morphismes bijectifs.

$\boxed{\text{II}}$ Soit G un groupe et $\mathcal{C}(G)$ la catégorie ayant G pour unique objet et pour morphismes les translations à gauche par les éléments de G .
$\alpha \in \mathcal{C}(G,G) \Leftrightarrow \exists\, a \in G$ tel que $\alpha : G \to G$ soit l'homomorphisme de groupe défini par :

$$\forall\, x \in G \quad \alpha(x) = ax$$

α détermine a et a détermine α de sorte qu'une bijection peut être mise en évidence entre l'ensemble des morphismes de $\mathcal{C}(G)$ et G lui-même .Cette bijection associe à la composition des morphismes la multiplication dans G et associe à l'identité dans $\mathcal{C}(G,G)$, l'élément neutre de G . Les axiomes de groupe de G assurent à $\mathcal{C}(G)$ une structure de catégorie, dans laquelle tous les morphismes sont inversibles .

Cet exemple montre que la structure de catégorie généralise celle de groupe .

$\boxed{\text{III}}$ Soit S un ensemble ordonné par $\leq$. On forme $\mathcal{C}(S)$ ayant pour objets les éléments de S .
Si $x,y \in S$, $(\mathcal{C}(S))\,(x,y) = \emptyset$ sauf si $x \leq y$, dans ce cas $(\mathcal{C}(S))\,(x,y)$ est l'ensemble dont l'élément unique est le symbole $x \leq y$.

La loi de composition dans $\mathcal{C}(S)$ résulte de la transitivité de la relation d'ordre :

$$(y \leq z)\,(x \leq y) = (x \leq z)$$

L'existence des identités résulte de la reflexivité de la relation d'ordre .

Dans cette catégorie les morphismes ne sont plus des

Objets nuls :

On sait le rôle important joué par les homomorphismes dits triviaux, par les groupes triviaux ou par les applications constantes . Les définitions de ces homomorphismes particuliers font intervenir certains éléments particuliers dans les groupes ou les espaces considérés .

Notre bojectif est de codifier cette notion en termes de morphismes seulement de manière à pouvoir employer le même langage dans les diverses catégories .

Définition . Un objet $O \in \mathcal{C}$ est un objet nul, ou trivial, si
$\forall$ objet $X \in \mathcal{C}$, $\mathcal{C}(X,O)$ et $\mathcal{C}(O,X)$ sont des singletons .
Si une catégorie possède un objet nul, soit O' un autre objet nul .
$\mathcal{C}(O,O') = \{\alpha\}$, $\mathcal{C}(O',O) = \{\alpha'\}$ et $\alpha'\alpha \in \mathcal{C}(O,O) = \{\mathcal{I}_O\}$ et de même $\alpha\alpha' \in \mathcal{C}(O',O') = \{\mathcal{I}_{O'}\}$ d'où $\alpha\alpha' = \mathcal{I}_{O'}$ et $\alpha'\alpha = \mathcal{I}_O$ de sorte que $O \sim O'$.
Si $\mathcal{C}$ possède un objet nul, $\forall$ couple d'objets (X,Y) , $\mathcal{C}(X,Y)$ contient un morphisme particulier O_{XY} que l'on peut définir par la composition $X \to O \to Y$.

Cette définition dépend de l'objet nul choisi comme intermédiaire ; on se propose de démontrer que O_{XY} ne dépend pas de l'objet nul utilisé :

$$\begin{tikzcd} & O \arrow[dr, "g"] \arrow[dd, shift right, "\alpha"'] & \\ X \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "f'"'] & & Y \\ & O' \arrow[ur, "g'"'] \arrow[uu, shift right, "\alpha'"'] & \end{tikzcd}$$

Dans le diagramme ci-contre les flèches représentent exclusivement des morphismes de la catégorie $\mathcal{C}$.
$f' = \alpha f$ puisque $\alpha f \in \mathcal{C}(X,O') = \{f'\}$; de même $g' = g\alpha'$ de sorte que

$$g'f' = g\alpha'\alpha f = g\mathcal{I}_O f = gf$$

Le morphisme O_{XY} ne dépend donc pas de l'objet nul servant à le définir . O_{XY} est le morphisme trivial ou nul .

Soient $f : W \to X$ et $g : Y \to Z$

$$O_{XY} f \ : \ W \to X \to O \to Y = W \to O \to Y = O_{WY}$$

$$g O_{XY} \ : \ X \to O \to Y \to Z = X \to O \to Z = O_{XZ}$$

Les catégories $\mathcal{G}$, $\mathcal{A}b$, $\mathcal{V}_k$ ont des objets nuls et les morphismes nuls sont aussi dits triviaux .

Dans Ens, $Ens(\emptyset,X)$ est un singleton dont l'élément unique est l'inclusion $\emptyset \hookrightarrow X$ (on sait que $\emptyset \in$ Ens et que $\emptyset \subset X$ quel que soit X ; si $Y \subset X \cdot \exists$ une application inclusion bien définie, c'est à dire dont on connait la valeur pour chaque élément de Y . Il est naturel de considérer l'inclusion comme un morphisme même dans le cas où le domaine de définition est $\emptyset$, bien que dans ce cas le morphisme "inclusion ne soit plus défini comme une application) .
$Ens(X,\{p\})$ est un singleton dont l'élément unique est l'application constante $\overline{p}$ définie par : $\forall x \in X \ \overline{p}(x) = p$.

La situation décrite dans Ens conduit à de nouvelles définitions :

$I \in \mathcal{C}$ est un objet initial si $\forall$ objet X $\mathcal{C}(I,X)$ est un singleton
$T \in \mathcal{C}$ est un objet terminal si $\forall$ objet X $\mathcal{C}(X,T)$ est un singleton

Un objet nul est donc à la fois objet initial et objet terminal . Si $\mathcal{C}$ possède un objet nul, soit I un objet initial . $\mathcal{C}(I,O) = \{\alpha\}$, $\mathcal{C}(O,I) = \{\beta\}$

$$I \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightleftarrows}} O \qquad \beta\alpha = \mathcal{I}_I \ \text{puisque} \ \beta\alpha \in \mathcal{C}(I,I) = \{\mathcal{I}_I\}$$
$$\alpha\beta = \mathcal{I}_O \ \text{puisque} \ \alpha\beta \in \mathcal{C}(O,O) = \{\mathcal{I}_O\}$$

de sorte que tout objet initial est équivalent à tout objet nul ; de même tout objet terminal est équivalent à tout objet nul .

Il en résulte qu'il n'y a pas d'objet nul dans Ens puisque $\{p\}$ et $\emptyset$ ne peuvent être équivalents, car $Ens(\{p\},\emptyset) = \emptyset$.

Pour les mêmes raisons il n'y a pas d'objet nul dans Top alors qu'il y en a dans $Top_\star$.

Monomorphismes - Epimorphismes .

Un morphisme $\mu : X \to Y$ dans une catégorie $\mathcal{C}$ est monique, ou est un monomorphisme si $\forall \alpha,\beta \in \mathcal{C}(W,X)$ $\mu\alpha = \mu\beta \Rightarrow \alpha = \beta$

On vérifie que dans la catégorie Ens la notion de monomorphisme est identique à la notion d'injectivité :

★ hyp. μ est un monomorphisme et $\mu(x) = \mu(x')$
soient $\alpha,\beta : W \to X$ définis par $\forall\, w \in W \quad \alpha(w) = x$, $\beta(w) = x'$
on a bien $\mu \circ \alpha(w) = \mu \circ \beta(w) \quad \forall\, w \in W$ c'est à dire $\mu\alpha = \mu\beta$
dans Ens . Donc $\alpha = \beta$ et en particulier $x = x'$.

★ hyp. $\mu : X \to Y$ est injectif et $\mu\alpha = \mu\beta$ soit $w \in W$
$\mu(\alpha(w)) = \mu\alpha(w) = \mu\beta(w) = \mu(\beta(w))$ et puisque μ est injectif
$\alpha(w) = \beta(w)$ c'est à dire $\alpha = \beta$

Cette proposition est un théorème dans la catégorie Ens mais ne s'étend pas à toutes les catégories résultant de l'enrichissement de la structure de Ens .

La notion de monomorphisme a un sens dans toute catégorie et généralise ainsi la notion d'injectivité ... mais il n'est pas dit que ce soit la seule généralisation de cette notion .

Un morphisme $\delta : X \to Y$ dans une catégorie $\mathcal{C}$ est épique, ou est un épimorphisme si $\forall\, \alpha,\beta \in \mathcal{C}(Y,Z) \quad \alpha\delta = \beta\delta \Rightarrow \alpha = \beta$.

On vérifie que dans la catégorie Ens la notion d'épimorphisme est identique à la notion de surjectivité :
$\delta : X \to Y$ est surjectif $\Leftrightarrow$ $(\forall\, y \in Y ,\ \exists\, x \in X$ tel que $\delta(x) = y)$

★ hyp. δ est un épimorphisme . Soit $Z = \{a,b\}$. Soit $\alpha : Y \to Z$
définie par $\forall\, y \in Y \quad \alpha(y) = a$. Soit $\beta : Y \to Z$ défini
par $\forall\, y \in \delta(X) \quad \beta(y) = a$ et $\forall\, y \notin \delta(X) \quad \beta(y) = b$
de sorte que $\alpha\delta = \beta\delta$ donc $\alpha = \beta$ ce qui exige $\delta(X) = Y$
c'est à dire δ est surjectif .

★ hyp. δ est surjectif et $\alpha\delta = \beta\delta$. Soit $y \in Y$ donc $\exists\, x \in X$
tel que $y = \delta(x) \quad \alpha(y) = \alpha\delta(x) = \beta\delta(x) = \beta(y)$ c'est à dire
$\alpha = \beta$

La notion d'épimorphisme a un sens dans toute catégorie et généralise ainsi la notion de surjectivité . Ici encore il n'est pas dit que cette notion soit la seule généralisation de la notion de surjectivité .

On ne peut manquer de remarquer une similitude entre les notions de monomorphisme et d'épimorphisme, et cette ressemblance sera examinée plus loin .

Ajoutons une proposition <u>vraie</u> <u>dans</u> <u>toute</u> <u>catégorie</u> .

‖ si $\delta\lambda : W \xrightarrow{\lambda} X \xrightarrow{\delta} Y$ est un épimorphisme, δ est un épimorphisme.

$X \xrightarrow{\delta} Y \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}} Z$ si $\alpha\delta = \beta\delta$, $(\alpha\delta)\lambda = (\beta\delta)\lambda$ ou encore
$\alpha(\delta\lambda) = \beta(\delta\lambda)$ donc $\alpha = \beta$

De la même manière : si $\lambda\mu : X \xrightarrow{\mu} Y \xrightarrow{\lambda} Z$ est un monomorphisme, μ est un monomorphisme .

$W \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}} X \xrightarrow{\mu} Y$ si $\mu\alpha = \mu\beta \quad \lambda(\mu\alpha) = \lambda(\mu\beta)$ ou encore
$(\lambda\mu)\alpha = (\lambda\mu)\beta$ donc $\alpha = \beta$.

On peut être tenté d'appeler isomorphisme un morphisme à la fois monique et épique ;or ces morphismes ne sont pas inversibles dans toute catégorie, bien qu'il le soient de toute évidence dans Ens . Il est peut être préférable d'appeler isomorphismes les morphismes inversibles .

III - FONCTEURS
****

Dans une catégorie $\mathcal{C}$ les morphismes établissent des connexions entre objets de la catégorie .La théorie des catégories a pour ambition d'établir un langage utilisable dans plusieurs domaines des mathématiques ; on est donc conduit à "transporter" une catégorie dans une autre en préservant la structure de catégorie, à la manière d'un homomorphisme (de groupe) qui "transporte" un groupe dans un autre en préservant la structure de groupe .

Une des illustrations les plus connues de ces connexions entre catégories différentes est fournie par le groupe fondamental établissant une relation entre $Top_\star$ et $\mathcal{G}$, associant à un espace pointé un groupe et à une application continue respectant les points de base, un homomorphisme de groupe .

On se propose donc de préciser une notion permettant de "passer" d'une catégorie dans une autre tout en préservant la structure de catégorie. Les conditions suivantes sont alors naturelles :

Un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est une règle qui associe à tout objet A de $\mathcal{C}$ un objet $X = F(A) \in \mathcal{D}$ et à tout morphisme $f \in \mathcal{C}(A,B)$ un morphisme $F(f) \in \mathcal{D}(F(A),F(B))$ tels que :

FO 1 $\quad F(gf) = F(g)\,F(f)$

FO 2 $\quad F(1_A) = 1_{F(A)}$

Un foncteur se comporte donc comme une fonction à cela près que son "domaine de définition" est une classe plus large qu'un ensemble .

On peut schématiser l'action d'un foncteur par un faux-diagramme :

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, mapsto] \arrow[dd] & F(A) \arrow[dd] \\
f \arrow[r, mapsto] & F(f) \\
B \arrow[r, mapsto] & F(B)
\end{tikzcd}$$

Ce genre de faux-diagramme, souvent simplifié par suppression de la flèche centrale facilite la compréhension de l'action d'un foncteur, mais il ne saurait être question de cohérence ; les flèches horizontales ne sont pas des morphismes, f et $F(f)$ sont des morphismes dans des catégories différentes .

Les foncteurs se comportant comme des fonctions, il est naturel de les composer :

Soient $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ $\quad G : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$

tout naturellement $G \circ F$ ou $GF : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ est défini par $\begin{cases} G \circ F(A) = G(F(A)) \\ G \circ F(f) = G(F(f)) \end{cases}$

Les notions de foncteurs inversibles et de catégories équivalentes sont alors naturelles .

On peut être tenté d'introduire la Catégorie des Catégories dont :

- les objets seraient les catégories : $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}, \dots$
- les morphismes seraient les foncteurs : $F\ \mathcal{C} - \mathcal{D}, \dots$

Cette "surcatégorie" ne s'introduit pas sans risques, de type ensembliste :

- Les catégories sont-elles les éléments d'une classe ?
- Est-ce que la famille des foncteurs de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{D}$ est un ensemble ?

Ces difficultés conduisent à se restreindre aux "petites catégories" pour lesquelles la classe des objets est un ensemble . Les réponses sont alors affirmatives aux deux questions précédentes : chaque catégorie est alors un ensemble $\mathcal{M}$ de morphismes (les morphismes identité étant identifiables aux objets) avec une loi de composition qui est un sous-ensemble de $\mathcal{M}^{\mathcal{M} \times \mathcal{M}}$. Il en résulte que les petites catégories sont des éléments de la classe des ensembles .

La réponse à la deuxième question est encore plus évidente . Il est donc possible d'introduire la catégorie des petites catégories mais cette catégorie est insuffisante pour les besoins des mathématiques . La question est cependant pleine d'intérêts et suscite de nombreuses recherches.

Exemples .

Foncteur d'Abelisation. $\quad F : \mathcal{G} \to \mathcal{A}b \qquad F(G) = \dfrac{G}{G'}$ où G' est le sous-groupe commutateur .

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\nu"'] & H \arrow[d, "\eta"] \\
\frac{G}{G'} \arrow[r, "\tilde{f}"] & \frac{H}{H'}
\end{tikzcd}$$

$f : G \to H$ induit $\tilde{f} : F(G) \to F(H)$ d'où la règle $F(f) = \tilde{f}$.

Le diagramme ci-contre, cohérent, assurant l'existence de $\tilde{f}$ est écrit dans la catégorie $\mathcal{G}$, mais la ligne inférieure a un sens dans $\mathcal{A}b$.

Foncteur libre . $\quad F : \mathrm{Ens} \to \mathcal{V}_k$.

Soit $A \in \mathrm{Ens}$ et $F(A)$ l'espace vectoriel des fonctions définies sur A à valeurs dans K et nulles pour presque tous les éléments de A (si on se borne à la catégorie des ensembles finis cette restriction est évidemment superflue).

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\lambda"] \arrow[dr, "\varphi"'] & F(A) \arrow[d, "\Phi"] \\ & V \end{tikzcd}$$

Soit $\lambda : A \to F(A)$ définie par :

$$(\lambda(a)(b) = \begin{cases} 0 & \text{si } b \neq a \\ 1_k & \text{si } b = a \end{cases}$$

On vérifie que $\{\lambda(a)\}_{a \in A}$ est une base pour l'espace vectoriel $F(A)$.

Le système $(F(A), \lambda : A \to F(A))$ possède une propriété du type étudié dans la première partie : soit $\varphi : A \to V$ où V est un espace vectoriel sur K (φ est un morphisme de la catégorie Ens) .

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "\varphi = \mu o f"] & F(A) \arrow[d, "\Phi"] \\ B \arrow[r, "\mu"'] & F(B) \end{tikzcd}$$

Il existe un morphisme unique $\Phi : F(A) \to V$ (homomorphisme d'espaces vectoriels sur K) tel que $\Phi o \lambda = \varphi$, qu'on écrit $\Phi\lambda = \varphi$ dans Ens.

Soit B un ensemble et $f : A \to B$ une application . Soit $\mu : B \to F(B)$ défini comme λ .
$\mu o f = \varphi : A \to F(B)$ détermine donc
$\Phi = F(f) : F(A) \to F(B)$ qui est un morphisme dans Ens mais aussi dans $\mathcal{V}_k$. On vérifie que F est bien un foncteur $F : \text{Ens} \to \mathcal{V}_k$ que l'on appelle le foncteur libre .

L'étude précédente revient à exprimer que si A et B sont des bases respectives des espaces vectoriels $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ toute application $f : A \to B$ s'étend en un homomorphisme d'espaces vectoriels $\emptyset : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$.

On peut envisager d'autres types de foncteurs libres, par exemple $F : \text{Ens} \to \mathcal{G}$ ou $F : \text{Ens} \to \mathcal{A}b$ qui jouent un rôle fondamental en mathématiques .

__Foncteur d'oubli .__ *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie dont les objets sont des* ensembles, et les morphismes sont des applications donc $\mathcal{C}$ est une catégorie dont la structure est plus riche que celle de Ens .

Si A est un objet de $\mathcal{C}$, soit $F(A)$ l'ensemble support de l'ensemble structuré A objet de $\mathcal{C}$. Si $f \in \mathcal{C}(A,B)$ soit $F(f)$ l'application, morphisme de Ens , définie par

$\forall a \in A \quad (F(f)(a) = f(a)$ de sorte que $F(f) : F(A) \to F(B)$

F est un foncteur $F : \mathcal{C} \to \text{Ens}$ appelé foncteur d'oubli pour exprimer qu'il "oublie" la structure par laquelle $\mathcal{C}$ est plus riche que Ens .

On peut envisager d'autres foncteurs d'oubli, par exemple $F : \mathcal{A} \to \mathcal{A}b$ où $\mathcal{A}$ est la catégorie des anneaux et des homomorphismes d'anneau . Ces homomorphismes d'anneau sont en particulier des homomorphismes de groupe commutatif .

De même qu'un homomorphisme appauvrit un groupe (deux éléments distincts peuvent avoir la même image et ne sont plus séparables dans le groupe image) , de même un foncteur appauvrit généralement une catégorie . On peut tenter de classer les foncteurs d'une catégorie $\mathcal{C}$ dans une catégorie $\mathcal{D}$ par les propriétés qu'ils détruisent . On est conduit à transformer un foncteur dans un autre, à définir l'équivalence de deux foncteurs etc...

IV - DUALITE

****

Ce mot est très souvent employé, parfois d'ailleurs avec un sens précis comme c'est le cas dans la catégorie des espaces vectoriels , malheureusement aussi d'une manière suggestive manquant de justification . La théorie des catégories permet de donner un sens précis à cette notion et rend compte également des limites dans lesquelles une proposition peut être dualisée .

__Catégorie opposée .__

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie . On définit $\mathcal{C}^{op}$ de la manière suivante :

★ les objets de $\mathcal{C}^{op}$ sont ceux de $\mathcal{C}$.

★ quels que soient les objets A et B $\mathcal{C}^{op}(A,B) = \mathcal{C}(B,A)$

★ soient $f : A \to B$ et $g : B \to C$ des morphismes de $\mathcal{C}^{op}$.
On notera $g \star f$ la composition dans $\mathcal{C}^{op}$, pour la distinguer de la composition dans $\mathcal{C}$. $f : B \to A$, $g : C \to B$ dans $\mathcal{C}$ donc fg existe dans $\mathcal{C}$ et $fg : C \to A$ dans $\mathcal{C}$ donc $fg : A \to C$ dans $\mathcal{C}^{op}$. On définit $g \star f = fg$.

Ces définitions sont bien celles d'une catégorie $\mathcal{C}^{op}$ *dite* opposée à $\mathcal{C}$ ou duale de $\mathcal{C}$.

Cette catégorie est introduite artificiellement et bien souvent n'a pas d'autre "réalisation" que $\mathcal{C}$ avec laquelle elle a des rapports étroits. On remarque $(\mathcal{C}^{op})^{op} = \mathcal{C}$.

Soit p une proposition ayant un sens dans toute catégorie, en particulier dans $\mathcal{C}$ et dans $\mathcal{C}^{op}$. La définition de $\mathcal{C}^{op}$ étant donnée en termes concernant $\mathcal{C}$, tout énoncé de proposition dans $\mathcal{C}^{op}$ est traductible en un énoncé dans $\mathcal{C}$: la proposition p dans $\mathcal{C}^{op}$ se traduit en une proposition p^{op} dans $\mathcal{C}$.

On peut écrire : p^{op} (dans $\mathcal{C}$) $\Leftrightarrow$ p (dans $\mathcal{C}^{op}$)

La proposition p^{op} a donc par construction un sens dans toute catégorie ; on dit que p^{op} est la proposition duale de p.

Le problème ne se pose pas toujours à partir d'une proposition ayant un sens dans toute catégorie. Généralement la situation est la suivante :

Soit P une proposition ayant un sens dans la catégorie $\mathcal{C}$ (par exemple "$\mu : A \to B$ est injectif" dans Ens) ; on détermine une proposition p ayant un sens dans toute catégorie et logiquement équivalente à P dans $\mathcal{C}$ ("μ est un monomorphisme" a un sens dans toute catégorie et dans Ens est équivalent à "μ est injectif") ; il n'y a pas unicité en général pour la détermination de p à partir de P, ni même existence. Si p peut être trouvé, on sait alors exprimer p^{op} ayant un sens dans toute catégorie et p^{op} appliquée à $\mathcal{C}$ est une proposition duale de la proposition P.

μ est un monomorphisme (dans $\mathcal{C}^{op}$) $\Leftrightarrow$ $(\mu \star \alpha = \mu \star \beta \Rightarrow \alpha = \beta)$

or $\mu \star \alpha = \alpha\mu$ et $\mu \star \beta = \beta\mu$ de sorte que

$$(\mu \star \alpha = \mu \star \beta \Rightarrow \alpha = \beta) \Leftrightarrow (\alpha\mu = \beta\mu \Rightarrow \alpha = \beta)$$

cette dernière proposition est "μ est un épimorphisme dans $\mathcal{C}$".
"μ est un épimorphisme" est donc p^{op} si p est "μ est un monomorphisme"
"μ est surjectif" est dans Ens une proposition duale de "μ est injectif"
On a établi la proposition : "si $\lambda\mu$ est un monomorphisme, μ est un monomorphisme".

Cette proposition est vraie dans toute catégorie. Exprimée dans $\mathcal{C}^{op}$ cette proposition :

si $\lambda \star \mu$ est un monomorphisme, μ est un monomorphisme

se traduit mot à mot dans $\mathcal{C}$.

si $\mu\lambda$ est un épimorphisme (puisque $\lambda \star \mu$ est un monomorphisme dans $\mathcal{C}^{op} \Leftrightarrow \mu\lambda$ est un épimorphisme dans $\mathcal{C}$)

μ est un monomorphisme (puisque μ est un monomorphisme dans $\mathcal{C}^{op} \Leftrightarrow \mu$ est un épimorphisme dans $\mathcal{C}$)

Cette proposition a été également démontrée mais cette démonstration est superflue : la proposition étant duale d'une proposition vraie dans toute catégorie est également vraie dans toute catégorie.

Nous avons envisagé la dualité sous sa forme la plus large. Considérons une classe de catégories vérifiant des axiomes $A_1, \dots, A_n$; si $\mathcal{C}$ est une catégorie de cette classe, $\mathcal{C}^{op}$ vérifie $A_1^{op}, \dots, A_n^{op}$ (à condition que les axiomes $A_1, \dots, A_n$ admettent une *extension ayant un sens dans toute catégorie*). Il peut arriver, et c'est le cas pour une très importante classe de catégories contenant les catégories dites abéliennes, que $\forall i = 1, \dots, n$ $A_i = A_i^{op}$; on dit que les proposition A_i sont autoduales. Le processus de dualisation peut-être réalisé dans une telle classe de catégorie, comme il a été réalisé dans le cas général.

V - CONCLUSION

Il est peut être prématuré d'introduire, actuellement, ces notions dans l'enseignement secondaire parce que les élèves n'ont peut-être pas encore *assez d'exemples pour sentir l'intérêt de séparer* dans une structure riche ce qui revient à une structure pauvre sous-jacente. Mais il serait souhaitable que les maîtres, informés sur ces structures, informés aussi sur les situations semblables qui seront exposées aux élèves ultérieurement, orientent la présentation de notions, mêmes élémentaires, suivant un point de vue catégoriel ; le langage des catégories par son universalité devrait semble t-il s'étendre à tous les échelons de l'enseignement : il est simple , il est prévu pour s'adapter à des situations bien différentes et a l'immense avantage de mettre en évidence les propriétés les plus grossières, qui sont aussi les propriétés universelles, des ensembles structurés généralement introduits par des voies très différentes .

TRAVAUX PRATIQUES EN CLASSE DE SECONDE

* *
*

H. MARTINO-GAUCHI - I.R.E.M. d'AIX-MARSEILLE

Nous voulons étudier le concept d'isomorphisme et expliquer le fonctionnement d'une règle à calcul.

Les trois fiches qui suivent ont été utilisées avec des élèves de seconde T au Lycée Technique à COURBEVOIE durant l'année scolaire 1971/1972.

La rédaction en est différente, et tient compte de l'expérience acquise. La fiche II pouvant être utilisée comme problème.

La principale difficulté, à laquelle je me suis heurté est celle de la gratuité du problème posé, bien que les élèves se plaisent à opérer dans les ensembles F_6 et F_7^* .

Le seul avantage incontestable est une meilleure assimilation du concept d'isomorphisme préparant la notion de logarithme.-

FICHE I : Etude des ensembles F_6 et F_7^*

F_6 désigne l'ensemble $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, sur lequel l'addition est définie par la table ci-dessous.
Démontre que F_6 est un groupe additif.
F_7^* désigne l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, sur lequel la multiplication a été définie par la table ci-dessous.
Démontre que F_7^* est un groupe multiplicatif.

+	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

.	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	1	3	5
3	3	6	2	5	1	4
4	4	1	5	2	6	3
5	5	3	1	6	4	2
6	6	5	4	3	2	1

Des remarques s'imposent :

- dans F_6 :
  - 0 est élément neutre
  - 1 et 5 sont opposés
  - 2 et 4 sont opposés
  - 3 est son propre opposé
- dans F_7^* :
  - 1 est élément neutre
  - 2 et 4 sont inverses
  - 3 et 5 sont inverses
  - 6 est son propre inverse.

FICHE II : Recherche d'un isomorphisme de F_7^* dans F_6

On se propose de trouver toutes les bijections de F_7^* dans F_6 ayant la propriété (P) suivante :

$$(P)\ \forall (x, y) \in (F_7^*)^2 ,\ f(x.y) = f(x) + f(y)$$

.../...

$x.y$ est une multiplication dans quel ensemble ?
$f(x) + f(y)$ est une addition dans quel ensemble ?

Peux-tu définir une bijection de F_7^* dans F_6 ?
Si oui, pourquoi ?

Combien peux-tu en définir ? Utilise un arbre.
Tu dois en trouver $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$.

Il ne t'est pas possible d'étudier pour chacune de ces bijections si la propriété (P) est vérifiée.
Utilise, pour simplifier le problème, les remarques suivantes :

1°) *1 est élément neutre dans* F_7^*

Ecris la propriété (P) dans laquelle tu donnes à y la valeur 1 ; tu dois obtenir $f(x) + f(1) = f(x)$.
Cette égalité est écrite dans quel ensemble ? Pourquoi peux-tu conclure $f(1) = 0$. Le choix de 1 étant ainsi fixé, Combien reste-t-il de bijections possibles entre ces deux ensembles ? Tu dois trouver :
$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

2°) **6** est son propre inverse dans F_7^*

Un élément de F_6 a une propriété analogue, **lequel** ?
Que devient la propriété (P) si $x = y = 6$?
Tu dois obtenir $f(6) + f(6) = 0$
Pourquoi peux-tu conclure $f(6) = 3$?

3°) Tu vas maintenant utiliser la propriété (P) et le choix de $f(2)$ pour déterminer les images des autres éléments de F_7^*. Quels sont les choix possibles pour $f(2)$?
Il y en a quatre :

a) $\underline{f(2) = 1}$

Tu sais que dans F_7^* $\quad 2 \times 2 = 4$, $\quad 2 \times 6 = 5$, $\quad 2 \times 5 = 3$.

Applique la propriété (P), tu obtiendras :
$f(4) = 2$, $\quad f(5) = 4$ et $f(3) = 5$.

Montre que la propriété (P) n'est pas vraie **si** :
$x = 3$ et $y = 5$.

b) $\underline{f(2) = 2}$

Tu sais que dans F_7^* $\quad 2 \times 2 = 4$, $\quad 2 \times 6 = 5$, $\quad 2 \times 5 = 3$

.../...

vérifie que la propriété $(P)_*$ est vraie pour toutes les valeurs x et y de F_7^*.

Complète pour cela le tableau ci-après. Par exemple, dans la case intersection de la ligne de $f_{(3)} = 1$ et de la colonne $f_{(4)} = 4$.

Forme d'abord $f_{(3)} + f_{(4)} = 1 + 4 = 5$.

Forme ensuite $3 \times 4 = 5$; et vérifie que :

$f_{(3 \times 4)} = f_{(3)} + f_{(4)}$.

Conclue.

Voici le tableau à compléter :

	f(1) = 0	f(2) = 2	f(3) = 1	f(4) = 4	f(5) = 5	f(6) = 3
f(1) = 0						
f(2) = 2						
f(3) = 1						
f(4) = 4						
f(5) = 5						
f(6) = 3						

c) <u>$f(2) = 4$</u>

Tu sais que
$2 \times 2 = 4$
$2 \times 6 = 5$
$2 \times 5 = 3$

donc
$f(4) = 2$
$f(5) = 1$
$f(3) = 5$

Vérifie en faisant un tableau analogue à celui tracé plus haut, que f a la propriété (P).

.../...

d) Terminé l'étude précédente en montrant que si $f(2) = 5$,
Alors : $f(4) = 4$
$f(5) = 2$
$f(3) = 1$

et qu'alors, la propriété n'est pas vraie pour : $x = 3$ et $y = 5$.

Donne une conclusion à l'étude précédente et définis les deux bijections trouvées par leurs diagrammes sagitaux de F_7^* dans F_6.

FICHE III : Réalisation d'une règle à calcul.-

Tu vas maintenant fabriquer un instrument destiné à faire des additions dans F_6 et des multiplications dans F_7^*.

Pour cela, tu vas utiliser deux règles l'une fixe A, l'autre mobile B. Le glissement de la règle B sur la règle A permet de faire des sommes, comme le montre la figure I.

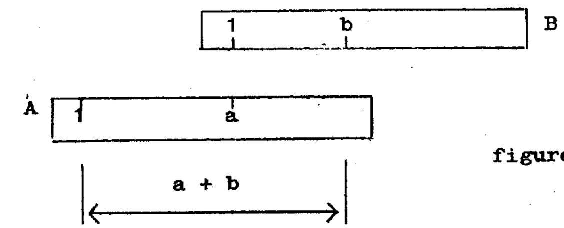


figure I

Dans une feuille de carton, découpe deux rectangles, l'un ayant comme dimensions 15 et 6 cm, l'autre 15 et 3 cm.
Plie le premier carton comme l'indique la figure II.
Tu viens de fabriquer la règle A.

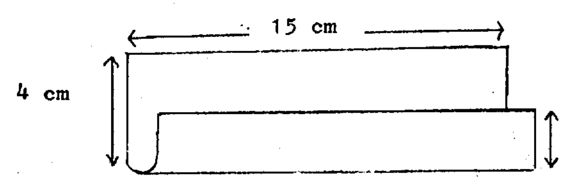
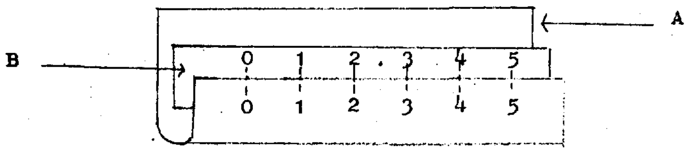


figure II

L'autre carton servira de règle coulissante B.

.../...

1°) Voilà ta règle construite, il faut maintenant la graduer pour faire des additions dans F_6 . Tu peux la graduer ainsi :



Les graduations sont équidistantes. Pourquoi ?
Imagine un procédé pour calculer :
$2 + 2$, $1 + 4$, $3 + 4$.

Vérifie avec la table d'addition que ton procédé te donne le résultat cherché.

2°) Reprends la règle précédente et l'une des deux bijections précédentes, ayant la propriété (P). Avec une encre différente, gradue à nouveau ta règle, en écrivant sous chaque élément de F_6 son image dans F_7^* par la bijection réciproque de la bijection considérée.
Vérifie avec la table de multiplication que le procédé de manipulation trouvé précédemment et la nouvelle graduation te permette de faire toutes les multiplications de F_7^* .

Z , UN JEU SUR LES MOTS

* * *

H. MARTINO-GAUCHI - I.R.E.M. d'AIX-MARSEILLE

Les trois fiches qui suivent sont destinées à des élèves de sixième et de cinquième.

Elles doivent leur permettre de construire Z et de manipuler les entiers relatifs en utilisant des notions très simples.-

FICHE I : Construction d'un ensemble.

Ecris un nombre quelconque de fois les lettres a ou b . Tu as obtenu un mot ne comportant que les lettres a , b . Par exemple aaababbbab, aaa, bbbb, aaabbbaabbbbaaabab, ... sont des mots.

Nous voulons mettre de l'ordre dans la succession des lettres a ou b . Tu vas adopter les deux règles suivantes.

Règle 1 :
Tu peux rayer ab ou l'introduire en un endroit quelconque d'un mot.

Règle 2 :
Tu peux rayer ba ou l'introduire en un endroit quelconque d'un mot.

Exemple : aab

- si tu appliques la règle 1, tu peux rayer ab ; le mot s'écrit donc a .

Simplifie les mots suivants :
aaababbabaabbabb
aaaaabb
bbbbaaab
abababaaa
bbbbbaaaabbbbaaa
aabb.

Tu appelleras mots réduits les mots obtenus après avoir appliqué les règles 1 et 2.
Trouve des mots ayant comme mots réduits les mots suivants
aa, bbb, a, aaa, b, bb.

Considère la relation "avoir même mot réduit". Cette relation te permet de classer tous les mots. Donne des *mots ayant comme mot réduit* a, comme mot réduit bbb.

Pour conclure, complète les phrases suivantes :
* les mots réduits sont formés de .... en nombres quelconques
* les mots réduits sont formés de ..... en nombres quelconques.

Il existe un mot réduit formé ni de ... ni de ...

.../...

.../

FICHE II : Addition dans l'ensemble des mots réduits.

Tu appelleras somme des deux mots le mot obtenu en écrivant les mots à la suite l'un de l'autre, et après avoir appliqué les règles 1 et 2.

Exemple : la somme du mot aaaaaaa et du mot bbbbb est le mot aaaaaaabbbbb.

Tu écriras aaaaaaa + bbbbb = aaaaaaabbbbb.
Quel est le mot réduit de aaaaaaabbbbb ?

Effectue les sommes suivantes :

aaa + bbbbb	aaaaaa + bb	a + b
aaaaaaa + bbbbb	bbbbbb + aaaa	bbbb + aaaaaaa
aaa + bbb	aaa + bb	aaaaa + aaaaa
aaa +aaaaaa	bbbb +bbbbbbb	b + bb
a + a	aa + aa	aaa + aaa
a + aaa	aaa + aa	aaaaaa + aaaaa
b + bb	b + bbbb	bbbb + bbb
bb + bbbb		
a + b	a + bbb	aa + bb
aa + bbbb	aa + bbbb	aaaaa + b
aaaaa + bb	aaaaa + bbbb	aaaa + bbbbb
aaaa + bbbb		

Enonce les trois règles te permettant de trouver la somme de deux mots formés uniquement de a , ou uniquement de b , ou encore de a et de b.

FICHE III : Nouvelle notation d'un mot ; l'ensemble Z.

Un mot sera écrit avec les règles suivantes :

- le mot sera remplacé par une parenthèse, un signe et un nombre
- si le mot est formé de a , le signe sera + ,
  si le mot est formé de b , le signe sera -
- le nombre, tu l'obtiendras en comptant les lettres a ou b .
- le mot formé ni de a ni de b , tu le noteras 0.

Exemple : aaaa s'écrit (+4) . De même bbbb (-4) ;
aaaaaaaa (+8) bbbbbbbbbb (-10)
bbbbbbbb (-8)

Comment peux-tu écrire les mots suivants :

aaaaaaaaa	aaaa	b	a	aaa
bbbbbbbbbbb	aaaaaaaaaa		bbbbb	

.../...

.../

Effectue les additions suivantes :

aa + aaa	aaaaaa + a	aaa + aaaa

Avec les nouvelles notations :

(+2) + (+3)	(+6) +(+1)	(+3)+ (+4)
bbbbbb + bbbbbbb	bbb + bb	bbbbb + bbbbb
(-6) + (-7)	(-3) +(-2)	(-5)+ (-5)
aaaa +bbbbbb	aaa + bbb	aaaaaaaa+ bbb
(+4) + (-6)	(+3) +(-3)	(+8)+ (-3)

Avec la nouvelle notation, énonce maintenant les règles d'addition.

BIBLIOGRAPHIE

"La Géométrie par les transformations"
DIENES ET GOLDING, publié à l'O.C.D.L.

"Leçons d'algèbre moderne"
DUBREUIL et DUBREUIL-JACOTIN, publié chez DUNOD

Le lecteur trouvera dans ces livres, une construction des groupes libres à l'aide de jeux sur les mots.

* Si des collègues sont intéressés et utilisent ces fiches avec ou sans modification, je serais heureux de connaître leur avis.

Ecrire : Monsieur MARTINO-GAUCHI
Animateur à l'I.R.E.M.
I.R.E.M.
70, Route Léon Lachamp
Faculté de Luminy

13009 - MARSEILLE

D A T E S   A   R E T E N I R

* * *

L' I.R.E.M. de Marseille organise à la BEAUME SAINTE-MARIE, près d'AIX-EN-PROVENCE , des journées de travail I.R.E.M./I.N.R.D.P. sur le sujet :

" VECTEURS, FORCES "

les : Vendredi 25 avril et Samedi 26 Avril 1975 .

L' I.R.E.M. de Marseille organise à CARRY-LE-ROUET , un colloque MATH-PHYSIQUE , I.R.E.M./I.N.R.D.P. les :

13, 14 et 15 Juin 1975 .