ACADEMIE D'AIX-MARSEILLE

Information Mathématique

Enseignement du Second Degré

inrdp
CRDP
MARSEILLE

IREM
MARSEILLE

CENTRE REGIONAL DE RECHERCHE
ET DE DOCUMENTATION PEDAGOGIQUES
55, rue Sylvabelle
I329I MARSEILLE Cedex 2
Tel : 37.40.39

INSTITUT DE RECHERCHE SUR
L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES
90, route Léon Lachamp
I3009 MARSEILLE-LUMINY
Tel : 4I.39.40

INFORMATION MATHEMATIQUE

Enseignement du 2ème degré

N° 4

Juin I974

S O M M A I R E

Depôt légal 2ème trimestre 1974

EDITORIAL

MARSEILLE (France) 1-5 septembre 1975 :

2ème CONFERENCE INTERNATIONALE " INFORMATIQUE et ENSEIGNEMENT " ,

Une manifestation importante, pour laquelle une année scolaire de préparation n'est pas de trop, va avoir lieu dans notre région ; la première conférence internationale " Informatique et Enseignement " ayant eu lieu à Amsterdam en 1970, il s'agit bien pour l'Académie d'Aix-Marseille d'une occasion unique pour faire le point sur les rôles que l'informatique peut jouer dans l'enseignement.

On trouvera des précisions sur l'organisation de cette Conférence en pages 47 et 48 de ce bulletin.

Un ordinateur (T. 1600 Télémécanique) est déjà installé au Lycée technique de Salon depuis décembre 1973, un second ordinateur va être installé dès la rentrée 1974 au Lycée Vauvenargues, à Aix-en-Provence. Les collègues intéressés pourront, dès la rentrée prochaine, prendre contact avec ces deux établissements.

Le groupe de travail " mini-ordinateurs " de l'I.R.E.M. de Marseille pourra accueillir tous les stagiaires I.R.E.M. intéressés par l'utilisation de mini-ordinateurs ou de calculateurs programmables dans les classes.

Enfin, des stages de formation par correspondance à l'Informatique sont proposés aux enseignants par le C.N.T.E.

Le Bulletin Régional de Liaison Informatique édité par le C.R.D.P. de Marseille, dont le numéro 3 va paraître prochainement, fait le point sur les différentes actions interdisciplinaires menées dans l'Académie d'Aix-Marseille. Il est adressé à tous les collègues qui en font la demande.

Tous ces moyens d'information et de formation, qui pourront être utilisés pendant l'année scolaire 1974-75, devraient permettre à de nombreux collègues de participer dans les meilleures conditions à la Conférence Internationale de septembre 1975.

Mais il resté, à côté de l'introduction de l'Informatique dans l'enseignement, bien d'autres domaines à explorer.

Ce bulletin a essayé, depuis la rentrée 1972, de vous y aider.

Il continuera à jouer ce rôle à la rentrée prochaine, mais en devenant une publication de l'I.R.E.M. de Marseille, puisque le service d'animation et de recherche pédagogiques en mathématiques disparaît du C.R.D.P. à la suite de la demande de réintégration de son responsable.

BONNES VACANCES

G.T.

COMPTE RENDU DES SEANCES DE TRAVAIL

MATHEMATIQUES - PHYSIQUE

pour les années scolaires 1972-1973 et 1973-1974
(atelier de Marseille - Lycée St. Charles)

Jean-Claude BENIAMINO - *I.R.E.M. de Marseille*

Grâce à l'action conjuguée de la section locale de l'Union des Physiciens et de l'Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques de Marseille, ont pu être organisées, depuis la rentrée 1972, des séances de travail communes aux deux disciplines.

La première année a été consacrée à des questions de vocabulaire et a permis à nos collègues physiciens de rédiger un fascicule traitant des premiers éléments de théorie des ensembles. Il est apparu que ce travail ne devait pas être effectué par un enseignant de mathématiques, car il n'est pas question de publier un nouveau cours qui serait allé s'ajouter à ceux déja existants.

La seconde année a vu une équipe plus étoffée s'occuper des mêmes problème à raison d'une séance de travail par mois.

Voici dans le détail et dans l'ordre les questions qui ont été étudiées avec un aperçu des méthodes de travail utilisées.

Le premier problème a été celui de la mise au point d'un langage commun. Il était indispensable de commencer ces séances de travail par un exposé élémentaire de théorie ensembliste et d'éléments d'algèbre (groupe , anneaux, corps) . Ceci a permis à nos collègues physiciens de voir les buts poursuivis par les mathématiciens dans leur enseignement : choix d'une axiomatique permettant la mathématisation d'une situation expérimentale. Il convenait de mettre en évidence le fait que les mathématiques enseignées aux élèves ne sont pas un jeu abstrait mais répondent à des besoins précis calculatoires, description de figures, etc ....

En insistant sur le problème suivant : déterminer le meilleur outil mathématique convenant au traitement d'une situation expérimentale donnée, on a pu constater que plusieurs possibilités étaient offertes et que le choix s'effectuait en fonction de la simplicité de la mise en oeuvre.

C'est sur le mot vecteur qu'a porté l'essentiel du travail, il fallait clairement justifier la notion d'espace vectoriel préférable à celle de vecteur.
On a pu montrer que la représentation des forces par un symbole tel que $\vec{F}$ exigeait la possibilité d'opérer des additions et des multiplications :

$$\vec{F} + \vec{G} \quad \text{et} \quad \lambda\vec{F}\ ,\ \lambda \in \mathbb{R}$$

A partir de là, il est possible de justifier toute l'axiomatique de la structure d'espace vectoriel, mais l'intérêt de l'outil ainsi construit est qu'il peut être utilisé à d'autres fins que celles de la description des systèmes de forces. En effet, s'il est possible d'invoquer les traditionnels espaces fonctionnels, dans le cas présent ils n'offrent pas un intérêt immédiat. On a donc choisi de représenter par un vecteur (x, x') de $\mathbb{R}^2$ la situation d'un point mobile animé d'un mouvement rectiligne donné par $x'' + \omega^2 x = 0$, on peut alors pour passer d'un état à un autre état du système, utiliser un opérateur, ici une matrice carrée d'ordre 2.
La notion d'Opérateur et de groupe d'Opérateurs se trouve ainsi justifiée et il est normal de systématiser une telle situation pour la réutiliser. L'important est donc que le vecteur n'existe pas pour lui-même, mais comme élément d' une structure " être vecteur, ce n'est pas porter une flèche sur la tête ".

Il est apparu que la notion d'ensemble et d'ensemble muni de lois qui semble naturelle au mathématicien ne l'est pas pour le physicien dans la mesure où elle ne répond pas directement à ses besoins, les ambiguïtés du vocabulaire (triangles égaux ..) ne clarifient pas la situation.
Certaines transformations géométriques simples peuvent aider à l'élaboration de la notion de groupe, les cas simples ne sont présentés que plus tard ($\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$) ; étant d'utilisation courante il est plus délicat d'en dégager des idées générales.

Venait ensuite l'étude des espaces affines ou encore la description du monde physique usuel.
La présentation est double, axiomatique à partir de la notion d'espace vectoriel, ou bien à partir d'une idée intuitive de l'espace affine, construction d'un espace vectoriel en utilisant des classes de bipoints. Ce dernier point de vue est le plus riche pour le physicien qui manipule le représentant du vecteur en un point où se situe une action.

Nous sommes passés ensuite à l'examen pratique de problèmes classiques qui mettent en oeuvre certaines idées énoncées plus haut.

On met ainsi en évidence le rôle de l'expérimentateur qui fait des mesures, mais formalise le problème dès qu'il organise les résultats obtenus.
Dans le cas du plan incliné, il est intéressant de noter que le physicien choisit le meilleur outil (un espace vectoriel de dimension 1) ; mais le choix d'un espace différent conduit aux mêmes résultats. Il faut donc insister sur le rôle des conditions expérimentales, symétrie, répartition

des frottements ..... qui permettent l'utilisation de l'outil le plus simple.

Les exemples étudiés dans le domaine de la mécanique faisant la part trop belle aux mathématiques, il convient donc de traiter un cas de nature différente.

Le problème des " black box " permet de caractériser un courant par un vecteur de $\mathbb{R}^2$ à l'entrée et à la sortie d'un montage électrique.
Dans certaines conditions, ce montage se conduit comme une matrice et permet, par des multiplications convenables, d'obtenir les valeurs de sortie du vecteur caractérisant le courant quand on connaît le vecteur d'entrée.
Le modèle mathématique ainsi mis en évidence permet la description des lois de type linéaire, il ne peut répondre à tous les besoins. Dans certaines conditions d'expérience ce modèle peut encore servir (emploi d'un transistor) alors que des mesures plus précises exigeraient un modèle mathématique plus élaboré ; ceci met l'accent sur le caractère relatif du modèle choisi.

En optique, l'étude de la réflexion sur le miroir plan, montre de quelle manière pourrait s'organiser un enseignement conjoint des deux disciplines. Des expériences appropriées permettent de fixer les positions relatives d'une source lumineuse et de son image par rapport au plan du miroir, il est alors possible en cours de mathématiques d'étudier une transformation de l'espace affine : celle qui à tout point associe son " symétrique " par rapport à un plan ou à une droite suivant la dimension de l'espace choisi au départ. L'étude ultérieure des produits de ces transformations va permettre en physique de suivre le déplacement de l'image d'une source lumineuse fixe quand le miroir tourne d'un angle α.
Le choix de l'outil : symétrie par rapport à un plan (espace à trois dimensions) ou symétrie par rapport à une droite (espace à deux dimensions) dépend des conditions d'expérience.

L'exploitation des idées qui ont été dégagées devra se faire au niveau des établissements d'enseignement dans le cadre d'une coordination des enseignements concernés. Il serait possible de continuer plus avant en commissions réunissant professeurs des deux matières, mais il importe d'appliquer au niveau de la classe ces considérations pour une meilleure synchronisation.

-=-=-=-=-=-=-

EXPERIENCE D'UTILISATION D'UN ORDINATEUR POUR UN ENSEIGNEMENT " EXPERIMENTAL" DU CALCUL DES PROBABILITES DANS LE SECOND CYCLE.

Claire HELMSTETTER - *Lycée de l'Empéri SALON-de-PROVENCE*

Gilles THOMAS - *C.R.D.P. de MARSEILLE*

INTRODUCTION

Le manque de temps pour collecter puis observer suffisamment de données statistiques, le manque de connaissances statistiques chez les élèves au niveau d'une classe de première ou de terminale (la notion de fréquence est ignorée de certains élèves de terminale !) enferme l'enseignement du Calcul des Probabilités du second cycle dans un cadre peut-être trop abstrait.

Les exercices proposés aux élèves sont des exercices d'application directe du cours ; ils sont choisis - pour ne pas dire construits - en fonction du cours qui vient d'être traité, pour cette application directe. Il n'est donc pas étonnant que des difficultés surgissent au niveau de l'application du Calcul des Probabilités à des exercices sortant un peu des sentiers des Annales du Baccalauréat ou à des situations réelles.

Que doit apporter à un élève du second cycle le Calcul des Probabilités ?

- l'envie d'en savoir plus et de se lancer à fond dans la Théorie de la Mesure ? Bravo ! Le pourcentage des élèves concernés par cette voie est à l'étude .....

- une occasion, peut-être privilégiée dans l'enseignement des mathématiques, de montrer à l'élève ce qu'est la démarche modélisante, ce qu'est un modèle, à quoi ça sert .... C'est dans cette direction que nous avons travaillé en restant le plus près possible des préoccupations pédagogiques.

Il s'agit de proposer aux élèves des situations réelles susceptibles de donner lieu à un traitement statistique. L'observation de ces situations , l'examen des résultats devraient conduire les élèves à émettre des hypothèses, à conjecturer. Ces hypothèses pouvant être ensuite vérifiées de façon à amener la construction effective - ou la découverte - d'un modèle probabiliste.

Mais les difficultés venant d'un manque de temps pour réaliser ce type de travail demeurent.

C'est là que l'ordinateur peut être efficacement utilisé.

I. MOYENS OFFERTS PAR L'ORDINATEUR

L'expérience décrite dans cet article a été réalisée au Lycée technique de SALON, équipé depuis le mois de décembre 1973 d'un ordinateur T 1600 - Télémécanique.

Les élèves peuvent travailler, en mode conversationnel, sur 8 consoles de visualisation et sur 1 télétype (téléimprimeur).

Le langage utilisé est le L.S.E. *(Langage Symbolique d'Enseignement)* *

Le système L.S.E. permet, grâce à la fonction aléatoire " ALE " de réaliser des simulations.

En effet, l'appel de cette fonction déclenche un processus de fabrication d'une suite de nombres au hasard, compris entre 0 et 1, et ceci à n'importe quel point du déroulement du programme.

Cette possibilité ainsi que la rapidité de calcul de l'ordinateur pallient les difficultés précédemment citées ; on peut donc simuler des jeux et obtenir assez rapidement les résultats statistiques les concernant.

II. OBJECTIFS

DE L'EXPERIENCE DE BERNOULLI VERS LA DISTRIBUTION BINOMIALE

II. a. EXPERIENCES de BERNOULLI

Cinq jeux simulés sont proposés aux élèves.

Pour chacun de ces jeux, ils peuvent faire autant d'expériences qu'ils le désirent, dans une limite de temps raisonnable.

Pour chaque expérience, il n'y a que deux éventualités : SUCCES ou ECHEC.

(*) *Cf. Compte rendu du stage L.S.E. de SALON (14-15-16 janvier 1974) dans le Bulletin Régional de Liaison Informatique n° 3 (C.R.D.P. de Marseille)*

L'élève fixe le nombre d'expériences qu'il veut réaliser (NOMBRE DE TIRAGES), l'ordinateur lui communique alors la FREQUENCE du SUCCES et la FREQUENCE de l'ECHEC.

Après un certain nombre d'essais de ce genre, après observation des résultats, l'élève émet une hypothèse. Il peut vérifier, sur d'autres essais, son hypothèse. Lorsque l'élève le désire, le professeur lui indique quel était effectivement le jeu proposé ; l'élève peut alors utiliser ses connaissances en calcul des probabilités pour construire le modèle probabiliste et le comparer à son hypothèse expérimentale :

- il a pu " expérimentalement " découvrir le modèle.

II. b. DISTRIBUTION BINOMIALE

Un autre ensemble de cinq jeux simulés est ensuite proposé aux élèves.

Pour chacun des jeux, ils vont réaliser des SERIES de N tirages dans les conditions des expériences de Bernoulli pré-citées. Il s'agit, pour eux, de " répéter en fait N fois la même expérience de Bernoulli ".

On s'intéresse, dans une série de N tirages, au nombre K de succès obtenus.

L'élève choisit l'une des cinq expériences de Bernoulli précédemment étudiées.

Il fixe le NOMBRE DE SERIES qu'il veut réaliser, et le nombre N d'expériences composant chaque série.

Pour chaque valeur de K variant de 0 à N, l'ordinateur communique alors la FREQUENCE de l'évènement : " K succès ont été obtenus ".

Après de nombreux essais, si les élèves ont pu émettre des hypothèses satisfaisantes, ils ne sont pas en mesure de les expliquer tout en possédant pourtant tous les renseignements sur les expériences de Bernoulli.

Ils devraient donc sentir la nécessité d'une construction effective du modèle [probabilite B (N,K, P)] par le professeur, suivie d'un retour à l'ordinateur pour, éventuellement, vérifier l'adéquation du modèle à la situation de départ.

Par contre, en calculant pour chaque essai la moyenne pondérée des résultats, ils devraient pouvoir émettre une hypothèse en découvrant les " liens " existant entre cette moyenne et le nombre N d'expériences de la série et la probabilité P du succès pour l'expérience de Bernoulli qu'ils ont choisie.

Le modèle de l'espérance mathématique étant construit ; ils pourront alors comparer ce modèle à leur hypothèse expérimentale.

Examinons maintenant ce qui a été effectivement traité par des élèves de lère et de terminale et les prolongements que le travail réalise cette année peut avoir en vue d'une expérimentation complète, dans le courant de l'année scolaire prochaine par exemple.

III. EXPERIENCES DE BERNOULLI

III. a. LES PROGRAMMES " BERN "

- BERN 1 : L'ordinateur fournit à chaque tirage un chiffre au hasard entre 0 et 9.

$$\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

Il y a SUCCES lorsque le chiffre tiré est pair.

$$p = 0,5 \qquad q = 0,5$$

Il s'agit donc d'une simulation du jeu de Pile ou Face.

- BERN 2 : L'ordinateur fournit à chaque tirage un chiffre au hasard entre 0 et 9.

$$\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

Il y a SUCCES lorsque le chiffre tiré est multiple de 3 .

$$p = 0,4 \qquad q = 0,6$$

- BERN 3 : L'ordinateur fournit à chaque tirage un chiffre au hasard entre 0 et 9.

$$\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

Il y a SUCCES lorsque le chiffre tiré n'est pas nul.

$$p = 0,9 \qquad q = o,1$$

- BERN 4 : L'ordinateur fournit à chaque tirage un chiffre au hasard entre 0 et 2.

$$\Omega = \{0, 1, 2\}$$

Il y a SUCCES lorsque le chiffre tiré est nul .

$$p = 1/3 \qquad q = 2/3$$

- BERN 5 : L'ordinateur fournit à chaque tirage un chiffre au hasard entre 0 et 6.

$$\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Il y a SUCCES lorsque le chiffre tiré n'est ni 0, ni 1.

$$p = 5/7 \qquad q = 2/7$$

$$(p \simeq 0,714)$$

EXEMPLE de TRAITEMENT

```
APPELER BERN1

EXECUTER A PARTIR DE 8

NOMBRE DE TIRAGES = 10
FREQUENCE SUCCES = 0.8000000          FREQUENCE ECHEC = 0.2000000
NOMBRE DE TIRAGES = 10
FREQUENCE SUCCES = 0.5000000          FREQUENCE ECHEC = 0.5000000
NOMBRE DE TIRAGES = 10
FREQUENCE SUCCES = 0.4000000          FREQUENCE ECHEC = 0.6000000
NOMBRE DE TIRAGES = 100
FREQUENCE SUCCES = 0.5800000          FREQUENCE ECHEC = 0.4200000
NOMBRE DE TIRAGES = 345
FREQUENCE SUCCES = 0.4927536          FREQUENCE ECHEC = 0.5072464
NOMBRE DE TIRAGES = 500
FREQUENCE SUCCES = 0.4820000          FREQUENCE ECHEC = 0.5180000
NOMBRE DE TIRAGES = 1000
FREQUENCE SUCCES = 0.5160000          FREQUENCE ECHEC = 0.4840000
NOMBRE DE TIRAGES = 1000
FREQUENCE SUCCES = 0.5050000          FREQUENCE ECHEC = 0.4950000
NOMBRE DE TIRAGES = 10000
FREQUENCE SUCCES = 0.5081000          FREQUENCE ECHEC = 0.4919000
NOMBRE DE TIRAGES = 10000
FREQUENCE SUCCES = 0.4984000          FREQUENCE ECHEC = 0.5016000
NOMBRE DE TIRAGES = 1
FREQUENCE SUCCES = 0.0000000          FREQUENCE ECHEC = 1.0000000
NOMBRE DE TIRAGES = 2
FREQUENCE SUCCES = 0.0000000          FREQUENCE ECHEC = 1.0000000
NOMBRE DE TIRAGES = 2
FREQUENCE SUCCES = 1.0000000          FREQUENCE ECHEC = 0.0000000
NOMBRE DE TIRAGES = 2
FREQUENCE SUCCES = 1.0000000          FREQUENCE ECHEC = 0.0000000
NOMBRE DE TIRAGES = 2
FREQUENCE SUCCES = 0.0000000          FREQUENCE ECHEC = 1.0000000
NOMBRE DE TIRAGES = 2
FREQUENCE SUCCES = 1.0000000          FREQUENCE ECHEC = 0.0000000
NOMBRE DE TIRAGES = 3
FREQUENCE SUCCES = 0.3333333          FREQUENCE ECHEC = 0.6666666
```

EXEMPLES de PROGRAMMES

```
APPELER BERN1

LISTER A PARTIR DE 8
8 AFFICHER [/]
9 AFFICHER 'NOMBRE DE TIRAGES = ';LIRE N
10 I←0;P←0;T←0
12 X←ENT(ALE(0)*10)
14 Z←X-ENT(X/2)*2
16 SI Z=0 ALORS ALLER EN 20
18 I←I+1;ALLER EN 22
20 P←P+1
22 T←T+1
24 SI T≠N ALORS ALLER EN 12
26 I←I/N;P←P/N
28 AFFICHER[/,'FREQUENCE SUCCES = ',F1.7]I
29 AFFICHER[1 5X,'FREQUENCE ECHEC = ',F1.7]P
30 ALLER EN 8
31 TERMINER
```

```
APPELER BERN2

LISTER A PARTIR DE 8
8 AFFICHER[/]
9 AFFICHER 'NOMBRE DE TIRAGES = ';LIRE N
10 M3←0;NM3←0;T←0
12 X←ENT(ALE(0)*10)
14 Y←ENT(X/3)
16 Z←X-Y*3
18 SI Z=0 ALORS ALLER EN 22
20 NM3←NM3+1;ALLER EN 24
22 M3←M3+1
24 T←T+1
26 SI T≠N ALORS ALLER EN 12
28 M3←M3/N;NM3←NM3/N
30 AFFICHER[/,'FREQUENCE SUCCES = ',F1.7]M3
31 AFFICHER[15X,'FREQUENCE ECHEC = ',F1.7]NM3
32 ALLER EN 8
33 TERMINER
```

EXEMPLE de TRAITEMENT

```
APPELER BERN2

EXECUTER A PARTIR DE 8


NOMBRE DE TIRAGES = 2
FREQUENCE SUCCES = 0.5000000        FREQUENCE ECHEC : 0.5000000
NOMBRE DE TIRAGES = 2
FREQUENCE SUCCES = 0.0000000        FREQUENCE ECHEC = 1.0000000
NOMBRE DE TIRAGES = 5
FREQUENCE SUCCES = 0.0000000        FREQUENCE ECHEC = 1.0000000
NOMBRE DE TIRAGES = 5
FREQUENCE SUCCES = 0.2000000        FREQUENCE ECHEC = 0.8000000
NOMBRE DE TIRAGES = 10
FREQUENCE SUCCES = 0.3000000        FREQUENCE ECHEC = 0.7000000
NOMBRE DE TIRAGES = 500
FREQUENCE SUCCES = 0.3720000        FREQUENCE ECHEC = 0.6280000
NOMBRE DE TIRAGES = 1000
FREQUENCE SUCCES = 0.3910000        FREQUENCE ECHEC = 0.6090000
NOMBRE DE TIRAGES = 3000
FREQUENCE SUCCES = 0.4000000        FREQUENCE ECHEC = 0.6000000
NOMBRE DE TIRAGES = 3000
FREQUENCE SUCCES = 0.3986667        FREQUENCE ECHEC = 0.6013334
NOMBRE DE TIRAGES = 15000
FREQUENCE SUCCES = 0.4010000        FREQUENCE ECHEC = 0.5990000
NOMBRE DE TIRAGES = 100
FREQUENCE SUCCES = 0.4200000        FREQUENCE ECHEC = 0.5800000
NOMBRE DE TIRAGES = 100
FREQUENCE SUCCES = 0.3800000        FREQUENCE ECHEC = 0.6200000
NOMBRE DE TIRAGES = 100
FREQUENCE SUCCES = 0.3300000        FREQUENCE ECHEC = 0.6700000
NOMBRE DE TIRAGES = 100
FREQUENCE SUCCES = 0.3300000        FREQUENCE ECHEC = 0.6700000
NOMBRE DE TIRAGES = 3
FREQUENCE SUCCES = 0.3333333        FREQUENCE ECHEC = 0.6666666
```

III. b. EXPERIMENTATION AVEC LES ELEVES

Deux classes ont expérimenté les programmes " BERN " une terminale C et une première C.

Les uns et les autres avaient déjà eu des cours de Probabilités et avaient certainement entendu parler du jeu de Pile ou Face ou de lancer d'un dé. Ces deux classes ont été les plus faciles à toucher, c'est la seule raison qui explique le choix de la section C.

On présente d'abord " BERN 1 " aux élèves. Leur travail sur ce programme dure environ 3/4 d'heure.

Première opération, première initiative à prendre :

" NOMBRE DE TIRAGES = " ?

La plupart des élèves n'ont pas l'habitude des consoles ils tapent 1, 5, ... un petit nombre, ou bien 1 2 3 4 5 6 7 en tapant sur les touches qui se présentent sans pour l'instant voir de quoi il s'agit dans l'exercice. Mais assez rapidement leur stratégie dans le choix du nombre des tirages et les remarques qu'ils font deviennent intéressantes.

Peut-on prendre deux fois le même nombre de tirages ; est-ce intéressant ? La question ne leur est pas posée. Certains le font volontairement, d'autres accidentellement. D'autres enfin, quand on le leur suggère, répondent :

- " Ce n'est pas la peine " .
- " Pour 1000, on l'a eu. Il va donner le même résultat ".
- " On va voir " .

Ils sont à peu près tous étonnés qu'un même nombre de tirages ne donne pas les mêmes fréquences. Certains élèves se disent même " inquiets ".

- " On croyait que c'était une expérience bien déterminée !

Est-ce le fait qu'ils n'ont pas l'habitude d'expériences aléatoires, ni d'idée intuitive sur le hasard, ou bien est-ce le fait que l'ordinateur leur paraît radicalement différent d'un dé qu'on lance et que la présentation qu'on leur a faite de " BERN 1 " ne les a pas convaincus ?

Les élèves n'ont pas d'emblée l'idée de demander un grand nombre de tirages. Ils demandent 1, 2, .. 5, ... 10 tirages et cherchent une loi.

Ils ont l'habitude des situations régies par des lois déterministes ; on le constate.

Voilà des exemples de leurs remarques :

- " Pour 2 tirages on a trouvé une fréquence de succès de 1

  Pour 5 tirages on a trouvé une fréquence de succès de 0,8

  Pour 10 tirages on doit trouver une fréquence de 0,8 "

Le groupe qui a eu cette idée fait alors plusieurs fois 10 tirages : " Le modèle n'est pas bon. Ce n'est pas çà "

- " Quand le nombre de tirages augmente, la fréquence du succès augmente "
- " Quand on fait des essais de 4 tirages, on n'a jamais une fréquence de succès de 0, 75 ".

Un groupe s'éternise sur des essais de 4 tirages **et observe** qu'il n'y a que 3 résultats possibles pour la fréquence du succès : 0, 25 - 0, 5 et 0, 75

Un autre groupe commence une étude exhaustive, mettant en évidence toutes les fréquences qu'on peut trouver selon le nombre de tirages. (C'est une étude conforme à ce qu'on demande en Mathématiques lorsqu'on étudi des suites numériques). Ce groupe fait l'hypothèse finale :

- " Pour un nombre n, les nombres varieront de 0 à n, les chances seront de 0/n , 1/n , 2/n , ... , n/n . Les chances les plus fréquentes seront celles les plus proches de 1/2 . "

Finalement, avec des nombres de tirages de l'ordre de 100, 500, 1000, 10000 , les hypothèses se dégagent :

- " Quand le nombre de tirages devient grand, on a fréquence succès = fré-quence échec = 0, 5 ".

- " Plus le chiffre augmente, plus la répartition entre fréquence échec et fréquence succès semble équitable. "

- " On a presque équiprobabilité . " .

Il y a des observations complémentaires :

Pour plusieurs essais de 58 tirages :

- " Petits nombres, résultats moins précis . "

Pour un autre groupe qui a fait une dizaine d'essais de 1 tirage :

- " Pas intéressant, trop petit nombre "

De là vient l'idée de donner des résultats par un encadrement :

" Pour des séries de 10 **tirages** : 0, 2 < F. S. < 0, 8

Pour des séries de 100 tirages : 0, 41 < F. S. < 0, 64 "

Un groupe a fait des séries de 10, 100 et 500 tirages. Il fait la moyenne des fréquences de succès obtenues sur les séries de 100 et 500 tirages pour avoir un résultat plus précis pour la fréquence du succès.

Le modèle (probabilité du succès = 0, 5) ayant été à peu près bien formulé par les élèves, ce modèle est-il bon ?

Des groupes qui ont formulé l'hypothèse " 1/2, 1/2 " cessent de faire des grands nombres de tirages qui seraient pour eux sans surprise :

- " On trouverait des résultats voisins de 1/2, c'est un peu normal "

Ils reviennent aux petits nombres de tirages comme si, pour ces cas là, on n'avait pas trouvé de loi satisfaisante et qu'il faille persévérer.

Le travail sur BERN 1 s'arrête quand on révèle ce que contient le programme. C'est peut-être le " deus ex machina " qui a mis fin aux discussions sur les résultats expérimentaux, le modèle probabiliste coïncidant avec l'hypothèse émise par l'élève.

Les élèves expérimentent ensuite les programmes BERN 2, BERN 3, BERN 4 et BERN 5.

Malgré l'efficacité des grands tirages reconnue avant, ils font des séries de 10 tirages, de 100 tirages, peut-être pour avoir plus rapidement les résultats de la machine.

Par exemple, un groupe d'élèves pressés annonce, pour BERN 3 une fréquence de succès peu différente de 1 après avoir fait des séries de 30 tirages (l'une d'entre elles donnant comme fréquence de succès : 0, 78).

Dans une des classes on a donné immédiatement des résultats sous forme de fourchettes, par exemple pour BERN 2 :

- " sur 10 séries de 50 tirages : $0,24 \leq F.S. \leq 0,58$ $F.S. \simeq 0,41$

  sur 7 séries de 100 tirages : $0,3 \leq F.S. \leq 0,48$ $F.S. \simeq 0,39$

  Conclusion : $F.S. \simeq 0,4$ ".

Un élève écrit, pour BERN 3 :

- " C'est un jeu de colin-maillard ; il y a 95 filles et 5 garçons ou c'est un chasseur qui touche sa cible 9 fois sur 10 ".

C'est intéressant de voir cet élève, donnant ces deux interprétations, habiller la situation abstraite à l'inverse de ce qu'on fait habituellement dans le traitement des exercices de Probabilités.

Dans une autre séance, on évalue les résultats de l'ensemble des consoles, on aboutit :

Pour	BERN 2	à	0, 4
Pour	BERN 3	à	0, 9
Pour	BERN 4	à	0, 34
Pour	BERN 5	à	0, 7

(De nombreux élèves estiment, d'après les résultats obtenus, que la probabilité de succès pour BERN 5 est inférieure à 0, 7).

Ces modèles sont-ils bons ?

Le but des programmes BERN 4 et BERN 5 ne doit pas être de faire deviner aux élèves les valeurs 1/3 ou 5/7 mais d'obtenir un encadrement ou une estimation de la probabilité du succès.

Pour BERN 4 par exemple presque tous les élèves ont émis comme hypothèse : 0, 33 ou 1/3.

Pour BERN 5, par contre, certains ont donné comme modèle 3/4, d'autres plus nombreux ont donné 0, 7. Après l'obtention de la probabilité du succès : 5/7, il ne nous a pas été possible de lancer une discussion, qui aurait été certainement intéressante, sur le choix d'un modèle parmi ces trois : ces résultats ont été obtenus en fin de séance ....

Quant aux vérifications, pour ceux qui ont eu le temps de le faire, certaines démarches sont inattendues : un élève, sachant que la Probabilité d'un succès pour BERN 4 est 1/3 , s'acharne sur des essais de 2 tirages parce que les fréquences qu'il obtient (Fréquence Succès : 0, 5- Fréquence Echec : 0, 5) ne lui paraissent pas " normales " ; il estime qu'il doit obtenir des fréquences de 0 pour le succès et 1 pour l'échec.

III.c. CONCLUSIONS

L'expérience réalisée avec les programmes " BERN " offre l'intérêt de placer les élèves devant une situation aléatoire.

On voit à quel point ils n'en ont pas l'habitude. Sans ce genre d'expérimentation, le programme de Probabilités peut être parfaitement traité sans que les élèves aient bien senti la différence entre lois déterministes et lois de variables aléatoires.

Le traitement d'un exercice de Probabilités consiste à rendre compte d'une situation au moyen d'outils mathématiques (espace probabilisé, variable aléatoire) et débouche sur un calcul de probabilités : la probabilité, c'est un nombre qu'on calcule par une formule, ce n'est pas quelque chose d'aussi flottant que des fréquences qui oscillent selon les expériences.

L'enseignement effectif des Statistiques associé à celui du Calcul des Probabilités serait certainement utile.

Nous avons suggéré aux élèves de faire des hypothèses sur la probabilité du succès et celle de l'échec. C'est la situation du chercheur qui fait des statistiques pour étudier un phénomène ; l'expérience lui permet, sous certaines conditions, d'approcher la probabilité cherchée et non de donner une valeur exacte. Le bilan devrait être un intervalle de confiance, et on ne saura pas chiffrer la probabilité pour que la fréquence d'un succès soit dans l'intervalle donné.

Certains élèves paraissaient déçus par un modèle qui n'avait d'indication à donner qu'aux environs de 1000 tirages ; les expériences de 5 ou 10 tirages étaient, en quelque sorte, hors de portée du modèle.

Il faudrait un prolongement de cette expérimentation qui leur montre l'intérêt d'un modèle probabiliste et la façon de l'utiliser.

Quelles prévisions ces modèles permettent-ils ?

Quelle confiance peut-on leur accorder ?

Un élève avait entendu dire que, lorsqu'on joue à la roulette, il est impossible d'obtenir 6 fois de suite le rouge. En expérimentant BERN 1, il avait obtenu 3 fois de suite une fréquence de succès nulle pour 2 tirages. Il en a conclu :

- " Il doit y avoir un maximum d'essais consécutifs donnant une fréquence de succès nulle " .

Il n'avait pas bien débrouillé les notions de fréquence nulle, probabilité nulle, évènement impossible, évènement très peu probable, etc ....

IV. DISTRIBUTION BINOMIALE

IV. a. LES PROGRAMMES " L B_i "

Les cinq programmes proposés se nomment LB 1, LB 2, LB 3, LB 4 et LB 5.

Chaque LB $_i$ contient le programme de génération des nombres au hasard des programmes BERN i correspondant.

L'élève, en appelant le programme LB 2 par exemple, sait donc que l'expérience de BERNOULLI considérée ici est celle qui correspond à $p = 0,4$ et $q = 0,6$.

Il obtient, pour chaque valeur de N une suite de (N + 1) fréquences correspondant aux (N + 1) valeurs de K, nombre de succès obtenus.

EXEMPLE DE PROGRAMME L B_i ET TRAITEMENT

```
APPELER LB2

LISTER A PARTIR DE 1
1 AFFICHER[/]
2 AFFICHER 'NOMBRE DE SERIES : ';LIRE SERIE
3 AFFICHER 'N= ';LIRE N
4 AFFICHER[/]
5 M←0;C←N+1;TABLEAU FAV[C];ZER FAV
6 E←0;S←0;T←0
7 X←ENT(ALE(0)*10);Y←ENT(X/3);Z←X-Y*3
8 SI Z=0 ALORS ALLER EN 10
9 E←E+1;ALLER EN 11
10 S←S+1
11 T←T+1
12 SI T≠N ALORS ALLER EN 7
13 FAIRE 16 POUR K←1 PAS 1 JUSQUA N+1
14 SI S+1≠K ALORS ALLER EN 16
15 FAV[K]←FAV[K]+1;ALLER EN 17
17 M←M+1;SI M≠SERIE ALORS ALLER EN 6
18 FAIRE 19 POUR K←1 PAS 1 JUSQUA N+1
19 FAV[K]←FAV[K]/SERIE
20 AFFICHER 'VALEURS DE K            FREQUENCE'
21 FAIRE 22 POUR K←1 PAS 1 JUSQUA N+1
22 AFFICHER[/,5X,F2.0,16X,F1.5]K-1,FAV[K]
23 ALLER EN 1
24 TERMINER


EXECUTER A PARTIR DE 1


NOMBRE DE SERIES : 100
N= 10
```

VALEURS DE K	FREQUENCE
0	0.01000
1	0.04000
2	0.16000
3	0.22000
4	0.22000
5	0.17000
6	0.10000
7	0.06000
8	0.01000
9	0.01000
10	0.00000

IV. b. LES PROGRAMMES " $LB_i M$ "

Ces programmes communiquent, en plus des précédents, la valeur de la moyenne obtenue pour chaque essai.

IV. c. LES PROGRAMMES " $LB_i P$ "

Ces programmes donnent en même temps que la fréquence pour chaque valeur de K, la probabilité calculée par la formule :

$$B(N, K, P) = C_N^K \, P^k \, Q^{N-K}$$

Ces trois séries de programmes n'ont pas été complètement expérimentées dans leur forme actuelle.

Des observations faites par les élèves sur une première formulation de ces programmes (ne donnant qu'un seul résultat correspondant à une valeur de K) ont permis leur mise au point définitive.

EXEMPLE DE TRAITEMENT D'UN PROGRAMME LB_iM

APPELER IB2M
EXECUTER A PARTIR DE 1

NOMBRE DE SERIES : 10
N= 10

VALEURS DE K	FREQUENCE
0	0.00000
1	0.10000
2	0.00000
3	0.50000
4	0.20000
5	0.00000
6	0.10000
7	0.10000
8	0.00000
9	0.00000
10	0.00000

MOYENNE =3.7

NOMBRE DE SERIES : 100
N= 10

VALEURS DE K	FREQUENCE
0	0.00000
1	0.05000
2	0.13000
3	0.24000
4	0.24000
5	0.18000
6	0.09000
7	0.06000
8	0.00000
9	0.01000
10	0.00000

MOYENNE =3.94

NOMBRE DE SERIES : 1000
N= 10

VALEURS DE K	FREQUENCE
0	0.01200
1	0.05100
2	0.13900
3	0.18200
4	0.25100
5	0.18700
6	0.10200
7	0.05600
8	0.01500
9	0.00400
10	0.00100

MOYENNE =3.984

EXEMPLE DE TRAITEMENT D'UN PROGRAMME LB_iP

APPELER LB2P

EXECUTER A PARTIR DE 1

NOMBRE DE SERIES : 10
N= 10

VALEURS DE K	FREQUENCE	PROBABILITE
0	0.00000	0.00605
1	0.10000	0.04031
2	0.00000	0.12093
3	0.30000	0.21499
4	0.00000	0.25082
5	0.30000	0.20066
6	0.20000	0.11148
7	0.10000	0.04247
8	0.00000	0.01062
9	0.00000	0.00157
10	0.00000	0.00010

NOMBRE DE SERIES : 100
N= 10

VALEURS DE K	FREQUENCE	PROBABILITE
0	0.01000	0.00605
1	0.05000	0.04031
2	0.12000	0.12093
3	0.23000	0.21499
4	0.19000	0.25082
5	0.18000	0.20066
6	0.12000	0.11148
7	0.05000	0.04247
8	0.03000	0.01062
9	0.01000	0.00157
10	0.01000	0.00010

NOMBRE DE SERIES : 1000
N= 10

VALEURS DE K	FREQUENCE	PROBABILITE
0	0.00900	0.00605
1	0.04900	0.04031
2	0.14300	0.12093
3	0.20500	0.21490
4	0.23100	0.25082
5	0.17900	0.20066
6	0.10700	0.11148
7	0.06000	0.04247
8	0.01600	0.01062
9	0.00300	0.00157
10	0.00000	0.00010

V. EN GUISE DE CONCLUSION

Il sera possible de conclure lorsque tout ce qui recouvre l'ensemble de nos objectifs aura été expérimenté avec les élèves et ceci dans plusieurs classes.

Il nous a semblé néanmoins important de faire part dès maintenant de cette expérience afin qu'on puisse lui apporter dès la rentrée prochaine des prolongements souhaitables.

Un certain nombre de directions de travail, à partir de cette utilisation de l'ordinateur, nous apparaissent déjà comme étant dignes d'intérêt.

On peut accompagner les résultats des expériences faites grâce aux programmes L B $_i$ des histogrammes des distributions binomiales rencontrées. Un programme[1] (BNP) a été écrit pour les réaliser.

On peut alors, en marge des expériences de statistiques précédentes faire une étude de ces histogrammes :

- *N étant constant, comment varie l'histogramme quand P varie ?*
- *Quelles sont les valeurs K de la variable aléatoire correspondant aux plus fortes probabilités ?*
- *Comment varie la moyenne ? la dispersion ?*
- *P étant constant, comment varie l'histogramme quand N varie ?*

La réflexion sur ces questions pourra être utile au moment de l'étude de la loi des grands nombres.

On glisse assez facilement vers l'idée de variable aléatoire continue, un élève, par exemple, écrit :

- " Quand N croît, la courbe s'arrondit et a l'air de tendre vers une courbe qui serait déterminée par une équation ".

Il pourrait être intéressant ensuite d'étudier les approximations de la loi binomiale (loi de Poisson, loi normale) en comparant simplement les probabilités et les histogrammes pour préciser les meilleures conditions d'utilisation de ces approximations.

Il semble aussi que l'introduction, dans cette expérience, de l'idée d'intervalle de confiance pour un paramètre soit possible.

Enfin ces manipulations, qui visent surtout à montrer aux élèves ce qu'est un modèle probabiliste, pourquoi et comment on l'utilise, permettent également une réflexion sur les méthodes de simulation et, en particulier, sur les divers procédés de fabrication de suites de nombres au hasard.

A PROPOS DE L'INTEGRATION PAR PARTIES

J. MARION - *Lycée d'Aubagne et I.R.E.M. de Marseille*

I. INTRODUCTION

La plupart des manuels d'analyse des terminales, en ce qui concerne le paragraphe généralement intitulé " *Formule de l'intégration par parties* ", adoptent la démarche suivante :

On part de 2 fonctions u et v dérivables sur un intervalle $[a, b]$ et ayant des dérivées u' et v' continues sur cet intervalle.

On établit alors correctement que :

$$\text{(A)} \quad \int_a^b u(x).\ v'(x)\, dx = \Big[u(x).v\ (x) \Big]_a^b - \int_a^b v(x)\text{-}\ u'\ (x)\, dx$$

Puis on passe à " *l'intégrale indéfinie* " et on clonclut que :

$$\text{(B)} \quad \int uv' = uv - \int vu'$$ et donc qu'on n'a qu'à utiliser cela pour trouver les primitives de la fonction u. v'

Malheureusement, cette deuxième partie est incorrecte et il y a lieu de la dénoncer ; cette erreur résulte d'une mystification en utilisant le symbole $\int$ de " *l'intégrale indéfinie* " (symbole dont il paraît indispensable de proscrire l'usage), mystification qui consiste à confondre intégrale de Riemann et primitives, et qui est peut-être due à une certaine incompréhension ou assimilation de la théorie de l'intégration.

Pour se convaincre de l'ineptie du résultat (B) - seul le (A) est correct - montrons comment " fabriquer " des exemples rendant nulles les prétentions de (B).

o

o o

II. EXEMPLES

Considérons deux fonctions u, v, continues, dérivables, à dérivées continues sur un intervalle donnée $[a, b]$ et telles que :

$$u(x) \cdot v(x) = 1 \qquad \forall x \in [a, b]$$

Alors $v(x) = \dfrac{1}{u(x)}$ et $v'(x) = -\dfrac{u'(x)}{u(x)^2} \quad \forall x \in [a, b]$

et donc $u(x) \cdot v'(x) = \dfrac{-u'(x)}{u(x)}$

Par suite, les primitives de la fonction $x \longmapsto u(x) \cdot v'(x)$ sont les fonctions $x \longmapsto \operatorname{Log} \dfrac{1}{|u(x)|} + C^{te}$

Or, si nous appliquons(B) qu'obtenons-nous ?

$$\int u(x).v'(x)\,dx = \int \frac{-u'(x)}{u(x)}\,dx = u(x).v(x) - \int v(x).u'(x)\,dx$$

$$= u(x).v(x) - \int \frac{u'(x)}{u(x)}\,dx$$

Soit :

$$-\int \frac{u'(x)}{u(x)}\,dx = 1 - \int \frac{u'(x)}{u(x)}\,dx$$

et d'aucuns en concluront avec des délices nuancées que $0 = 1$!

Ainsi, soit $f(x) = \dfrac{1}{x.\operatorname{Log} x} = \dfrac{1}{\operatorname{Log}(x)} \cdot \dfrac{1}{x}$

Posons $u = \dfrac{1}{\operatorname{Log} x}$, $u' = \dfrac{-1}{x(\operatorname{Log} x)^2}$

$v' = \dfrac{1}{x}$, $v = \operatorname{Log} x$

D'où si on applique (B) :

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{1}{x \operatorname{Log} x}\,dx = \frac{1}{\operatorname{Log} x} \cdot \operatorname{Log} x + \int \frac{\operatorname{Log} x}{x.(\operatorname{Log} x)^2}\,dx$$

Soit :

$$\int \frac{1}{x \operatorname{Log} x}\,dx = 1 + \int \frac{1}{x \operatorname{Log} x}\,dx$$

C.Q.F.D. (!!)

III. LA SOLUTION

Quelle stratégie, et quelle démarche mathématique correcte peuvent permettre toutefois d'utiliser l'intégration par parties pour la recherche de primitives ?

Nous proposons la démarche suivante :

I°) Première étape

Proposition

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ $(a < b)$:

(I) f est bornée, intégrable sur tout intervalle

$$[\alpha\,,\, x] \subset [a,\, b]$$

(II) Soit alors $F : [a,\, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$F\,(x) = \int_{\alpha}^{x} f\,(t)\,dt \qquad \begin{pmatrix} a \leq x \leq b \\ a \leq \alpha \leq b \end{pmatrix}$$

Alors F est la primitive de f qui s'annule pour $x = \alpha$

Démonstration

(I) est évident en raison de la continuité de f sur $[\alpha,\, x]$

(II) Soit $x_0 \in [a,\, b]$ et étudions $F\,(x) - F\,(x_0)$;

Soit $\alpha \in [a,\, b]$:

$$F\,(x) - F\,(x_0) = \int_{\alpha}^{x} f\,(t)\,dt - \int_{\alpha}^{x_0} f(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$$

Le théorème de la moyenne permet alors d'affirmer que :

On peut trouver $\xi \in [x_0,\, x]$ tel que $\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = (x - x_0)\, f\,(\xi)$

et donc $f(\xi) = \dfrac{F(x) - F\,(x_0)}{x - x_0}$

Quand $x \longrightarrow x_0$, alors $\xi \longrightarrow x_0$ puisque on a $x_0 \leq \xi \leq x$

ou $x \leq \xi \leq x_0$

Comme f est continue $\lim\limits_{\xi \to x_0} f(\xi) = f\,(x_0)$; par suite

$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)$ qui montre que F est dérivable en x_0, ceci $\forall x_0 \in [a,b]$; par suite $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in [a,b]$ et F est une primitive de f ; de plus $F(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0$

C.Q.F.D.

Corollaire :

> *Soit g définie sur $[a, b]$ telle que g' continue sur $[a,b]$*
> *Alors $\int_a^x g'(t)\,dt = g(x) - g(a)$*

Démonstration

$h(x) = \int_a^x g'(t)\,dt$ est une primitive de $g'(x)$ d'après la proposition, avec de plus $h(a) = 0$; or $g(x)$ est une primitive également de $g'(x)$; donc $\forall x \in [a, b]$ $h(x) = g(x) + \lambda$ comme $h(a) = g(a) + \lambda = 0$

on en déduit que $\lambda = -g(a)$

C.Q.F.D.

2°) Deuxième étape : Intégration par parties

Théorème

> *Soient u, v deux fonctions définies, continues et admettant des dérivées continues u' et v' sur un intervalle $[a, b]$.*
> *Alors la relation suivante est vérifiée. Pour tout $x \in [a, b]$:*
> $$\int_a^x u(t)\cdot v'(t)\,dt = u(x)\cdot v(x) - u(a)\cdot v(a) - \int_a^x v(t)\cdot u'(t)\,dt$$
> *En particulier :*
> $$\int_a^b u(t)\cdot v'(t)\,dt = \Big[u(t)\,v(t)\Big]_a^b - \int_a^b v(t)\cdot u'(t)\,dt$$

Démonstration

$(u(t).\ v(t))' = u(t).\ v'(t) + v(t).\ u'(t)$ et donc :

$(u(t).\ v(t))' - \left[u(t)\ v'(t) + v(t)\ u'(t)\right] = 0 \qquad \forall t \in [a,b]$

L'intégrale d'une fonction " identiquement " nulle étant nulle :

$$\int_a^x \left\{ \left(u(t).\ v(t)\right)' - \left[u(t).\ v(t) + v(t).\ u'(t)\right] \right\} dt = 0$$

comme les hypothèses faites sur u et v impliquent que (u v)', u.v' et u'v sont intégrables sur $[a,b]$, en vertu de la linéarité de l'opérateur : " *Intégrale de Riemann* " , on obtient :

$$\int_a^x \left(u(t).\ v(t)\right)' dt = \int_a^x u(t)\ v'(t)\ dt + \int_a^x v(t).u'(t)dt$$

D'après le corollaire vu précédemment :

$$\int_a^x \left(u(t).\ v(t)\right)' dt = u(x).\ v(x) - u(a).\ v(a) ,$$

D'où le résultat annoncé qui en découle.

C.Q.F.D.

Moyennant le théorème mis sous cette forme précise, on peut remarquer que $\int_a^x u(t)\ v'(t)\ dt$ est la primitive de la fonction

$x \longmapsto u(x)\ v'(x)$ qui s'annule pour $x = a$

et par suite toute primitive G de cette fonction sera telle que :

$$G(x) = u(x).\ v(x) - \int_a^x v(t)\ u'(t)\ dt + \lambda$$

-=-=-=-=-=-

ET SI ON PRENAIT LA TANGENTE .....

Yves-Charles GUENOUN - *Lycée Marseilleveyre, Marseille*

Dans un esprit un peu moins ludique que " ETIUNITNOC " *(voir Bulletin Information Mathématique n° 3)* cette fiche de Première C ou Première D a pour objet le premier contact avec la notion de fonction dérivable en x_0 .

O. RAPPEL

Droites passant par un point donné.

Soient dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les points de coordonnées

les points	O	I	J	K	Ω_0	Ω_1	M ...
	0	1	0	1	x_0	x_1	x
	0	0	1	1	y_0	y_1	y

a) Caractériser l'équation d'une droite (non parallèle à $\vec{j}$) et passant par $\Omega \in \{O, I, J, K, \Omega_0, \Omega_1\}$

L'Ensemble de ces droites constitue (presque) le faisceau $\mathcal{F}_\Omega$ des droites de sommet Ω. Notation proposée $\mathcal{F}''_\Omega$

Chaque droite δ de $\mathcal{F}''_\Omega$ peut être considérée comme la représentation graphique d'une certaine fonction affine

$$f : x \longmapsto ax + b$$

Soit $\mathcal{A}''_\Omega$ l'ensemble de ces applications

b) Etudier $\mathcal{F}''_O \cap \mathcal{F}''_K$; $\mathcal{F}''_I \cap \mathcal{F}''_J$; $\mathcal{F}''_I \cap \mathcal{F}''_{\Omega_0}$; $\mathcal{F}''_{\Omega_0} \cap \mathcal{F}''_{\Omega_1}$

I. Fonctions tangentes

a) Soient $f : x \mapsto |x - 1|$ et $g : x \longmapsto -|x - 3| + 2$

calculer $\lim\limits_{a} \dfrac{f(x) - g(x)}{x - a}$ lorsque $a \in \{2, 0, 4, 1, 1^+, 1^-, \ldots\}$

b) Deux fonctions f et g sont dites tangentes en $A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$

si $\lim\limits_{x_0} \dfrac{f(x) - g(x)}{x - x_0} = 0$

c) Remarque : f est tangente en x_0 à g $\overset{?}{\longmapsto}$ f $\underset{a}{\frown}$ g *(1)*

2. Soient $f_1 : x \longmapsto x^2$ $\quad f_2 : x \longmapsto |x^2 - 1|$ $\quad f_3 : x \longmapsto |x|$

a) Trouver dans $\mathcal{A}''_0$ des applications tangentes à f_i $i \in \{1, 2, 3\}$

b) —— $\mathcal{A}''_I$ —— —— ——

c) On dit que f est dérivable (ou différentiable) en x_0 pour exprimer qu'elle admet en x_0 une application affine tangente.

f dérivable en $x_0 \longmapsto \exists \lim\limits_{x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = u \in \mathbb{R}$

$$\longmapsto \begin{cases} f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\left[u + \varepsilon(x)\right] \\ \lim\limits_{x_0} \varepsilon = 0 \end{cases}$$

u s'appelle alors nombre dérivé de f en x_0.

C'est aussi le coefficient directeur de la droite δ associée à l'application affine tangente $x \longmapsto u(x - x_0) + y_0$

3. *Théorème* : Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0
Réciproque fausse $(x \longmapsto |x|)$

4. Exemples et exercices. Nombre dérivé en x_0 des fonctions

4 a $x \longmapsto k$ $\quad$ 4 b $x \longmapsto x$ $\quad$ 4 c $x \longmapsto ax + b$

4 d $x \longmapsto x^2$ $\quad$ 4 e $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ $\quad$ 4 f $x \longmapsto \dfrac{a}{x}$

4 g $x \longmapsto \sqrt{x}$

-=-=-=-=-=-

(1) *Allusion à un problème préalablement cherché.*

REGIONALE A.P.M.E.P. D' AIX-MARSEILLE

L'Assemblée Générale s'est tenue le mercredi I5 mai I974 au Lycée St. Charles à Marseille. Après un excellent repas pris au Lycée St. Charles, les participants ont élu le nouveau Comité Régional pour l'année scolaire I974-75 qui a ensuite élu son bureau.

BUREAU	*Président d'Honneur*	M. BOREL
	Président	M. NOE
	Vice-Présidents	M. PFEIFFER, M. ROLLAND
	Secrétaires	Melle MABILLY I36, Bd. National I3003 Marseille
		Melle VERDELHAN
	Trésorière	Melle MARGAILLAN
	Membres	Mme BLANCHARD, M. BRIANÇON Mme RAULIN, M. SEBAH

Autres membres du COMITE REGIONAL

M. BERNARD, Melle CAR, Mme CORDONNIER, M. COSTE, M. DREVET, M. FOURES, M. GUENOUN, Melle LIGNEE, Melle PELISSIER, M. MARION, M. SEVAJOL, M. VERNET, M. VINET

REUNIONS DU TROISIEME TRIMESTRE I973-74

Mercredi 29 mai à I4 h 30 Lycée St. Charles

- *Exemple d'utilisation d'un ordinateur pour un enseignement" expérimental du Calcul des Probabilités dans le second cycle*

  Claire HELMSTETTER, Gilles THOMAS

Mercredi I2 juin à I4 h 30 Lycée Saint-Charles

- *La Combinatoire (en vue de son enseignement dans le second degré)*

  Robert ROLLAND

UTILITE DE LA MATHEMATIQUE MODERNE EN TECHNOLOGIE DE CONSTRUCTION APPLIQUEE AU GENIE CIVIL

(Maurice SEGUIN - *Lycée technique Diderot - Marseille*)

Après l'engouement initial pour la mathématique moderne, dû à l'effet attractif de sa nouveauté, la difficulté de l'effort de synthèse et le maintien de la besogne astreignante du calcul nous invitent à rechercher des motivations concrètes nécessaires à la valorisation de l'enseignement moderne de la Mathématique.

Dans cette présentation, il ne s'agit pas de vulgarisation, mais d'une recherche développement capable d'illustrer et mieux de visualiser des concepts, sans affaiblissement de leur généralité.

Ces exemples ci-après ont pour but de susciter la réflexion et de permettre une conduite aisée des calculs en parfaite connaissance du domaine de définition.

Ces exemples sont utilisés pour :

- le mouvement des terres
- l'utilisation d'un engin
- la définition constructive d'une partie d'ouvrage

1°) Mouvement des terres : foisonnement, compactage

On désigne par : f, g, etc .... les fonctions directes, pour le processus technologique, représentant une augmentation de volume du sol déblayé : c'est le foisonnement.

On désigne par : f^{-1}, g^{-1}, etc .... les fonctions inverses, représentant une diminution de volume du sol remblayé : c'est le compactage.

NOTA : On utilise en général une valeur unique : soit fo, de la fonction ci-dessus définie. Dans ce cas, f_0 désigne le coefficient de foisonnement.

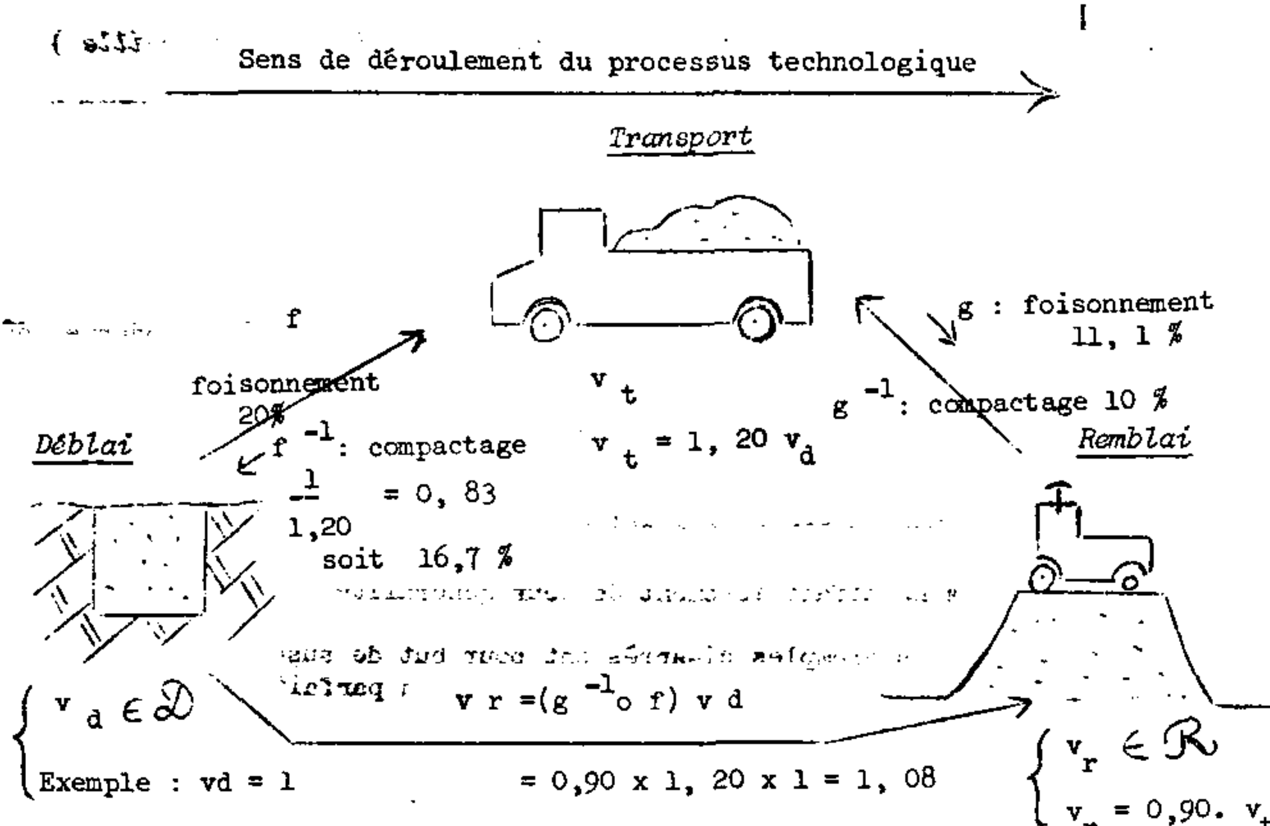
Mais il est possible de prolonger la fonction en écrivant par exemple :

$f = f(z)$ en fonction de la profondeur z

$f = f(u)$ en fonction de la nature ou de l'indice du milieu

etc ...

De plus, il est possible d'utiliser une topologie discrète pour un nombre fini de valeurs de la variable : z ou u déterminées expérimentalement ou continue si l'on détermine une loi de variation.



On obtient ainsi le foisonnement résiduel, après compactage.

Conclusion

Dans un métré :

1°) le volume v_d peut être mesuré et calculé sur plans

2°) f étant évaluée par comparaison / par essais sur place

On peut calculer v_t

3°) Connaissant sur plans : v_r, on pourra déterminer $(v_t - v_r)$

- pour $v_t - v_r > 0$: on connaîtra le volume de sol déblayé, foisonné excédentaire, à transporter à la décharge publique ;
- pour $v_t - v_r < 0$: on connaîtra le volume de sol à emprunter à une carrière.

<u>Composition des fonctions</u>

Soit :

$$F \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} H \xrightarrow{h} \cdots\cdots$$

a) définition :

$$(g \circ f)(z) = g\left[f(z)\right]$$

b) propriétés :

- Associativité : $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$
- Composition des applications f et f^{-1}

Involutions : si f bijective, alors : $f \circ f^{-1} = I_G$

- $\left\{\begin{array}{l}\text{Injectivité}\\ \text{Surjectivité}\\ \text{Bijectivité}\end{array}\right.$ de $(f \circ g)$

$(g \circ f)$ injective $\Longrightarrow$ f injective

$(g \circ f)$ surjective $\Longrightarrow$ g surjective

$(g \circ f)$ bijective $\Longrightarrow$ $\left\{\begin{array}{l} g \text{ surjective} \\ f \text{ injective}\end{array}\right.$

- Inversion

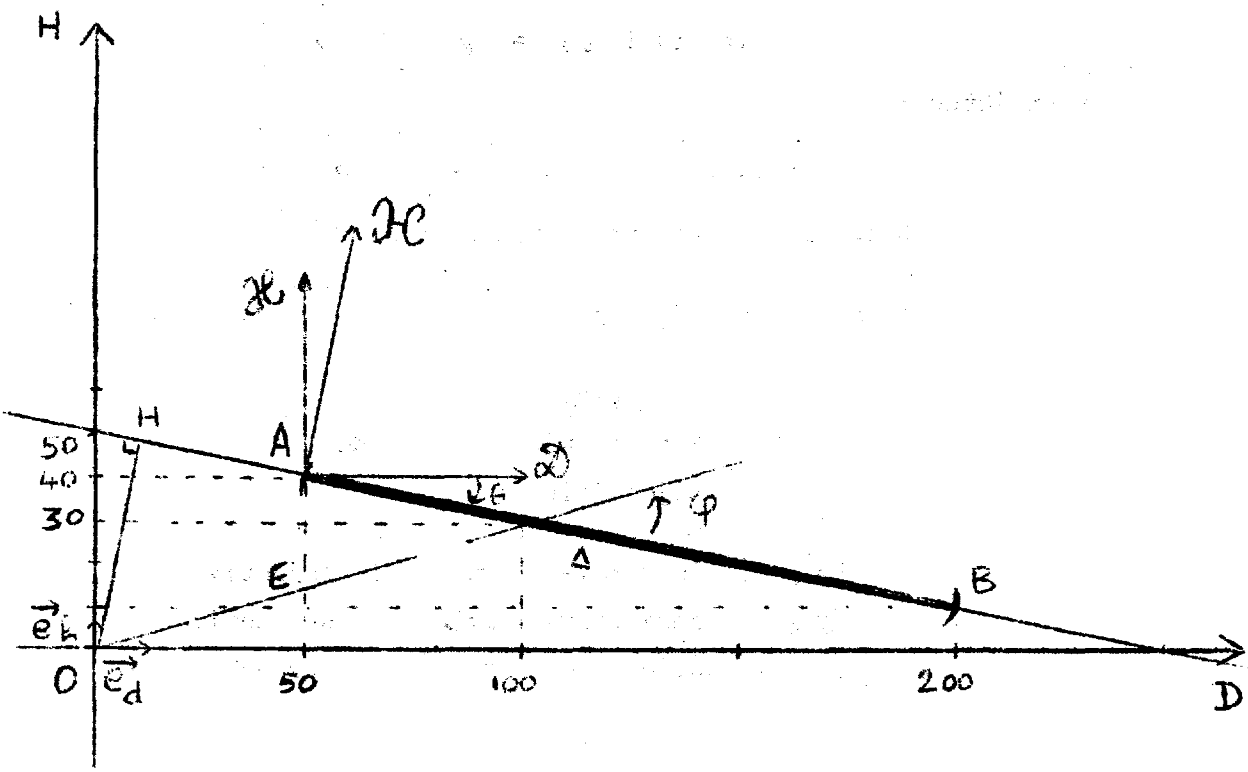
$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

2°) <u>Détermination de la distance utile de transport du béton par une pompe</u> :

$D + 5H = 250$	et $\begin{array}{l} 50 \leqslant D \leqslant 200\ m \\ 10 \leqslant H \leqslant 40\ m \end{array}$

$\begin{cases} D & : \text{distance horizontale de transport} \\ H & : \text{distance verticale de transport} \end{cases}$ $\left(\text{ou } H = -\frac{1}{5} D + 50 \right)$

$\begin{cases} A & : \text{borne inférieure, ou limite utile ou seuil d'adaptation de l'engin} \\ B & : \text{borne supérieure, ou limite technique d'utilisation de l'engin} \end{cases}$



<u>AB est un domaine lineique borné</u>

$$\begin{cases} M \in [AB] \\ \overrightarrow{OM} = D_M \cdot \vec{e}_d + H_M \cdot \vec{e}_h \end{cases} \quad \text{et} \quad E = \left| \overrightarrow{OM} \right| = \sqrt{D_M^2 + H_M^2}$$

E : distance réellement parcourue par le béton, ou longueur totale de la conduite de refoulement adaptée à la pompe.

Si l'on effectue

- la translation : $O \mapsto A \left| \begin{array}{l} 50 \\ 40 \end{array}\right.$ $\left\{ \begin{array}{l} OD \longmapsto A\mathcal{D} \\ OH \longmapsto A\mathcal{H} \end{array}\right.$

- puis la rotation (A, θ) $\left\{ \begin{array}{l} A\mathcal{D} \longleftarrow A\Delta \\ A\mathcal{H} \longleftarrow A\mathcal{K} \end{array}\right.$

Alors, le domaine [AB] est le sous-espace vectoriel (de dimension un) engendré par $\{\vec{U}\}$ ou $\{\overrightarrow{AM}\}$; soit :

$$\{\lambda\vec{U} \,/\, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

1°) la translation :

$$\left\{ \begin{array}{l} D - 50 = \mathcal{D} \\ H - 40 = \mathcal{H} \end{array}\right. \Longrightarrow \mathcal{D} + 5\mathcal{H} = 0$$

2°) la rotation :

$$\operatorname{tg}\theta = -\frac{1}{5} \qquad \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{26}} \qquad \cos\theta = \frac{5}{\sqrt{26}}$$

d'où :

$$\frac{1}{\sqrt{26}} \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{D} \\ \mathcal{H} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta \\ \mathcal{K} \end{pmatrix}$$

et $\|\vec{e}_\Delta\| = \dfrac{1}{5\sqrt{26}}$

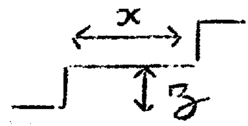
$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{26}} (5\mathcal{D} - \mathcal{H}) \qquad |\vec{U}| = \sqrt{26}$$

$$\mathcal{K} = \frac{1}{\sqrt{26}} (\mathcal{D} + 5\mathcal{H}) \quad \text{et} \quad 0 \leqslant |\vec{U}| \leqslant 3\sqrt{26}$$

enfin :

$$E = \sqrt{D^2 + H^2} = \sqrt{100^2 + 30^2} = 10\sqrt{109} \neq 104,50 \text{ m}$$

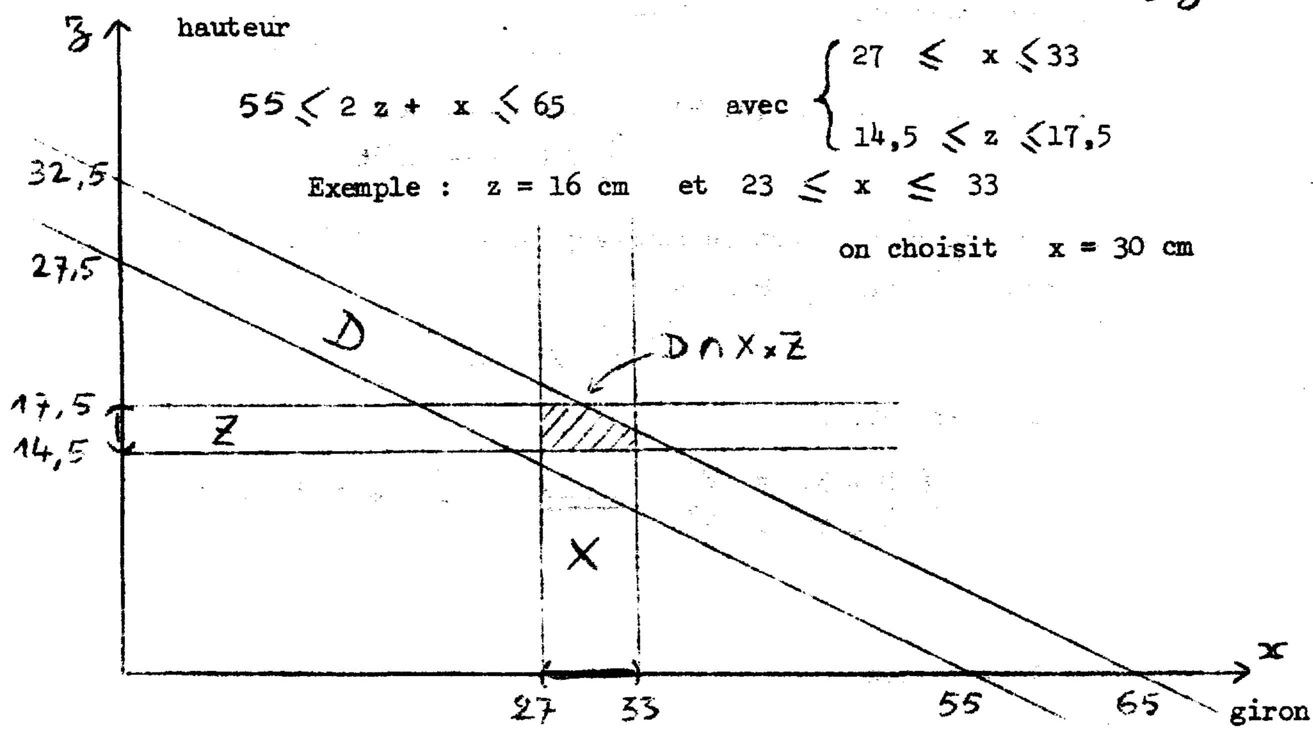
3°) **Escaliers**



$55 \leqslant 2z + x \leqslant 65$ avec $\begin{cases} 27 \leqslant x \leqslant 33 \\ 14{,}5 \leqslant z \leqslant 17{,}5 \end{cases}$

Exemple : $z = 16$ cm et $23 \leqslant x \leqslant 33$

on choisit $x = 30$ cm



Utilité pour le calcul d'un escalier balancé

- Soit une distribution $G(x)$ de support X
- Soit une distribution $H(z)$ de support Z

On appelle :

$G(x) \cdot H(z)$: le produit direct des distributions

G et H défini par (G et H sont des fonctions localement sommables

$$\langle G * H, \varphi \rangle = \langle G(x) . H(z), \varphi(x + z) \rangle$$

Ici $\langle G(a\,x) . H(b\,z), \varphi(ax + b\,z). \rangle$

Comme ces supports sont bornés, ainsi que la variable de φ ;
le domaine : $D \cap X \times Z$ est borné et le produit de convolution est défini.

De plus :

$$\langle G(ax) . H(b\,z), \varphi(ax + b\,z) \rangle = \frac{1}{|a| \cdot |b|} \langle G(x) . H(z), \varphi\left(\frac{x}{b} + \frac{z}{a}\right) \rangle$$

CONCLUSION

Il est superflu de justifier le rôle de la mathématique moderne en MECANIQUE. Comprise comme un outil, elle doit trouver son expression et son utilité dans toutes les disciplines techniques.

En technologie de **construction** appliquée au Génie Civil, on peut trouver de nombreux autres exemples dans :

- l'air comprimé
- les pompes
- les V.R.D. (Voierie et Réseaux Divers)

C'est-à-dire pour tous les problèmes de couplage d'engins, d'instruments et où l'on étudie des capacités, des rendements, des débits, des consommations, etc ... Il suffit alors d'admettre que l'on a choisi un système d'unités physiques cohérent.

-=-=-=-=-=-=-

P O U R   V O U S   D E T E N D R E ,

P O U R   T E R M I N E R   L ' A N N E E   S C O L A I R E

S U R   U N   S O U R I R E ,

L I S E Z

MATH. MÄRRANTES

par GiLL

Editions CEVIC

SUR LES BRANCHES DE LA GEOMETRIE

(exposé fait à la Régionale de l'A.P.M. d'Aix-Marseille)

A. BLANCHARD - *Faculté des Sciences St.Charles, Marseille*

De l'Antiquité jusqu'au XVIIème siècle il y avait " *la géométrie* " qui constituait une branche des mathématiques, et il n'y avait pas lieu de placer un adjectif pour préciser ce qu'on entendait par géométrie.

Actuellement au contraire, nous rencontrons les expressions : *géométrie élémentaire, géométrie analytique, géométrie projective, géométrie affine, géométrie algébrique, géométrie riemannienne, géométrie non euclidienne* etc ....

Mieux encore, l'expression " *géométrie analytique* " possède deux sens différents : le sens qu'elle a depuis le XVIIème siècle, et aussi un sens plus spécial qu'on lui donne depuis I960 environ et qui est à peu près ceci : géométrie des courbes analytiques, des variétés analytiques, des espaces analytiques (encore faudra-t-il préciser l'évolution de l'emploi du mot " analytique " en mathématiques).

Que s'est-il passé depuis trois siècles ? Y-a-t-il maintenant un grand nombre de sciences géométriques qui divergent de plus en plus pour se ramifier encore à l'avenir ? Y-a-t-il au contraire un excès de vocabulaire pour décrire quelques aspects divers d'une unique géométrie ? Pour poser une question plus pratique : la *géométrie non euclidienne*, par exemple, est-elle une nouvelle science ? ou bien n'est-elle qu'un simple chapître, plus ou moins achevé, de la géométrie ?

Indiquons tout de suite quel sera le sens de notre conclusion : la géométrie s'est assez nettement séparée en deux grandes branches : la *géométrie algébrique* et la *géométrie différentielle* qui n'ont pas les mêmes méthodes et n'étudient d'ailleurs pas les mêmes objets. Presque toutes les disciplines géométriques se rattachent assez bien à l'une de ces deux branches.

&

I. L' Antiquité

Si notre " *géométrie élémentaire* " s'inspire d'Euclide, il ne faut pas confondre la géométrie de l'Antiquité avec notre géométrie élémentaire. En effet, quand nous disons " *géométrie élémentaire* " , cela implique, qu'on le dise ou non, qu'on s'interdit le recours à certaines méthodes (analytiques ou différentielles le plus souvent) ; on s'enferme alors dans un archaïsme artificiel qui n'admettrait pas les travaux d'Archimède !

Les géomètres antiques n'excluaient aucune méthode, chacun sait que les coniques ont été définies dans l'Antiquité, et qu'Apollonius a rédigé un traité des coniques qui annonce déjà la géométrie analytique. D'autres courbes algébriques ont été définies dans l'Antiquité : conchoïdes et cissoïdes, par exemple, dont la définition est en quelque sorte " paramétrique " car les points de ces courbes sont définis à partir des points d'une droite ou d'un cercle.

Il faut dire ici que la définition d'une nouvelle courbe était souvent motivée par un problème de construction : ne sachant pas construire tel point, telle largeur, tel angle au moyen de la règle et du compas, les Anciens recherchaient une courbe qui supposée tracée permettait ensuite de faire la construction désirée avec la règle et le compas.
Un exemple particulièrement intéressant pour le sujet qui nous occupe est la *Spirale d'Archimède* que nous définissons actuellement par l'équation polaire $\rho = a\theta$

Cette courbe est faite pour " résoudre " le problème de la trisection de l'angle, et même plus généralement du partage d'un angle en n parties égales. Il est clair en effet que si une spirale d'Archimède est tracée, le partage d'un angle en n parties égales se ramène au partage d'un segment en n parties égales.

La théorie de la mesure des angles n'étant pas faite à l'époque d'Archimède, celui-ci donne une définition cinématique de sa spirale et réussit alors à faire la théorie de la tangente en un point de cette courbe. Ceci méritait d'être noté car on peut voir dans la nouveauté de ces idées le premier germe de ce qui sera la géométrie différentielle.

Signalons que la Spirale d'Archimède n'est pas une courbe algebrique. On dit que c'est une courbe transcendante. La géométrie algébrique ignore une telle entité.

II. De 1630 à 1850 : découverte des techniques fondamentales

Bien que l'usage des coordonnées ait déjà joué un rôle dans l'étude des coniques d'Apollonius, c'est vers 1630 que ce procédé est devenu systématique pour ramener l'étude des courbes à des questions d'algèbre et cela en utilisant des systèmes de coordonnées arbitraires. Ce fut la naissance de la " *géométrie analytique* " . On reconnait rapidement la distinction entre " *courbe algébrique* " et " *courbe transcendante* " (en même temps que la distinction entre " *fonction algébrique* " et " *fonction* *transcendante* "). La notion de degré d'une courbe algébrique apparut également, et NEWTON savait déjà que le degré est invariant par projection centrale. Newton fit d'ailleurs une classification des courbes du 3ème degré.

En même temps que se précisaient ces idées algébriques, les géomètres éprouvèrent le besoin d'édifier la théorie des tangentes à une courbe.
En effet, tant qu'on étudie le cercle comme seule courbe, on peut sans inconvénient se contenter de dire qu'une droite est tangente à un cercle quand elle a un point commun unique avec le cercle ; on peut à la rigueur se contenter de la même définition pour les tangentes aux trois coniques, à condition d'écarter les droites de directions asymptotiques. Mais il faut une idée nouvelle quand on aborde les cubiques.
Ce fut Newton qui réussit à préciser la notion de tangente par la théorie des " *fluxions* " que nous appelons maintenant " *dérivées* ". Ce fut l'apparition de ce que nous appelerons " *méthodes différentielles* ".

Les méthodes algébriques et les méthodes différentielles progressèrent simultanément. D'une part, BEZOUT établit que les courbes de degré n et p sans composante commune ont au plus n p points d'intersection, puis on définit les plans et espaces projectifs etc .... D'autre part, la théorie des tangentes fut perfectionnée par la théorie de la courbure, du cercle osculateur, de la torsion (pour les courbes gauches).

Il ne faut pas oublier bien entendu la théorie des surfaces qui progressa du point de vue algébrique (classification des quadriques, nombre de points d'une intersection de trois surfaces ...) et du point de vue différentiel (plan tangent, courbures ....)

Doit-on considérer qu'en 1850 on pouvait distinguer deux branches de la géométrie : la géométrie algébrique et la géométrie différentielle ? Nous ne le pensons pas, il n'y avait encore que distinction de méthodes qui s'appliquaient à peu près aux mêmes objets : les courbes et surfaces des espaces réels ou parfois complexes.

III. Riemann

L'oeuvre de Riemann est très importante pour l'histoire de la géométrie.

Inspiré par les travaux de GAUSS sur les surfaces, Riemann a commencé par créer et étudier les " *variétés riemanniennes* " dans son mémoire " *Sur les hypothèses qui servent de base à la géométrie* ", on n'en dégagera d'ailleurs que plus tard la structure sous-jacente de " *variété différentielle* ".

Plus important encore fut le travail de Riemann sur les intégrales abéliennes attachées à une courbe algébrique. La théorie des " fonctions algébriques " était alors empoisonnée par les " *fonctions multiformes* " (ces deux mots sont contradictoires !) et Riemann définit les surfaces de Riemann attachées aux courbes, l'idée aberrante de " fonction multiforme " attachée à une courbe correspondant alors à la notion de fonction définie sur la *surface de Riemann*. Riemann a alors considéré toutes les *différentielles méromorphes* sur une surface de Riemann et les a classées en trois espèces, il reconnait que la dimension de l'espace des différentielles de première espèce est liée à des propriétés topologiques de la surface de Riemann. On peut dire que simultanément Riemann a fait des découvertes importantes en géométrie algébrique (genre des courbes, etc ...), a fondé la topologie algébrique et a défini les variétés analytiques complexes de dimension un.

Après Riemann, la géométrie différentielle avait acquis une certaine autonomie par le fait qu'on connaissait certaines structures qui sont en propre les objets d'étude de cette discipline.

La géométrie algébrique avait fait des progrès importants, mais n'était pas purement algébrique, elle était tributaire des " *méthodes transcendantes* " (c'est-à-dire non algébriques, en l'occurence il s'agissait de méthodes différentielles ou analytiques et topologiques).

IV. L'autonomie de la géométrie algébrique

Il n'est pas question dans cet exposé de décrire les développements de la géométrie depuis Riemann, mais un point doit retenir l'attention après ce qui vient d'être dit : les géomètres ont éprouvé le besoin de reprendre entièrement la géométrie algébrique pour en faire une théorie purement algébrique. Il ne s'agissait pas là de pure préoccupation esthétique , mais de la possibilité de généraliser la portee des résultats. En effet, on peut tout aussi bien définir une courbe algébrique sur un corps commutatif quelconque, même de caractéristique non nulle que sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Or, les méthodes topologiques ne s'appliquent plus si le corps des scalaires n'est pas topologique, la notion de différentielle et même la notion géométrique de tangente disparaissant.

Une théorie plus simple peut donner idée de ce qu'on pouvait tenter : celle des racines multiples d'un polynôme.

Si P est un polynôme et a une racine de P on sait définir *l'ordre de multiplicité* de la racine a, en considérant la divisibilité de P par les puissances de $(x - a)$; on sait aussi que si P est à coefficients réels l'ordre de multiplicité de la racine a est liée au nombre de dérivées successives de P qui admettent a pour racine .
Ces propriétés se généralisent en fait à des polynômes à coefficients dans des corps autres que $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ à condition de définir la dérivée d'un polynôme <u>autrement que par la notion de limite</u>.

De même les tangentes à une courbe pourront se définir *algébriquement* grâce à la théorie des racines multiples d'une équation. Mieux la théorie des *différentielles* sur une courbe a pu être faite en termes d'algèbre par A. WEIL, et la théorie des courbes algébriques a pu être faite indépendamment du corps de base.

La théorie des courbes a conduit à la théorie des variétés algébriques, qui sont en gros des ensembles munis de " *fonctions rationnelles* " comme les variétés différentielles sont des ensembles munis de *" fonctions différentiables "*.

CONCLUSION

La géométrie algébrique et la géométrie différentielle paraissent les deux branches essentielles de la géométrie actuelle, elles se distinguent assez nettement mais les progrès de l'une influent parfois sur l'autre (la géométrie différentielle étant plutôt en avance sur la géométrie algébrique : les variétés algébriques ont suivi les variétés différentielles, les groupes algébriques ont suivi les groupes de Lie, les espaces fibrés algébriques ont suivi les espaces fibrés topologiques, ces derniers ayant été trouvés d'abord dans des cas où il s'agissait de variétés différentiables).

Les disciplines géométriques se rattachent assez bien à la géométrie algébrique où à la géométrie différentielle, aussi la géométrie projective se rattache à la géométrie algébrique tandis que la géométrie non euclidienne se rattache à la géométrie différentielle. La topologie algébrique, assez autonome pour qu'on hésite à la classer dans la géométrie, se rattacherait si l'on veut à la géométrie différentielle

En ce qui concerne la géométrie analytique au sens actuel de cette expression, elle fait partie de la géométrie différentielle mais c'est sans doute ce qui peut jouer le plus un rôle de trait d'union entre la géométrie différentielle et la géométrie algébrique (on a des théorèmes du type suivant : toute sous variété analytique complexe d'un espace projectif complexe en est aussi une sous variété algébrique).

Certaines questions de géométrie se classent tout de même à part. La géométrie des nombres se rattache à l'arithmétique, tandis que les problèmes sur les plans projectifs finis se rattachent à la combinatoire.

Tout ce qui vient d'être dit est, dans une certaine mesure, sujet à révision, l'expérience montre que ce qui paraît important quand une théorie se développe paraît parfois assez inutile un certain temps après, tandis que des résultats qui passent d'abord inaperçus sont considérés plus tard comme les plus annonciateurs de l'avenir.

-=-=-=-=-=-

Indications bibliographiques

J. DIEUDONNE - *The historical development of algebraic geometry* (American Math Monthby , octobre 1972)

P. VINCENSINI - *La géométrie différentielle au XIXème siècle* (Scientia, Milan , juillet-août 1972)

DOCUMENTS REPRODUITS

PAR L' I.R.E.M. DE MARSEILLE

Deuxième et roisième trimestre 1973-74

M. MARION

- *Sur une présentation des espaces affines.*
- *Trois exemples d'application des graphes.*

M. BENIAMINO

- *Introduction de la Théorie de GALOIS.*
- *Construction du Corps des nombres complexes.*

- 0 -

Ces documents sont à votre disposition à l' I.R.E.M. de Marseille.
Prière de vous adresser au Secrétariat.

INFORMATION

I.F.I.P. 2ème CONFERENCE INTERNATIONALE

" INFORMATIQUE & ENSEIGNEMENT "

MARSEILLE 1er - 5 Septembre 1975

La première Conférence Internationale " INFORMATIQUE ET ENSEIGNEMENT " organisée par l'I.F.I.P. (*International Federation for Information Processing*) à Amsterdam en 1970 a rassemblé 850 participants de 42 pays.

La deuxième Conférence Internationale, organisée par l'I.F.I.P. sous la Haute Présidence de Monsieur le Ministre de l'Education Nationale et sous le Patronage de l'U.N.E.S.C.O. (*Organisation des Nations Unies pour l'Education, la Science et la Culture*), de l'O.C.D.E. (*Organisation de Coopération et de Développement Economiques*) et de la C.C.E. (*Commission des Communautés Européennes*) aura lieu

du Ier au 5 Septembre I975
à Marseille

OBJECTIFS DE LA CONFERENCE

La Conférence se propose de réunir tous ceux, éducateurs et informaticiens, qui se sentent concernés à des degrés divers par les multiples rôles que l'informatique est appelée à jouer dans l'éducation.

La première Conférence concluait dans ses " Recommandations Finales " , à la nécessaire distinction entre la méthodologie de l'informatique et les ordinateurs, et insistait sur les avantages considérables qu'il y aurait à introduire la méthodologie de l'informatique dans l'enseignement des différentes disciplines.

Pour faire le point dans ce domaine et en vue de dégager des lignes d'action futures, une partie importante du programme de la Conférence sera consacrée à l'introduction de la méthodologie de l'informatique dans l'enseignement des diverses disciplines.

Un autre aspect important de la Conférence sera l'étude de l'application de la méthodolologie de l'informatique et des ordinateurs, aux problèmes d'éducation des pays en voie de développement.

ORGANISATION

Il y aura différents types de sessions :

- Communications invitées présentées par des spécialistes de renommée internationale.
- Communications relatives à une utilisation originale de l'informatique et/ou des ordinateurs dans l'enseignement, y compris l'enseignement de l'informatique.
- Panels visant à faire le point des tendances actuelles dans un certain nombre de domaines, et à dégager des perspectives d'avenir.
- Tables rondes de discussion sur les problèmes fondamentaux que pose l'introduction de l'informatique dans l'enseignement.

THEMES de la CONFERENCE

Disciplines

1. Informatique
2. Mathématique
3. Sciences Naturelles (Physique (Chimie (Biologie
4. Sciences sociales et sciences du comportement
5. Management
6. Arts
7. Ingénierie et applications techniques

Niveaux et techniques

A. Primaire et Secondaire (6 à 18 ans)
B. Université
C. Formation professionnelle
D. Formation permanente
E. Formation et recyclage des enseignants
F. Programmes d'enseignement
G. Equipement technique
H. La partie administrative de l'enseignement
I. L'enseignement assisté par ordinateur
J. L'enseignement guidé par ordinateur

La traduction simultanée sera assurée en Anglais et en Français

DERNIERES ACQUISITIONS

DE LA BIBLIOTHEQUE DU C.R.D.P.

Extrait du règlement :

" ..... *La bibliothèque du C.R.D.P. de Marseille est destinée aux membres de l'enseignement public - et privé sous contrat d'association - de l'Académie d'Aix-Marseille et à toute personne assurant des cours de formation professionnelle.*

Pour bénéficier du prêt, un certificat d'exercice signé par le Chef d'établissement est nécessaire. L'inscription est valable pour une année scolaire.

La durée du prêt est limitée à 3 semaines (maximum 3 volumes) et I semaine pour une revue.

Les lecteurs résidant hors de Marseille peuvent demander l'envoi des ouvrages par la poste.

L'expédition au lieu de fonction et le retour des ouvrages bénéficiant de la franchise postale sous le couvert de Monsieur le Recteur de l'Académie d'Aix-Marseille ... "

I. LIVRES

Ref.

372. 47
Ver
Vers un enseignement des probabilités à l'école élémentaire
I.R.E.M. de Bordeaux

5I0.32
MAS
Notions essentielles de mathématiques financières
W. MASIERI - Sirey I973

5I9
PAS
Eléments de calcul de probabilités et théorie du sondage
A. PASQUIER - Dunod I969

5I0
BAC
Initiation à la mathématique moderne
BACHELIER & LEMASSON - Foucher I972

5I7.I EXB	Analyse I	EXBRAYAT & MAZET - Hatier I97I
5I7.2 EXB	Analyse 2	- -
5I2.I EXB	Algèbre I	- -
372.3 FRE	Les enfants de 4 ans et le langage des graphes	FREDERIQUE & PAPY - Hachette I973
5I0 ROB	Somme des naturels - Addition dans	Marguerite ROBERT - Cedic 1973
5I7 GLA	La logique à l'école	GLAYMANN- ROSENBLOOM - Cedic I973
5I2 FLE	L'algèbre linéaire par ses applications	J.J. FLETCHER - Cedic 1973
5I0.I,2 et 3 Liv	Le livre du problème I. Pédagogie de l'exercice 2. Exercices élémentaires de géométrie 3. A propos d'un thème, la partie	I.R.E.M. de Strasbourg - Cedic 1973
5I0 MYX	Modeles finis	A. MYX - Cedic 1973
5I3 GAG	Géométrie autour d'un carré	P. GAGNAIRE - Cedic 1973
5I0 HIL	Le langage des catégories	P.J. HILTON - Cedic 1973
5I9 GLA	Les probabilités à l'école	GLAYMANN & VARGA - Cedic 1973
5I0 GAL	La mathématique et ses applications	E. GALION - Cedic 1973
804.0.5. VAN	Franc-Math : introduction mathématique I. Syntagme nominal 2. Relation prédicative	G. VAN HOUT - Didier I973

&

II. REVUES

- *Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public.*

  N°s 292, 293 (A.P.M.E.P.)

- *Le Petit Archimède*

  N°s 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

- *Bulletin d'Information des Professeurs d' Initiation Technologique*

  N°s 16, 17, 18, 19 (Académie d'Aix-Marseille)

- *Bulletin de l'Union des Physiciens*

  N°s 562, 563, 564

- *Stage mini-ordinateurs CARRY-LE-ROUET (25-26-27 juin 1973)*

  Compte rendu (I.N.R.D.P. et I.R.E.M. de Rouen)

- *Bulletin Régional de Liaison Informatique* N°s 2, 3

  (Académie d'Aix-Marseille - C.R.D.P. de Marseille)

- *Bulletin de Liaison : L' Informatique dans l'Enseignement Secondaire*

  N°s 8, 9, 10 (I.N.R.D.P.)

- *Bulletin de Liaison de la Recherche en Informatique et Automatique (I.R.I.A.)*

  N°s 6, 7

-=-=-=-=-=-=-

VENTE DE BROCHURES

Service d'Edition et de Vente des Publications de l'Education Nationale

(S.E.V.P.E.N. , rez-de-chaussée du C.R.D.P.)

. Mathématiques Ier cycle
Horaires, instructions, programmes .... 6 F

. Mathématiques 2ème cycle
Horaires, instructions, programmes .... IO F

. Emploi de calculateurs programmables dans le second degré
(Bilan d'une expérimentation menée par les I.R.E.M. et l'I.N.R.D.P.)
N° 54 .... I5 F

. Essai de développement simultané des Mathématiques et de la Physique dans les classes de second cycle
N° 23.64 .... I8 F

-=-=-=-=-=-