ACADEMIE D'AIX-MARSEILLE

BENIAMINO

3

Information Mathématique

Enseignement du Second Degré

inrdp
CRDP
MARSEILLE

IREM
MARSEILLE

Centre Régional de Recherche
et de Documentation Pédagogiques

55, rue Sylvabelle

I329I - MARSEILLE Cedex 2

Tel : 37.40.39 (03)

Institut de Recherche sur
l'enseignement des mathématiques

70, route Léon Lachamp

I3009 - MARSEILLE-LUMINY

Tel : 4I.I5.40 (38.06)

INFORMATION MATHEMATIQUE

N° 3

SOMMAIRE

Décembre I973

Dépôt légal : 4ème trimestre I973

E D I T O R I A L

En cette fin de premier trimestre de l'année scolaire 1973-74, une question est d'actualité : l'utilisation du contingent horaire de 10 %, et plus particulièrement en ce qui nous concerne, la contribution des professeurs de mathématiques à cette expérience.

Des solutions diverses ont été retenues quant à la détermination de ce contingent : ici on banalise une semaine par trimestre, là on banalise 3 jours par mois, là-bas c'est un jour tous les 10 jours, ailleurs c'est une demi-journée de temps en temps ..... ailleurs on attend pour voir .....

Par contre, peu d'informations nous sont parvenues sur les contenus en ce qui concerne l'utilisation faite par les professeurs de mathématiques.

Dans quelques établissements on a décidé de se tourner vers l'Informatique dans un souci de pluridisciplinarité :

- projection de séquences audio-visuelles d'initiation
- Projection de films
- visite d'un Centre de Calcul
- séances de travail

Dans d'autres, on a cherché en restant plus près des mathématiques à intéresser élèves et collègues à l'utilisation de calculateurs programmables : le calculateur du C.R.D.P. a été très demandé !

Il est bien sûr encore un peu tôt pour dresser un premier bilan ; il serait intéressant que le prochain numéro du bulletin *" Information Mathématique "* ouvre largement ses pages aux articles présentant des expériences faites dans le cadre de ces 10 % .

On entend dire assez souvent que le professeur de mathématiques est celui qui éprouve le plus de difficultés à s'adapter aux concertations pluridisciplinaires !

Une expérience se développe dans l'Académie qui montre que la coopération peut être réalisée entre les frères ennemis que furent souvent le matheux et le physicien : quatre ateliers de travail " MATH-PHYSIQUE " fonctionnent depuis la rentrée scolaire à AIX-en-PROVENCE (lycée Cézanne), AVIGNON (Ecole Normale de garçons), et MARSEILLE (lycée Saint-Charles et lycée technique Jean Perrin), les comptes rendus de ces séances de travail seront publiés dans le courant de l'année.

Les difficultés citées plus haut viennent peut-être d'une autre difficulté : celle de trouver des champs d'application des mathématiques à un niveau élémentaire bien qu'il semble pourtant que tout problème réel soit pluridisciplinaire.

En attendant plus d'informations sur ces questions, livrons à la réflexion (et à la quantification ....) du lecteur une phrase prise au hasard !) dans les *Pensées* de Blaise Pascal :

" *Puisqu'on ne peut être universel en sachant tout ce qui se peut savoir sur tout, il faut savoir peu de tout. Car il est bien plus beau de savoir quelque chose de tout que de savoir tout d'une chose, cette universalité est la plus belle* ".

G.T.

DE LA GEOMETRIE AVANT TOUTES CHOSES

Essai de présentation d'une autre axiomatique sous-jacente au programme de 4ème

(Etienne BRUNETON, *Lycée Vauvenargues - Aix-en-Provence*)

AVERTISSEMENT

Ce document a pour seule ambition de soumettre aux collègues un enchaînement possible des notions qui sont au programme de 4ème.
Il n'est bien sût en aucune façon la présentation d'un plan pour l'exposition de ce programme aux élèves : le lecteur s'en convaincra très vite.

On peut penser cependant que l'intuition en général la plus naturelle et la plus féconde est l'intuition géométrique. Il est alors tentant de chercher à exposer d'abord les notions géométriques du programme, et d'en tirer ensuite ce qui est étude des réels. C'est l'ordre qui a été suivi dans cet article.

Le fil directeur est le suivant : On présente au début certaines transformations simples du plan : projections, translations, homothéties. La suite est l'étude de l'action de ces transformations sur les autres notions introduites : *structure d'ordre d'une droite, équipollence et vecteurs*, etc .....

Quant à l'introduction de $\mathbb{R}$, on peut penser qu'elle est, dans ses détails, largement au-delà de la portée des élèves.

Mais il serait intéressant d'étudier si l'on peut s'inspirer de cet exposé pour mettre sur pied une progression destinée à nos élèves, et peut-être assez proche de leur intuition naturelle.

On s'est fortement inspiré pour la rédaction de ce qui suit de :

- " *Mathématique pour aujourd'hui, du plan aux réels, classe de 4e* " par R. SMETS (*Editeur : Ligel, Paris*) . On y trouvera de nombreuses idées pour rendre les choses plus accessibles aux élèves.
- Cet ouvrage peut lui-même être rapproché des ouvrages de G. PAPY : " *Mathématique moderne* " 2 (chapîtres 1 à 10) et 6 (livre I, chapitres 1 et 2), (*Editeur : Marcel DIDIER, Bruxelles, Paris, Montréal*)
- Enfin, on se reportera utilement à : " *Algèbre géométrique* " (chapitre 2) par E. ARTIN (*Editeur : Gauthier Villars, Paris*)

TABLE

I. LE PLAN

- On se donne . un ensemble non vide Π , nommé <u>plan</u> , dont les éléments sont nommés <u>points</u>

  . un ensemble non vide de parties propres de Π nommées <u>droites</u>

<u>Définition</u> : Deux droites sont dites <u>parallèles</u> pour exprimer qu'elles sont confondues ou n'ont aucun point commun.

- On admet les axiomes suivants :

<u>Axiome 1</u> : Etant donnés deux points distincts p et q, il existe exactement une droite A contenant p et q.

<u>Axiome 2</u> : Etant donné un point p et une droite A, il existe exactement une droite contenant p et parallèle à A.

<u>Axiome 3</u> : Il existe au moins trois points non alignés.

- On en tire facilement les conséquences suivantes :

. Deux droites sécantes (i.e. non parallèles) ont exactement un point commun.

. La relation de parallèlisme est une relation d'équivalence dans l'ensemble des droites. Les classes sont nommées <u>directions</u> .

. Toute droite contient au moins deux points distincts.

- On définit :

. La projection du plan sur une droite A parallèlement à une droite B .

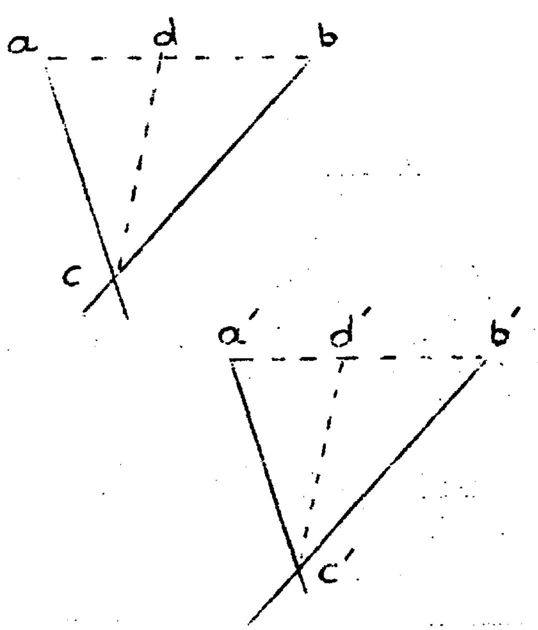
. La projection d'une droite A sur une droite B parallèlement à une droite C.

II. DILATATIONS

2.I. *TRANSFORMATIONS PARALLELES*

Définition *(2.I.I.)* : On appelle transformation parallèle une transformation de $\widehat{\Pi}$ (i.e. une application de $\widehat{\Pi}$ sur $\widehat{\Pi}$) telle que, quels que soient les deux points distincts a et b , leurs images a' et b' appartiennent à une même parallèle à la droite ab.

Théorème *(2.I.2.)* : Une transformation parallèle est entièrement déterminée par les images de deux points distincts donnés.



Supposons qu'une transformation parallèle f donne de deux points distincts donnés a et b les images données (distinctes ou non) a' et b'.

Montrons que f est alors déterminée, c'est-à-dire que l'image de chaque point par f est déterminée.

On peut toujours trouver un point c non situé sur la droite ab (*cf. axiome 3*). Les droites ac et bc sont sécantes.

Soit c' = f (c)

Comme f est une transformation parallèle, c' est sur la droite A parallèle à ac et contenant a'. De même c' est sur la droite B parallèle à bc et contenant b'. Comme ac et bc sont sécantes, A et B le sont aussi, et c' est déterminé.

Soit d un point appartenant à la droite ab. On peut réaliser la même construction que précedemment en utilisant a et c au lieu de a et b.

2.2. DILATATIONS

Si deux points distincts ont la même image (a' = b'), tous les points du plan ont la même image : la transformation est dite constante.

Si la transformation n'est pas constante, deux points distincts ont toujours des images distinctes, la transformation est injective. Dans ce cas, une construction analogue à la précédente montre que, connaissant c', on peut toujours trouver son antécédent c : la transformation est bijective. Donc :

Propriété (2.2.1.) : Toute transformation parallèle est constante ou bijective.

Définition (2.2.2.) : On appelle dilatation toute transformation parallèle non constante.

La construction du § 2.I. montre également que tout point de la droite ab a son image sur la droite a'b'. Inversement, tout point de la droite a'b' est l'image d'un point de la droite ab. Donc :

Propriété (2.2.3.) : L'image d'une droite par une dilatation est une droite.

2.3. TRANSLATIONS - HOMOTHETIES

La même construction montre encore que si, a et b étant distincts, on a a = a' et b = b', alors tout point est confondu avec son image, et f est l'identité sur Π (notée : i_{Π}). Donc toute transformation parallèle autre que l'identité a zéro ou un seul point fixe. D'où les deux définitions suivantes :

Définition (2.3.1.) : On appelle translation l'identité ou toute dilatation sans point fixe.

Définition (2.3.2.) : On appelle homothétie de centre o toute dilatation admettant o comme point fixe.

L'identité est donc, pour tout point o, une homothétie de centre O. Les transformations constantes ne sont pas des homothéties.

2.4. *TRACES*

Définition (2.4.1.) : On appelle trace d'une transformation parallèle f toute droite contenant à la fois un point a et son image f (a).

Il est clair que : - toute droite est une trace de i_{Π}
- toute droite contenant un point fixe de f est une trace de f.

Propriété (2.4.2.) : Les traces d'une transformation parallèle sont les droites globalement invariantes par f.

CN : Supposons que D soit une trace de f. D contient un point a et son image a'.

Soit $m \in D$. Si $m = a$, $f(m) = a'$, donc $f(m) \in D$

Si $m \neq a$, f (m) appartient à la parallèle à la droite am passant par a', c'est-à-dire à D elle-même. Donc $f(D) \subset D$.

Donc $f(D) = D$

CS : Supposons que $f(D) = D$. Soit a un point quelconque de D.

On a : $f(a) \in f(D)$, donc $f(a) \in D$, et D est une trace.

Théorème (2.4.3.) : L'intersection de deux traces concourantes est un point fixe.

Soit o le point commun de deux traces concourantes D et E. D'après la propriété précédente, f(o) appartient à $D \cap E$, c'est-à-dire que $f(o) = o$

Théorème (2.4.4.) : Les traces d'une homothétie distincte de l'identité sont les droites contenant son centre.

Soit une homothétie de centre o. On sait que toute droite contenant o est une trace.

Inversement, soit une trace D contenant le point a distinct de o. Si la droite oa coupait D, a serait l'intersection de deux traces, donc serait un point fixe, ce qui contredit l'hypothèse (l'homothétie envisagée est distincte de i_{Π}). Donc la droite oa, qui ne coupe pas D et qui a avec D une intersection non vide, est confondue avec D : D contient o.

Théorème (2.4.5.) : Les traces d'une translation distincte de l'identité sont les droites d'une direction.

Soit D une trace d'une translation t.
Aucune trace de t ne coupe D (sinon l'intersection serait un point fixe Toutes les traces appartiennent donc à la direction de D.

Inversement , soit E une droite de cette direction, et a un point de E. La trace de t contenant a est parallèle à D : c'est donc E. Toutes les droites de la direction de D sont des traces de t.

2.5. *EXISTENCE*

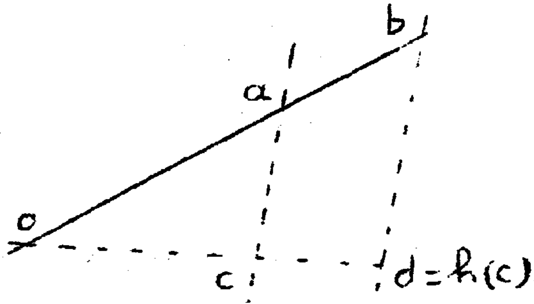
Dans ce qui précède, rien ne permet d'affirmer l'existence de transformations parallèles autres que i_{π} et que les transformations constantes.

Cette existence va être affirmée par le double axiome suivant

Axiome 4t (2.5.1.) : Etant donnés deux points quelconques a et b, il existe une translation qui applique a sur b.

Axiome 4h (2.5.2.) : Etant donnés trois points alignés o, a,b, le point o étant distinct de a et de b, il existe une homothétie de centre o qui applique a sur b.

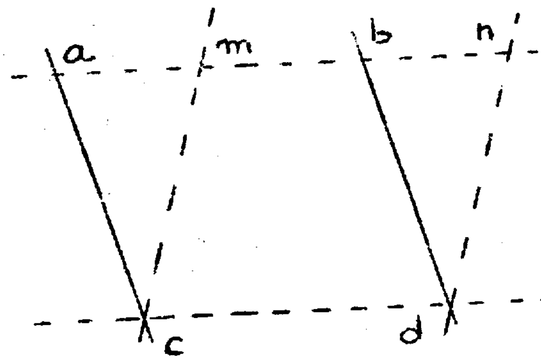
L'homothétie dont il s'agit en 2.5.2. est unique, puisqu'elle est déterminée par les images o et b de deux points distincts o et a (la construction de l'image d'un point est d'ailleurs facile , *cf. figure ci-contre*).



Montrons qu'il en est de même de la translation intervenant en 2.5.I. i.e.

Théorème (2.5.3.) : Une translation est déterminée par l'image d'un point donné.

Supposons qu'une translation t donne d'un point a donné l'image b donnée. Montrons que t est alors déterminée, c'est-à-dire que l'image par t de chaque point est déterminée.



Si a = b, t est une translation admettant un point fixe, donc t est i_Π

Si a ≠ b - soit c un point non situé sur la droite ab. Soit d = t (c). t étant une transformation parallèle, d est sur la parallèle à ab contenant c *(cf. 2.4.5.)*

Ces deux droites étant sécantes, d est déterminé.

- soit m un point situé sur la droite ab. Pour construire son image n, on exécutera la même construction à partir des points c (qui existe toujours en vertu de l'axiome 3) et d.

III. GROUPES

3.I. *GROUPES DES DILATATIONS*

On sait déjà que les dilatations sont bijectives *(cf.2.2.)*

Il est clair que la composée de deux dilatations est une dilatation, que i_Π est une dilatation, que la réciproque d'une dilatation est une dilatation. Donc :

Théorème (3.I.I.) : L'ensemble des dilatations, muni de la loi $\circ$, constitue un groupe de transformations de Π.

3.2. *DILATATION ADMETTANT DES TRACES DONNEES*

Théorème (3.2.I.) : Soit $\mathcal{D}$ un ensemble de droites et $\mathcal{G}$ l'ensemble des dilatations admettant les droites de $\mathcal{D}$ (et éventuellement d'autres droites) comme traces. $(\mathcal{G}, \circ)$ est un groupe de transformations de Π.

En effet, si deux dilatations admettent une même droite comme trace, leur composée admet encore cette droite pour trace *(utiliser 2.4.2.)* . D'autre part, $i_{\Pi} \in \mathcal{G}$. Enfin, une dilatation et sa réciproque ont les mêmes traces.

<u>*Remarque*</u> : $\mathcal{G}$ peut être, entre autre, $\{i_{\Pi}\}$, l'ensemble de toutes les dilatations, l'ensemble de toutes les translations admettant comme traces les droites d'une direction donnée, l'ensemble de toutes les homothéties de centre donné.

La question de la commutativité de ces deux derniers groupes sera examinée aux paragraphes 4.3. et 12.3.

Exercice : Etudier $\mathcal{G}$ dans le cas ou $\mathcal{D}$ se réduit à une seule droite.

3.3. <u>*GROUPE DES TRANSLATIONS*</u>

<u>*Théorème*</u> (3.3.I.) : L'ensemble des translations, muni de la loi o, constitue un groupe de transformations de Π .

En effet :
- i_{Π} est une translation
- Si t est une translation autre que i_{Π} , elle n'a pas de point fixe, donc t^{-1} non plus, donc t^{-1} est une translation.
- Soient t_1 et t_2 deux translations.

Si $t_2 \circ t_1$ n'a pas de point fixe, c'est une translation.

Si $t_2 \circ t_1$ a un point fixe o : soit $o_1 = t_1(o)$ donc $o = t_1^{-1}(o_1)$

on a $o = t_2 \circ t_1 (o) = t_2 (o_1)$.

t_2 est donc la translation qui applique o_1 sur o. Il en est de même de t_1^{-1} . Donc *(cf. 2.5.3.)*

$$t_2 = t_1^{-1} \text{, et } t_2 \circ t_1 = i_{\Pi} \text{, qui est une translation.}$$

<u>*Remarques*</u> : La commutativité de ce groupe sera étudiée au § 4.3.

On peut montrer :

- que la composée de deux homothéties peut ne pas être une homothétie ;
- que le groupe des dilatations n'est pas commutatif.

IV. VECTEURS

4.I. *EQUIPOLLENCE*

Définition (4.1.1.) : On dit que deux bipoints (a,b) et (c,d) sont équipollents pour exprimer que la translation qui applique a sur b applique aussi c sur d.

Notation : $(a,b) \uparrow (c,d)$

Propriété (4.1.2.) : La relation d'équipollence est une relation d'équivalence sur $\Pi \times \Pi$.

La démonstration est facile. Pour la transitivité, utiliser l'unicité de la translation qui applique c sur d *(cf. 2.5.3.)*

Remarque (4.1.3.) : Les classes d'équivalence ne sont rien autre que les graphes des translations.

4.2. *PARALLELOGRAMME*

Définition (4.2.1.) : (a,b,c,d) est un parallèlogramme signifie : $(a,b)\uparrow(d,c)$.

Remarque : Les notions d'équipollence et de parallèlogramme sont très voisines, et représentent deux points de vue sur la même situation.

Suivantla question traitée, il pourra être commode d'utiliser soit l'une soit l'autre, pour simplifier le langage.

Théorème (4.2.2.) : Si a,b,c,d, ne sont pas alignés, (a,b,c,d) est un parallèlogramme si et seulement si ab est parallèle à cd et ad est parallèle à bc.

<u>CN</u> : Si (a,b,c,d) est un parallélogramme non aligné (ce qui implique que les quatre points sont deux à deux distincts) il existe une translation qui envoie a sur b et d sur c. Alors ab est parallèle à dc (traces) et ad est parallèle à bc (la translation est une transformation parallèle).

<u>CS</u> : Si ab est parallèle à dc et ad est parallèle à bc et si a,b,c,d ne sont pas alignés (ce qui implique que les quatre points sont deux à deux distincts), soit t la translation qui envoie a sur b et soit $c' = t(d)$

dc' et dc sont parallèles à ab (traces de t, et hypothèse)

bc' et bc sont parallèles à ad (t est une transformation parallèle et hypothèse)

Donc, les droites dc' et bc' sont respectivement confondues avec les droites dc et bc : elles sont sécantes.

$$\text{Donc} \quad c = c' \quad \text{et} \quad (a,b) \uparrow (d,c)$$

<u>Conséquence</u> (4.2.3.) : Si a,b,c,d ne sont pas alignés,

$$(a,b) \uparrow (d,c) \iff (a,d) \uparrow (b,c)$$

Montrons que ce résultat reste vrai même si a,b,c,d sont alignés.

Hypothèse : a,b,c,d sont alignés sur une droite D ; $(a,b) \uparrow (d,c)$.

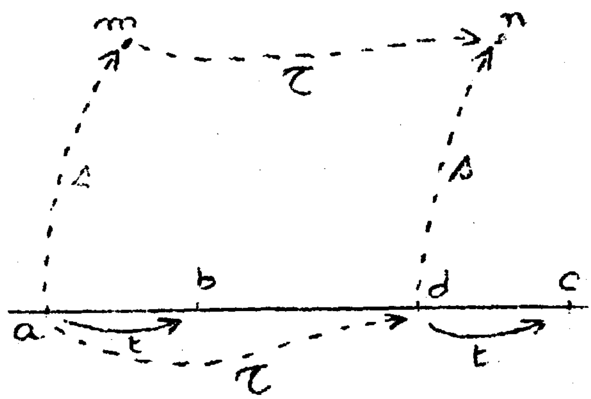
Soit t la translation qui applique a sur b et d sur c. Soit τ la translation qui applique a sur d.

On cherche à prouver que $\tau(b) = c$

Soit m un point non situé sur D et $n = \tau(m)$. Les points a,m,n,d ne sont pas alignés et $(a,d) \uparrow (m,n)$.

Donc $(a,m) \uparrow (d,n)$ *(cf. 4.2.3.)* :

soit s la translation qui applique a sur m et d sur n.



On a $m = s \circ t^{-1}(b)$ et $n = s \circ t^{-1}(c)$. Donc $(b,m) \uparrow (c,n)$

Or b, m, c, n ne sont pas alignés. Donc $(b,c) \uparrow (m,n)$ *(cf. 4.2.3.)*

or $(a,d) \uparrow (m,n)$. Donc $(ad) \uparrow (bc)$ *(cf. 4.I.2., transitivité)*

<u>Théorème</u> (4.2.4.) : Pour tous points a,b,c,d,

$$(a,b) \uparrow (c,d) \iff (a,d) \uparrow (b,c)$$

Un énoncé équivalent serait : (a,b,c,d) est un parallélogramme si et seulement si (a,d,c,b) est un parallélogramme.

4.3. *COMMUTATIVITE DU GROUPE DES TRANSLATIONS*

Soient t_1 et t_2 deux translations, et a un point quelconque.

Soit $b = t_1\ (a)$, $c = t_2\ (b) = t_2 \circ t_1\ (a)$, $d = t_2\ (a)$

On a : $(a,d) \uparrow (b,c)$

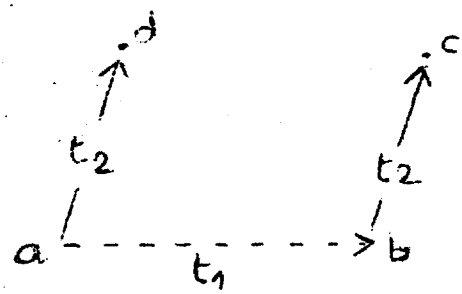
donc *(cf. 4.2.4.)* : $(a,b) \uparrow (d,c)$

donc *(cf. 4.I.I.)* : $t_1\ (d) = c$

i.e. $c = t_1 \circ t_2\ (a)$

Donc $t_1 \circ t_2\ (a) = t_2 \circ t_1(a)$,

et $t_1 \circ t_2 = t_2 \circ t_1$ *(cf. 2.5.3.)*



<u>*Théorème*</u> *(4.3.I.)* : Le groupe des translations $(\mathcal{T}, \circ)$ est commutatif.

4.4. *GROUPE DES VECTEURS*

<u>*Définition*</u> *(4.4.I.)* : Les classes d'équivalence de la relation d'équipollence sont nommés : <u>vecteurs.</u>

On notera $\overrightarrow{ab}$ (lire : vecteur a b) la classe du bipoint (a,b).

Le vecteur $\overrightarrow{ab}$ n'est rien autre que le graphe de la translation qui applique a sur b. On dira que $\overrightarrow{ab}$ est le <u>vecteur de cette translation.</u>

Il existe une bijection évidente de l'ensemble $\mathcal{T}$ des translations sur l'ensemble $\mathcal{V}$ des vecteurs.

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont respectivement les vecteurs des translations s et t, on notera $\vec{u} + \vec{v}$ le vecteur de la translation $t \circ s$.

Il est alors clair que :

<u>*Théorème*</u> *(4.4.2.)* : $(\mathcal{V}, +)$ est un groupe commutatif isomorphe à $(\mathcal{T}, \circ)$.

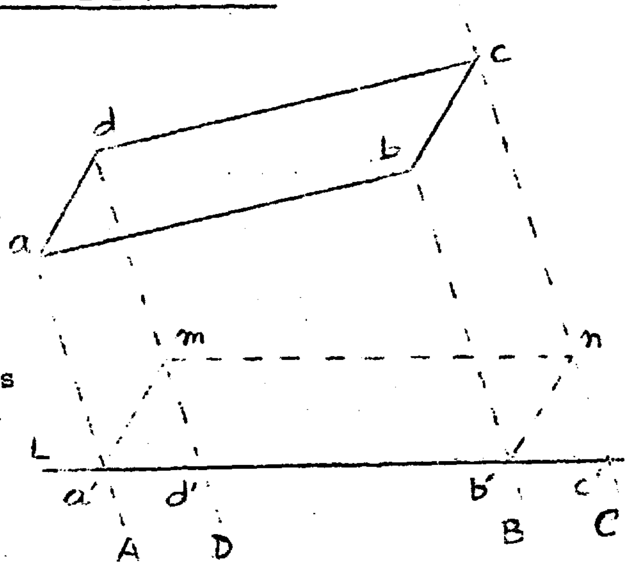
On constate facilement que, quels que soient les points a,b,c,d, :

$$\vec{ab} + \vec{bc} = \vec{ac}$$
$$- \vec{ab} = \vec{ba}$$
$$\vec{ab} - \vec{ac} = \vec{cb}$$
$$\vec{ac} = \vec{ab} + \vec{ad} \qquad (a,b,c,d) \text{ est un parallèlogramme.}$$

Ici encore on peut remarquer que tout ce qui s'exprime en terme de translation peut aussi s'exprimer en terme de vecteur : l'emploi de l'un ou de l'autre sera justifié par la commodité du langage.

V. ACTION DES TRANSFORMATIONS SUR LES PARALLELOGRAMMES

5.I. *ACTION D'UNE PROJECTION*



Soit (a,b,c,d) un parallèlogramme et (a',b',c',d') son image par la projection sur une droite L selon une direction μ.

Soient respectivement A,B,C,D les droites projetantes des points a, b,c,d.

Soit t la translation qui applique a sur d et b sur c. Les transformées par t des droites A et B sont respectivement D et C.

Soit m = t (a') et n = t (b').

Comme $a' \in A$ et $b' \in B$, on a :

$$m \in D \quad \text{et} \quad n \in C$$

(a',m) $\uparrow$ (b',n), donc aussi (a',b') $\uparrow$ (m,n) *(cf. 4.2.4.)* : soit s la translation qui applique a' sur b' et m sur n. L'image par s de la droite D est la droite C, et L est une trace de s.

Donc l'image par s de d' (i.e. $D \cap L$) est c' (i.e. $C \cap L$).

Donc (a',b') $\uparrow$ (d',c'), et (a',b',c',d') est un parallèlogramme.

Théorème (5.I.I.) : L'image par projection d'un parallèlogramme est un parallèlogramme.

Conséquence (5.I.2.) : Les images de deux bipoints équipollents par une même projection sont des bipoints équipollents.

Cette conséquence est une autre expression du théorème 5.1.1. On dit encore qu' "une projection conserve l'équipollence ".

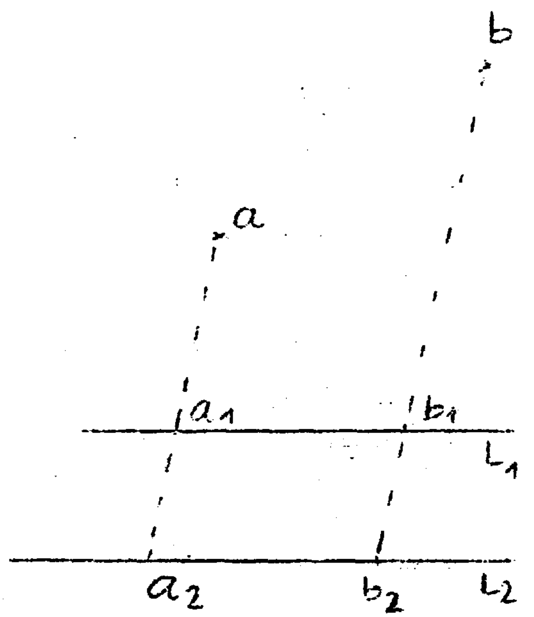
Propriété (5.I.3.) : Les projections d'un bipoint suivant la même direction sur deux droites parallèles sont des bipoints équipollents.

Soit en effet deux droites parallèles L_1 et L_2, et (a_1, b_1) (a_2, b_2). Les projections respectives sur elles, parallèlement à une même direction, d'un bipoint (a,b).

Si $L_1 = L_2$ alors $a_1 = a_2$ et $b_1 = b_2$

Si $L_1 \neq L_2$ et $a_1 = b_1$ alors $a_2 = b_2$

Si $L_1 = L_2$ et $a_1 \neq b_1$, alors $a_1 b_1$ est parallèle à $a_2 b_2$ et $a_1 a_2$ est parallèle à $b_1 b_2$, d'où le résultat *(cf. 4.2.2.)*.



Conséquence (5.I.4.) et *définition* :

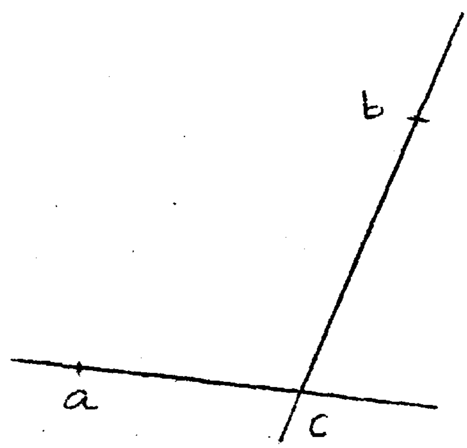
Les projections des bipoints représentant un même vecteur $\vec{u}$ parallèlement à une direction donnée μ sur les droites d'une même direction λ sont des bipoints équipollents.
Leur ensemble est un vecteur, nommé projection de $\vec{u}$ sur la direction λ parallèlement à la direction μ .

5.2. DECOMPOSITION D'UN VECTEUR SELON DEUX DIRECTIONS DONNEES

Définition (5.2.1.) : Soit un vecteur $\vec{u}$ et deux directions distinctes λ et μ

Soit (a,b) un représentant de $\vec{u}$ et c l'intersection de la droite de λ contenant a avec la droite de μ contenant b.

On a : $\vec{ab} = \vec{ac} + \vec{cb}$



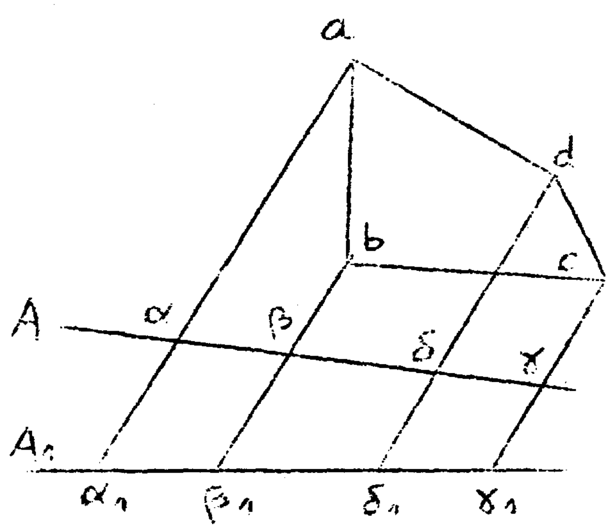
Les vecteurs $\vec{ac}$ et $\vec{cb}$ ne dépendent que de $\vec{u}$, λ et μ. Ils sont respectivement les projections de u sur λ parallèlement à μ et sur μ parallèlement à λ.

On dit que $\vec{ac}$ et $\vec{cb}$ sont les composantes de $\vec{u}$ selons les directions λ et μ.

Théorème (5.2.2.) : Si un quadrilatère (a,b,c,d) se projette suivant deux directions distinctes λ et μ suivant deux parallèlogrammes $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ et $(\alpha', \beta', \gamma', \delta')$, ce quadrilatère est un parallèlogramme.

Démonstration :

Remarque préliminaire : Si la projection de (a,b,c,d) sur une droite A parallèlement à λ est un parallèlogramme $(\alpha, \beta, \delta, \delta)$, sa projection sur toute autre droite A_1 parallèlement à λ estun parallèlogramme : c'est en effet la projection sur A_1 du parallèlogramme $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$



Dans l'énoncé du théorème 5.2.2. on peut donc supposer que la droite $\alpha\beta\gamma\delta$ appartient à μ et la droite $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ appartient à λ.

Alors $\overrightarrow{\alpha\beta}$ et $\overrightarrow{\alpha'\beta'}$ sont les composantes de $\overrightarrow{ab}$ selon les directions λ et γ
De même $\overrightarrow{\delta\gamma}$ et $\overrightarrow{\delta'\gamma'}$ sont les composantes de $\overrightarrow{dc}$.

Donc :

$$\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{\alpha\beta} + \overrightarrow{\alpha'\beta'}$$
$$\overrightarrow{dc} = \overrightarrow{\delta\gamma} + \overrightarrow{\delta'\gamma'}$$

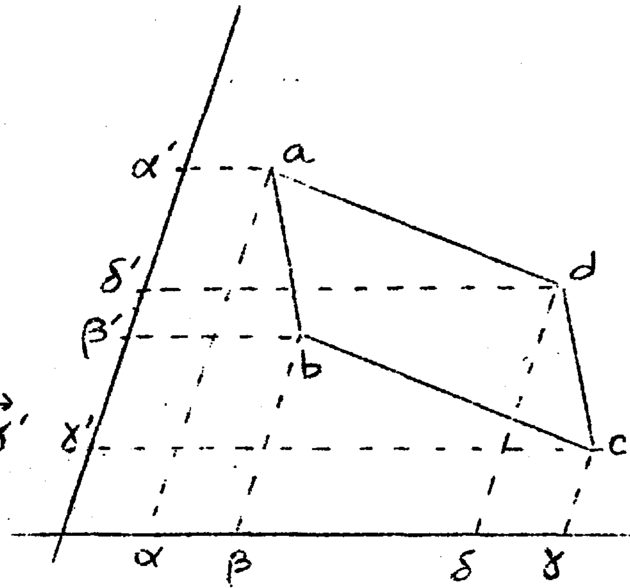
Comme $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ et $(\alpha',\beta',\gamma',\delta')$ sont des parallélogrammes :

$$\overrightarrow{\alpha\beta} = \overrightarrow{\delta\gamma} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\alpha'\beta'} = \overrightarrow{\delta'\gamma'}$$

Donc :

$$\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{dc}$$

et (a,b,c,d) est un parallèlogramme.



5.3. *ACTION D'UNE DILATATION*

Soit un parallèlogramme (a,b,c,d) , une dilatation f et (a',b',c',d') l'image de (a,b,c,d) par f.

(Rappelons qu'il est facile de prouver que l'image de deux droites parallèles par une dilatation est deux droites parallèles).

- Si (a,b,c,d) n'est pas aligné [donc (a',b',c'd') non plus] :

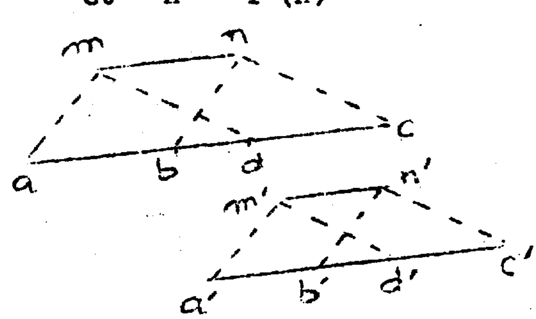
  ab et cd sont parallèles, donc a'b' et c'd' aussi
  ad et bc sont parallèles, donc a'd' et b'c' aussi

  donc (a',b',c',d') est un parallèlogramme

- Si (a,b,c,d) est aligné (et les quatre points deux à deux distincts),

Soient m et n deux points non situé ssur la droite abcd tels que (a,b,n,m) Soit un parallèlogramme ; (a,b,n,m) et(d,c,n,m) sont des parallèlogrammes non alignés. Soient $m' = f(m)$ et $n' = f(n)$

D'après le premier résultat, (a',b',n',m') et (d',c',n',m') sont des parallèlogrammes, i.e.
(a'b') ↑ (m'nn') ↑ (d',c') ,
donc (a',b',c',d') est un parallèlogramme.



- Si les quatre points a,b,c,d ne sont pas deux à deux distincts, le résultat est évident.

<u>*Théorème*</u> (5.3.1.) : L'image par une dilatation d'un parallélogramme est un parallélogramme .

<u>*Conséquence*</u> (5.3.2.) : L'image par une dilatation de deux bipoints équipollents est deux bipoints équipollents.

ou : " Les dilatations conservent l'équipollence "

Soit un bipoint (a,b), (a',b') son image par une dilatation f. Tout bipoint (c,d) équipollent à (a,b) a une image (c',d') équipollente à (a'b'). Inversement, tout bipoint (e', g') équipollent à (a',b') est l'image d'un bipoint (e,g) équipollent à (a,b). Donc :

<u>*Conséquence*</u> (5.3.3.) : L'image par une dilatation d'un vecteur est un vecteur.

VI. ORDRE

6.1. <u>*ORDRE SUR UNE DROITE*</u>

<u>*Axiome 5*</u> (6.1.1.) : Toute droite est munie naturellement de deux ordres totaux réciproques.

<u>*Définition*</u> (6.1.2.) : <u>Orienter</u> une droite, c'est choisir sur elle un des deux ordres naturels.

Il y a donc sur une droite deux orientations possibles. Rien ne permet d'en distinguer a priori une de l'autre.

Le choix d'un couple de points distincts (a,b) (nommé : <u>repère</u>) permet d'orienter une droite : par convention, on choisit celui des deux ordres, tel que $a < b$

On définit sans peine les segments, demi-droites .....

On désire alors établir un lien entre les structures d'ordre des différentes droites du plan, et étudier les actions des transformations sur ces structures d'ordre. Pour cela, on va poser un nouvel axiome en deux parties : *6p* et *6h*

6.2. *ORDRE ET PROJECTIONS*

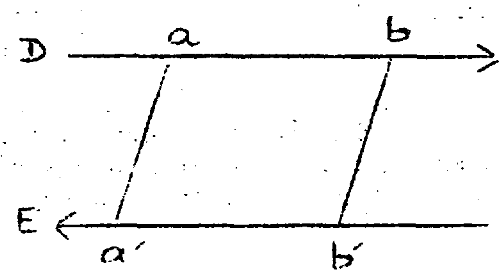
Axiome 6p (6.2.1.) : Toute projection parallèle d'une droite orientée sur une droite orientée est monotone.

On dit aussi qu'une projection non constante " conserve la relation d'ordre " (cas d'une projection strictement croissante) ou la " transforme en réciproque " (cas d'une projection strictement décroissante).

Conséquence : L'image par une projection non constante d'un segment est un segment, d'une demi-droite est une demi-droite.

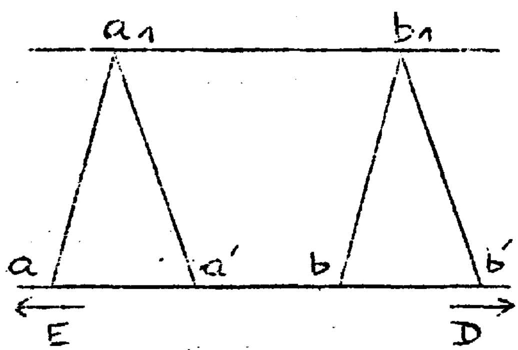
6.3. *ORDRE ET TRANSLATIONS*

Théorème (6.3.1.) : Toute restriction d'une translation à une droite D orientée sur une droite E orientée est monotone.



En effet :

Si D et E sont distinctes - plus exactement : si leurs supports sont distincts - la restriction à D de la translation est une projection (dont la direction est celles des traces de la translation).



Si D et E sont confondues - plus exactement : si D et E ont le même support - la translation donnée peut être considérée comme la composée de deux translations. Sa restriction à D peut donc être considérée comme la composée de deux projections. Or la composée de deux applications monotones est monotone.

Dans ce dernier cas (D est une trace de la translation étudiée), on peut être plus précis (en anticipant quelque peu sur la suite de l'exposé)

Soit une translation t, de vecteur $\vec{u}$, admettant D comme trace. On verra (§ 7.4.) qu'il existe un vecteur $\vec{u_1}$ tel que $\vec{u} = \vec{u_1} + \vec{u_1}$, et que la translation t_1 de vecteur $\vec{u_1}$ ait les mêmes traces que t. Alors $t = t_1 \circ t_1$ et t_1 étant monotone, t est croissante. Donc :

<u>*Théorème*</u> *(6.3.2.)* : La restriction d'une translation à l'une de ses traces orientée est croissante.

<u>*Propriété et définition*</u> *(6.3.3.)* :

Soient D et E deux droites orientées parallèles. Si une projection de D sur E est croissante, toutes les projections de D sur E ou de E sur D sont croissantes. On dit alors que D et E <u>ont le même sens</u>.

En effet, soient p_1 et p_2 deux projections de D sur E ; $p_2 \circ p_1^{-1}$ est la restriction à E d'une translation et est donc croissante. Donc p_1 et p_2 ont le même sens de variation.

6.4. *ORDRE ET HOMOTHETIES*

<u>*Axiome 6h*</u> : La restriction d'une homothétie à une droite orientée sur une droite orientée est monotone.

La suite de l'exposé permettra de vérifier (cf. § 13.3.) qu'il existe des homothéties dont les restrictions aux traces sont croissantes et d'autres dont les restrictions aux traces sont décroissantes.

VII. MULTIPLES D'UN VECTEUR

7.I. *DEFINITION*

Soit $\vec{u}$ un vecteur quelconque. On définit par récurrence le vecteur $n.\vec{u}$ par :

$$0.\vec{u} = \vec{0}$$

$$\forall n \in \mathbb{Z}, (n+1).\vec{u} = n.\vec{u} + \vec{u}$$

Cela signifie en particulier que, pour $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$, $n.\vec{u}$ est la somme de n vecteurs égaux à $\vec{u}$.

Remarques :

- $I.\vec{u} = \vec{u}$
- en posant $m = n + 1$, on obtient :

$$\forall m \in \mathbb{Z} \qquad (m-1).\vec{u} = m.\vec{u} - \vec{u}.$$

- On démontre facilement par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{Z} \qquad (-n).\vec{u} = -(n.\vec{u}).$$

7.2. *PROPRIETES*

Les propriétés suivantes se justifient facilement en utilisant les propriétés du groupe des vecteurs, et le fait que $n.\vec{u}$ est la somme de n vecteurs égaux à $\vec{u}$. Des démonstrations plus rigoureuses peuvent se faire par récurrence.

- $\forall n \in \mathbb{Z}, \forall \vec{u} \in \mathcal{V}, \forall \vec{v} \in \mathcal{V} \; n.(\vec{u} + \vec{v}) = n.\vec{u} + n.\vec{v}.$
- $\forall m \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathcal{V}, \forall \vec{u} \in \mathcal{V} \; (m+n).\vec{u} = m.\vec{u} + n.\vec{u}.$
- $\forall m \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathcal{V}, \forall \vec{u} \in \mathcal{V} \; n.(m.\vec{u}) = (nm).\vec{u}.$

VIII. GRADUATIONS

8.I. *DEFINITION*

Soient deux points distincts a_o et a_1, et l'application

$$g : \mathbb{Z} \longrightarrow \Pi$$

$$n \longmapsto a_n \quad \text{tel que} \quad \overrightarrow{a_o a_n} = n.\overrightarrow{a_o a_1}$$

On démontre facilement par récurrence que tous les points a_n appartiennent à la trace passant par a_o de la translation de vecteur $\overrightarrow{a_o a_1}$, i.e. à la droite $a_o \, a_1$.

D'où la définition :

Définition (8.1.1.) : Soit sur une droite D deux points a_o et a_1 distincts.
On appelle graduation de repère (a_o , a_1) l'application qui à tout $n \in \mathbb{Z}$ fait correspondre $a_n \in D$ tel que $\overrightarrow{a_o a_n} = n.\overrightarrow{a_o a_1}$

La graduation sera notée : (a_n). Chaque point sera nommé : point de la graduation.

On appelle n : abscisse de a_n

D'après cette définition, seuls les points de la graduation ont une abscisse, et cet abcisse est un nombre entier. L'objet des chapitres qui suivent est de généraliser cette notion de façon que chaque point de D ait son abscisse (qui ne sera évidemment plus toujours entière).

8.2. *AXIOME D' ARCHIMEDE*

Axiome 7 (8.2.1.) : Soit D une droite (a_n) une graduation de D. On suppose D orientée par le repère (a_o, a_1).
Pour tout point p de D, il existe un entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $p < a_n$.

Conséquence : $\forall t \in \mathcal{E} , t \neq i_{\Pi} \Longrightarrow t_o t \neq i_{\Pi}$

En effet, soit t une translation distincte de l'identité, et soit a_o un point quelconque. Considérons $a_1 = t(a_o)$, et la graduation (a_n) de repère (a_o , a_1).

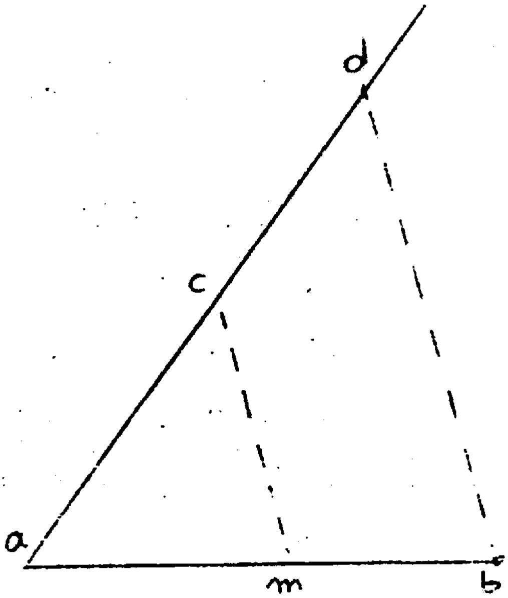
Si $tot = i_{\Pi}$ $a_2 = t(a_1) = a_o$
et de façon générale : $\forall i \in \mathbb{Z}$ $a_{2i} = a_o$ et $a_{2i+1} = a_1$

Considérons alors le point a_1 :

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad a_n \leqslant a_1 \quad (\text{car } a_n = a_o \text{ ou } a_n = a_1),$$
ce qui est contraire à l'axiome 7.

Remarque : Ce dernier résultat peut être exprimé de façon équivalente par $\forall u \in \mathcal{U}\ \vec{u} \neq \vec{0}$ $\quad 2.\vec{u} = \vec{u} + \vec{u} \neq \vec{0}$.

8.3. *MILIEU*



Soient deux points a et b.
Montrons qu'il existe un unique point m tel que $\overrightarrow{am} = \overrightarrow{mb}$

. Si $a = b$, on peut prendre

$$m = a$$

. Si $a \neq b$, soit c un point non situé sur la droite ab (*cf. axiome 3*) et soit d tel que $\overrightarrow{cd} = \overrightarrow{ac}$.
D'après la remarque précédente, $d \neq a$; d'autre part, d étant sur la droite ac est distinct de b. Soit m la projection de c sur la droite ab parallèlement à la droite db.

On a : $(a,c) \uparrow (c,d)$ donc $(am) \uparrow (m,b)$

. Montrons l'unicité de ce point m :

Soient m et m' tels que $\overrightarrow{am} = \overrightarrow{mb}$ et $\overrightarrow{am'} = \overrightarrow{m'b}$.

On a : $\overrightarrow{mm'} = \overrightarrow{ma} + \overrightarrow{am'} = \overrightarrow{ma} + \overrightarrow{m'b} = \overrightarrow{ma} + \overrightarrow{m'm} + \overrightarrow{mb} = \overrightarrow{m'm}$

d'où : $2\,\overrightarrow{mm'} = \overrightarrow{0}$ et d'après la remarque de la page précédente :

$$\overrightarrow{mm'} = \overrightarrow{0} \qquad \text{donc} \qquad m = m'$$

Définition (8.3.1.) : On appelle milieu d'un bipoint (a,b) le point m unique tel que $\overrightarrow{am} = \overrightarrow{mb}$

Il est alors facile de démontrer que :

- (a,b) et (b,a) ont le même milieu ;
- (a,b,c,d) est un parallélogramme ssi (a,c) et (b,d) ont le même milieu ;
- toute symétrie de centre o (définie de façon habituelle) est une homothétie de centre o ;
- pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ il existe un vecteur unique $\overrightarrow{u_1}$ tel que $\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_1} = \overrightarrow{u}$. Il est alors légitime d'utiliser le théorème 6.3.2.

8.4. *VECTEUR NUL*

Il s'agit dans ce paragraphe de démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad \forall \vec{u} \in \mathcal{V} \quad (n.\vec{u} = \vec{0} \Longleftrightarrow n = 0 \quad \text{ou} \quad \vec{u} = \vec{0})$$

(résultat qui est déjà acquis pour n = 0, 1 ou 2)

Implication de droite à gauche :

si $n = 0$, alors $n.\vec{u} = \vec{0}$ par définition

si $\vec{u} = \vec{0}$, on montre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{Z} \quad n.\vec{u} = \vec{0}$

Implication de gauche à droite. On va montrer que

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad \forall \vec{u} \in \mathcal{V} \quad (n \neq 0 \text{ et } \vec{u} \neq \vec{0} \Longrightarrow n.\vec{u} \neq \vec{0})$$

Soit un point quelconque a_o, a_1 tel que $\overrightarrow{a_o a_1} = \vec{u}$, (a_n) la graduation de repère (a_o, a_1). Soit D la droite $a_o a_1$; orientons D par le repère (a_o, a_1).

Soit P_n la propriété $a_o < a_n$

P_1 est vraie.

Supposons que P_n soit vraie. On a : $\overrightarrow{a_o a_1} = \overrightarrow{a_n a_{n+1}} = \vec{u}$, donc $\overrightarrow{a_o a_n} = \overrightarrow{a_1 a_{n+1}}$. Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{a_o a_n}$.

Du fait de l'hypothèse de récurrence, t n'est pas l'identité, donc t est strictement croissante.

Donc $a_o < a_1$ implique $t(a_o) < t(a_1)$, soit $a_n < a_{n+1}$

et par conséquent - puisqu'on a supposé $a_o < a_n$ - $a_o < a_{n+1}$

Donc P_n implique P_{n+1}

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$ P_n est vraie , i.e. $a_o < a_n$

On démontre de même que $\forall n \in \mathbb{Z}^{-*}$, $a_n < a_o$

D'où finalement : $\forall n \in \mathbb{Z}^* \quad a_o = a_n$

i.e. $\forall n \in \mathbb{Z}^* \quad \overrightarrow{a_o a_n} \neq \vec{0}$

i.e. $\forall n \in \mathbb{Z}^* \quad n.\vec{u} \neq \vec{0}$

8.5. *ACTION DES TRANSFORMATIONS SUR LES GRADUATIONS*

Soit une droite D munie d'une graduation (a_n). Soit φ une projection non constante ou une dilatation. Soit E l'image de D par φ, et pour chaque i

$$b_i = \varphi(a_i)$$

Montrons que l'application qui à $n \in \mathbb{Z}$ associe $b_n \in E$ est une graduation, i.e. que $\overrightarrow{b_o b_n} = n.\overrightarrow{b_o b_1}$. Soit P_n cette propriété.

- P_o est évidemment vraie.
- Supposons que P_n soit vraie. On a :

$$\overrightarrow{b_o b_{n+1}} = \overrightarrow{b_o b_n} + \overrightarrow{b_n b_{n+1}} = n.\overrightarrow{b_o b_1} + \overrightarrow{b_n b_{n+1}}$$

Or, (a_n) étant une graduation

$$\overrightarrow{a_n a_{n+1}} = \overrightarrow{a_o a_1}$$

Donc, φ conservant l'équipollence (cf. 5.I.2. et 5.I.3.)

$$\overrightarrow{b_n b_{n+1}} = \overrightarrow{b_o b_1}$$

Soit : $\overrightarrow{b_o b_{n+1}} = n.\overrightarrow{b_o b_1} + \overrightarrow{b_o b_1} = (n+1).\overrightarrow{b_o b_1}$

Donc P_n implique P_{n+1}

- Donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad \overrightarrow{b_o b_n} = n.\overrightarrow{b_o b_1}$

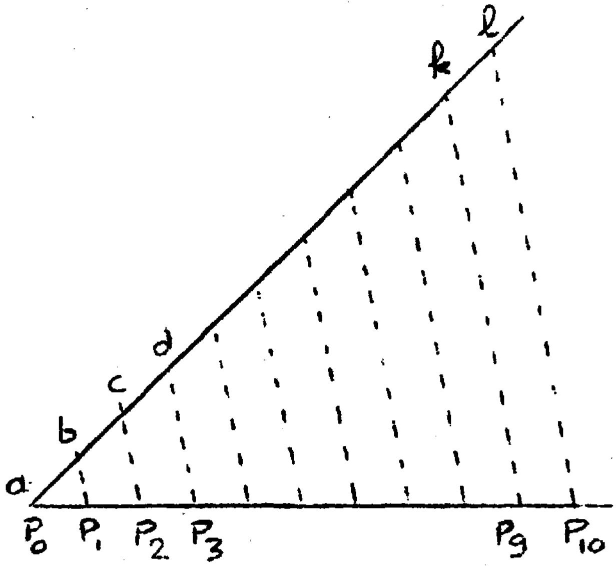
On démontre de façon analogue le même résultat pour $n \in \mathbb{Z}$.
D'où finalement : $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\overrightarrow{b_o b_n} = n.\overrightarrow{b_o b_1}$

On exprime ce résultat par :

Théorème (8.5.I.) : Les dilatations et les projections non constantes d'une droite sur une droite " transportent " les graduations.

IX. REPERAGE SUR UNE DROITE

9.I. *SUBDIVISION DECIMALE D'UN SEGMENT*



Soit un segment $[a, b]$. Une construction analogue à celle du milieu (cf. 8.3.) permet d'obtenir les points $p_o = a$, p_1, p_2 .... $p_{10} = b$, tels que :

$$\overrightarrow{p_o\, p_1} = \overrightarrow{p_1\, p_2} = \ldots\ \overrightarrow{p_9\, p_{10}}$$

La suite $(p_o, p_1, \ldots\, p_{10})$ est nommée : subdivision décimale de $[a,b]$. Si de plus, on impose un ordre à p_o, p_1 , ... elle est unique.

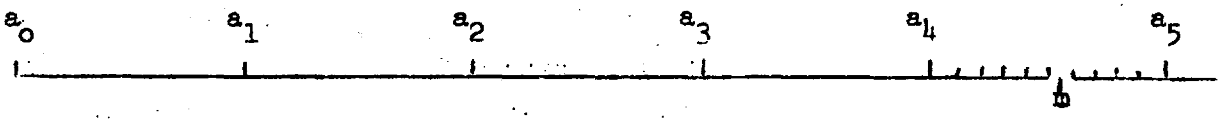
Tout point de $[a,b]$ autre que $p_1, p_2 \ldots\ p_9$ appartient à un et un seul segment $[p_i, p_{i+1}]$. On nomme ces segments : segments-dixièmes de $[ab]$.

9.2. *REPERAGE D'UN POINT*

Soit une droite D munie d'une graduation (a_n) . On sait que chaque point a_n de la graduation est repéré par son abscisse n. On remarque que deux points d'abscisses opposées sont symétriques par rapport à a, puisque

$$(-n).\ \overrightarrow{a_o\, a_1} = -\ (n.\ \overrightarrow{a_o\, a_1})$$

On va maintenant chercher à repérer un point quelconque m de D. On exploitera la remarque précédente en n'examinant, dans un premier temps, que les points appartenant à la demi-droite d'origine a_o contenant a_1.



Sechant que l'ensemble des segments $[a_i, a_{i+1}[$, $i \in \mathbb{N}$ est une partition de cette demi-droite, la première idée est d'indiquer simplement celui de ces segments qui contient m . Pour cela, il suffit de donner l'entier i (4 sur l'exemple ci-dessus). Mais il est clair que ce repérage est insuffisamment précis pour distinguer à tout coup deux points différents.

Si on veut l'affiner, on pourra préciser le segment-dixième de $[a_i , a_{i+1}[$ auquel appartient m. Pour cela, il suffira de donner le numéro d'ordre de ce segment-dixième (6 sur l'exemple).

En recommençant un nombre suffisant de fois, on peut obtenir ainsi un repérage aussi fin que l'on veut. Le Paragraphe qui suit définit les notions nécessaires pour préciser cette méthode.

9.3. *EMBOITEMENT DECIMAL - DEVELOPPEMENT DECIMAL*

Définition (9.3.1.) : Soit une droite D munie d'une graduation (a_n) On appelle emboîtement décimal illimité (edi) de cette droite graduée toute suite illimitée de segments fermés dont :

- le premier est un segment $[a_i, a_{i+1}]$
- chacun des autres est un segment-dixième du précédent.

On remarquera que le premier segment d'un " edi" $[a_i, a_{i+1}]$ est déterminé par l'entier i ($i \in \mathbb{N}$) si on se limite à une demi-droite. Chacun des autres est déterminé, connaissant le précédent, par son numéro d'ordre (chiffre de 0 à 9), étant entendu que les segments-dixièmes sont numérotés dans l'ordre du repère (a_o , a_1).

Définition (9.3.2.) : On appelle développement décimal illimité (ddi) toute écriture formée par un entier, suivi d'une virgule puis d'une suite illimitée de chiffres.

D'après la remarque précédente, il y a une bijection entre l'ensemble des "edi " d'une droite graduée et l'ensemble des "ddi ". Par exemple, le "ddi" 17,012345 .... représente "l'edi" dont le premier segment est $[a_{17}, a_{18}]$. Le second étant le premier segment dixième de celui-ci, le troisième étant le second segment-dixième du précédent, etc ...

Remarque : Un segment donné d'un "edi" donné est représenté par un développement décimal limité , obtenu par troncature du ddi. Ce développement décimal limité représente un nombre décimal.

9.4. *AXIOME DE CONTINUITE*

Il est clair que si on se contente d'un emboîtement décimal limité, l'obstacle signalé au 9.2. subsiste : plusieurs points distincts (et même une infinité) appartiennent à tous les segments de cet emboîtement. Mais on comprend bien qu'ils sont d'autant plus " proches " (au sens intuitif) que l'on aura poussé plus loin les subdivisions. L'axiome suivant est alors naturel :

Axiome 8 (9.4.1.) : Pour chaque emboîtement décimal illimité $\mathcal{E}$, il existe un point unique appartenant à tous les segments de $\mathcal{E}$.

Ainsi, à chaque "edi", et par conséquent à chaque "ddi", on fait correspondre un point de la demi-droite. Cette correspondance est-elle bijective ?

Pour répondre à cette question, donnons-nous un point m et cherchons s'il correspond à un (ou plusieurs) "ddi".

Sauf si m est un point de la graduation, l'entier i tel que $m \in [a_i, a_{i+1}]$ est déterminé sauf si m est un point de la subdivision décimale de $[a_i, a_{i+1}]$, le segment-dixième de $[a_i, a_{i+1}]$ auquel m appartient est déterminé , et ainsi de suite.

Si m n'est un point ni de la graduation, ni d'aucune subdivision ultérieure, il correspond donc à un unique "edi ".

Supposons maitenant que m soit un point de la graduation : $m = a_i$

$$m \in [a_i, a_{i+1}] \qquad \text{et} \qquad m \in [a_{i-1}, a_i]$$

Si on choisit le deuxième segment, on constate que m appartient à son segment-dixième (numéroté 9) , et au 10 ème segment-dixième de celui-ci, etc ..... On obtient le ddi (i - 1), 99999 ....

Si au contraire on choisit le segment $[a_i , a_{i+1}]$ on obtiendra de même le ddi i, 00000 ......

A ces deux ddi correspond donc un même point.

Si m est un point d'une subdivision ultérieure, on a un résultat analogue avec des ddi du type : 4,72839999 .... et 4,7284000 ....

Par convention, on n'utilisera pas les ddi se terminant par une suite illimitée de 9. Il y aura alors une bijection entre l'ensemble des ddi autorisés et les points de la demi-droite.

Un tel ddi repèrera (théoriquement) un point de la demi-droite. Pour repérer un point n de la demi-droite opposée, on utilisera le ddi repérant son symétrique par rapport à a, précédé du signe - .

X. NOMBRES REELS

IO.I. <u>*DEFINITION*</u>

<u>*Définition*</u> *IO.I.I.* On appelle nombre réel tout ddi ne se terminant pas par une suite illimitée de 9, et éventuellement précédé du signe - .

On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

On identifie tout entier i au réel i, 00000 .....

On identifie tout décimal d au ddi obtenu en faisant suivre d d'une suite illimitée de 0.

Ces conventions peuvent facilement être justifiées par l'étude du chapitre précédent.

Le paragraphe 9.4. montre également que pour toute droite graduée D il existe une bijection de $\mathbb{R}$ sur D. L'antécédent d'un point de D s'appelle son abscisse.

IO.2. *THEOREME DE THALES*

On a vu (*théorème 8.5.1.*) que les dilatations et les projections non constantes d'une droite sur une droite " transportent " les graduations. On sait aussi (*5.1.2. et 5.3.2.*) qu'elles conservent l'équipollence. Elles sont monotones, et par conséquent, transforment un segment en un segment. Donc elles " transportent " les emboîtements décimaux illimités. On en déduit facilement :

Théorème (*10.2.1.*) : Si φ est une dilatation ou une projection non constante, si D est une droite et F son image par φ, alors l'image φ (m) d'un point m de D a dans le repère $(\varphi(a), \varphi(b))$ la même abscisse que m dans le repère (a,b)

Le théorème de Thalès est en fait l'énoncé ci-dessus appliqué au cas où φ est une projection.

IO.3. *BIJECTION CANONIQUE D'UNE DROITE GRADUEE SUR UNE AUTRE*

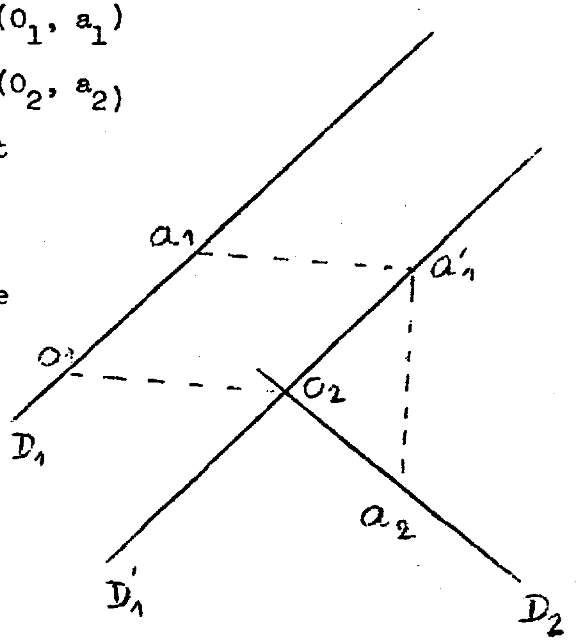
Soit une droite D_1, munie du repère (O_1, a_1)
et une droite D_2, munie du repère (O_2, a_2)

Soit φ l'application qui a tout point d'abscisse x sur D_1 fait correspondre le point de même abscisse x sur D_2.

φ est évidemment une bijection, que nous nommerons bijection canonique de D_1 (O_1, a_1) sur D_2 (O_2, a_2).

On va montrer: que φ est une bijection croissante de D_1 sur D_2 (chacune orientée par son repère),

que φ transforme un parallélogramme en parallélogramme.



Supposons D_1 et D_2 non parallèles. Soit t la restriction à D_1 de la translation de vecteur $\overrightarrow{O_1 O_2}$

Soit $D'_1 = t\ (D_1)$ $\qquad a'_1 = t\ (a_1)$

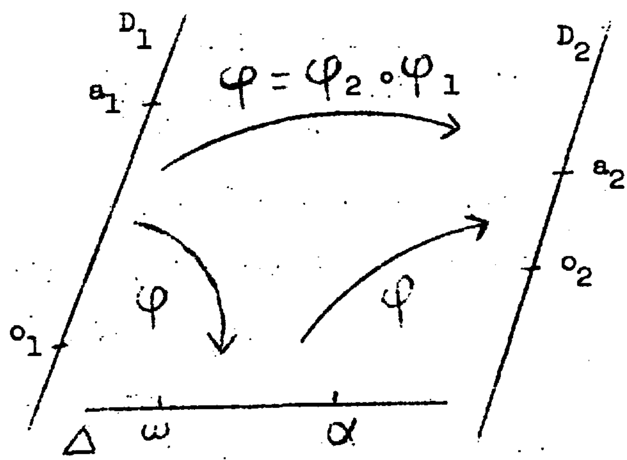
Soit p la projection de D'_1 sur D_2, de direction a'_1 et a_2 (comme D_1 et D_2 ne sont pas parallèles, $a'_1\ a_2$ est une droite bien définie, non parallèle à D_2)

Considérons $p \circ t$: tout point m de D_1 et son image $p \circ t\ (m)$ ont la même abscisse dans (o_1, a_1) et dans (o_2, a_2) .

$$\text{Donc} : \forall m \in D_1 \qquad p \circ t\ (m) = \varphi(m) \quad \text{i.e.} \quad \varphi = p \circ t$$

Comme p et t sont des applications croissantes, il en est de même de φ.
Comme p et t transforment un parallèlogramme en parallèlogramme, il en est de même de φ .

Supposons D_1 et D_2 parallèles
On obtiendra le même résultat en passant par l'intermédiaire d'une droite graduée Δ , qui ne soit parallèle ni à D_1, ni par conséquent à D_2.



10.4. <u>*ORDRE DANS* $\mathbb{R}$</u>

Soit une droite graduée D orientée dans le sens de son repère.
On a démontré (*paragraphe 8.4.*) que les points d'abscisses entières sont dans le même ordre que leurs abscisses. On vérifiera qu'il en est de même pour les points d'abscisses décimales.

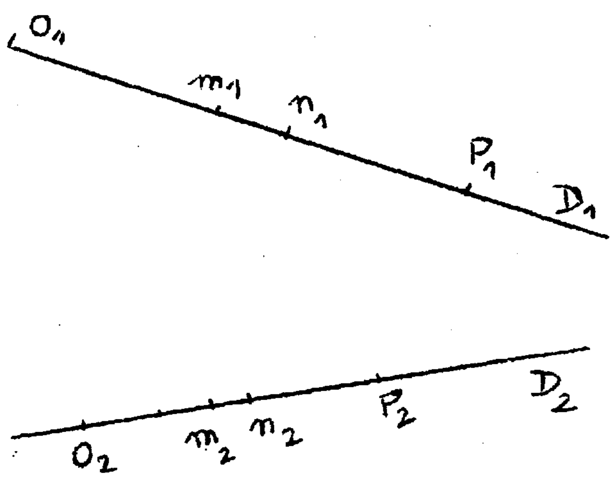
Il est alors naturel de transporter sur $\mathbb{R}$ l'ordre de D. En utilisant la bijection canonique définie au *paragraphe 10.3.* , on montrera que la relation obtenue dans $\mathbb{R}$ est indépendante de la droite D choisie.

XI. ADDITION DANS $\mathbb{R}$

II.I. *DEFINITION*

Soient x et y deux nombres de $\mathbb{R}$
Soient sur une droite graduée D_1 d'origine o_1 les points m_1 et n_1 d'abscisses respectives x et y.
Soit p_1 le point de D_1 tel que

$$\overrightarrow{o_1p_1} = \overrightarrow{o_1m_1} + \overrightarrow{o_1\,n_1}$$



Soit enfin s_1 l'abscisse de p_1.
On définit ainsi une application

$$\sigma_1 : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto s_1 = \sigma_1\,(x,y)$$

On peut de même, à partir d'une droite graduée D_2 , définir une application

$$\sigma_2 \quad : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto s_2 = \sigma_2\,(x,y)$$

Montrons que $\sigma_1 = \sigma_2$

Soit φ la bijection canonique de D_1 sur D_2

$$m_2 = \varphi\,(m_1) \;;\;\; m_2 = \varphi(n_1\,) \;\;;\;\; p'_2 = \varphi\,(p_1)$$

le point p_2 d'abscisse s_2 est tel que $\overrightarrow{o_2\,p_2} = \overrightarrow{o_2\,m_2} + \overrightarrow{o_2\,n_2}$

φ transforme le parallèlogramme (o_1,n_1,p_1,m_1) en le parallélogramme $(o_2, n_2, p'_2, m_2\,)$. Donc $\overrightarrow{o_2\,p'_2} = \overrightarrow{o_2\,m_2} + \overrightarrow{o_2\,n_2} = \overrightarrow{o_2\,p_2}$

Donc $p_2 = p'_2$

L'abscisse de p'_2 est celle de p_1 , soit $\sigma_1\,(x,y)$;
L'abscisse de p_2 est $\sigma_2\,(x,y)$.
Donc, quels que soient x et y, $\sigma_1(x,y) = \sigma_2\,(x,y)$
L'application σ_1 , qui est donc indépendante de la droite D_I choisie, est nommée somme, et notée : $\sigma_1(x,y) = x + y$

II.2. *GROUPE ($\mathbb{R}$, +)*

Soit D une droite graduée d'origine o, δ sa direction.
On sait que si $\mathcal{E}_D$ est l'ensemble des translations admettant les droites de δ comme traces, $\mathcal{E}_D$ est pour la loi o un groupe commutatif (*cf.* § 3.2) A toute translation $t \in \mathcal{E}_D$, on peut faire correspondre un nombre $x \in \mathbb{R}$ abscisse de t (o). Inversement, tout réel x définit un point m sur la droite, donc une translation de $\mathcal{E}_D$, de vecteur $\overrightarrow{om}$.

Il existe donc une bijection $f : \mathcal{E}_D \longrightarrow \mathbb{R}$
D'après la définition de la somme dans $\mathbb{R}$

$$f (t_2 \circ t_1) = f (t_1) + f (t_2)$$

Donc :

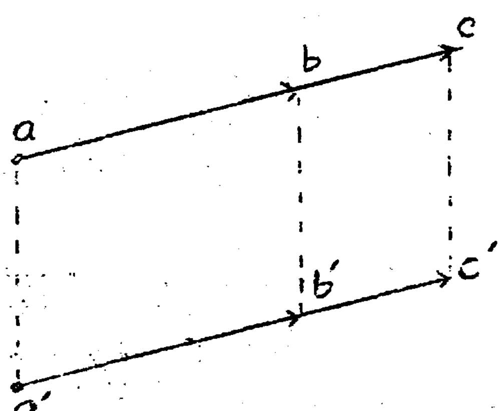
<u>*Théorème*</u> *(II.2.I.)* : ($\mathbb{R}$, +) est un groupe commutatif, isomorphe à ($\mathcal{E}_D$, o).

XII. MULTIPLICATION DANS $\mathbb{R}^*$

I2.I. *PRODUIT D'UN VECTEUR PAR UN REEL*

Soit $\vec{u}$ un vecteur, r un réel,
(a,b) un représentant de $\vec{u}$.
Si $\vec{u} = \vec{0}$, on définit le vecteur $r.\vec{u}$ par $r.\vec{u} = \vec{0}$
Si $\vec{u} \neq \vec{0}$, soit c le point de la droite ab qui a pour abscisse r dans le repère (a,b).
Le <u>vecteur</u> $\overrightarrow{ac}$ ne dépend pas du représentant (a,b) de $\vec{u}$, car les translations " conservent " les abscisses (*cf. théorème 10.2.I.*).
Le vecteur $r.\vec{u}$ est alors défini par :

$$r.\vec{u} = \overrightarrow{ac}$$



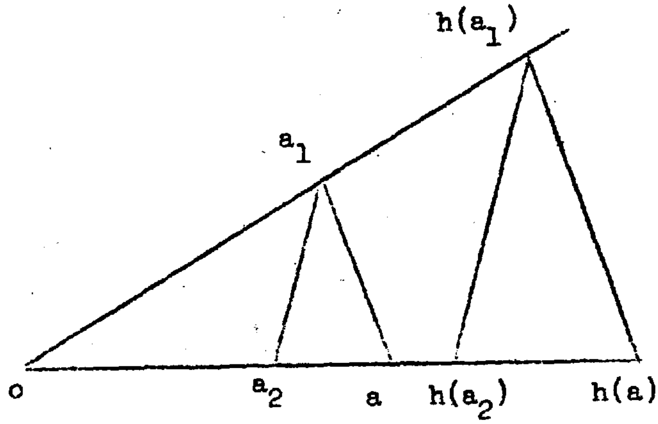
Si : . $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{a'b'}$

. c a dans (ab) la même abscisse que c' dans (a'b')

Alors : $\overrightarrow{ac} = \overrightarrow{a'c'}$

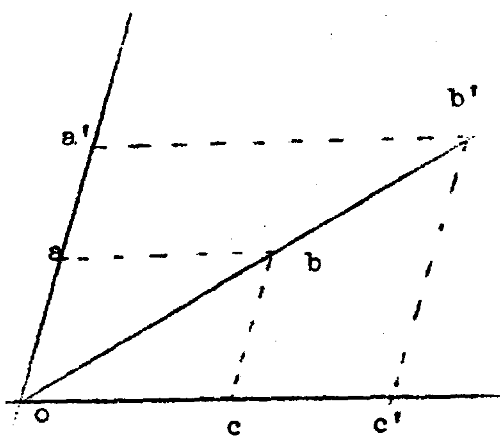
<u>*Remarque*</u> : on vérifie sans difficulté que, si $r \in \mathbb{Z}$, la présente définition et celle du § 7.I. coïncident.

I2.2. <u>*RAPPORT D' UNE HOMOTHETIE*</u>



Soit h une homothétie de centre o, et r l'abscisse de h (a) dans le repère (o,a), a étant un point donné distinct de o.
Soit a_1 un point non situé sur la droite oa (*cf. axiome 3*) . Le *théorème 10.2.1.* appliqué à la projection sur oa_1, de direction aa_1, montre que r est également l'abscisse de $h(a_1)$ dans le repère (o,a_1).
Soit a_2 un point distinct de o sur la droite oa. En utilisant la projection sur oa, de direction a_1a_2, on montre que r est également l'abscisse de h (a_2) dans le repère (o, a_2).

Le nombre r est donc indépendant du choix de a. On l'appelle : <u>rapport</u> de l'homothétie h.
On vérifie facilement qu'une homothétoe est caractérisée par son rapport r $(r \neq o)$ et son centre .



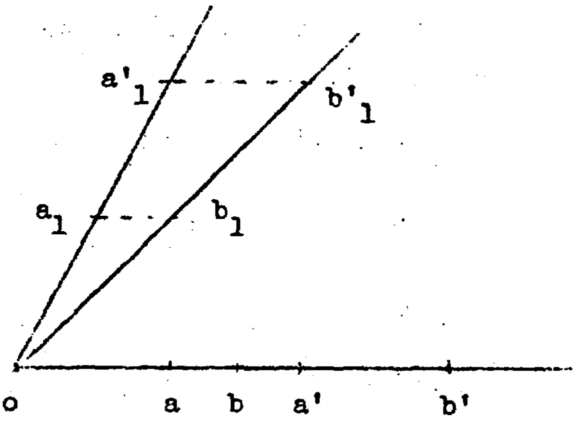
Soit une homothétie h de centre o et de rapport r, deux points a et b, et a'b' leurs images par h. Montrons que

$$\overrightarrow{a'b'} = r.\overrightarrow{ab}$$

- Si a = o ou si a = b, la propriété résulte directement des définitions.
- Si o,a,b ne sont pas alignés, projetons b et b' respectivement en c et c' sur la parallèle à ab passant par oa.

On a : $\overrightarrow{oc} = \overrightarrow{ab}$, $\overrightarrow{ac'} = \overrightarrow{a'b'}$ $\qquad$ $c' = h(c)$

d'où : $\overrightarrow{oc'} = r.\overrightarrow{oc}$ $\qquad$ soit : $\overrightarrow{a'b'} = r.\overrightarrow{ab}$



. Si enfin o,a,b sont alignés et $a \neq b$, $o \neq a$, donc $o \neq b$, on pourra utiliser deux points a_1 et b_1 , non alignés avec o et tels que $\overrightarrow{a_1b_1} = \overrightarrow{ab}$.

Comme h conserve l'équipollence,

$$\overrightarrow{a'_1\, b'_1} = \overrightarrow{a'b'}$$

D'après le résultat précédent :

$$\overrightarrow{a'_1\, b'_1} = r.\overrightarrow{a_1\, b_1} \qquad \text{d'où} \quad \overrightarrow{a'b'} = r.\overrightarrow{ab}$$

Conséquence : Sachant que ($\overrightarrow{ac} = \overrightarrow{ab} + \overrightarrow{ad} \Longleftrightarrow$ (a,b,c,d) est un parallélogramme), et que l'image par une dilatation d'un parallélogramme est un parallélogramme, on se convaincra que, étant donnés deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et une homothétie h (et en ne se permettant pas un abus d'écriture) :

$$h\,(\vec{u} + \vec{v}) = h\,(\vec{u}) + h\,(\vec{v})$$

D'où :

Théorème (12.2.1.) : Quels que soient le réel r et les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$$r.\,(\vec{u} + \vec{v}\,) = r.\,\vec{u} + r.\vec{v}$$

12.3. *DEFINITION DE LA MULTIPLICATION DANS $\mathbb{R}^*$*

Rappelons que l'ensemble des homothéties de centre o donné forme pour la loi o un groupe.

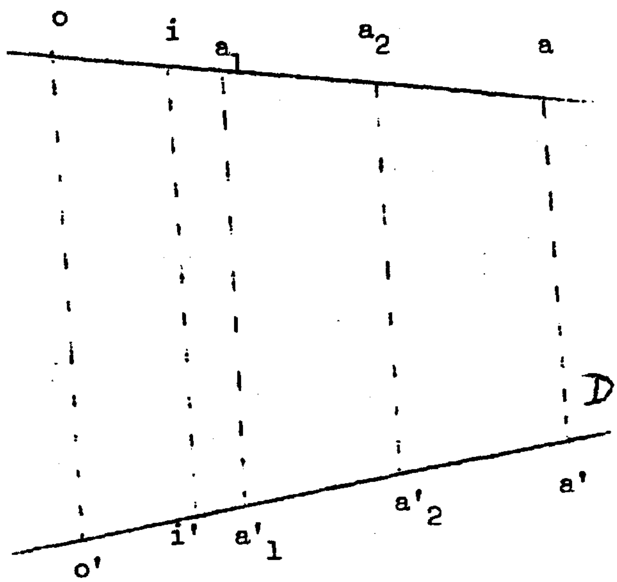
Soient deux réels r_1 et r_2 . Soient deux points quelconques o et o' (qu'on peut supposer distincts). On nomme h_1 et h'_1 les homothéties de rapport r_1 et de centres respectifs o et o'. On nomme h_2 et h'_2 les homothéties de rapport r_2 et de centres respectifs o et o'.

Montrons que $h_2 \circ h_1$ et $h'_2 \circ h'_1$ ont le même rapport.

Soit un point i non situé sur la droite oo'. Soit :

$$a_1 = h_1(i), \quad a_2 = h_2(i)$$

$$a = h_2(a_1) = h_2 \circ h_1(i)$$



L'abscisse de a_1 dans (o,i) est r_1

L'abscisse de a_2 dans (o,i) est r_2

L'abscisse de a dans (o,a_1) est r_2

Soit D une droite passant par o' et distincte de oo'. Les points o,i, a_1, a_2, a ont respectivement pour projections sur D parallèlement à oo' : o',i',a_1', a_2', a'. Cette projection " conservant les abscisses " :

L'abscisse de a'_1 dans (o',i') est r_1

L'abscisse de a'_2 dans (o',i') est r_2

L'abscisse de a' dans (o',a_1') est r_2

Donc : $a'_1 = h'_1(i')$ $\quad a'_2 = h'_2(i')$

$$a' = h'_2(a'_1) = h'_2 \circ h'_1(i')$$

et a et a' ont la même abscisse, respectivement dans (o,i) et(o',i')

Donc : $h_2 \circ h_1$ et $h'_2 \circ h_1'$ ont la même rapport.

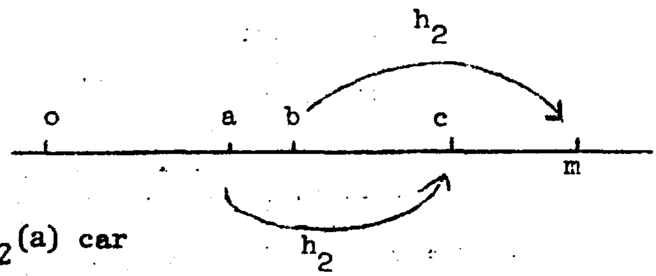
Ceci autorise la définition suivante :

__Définition__ *(12.3.1.)* : Soient r_1 et r_2 deux réels non nuls. On appelle produit $r_1\, r_2$ de ces deux réels le rapport de l'homothétie composée de deux homothéties de même centre o et de rapports respectifs r_2 et r_1.

Ce produit est indépendant de o.

I2.4. *GROUPE COMMUTATIF $(\mathbb{R}^*, \times)$*

Montrons que si h_1 et h_2 sont deux homothéties de même centre o, $h_2 \circ h_1 = h_1 \circ h_2$.
Il suffit pour cela de montrer qu'il existe un point a, distinct de o, tel que : $h_2 \circ h_1(a) = h_1 \circ h_2(a)$ car une homothétie est déterminée par son centre et l'image d'un point donné.



Soit a un point quelconque distinct de o et $b = h_1(a)$, $c = h_2(a)$
$m = h_2(b) = h_2 \circ h_1(a)$

Soient r_1 et r_2 les rapports respectifs de h_1 et h_2.

Dans le repère (o,a), b a pour abscisses : r_1. h_1, comme toute dilatation, "conserve les abscisses ", donc $h_2(b)$ a pour abscisse r_1 dans le repère $(h_2(o), h_2(a))$, i.e. a pour abscisse r_1 dans le repère (o,c)

Donc $m = h_1(c) = h_1 \circ h_2(a)$

soit $h_2 \circ h_1(a) = h_1 \circ h_2(a)$, ce qu'il fallait démontrer

L'ensemble des homothéties de centre donné o est donc un groupe commutatif. D'après la définition du produit de deux réels non nuls, il est isomorphe à $(\mathbb{R}^*, \times)$. Donc :

<u>*Théorème*</u> *(I2.4.I.)* : $(\mathbb{R}^*, \times)$ est un groupe commutatif.

XIII . $(\mathbb{R}, +, \times, \leq)$

I3,I. *DEFINITION DE LA MULTIPLICATION DANS $\mathbb{R}$*

. De $(h_2 \circ h_1)(\overrightarrow{u}) = h_2(h_1(\overrightarrow{u}))$ (où $h(\overrightarrow{u})$ est une notation abusive représentant $\overrightarrow{h(a)\,h(b)}$ si $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{u}$), on déduit :

$$(r_1 \times r_2).\overrightarrow{u} = r_1.(r_2.\overrightarrow{u}) \qquad \text{(I)}$$

. D'autre part, si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et si h_1 et h_2 sont deux homothéties de centre o

$$h_1(\vec{u}) = h_2(\vec{u}) \Rightarrow h_1 = h_2$$

(Il suffit de considérer le point a tel que $\vec{oa} = \vec{u}$).

On en déduit :

$$\text{si } \vec{u} \neq \vec{0} \quad (r_1.\vec{u} = r_2.\vec{u} \Longrightarrow r_1 = r_2) \qquad (2)$$

. Alors, si $r \in \mathbb{R}^*$ et $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $x \in \mathbb{R}^*$ et $y \in \mathbb{R}^*$ et $x + y \in \mathbb{R}^*$:

$$\begin{aligned}
((x+y) \times r).\vec{u} &= (x+y).(r.\vec{u}) && \text{par (I)} \\
&= x.(r.\vec{u}) + y.(r.\vec{u}) && \text{(conséquence I2.2.I.)} \\
&= (x \times r).\vec{u} + (y \times r).\vec{u} && \text{par (I)} \\
&= (x \times r + y \times r).\vec{u} && \text{(conséquence I2.2.I.)}
\end{aligned}$$

d'où par (2) : $(x+y) \times r = x \times r + y \times r$

On va alors étendre à $\mathbb{R}$ la définition de la multiplication dans $\mathbb{R}^*$ de façon que cette propriété de distributivité soit partout vraie.

$$x \quad r = (x + 0) \times r = x \times r + 0 \times r$$

On est conduit à définir : $0 \times r = r \times 0 = 0$

Il est alors clair que :

<u>*Théorème*</u> *(13.1.1.)* : $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps commutatif.

I3.2. <u>*ORDRE ET ADDITION*</u>

Du théorème 6.3.2. et de la définition de l'addition des réels, on déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \; \forall z \in \mathbb{R} \quad x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$$

I3.3. <u>*ORDRE ET MULTIPLICATION*</u>

La restriction d'une homothétie à l'une de ses traces orientée est monotone (*axiome 6h, paragraphe 6.§4*) -

Donc l'application : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto r \times x$$

est monotone.

Le couple $(0,1)$ a pour image $(0, r)$.

. Si $r > 0$, l'application est donc croissante et :

$$\forall x \in \mathbb{R} \ \forall y \in \mathbb{R} \ \forall r \in \mathbb{R} \ (r > 0 \Rightarrow (x \leqslant y \Rightarrow x r \leqslant y r))$$

. Si $r < 0$, l'application est donc décroissante et :

$$\forall x \in \mathbb{R} \ \forall y \in \mathbb{R} \ \forall r \in \mathbb{R} \ (r < 0 \Rightarrow (x \leqslant y \Rightarrow x r \geqslant y r))$$

Conséquence :

$$(a > 0 \text{ et } b > 0) \text{ ou } (a < 0 \text{ et } b < 0) \Leftrightarrow a b > 0$$

Toutes les propriétés enoncées au chapitre 13 sont résumées en :

<u>*Théorème*</u> *(13.3.1.)* : $(\mathbb{R}, +, \times, \leqslant)$ est un corps commutatif ordonné.

-=-=-=-=-=-=-=-

UNE IDEE POUR L'UTILISATION DES 10%

I N I T I A T I O N   A   L ' I N F O R M A T I Q U E

le C.R.D.P. de Marseille vous propose :

Une série de séquences audio-visuelles d'introduction à l'Informatique composées chacune de :

36 diapositives couleur + 1 enregistrement magnétique

(durée : de 12 à 20 mn)

- de l'information à l'informatique
- l'ordinateur , outil de l'informatique
- un collaborateur exigeant : l'ordinateur
- la carte perforée
- la bande magnétique
- la mémoire à tores de ferrite
- le disque magnétique
- le télé-traitement

prêt : 1 semaine

UTILISATION D'UN CALCULATEUR PROGRAMMABLE DANS L'ETUDE DES FONCTIONS en classe de 3ème

(Gérard CONVERSET - *C.E.S. H. Wallon, Marseille*)

Une des notions difficiles à conceptualiser au niveau de la classe de 3ème est celle de limites et, plus précisément, la notion de domaine de définition d'une fraction rationnelle : les élèves peuvent sagement chercher les " zéros " de la fonction dénominateur par les méthodes classiques sans sentir ce qui se passe au voisinage de ces valeurs.

Ce qui est gênant au niveau de la 3ème l'est encore plus dans les classes ultérieures.

Ayant eu la chance de disposer pendant quelques semaines d'un calculateur programmable SEIKO, je pus faire entre autres un certain nombre de manipulations en club mathématique sur la construction point par point de courbes représentant des fonctions de 2ème, 3ème degré et des fonctions rationnelles.

Prenons un exemple :

Soit la fonction $f : x \longmapsto f(x) = 2x^2 + 3x - 5$

Construire la représentation graphique consiste à chercher les images par f d'un certain nombre de valeurs de la variable x

a) Peut-on trouver ces valeurs quel que soit s réel ?

Détermination du domaine de définition

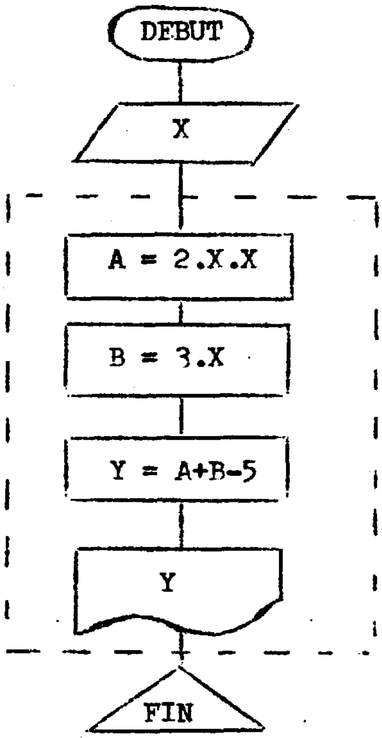
b) Programmation

Calculons " manuellement " f (3), f (5), f (6) puis analysons notre travail.

Disposons le de façon à gagner du temps.

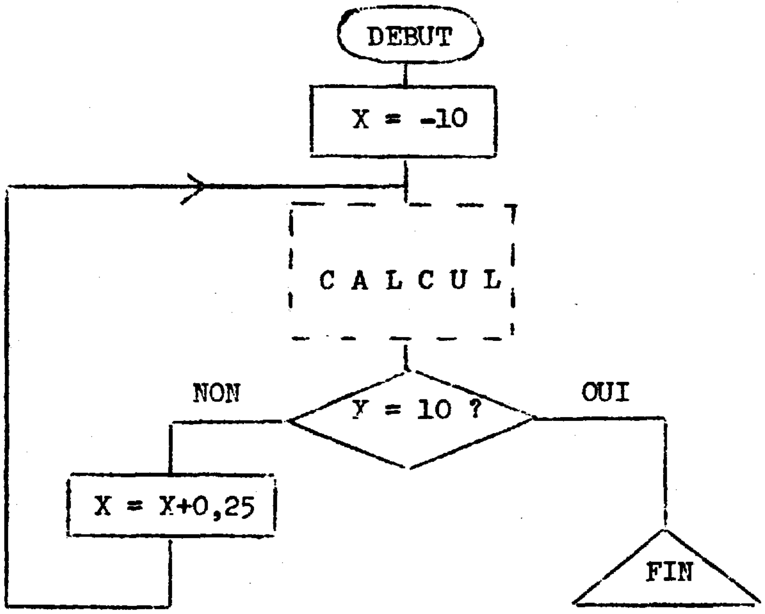
Donnons les ordres à la machine pour que l'instruction générale soit exécutée.

ORGANIGRAMME I



c - Choisissons des valeurs de x , par exemple : x   -10 , +10
et construisons la courbe par pas de 0,25 .
La machine effectuant automatiquement tous les calculs .

ORGANIGRAMME II



On aura donc 4I points. L'allure de la courbe est très nette.

d) Cherchons les unités à adopter sur le graphique (travail de réflexion long mais utile en mathématiques et en physique).

Que se passerait-il si x avait une valeur très grande ? ou très petite ?

Calculons $f(1000)$, $f(10^6)$, ... , $f(-10^6)$, ...

Recommençons le même travail avec la fonction $g : x \longmapsto g(x) = -2x^2 + 3x - 5$

Comparons les courbes et discutons :

Construction de tableaux de variation, vocabulaire (maximum, minimum, sommet, etc ....).

Recommençons avec d'autres fonctions du 2ème degré. Généralisons.

Reprenons la même étude avec une fonction fraction rationnelle du type :

$$h : x \longmapsto h(x) = \frac{1}{x} \quad \text{ou} \quad i : x \longmapsto i(x) = \frac{2x + 1}{4x^2 - 9}$$

Cherchons les domaines de définition respectifs.

Programmons la machine et construisons point par point les courbes en resserrant les intervalles au voisinage des " zéros " des dénominateurs. On peut même chercher $h(0)$ par exemple : la machine se bloque, matérialisant ainsi l'impossibilité de l'opération.

Sur le graphique, on sent de façon physique ce qui se passe pour certaines valeurs et le mot *asymptote* peut-être employé sans gêne ainsi que le mot *limite*.

Au cours de ces manipulations en club de mathématiques, les élèves (classe de 3ème de type II) ont appris à construire des courbes à réfléchir sur des résultats expérimentaux, à programmer une machine et à contrôler par des tests partiels le travail de celle-ci.

Ces séances de club ont été vivantes, très suivies par les élèves et leur ont laissé des notions utilisables tant en physique qu'en mathématiques dans leur classe et dans les classes ultérieures.

INTRODUCTION DE L'INFORMATIQUE DANS
L'ENSEIGNEMENT DU SECOND DEGRE

B U L L E T I N   R E G I O N A L   D E   L I A I S O N

Académie d'Aix - Marseille

Le second numéro vient de paraître ,
réclamez - le au C.R.D.P. de Marseille

avez-vous lu
LES AVENTURES DE CANCRE
SUR ORDI IV ?

OUI

QU'EN PENSEZ-VOUS ?

NON

DEMANDEZ LA BROCHURE
au
C.R.D.P. de MARSEILLE

AU SUJET DE LA CONTINUITE EN CLASSE DE PREMIERE

(Yves Charles GUENOUN - *Lycée Marseilleveyre , MARSEILLE*)

D'abord quelques impressions :

1 - Pour résoudre un certain problème , on peut être très actif si l'on est motivé .

2 - Après la phase 1 , on peut être :

2-a - très heureux de trouver une solution au problème .

2-b - très attentif aux propos d'une personne apportant quelques clartés sur le problème .

Remarque : En général , la phase 1 précède la phase 2 .

Au sujet de la continuité en classe de première (et plus précisément de la première leçon sur la continuité) il me semble qu'on est davantage dans la phase 2-a pour le maître que dans la phase 1 pour l'élève .

La fiche suivante n'a pas d'autre prétention que de contribuer à combler la lacune 1 pour mieux aborder la leçon 2-b . Il s'agit donc de travaux préliminaires .

Des fiches antérieures ont permis de préciser les notions :

- d'intervalles
- d'application
- d'image d'une partie par une application .

UN JEU INEDIT : LE "ETIUNITNOC"

1 a . Soit $\varphi_{\mathbb{N}}$ l'application caracteristique de la partie $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$

donner un schéma cartésien de $\varphi_{\mathbb{N}}$.

b . On considère l'application $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto y = \psi(x) = x.\varphi_{\mathbb{N}}(x) + 1$$

calculer $\psi(-2)$, $\psi(0)$, $\psi(2)$, $\psi(2,5)$, $\psi(3)$, $\psi(\pi)$, $\psi(4)$

donner un schéma cartésien de ψ

2 a . Pour exprimer que I est un intervalle ouvert contenant le nombre réel α ,

on écrira indifferemment : $\alpha \in I \subset \mathbb{R}$ ou $I \in \mathcal{J}_\alpha$

par exemple
$14 \notin \,]17,18[\, \subset \mathbb{R} \longmapsto$ - - - - - - - - -
$17 \in \,]14,18[\, \subset \mathbb{R} \longmapsto$ - - - - - - - - -
- - - - - - - $\longmapsto \,]18,39[\, \in \mathcal{J}_{36}$
- - - - - - - $\longmapsto \,]39,45[\, \notin \mathcal{J}_{68}$

b . Examiner avec minutie la relation "$\in$" d'appartenance

de source $S = \{[1,2]\ ,\ [1,3[\ ,\ ]1,4[\ ,\ ]1,5[\ ,\ ]2,6[\ ,\ ]\pi,7[\}$

de but $B = \{\mathcal{J}_0, \mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, \mathcal{J}_{2,5}, \mathcal{J}_3, \mathcal{J}_\pi, \mathcal{J}_4\}$

3 *Le jeu de ψ -ETIUNITNOC se pratique à deux équipes A et B réduites éventuellement à deux singletons . Soit $\beta = \psi(\alpha)$*

A commence et choisit , à son gré , un $I \in \mathcal{J}_\beta$

B cherche alors à trouver un $X \in \mathcal{J}_\alpha$, tel que $\psi(X) \subset I$

S'il y parvient , il a marqué un point

S'il n'y parvient pas c'est A qui marque un point .

* *A choisit alors un autre I' dans le but d'empêcher B de marquer un nouveau point éventuel .*

Si B peut quand même marquer , il a gagné la partie et s'écrit :

"α -NE-EUNITNOC ! "

Si A peut trouver un certain $I \in \mathcal{J}_\beta$ tel que B n'arrive pas à marquer de point , A a gagné et s'écrit :

" α -NE-EUNITNOC SAP ! "

a . Faire des parties correspondant aux valeurs de $\alpha \in \{2;2,5;3;\pi;4;-2\}$
Indiquer , à chaque fois , qui gagne .

b . Faire une partie où A choisit α. Puis une partie où B choisit α .

c . Trouver $\{\alpha \in \mathbb{R} ;\ A \text{ gagne}\}$ $\{\alpha \in \mathbb{R} ;\ B \text{ gagne}\}$

4 On peut remplacer ψ par d'autres applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de son choix ou bien de la fiche précédente .

ET LE JEU CONTINUE ! ! . . .

* *les joueurs avertis peuvent démarrer à cette ligne .*

CONTINUITE EN x_o

0 . Reprenons , en l'illustrant sur un schéma sagittal , la situation du jeu de la fiche précédente relatif à ψ .

a - en une valeur α où A est sûr de pouvoir gagner

$$\exists\, I \in \mathcal{J}_\beta,\ \forall J \in \mathcal{J}_\alpha \qquad \psi(J) \not\subset I$$

b - en une valeur α où B est sûr de pouvoir gagner

$$\forall I \in \quad \ldots.$$

cette deuxième situation conduit à la définition :

1 . Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto y = f(x)$$
$$x_o \longmapsto y_o$$

On dit que f est continue en x_o

$$\longmapsto \forall I \in \mathcal{J}_{y_o},\ \exists\, J \in \mathcal{J}_{x_o} /\ f(J) \subset I$$

$$\longmapsto \forall I \in \mathcal{J}_{y_o},\ \exists\, J \in \mathcal{J}_{x_o} /\ x \in J \Longrightarrow f(x) \in I$$

ex 1 : l'identité sur $\mathbb{R}$ est continue en x_o quelconque réel

ex 2 : l'application $x \longmapsto k$, constante , est continue en x_o, $\forall x_o \in \mathbb{R}$

2 . Utilisation des intervalles centrés .

a - revoir la fiche de Seconde sur les "incertitudes" .

b - établir que $]\,14,18\,[= \{x \in \mathbb{R} ;\ |x - 16| < 2\}$

quel est $\{x \in \mathbb{R} ;\ |x - 42| < 3\}$?

et plus généralement $\{x \in \mathbb{R} ;\ |x - x_o| < r\}$? $r \in \mathbb{R}^+$, $x_o \in \mathbb{R}$

c - nouvelle définition : f est continue en x_o

$$\forall I(y_o, \varepsilon)\ ,\ \exists\, J(x_o, \alpha)\ /\ f(J) \subset I$$

$$\forall I(y_o, \varepsilon)\ ,\ \exists\, J(x_o, \alpha)\ /\ |x - x_o| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_o)| < \varepsilon$$

d - schéma sagittal

e - forme traditionnelle : f est continue en x_o

$$\longmapsto \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \quad \exists\, \alpha \in \mathbb{R}^+ /\ |x - x_o| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(x_o)| < \varepsilon$$

3 . Exercices : Examiner la continuité des fonctions suivantes en x_o

$f :\ x \longmapsto 14x + 18 \qquad x_o = 1973$

$E :\ x \longmapsto$ partie entière de $x \qquad x_o = 3 \quad ; \quad x_o = 3{,}5$

$\varphi_{\mathbb{N}}$: fonction caractéristique de $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$

$\zeta : x \longmapsto x \cdot \varphi_{\mathbb{Q}}(x)$ analogue à Ψ mais où on a remplacé $\mathbb{N}$ par $\mathbb{Q}$

$x_0 = 2 \quad ; x_0 = 0$

4 . THEOREME : Continuité de $g \circ f$

5 . L' Ensemble des fonctions continues en x_0 , $\mathcal{C}_{x_0}$,

a - est stable pour l'addition

b - est stable pour la multiplication par $\alpha \in \mathbb{R}$

c - est stable pour la multiplication .

Examiner le cas de $\frac{1}{g}$, de $\frac{f}{g}$.

6 . Cas où $f : \underset{\mathbb{R}}{\overset{\mathcal{D}}{\cap}} \longrightarrow \mathbb{R}$. Continuité à droite , à gauche .

CONTINUITE DANS LES CLASSES DE PREMIERE ET TERMINALE

(Jean-Claude BENIAMINO - *I.R.E.M. de Marseille*)

La difficulté que rencontre cet enseignement réside dans le fait que l'on veut étudier cette notion sans dire un mot de la topologie usuelle de $\mathbb{R}$ ce qui est un contre-sens, la topologie ayant été " inventée " pour faciliter l'étude de la continuité.

Le travail qui suit a un but : celui de faciliter la compréhension de certains mécanismes sur la continuité tout en ne débordant pas des programmes officiels.

En général, dans la même leçon on introduit deux difficultés ; la première qui est de manipuler les intervalles ouverts, la seconde relative à certaines propriétés de fonctions bien choisies, propriétés que l'on se propose de mathématiser sans avoir défini au préalable les instruments utilisés ; d'où difficulté et incompréhension ....

I. Etude de $\mathbb{R}$ au moyen des intervalles ouverts

a) une question de vocabulaire

Les mots : *continuité, tendre vers, à la limite, voisin* sont d'usage courant en français, cependant ils sont utilisés en se référant à une grandeur souvent non précisée et comportant de multiples paramètres.

Assez simplement on voit déjà que Paris et Marseille sont voisines sur une carte de la planète et ne le sont plus sur une carte au I00 000ème ici, la référence est claire, c'est l'échelle.

Une haie d'arbres plantés le long d'une route paraîtra former un obstacle continu ou non suivant la vitesse à laquelle roule le véhicule où se trouve l'observateur, la référence est déjà ici plus complexe : vitesse du véhicule, longueur de la route, couleur des arbres, etc ...

On pourra de même chercher la signification du mot voisin suivant qu'il décrit une situation à la campagne ou à la ville dans un immeuble.

De la même manière, on étudiera les mots : *intérieur, isolé, adhérent* qui font partie du langage courant.

Dans $\mathbb{R}$ ce même vocabulaire est utilisé, il importe donc avant toute chose de préciser les références utilisées.

b) intervalles ouverts

On appelle ainsi les parties de $\mathbb{R}$ notées $]a, b[$

$$]a, b[\; = \left\{ x \;/\; x \in \mathbb{R} \qquad a < x < b \right\}$$

est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

L'intersection de deux intervalles ouverts est un intervalle ouvert, la réunion non.

$\mathbb{R}$ lui même est un intervalle ouvert noté $]-\infty\,;+\infty[$

Propriétés

- Si $x \neq y$ $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ il existe I et J deux intervalles ouverts $x \in I$, $y \in J$ $I \cap J = \emptyset$

- Si I est un intervalle ouvert, pour tout x, x dans I, il existe un intervalle ouvert $J \,/\, x \in J$ et $J \subset I$

On peut à ce niveau manipuler des intervalles ouverts et surtout utiliser des propositions dans lesquelles la quantification joue un rôle essentiel et préparer le terrain pour la continuité.

c) points intérieurs, points adhérents, points isolés

Ces définitions sont données en utilisant les intervalles ouverts, ce qui n'étonne personne.

D sera une partie de $\mathbb{R}$

a est intérieur à D si et seulement si il existe I, intervalle ouvert, avec

$$a \in I, \quad I \subset D$$

que l'on comparera à la phrase *être à l'intérieur d'une pièce* ....
Ne pas oublier que la première étude de la dérivation se fait en un point intérieur, que la notion d'extremum relatif utilise un point intérieur.

Exercice : I étant un intervalle ouvert :

$$\forall x \;,\; x \in I \;, \text{ x est intérieur à } I$$

a est adhérent à D si et seulement si quel que soit un intervalle ouvert I $a \in I$, I et D ont une intersection non vide.

Les problèmes de limite sont étudiés en un point adhérent au domaine de définition non situé dans le domaine de définition.

Exercice : 1°) 0, 1 sont adhérents à $]0, 1[$ etc ....

2°) $\forall x$, $x \in D$ x est adhérent à D

a sera un point isolé dans D si est seulement si il existe un intervalle ouvert I avec $a \in I$ et $I \cap D = \{a\}$ (a est un point de D). Il peut être agréable pour illustrer par un premier exemple la notion de continuité de montrer que toute fonction est continue en un point isolé.

II. Continuité des fonctions numériques réelles

a) Etude d'exemples simples

On choisit deux fonctions f_1 et f_2 par exemple

$$f_1 \begin{cases} x \longmapsto x^2 \\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \end{cases} \qquad f_2 \begin{cases} x \longmapsto x & \forall x,\ x \in [0, 1[\\ x \longmapsto x-1 & \forall x,\ x \in [1, 2[\end{cases}$$

au point zéro f_1 et au point 1 f_2 n'ont pas le même comportement, on va donc mettre au point les deux phrases mathématiques qui rendent compte de cette situation, mais on sait déjà qu'elles utilisenont les intervalles ouverts, la seule difficulté étant ici de faire comprendre la nécessité d'une quantification appropriée mais on peut remarquerque les notions citées en I_c ont préparé ce travail.

b) Définition de la continuité (pour mémoire)

f étant définie sur D, à valeur dans $\mathbb{R}$, a étant un point de D

f sera continue en a $\Longleftrightarrow \forall J$, J intervalle ouvert, $f(a) \in J$, $\exists I$, intervalle ouvert $a \in I$ tel que $f(I \cap D) \subset J$

Remarque : On déduira facilement les formes équivalentes utilisant des intervalles ouverts (non perçés ..!!!) centrés et la **forme calculatoire** bien connue manipulants les ε et les η usuels. Sur cette dernière forme, on insistera sur la difficulté de cette définition qui fait raisonner par condition suffisante

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \quad \text{dès que} \quad \text{etc} \ldots.$$

car toute étude technique de la continuité commence par l'examen de cette différence. Comment la rendre inférieure à ε .....

c) Définition de la limite

a étant adhérent à D on dira que f admet en a une limite ℓ si et seulement si la fonction $\overline{f}$ prolongement de f en a

$$\overline{f}(a) = \ell$$

est continue au point a

Deux cas à discuter :

a $\in$ D $\overline{f} = f$ et f continue en a

a $\notin$ D un nouveau problème est posé

Faire remarquer l'aspect non constructuf de cette définition qui se contente d'une vérification d'où l'intérêt des théorèmes généraux.

Une remarque pour terminer : il est souvent commode pour montrer la continuité de f en a d'étudier une limite, on utilisera une fonction $\tilde{f}$

$$\tilde{f}(x) = f(x) \quad \forall x, \quad x \in D - \{a\}$$

et si $\lim\limits_{a} \tilde{f}$ existe et est égale à f (a) alors f est continue en a.

-=-=-==-=-=-=-=-

SUR L'HISTOIRE DE LA NOTION DE NOMBRE

Résumé d'un exposé fait à la Régionale de l'A.P.M. d'Aix-Marseille par A. BLANCHARD, *professeur à la Faculté des Sciences Saint-Charles - Marseille*

Rédigé d'après des notes de Mireille CAR, *directrice de l'I.R.E.M. de Marseille*

Y a-t-il opposition entre une mathématique traditionnelle et une mathématique moderne ? Un coup d'oeil sur l'histoire des mathématiques peut nous aider à voir une évolution continuelle, avec des périodes plus ou moins actives, qui a appelé les théories dites modernes par ses interrogations.

Dans l'exposé qui suit, on n'a pas fait un travail d'historien, mais cherché à suivre l'évolution de l'idée de nombre depuis Euclide jusqu'à maintenant.

I°) Le tableau des ensembles de nombres

La question " Quest-ce qu'un nombre ? " est une mauvaise question : le mathématicien connaît des ensembles de nombres avec des possibilités d'extension qui permettent justement de faire la théorie d'un ensemble de nombres complexes à partir de la théorie des nombres réels supposée connue, de même la théorie des nombres réels à partir de la théorie des nombres rationnels supposée connue. On peut faire un tableau des ensembles de nombres avec des flèches représentant les extensions qui se présentent à l'esprit.

Dans le tableau ci-après il y a deux directions de flèches, on a figuré horizontalement les extensions qui reposent sur des idées algébriques (de $\mathbb{Z}$ à $\mathbb{Q}$ par exemple) et verticalement les extensions qui utilisent l'idée de complétion (complétion d'une topologie, ou dans le cas de la flèche $\mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$ complétion d'un ordre si l'on pense à la théorie des coupures).

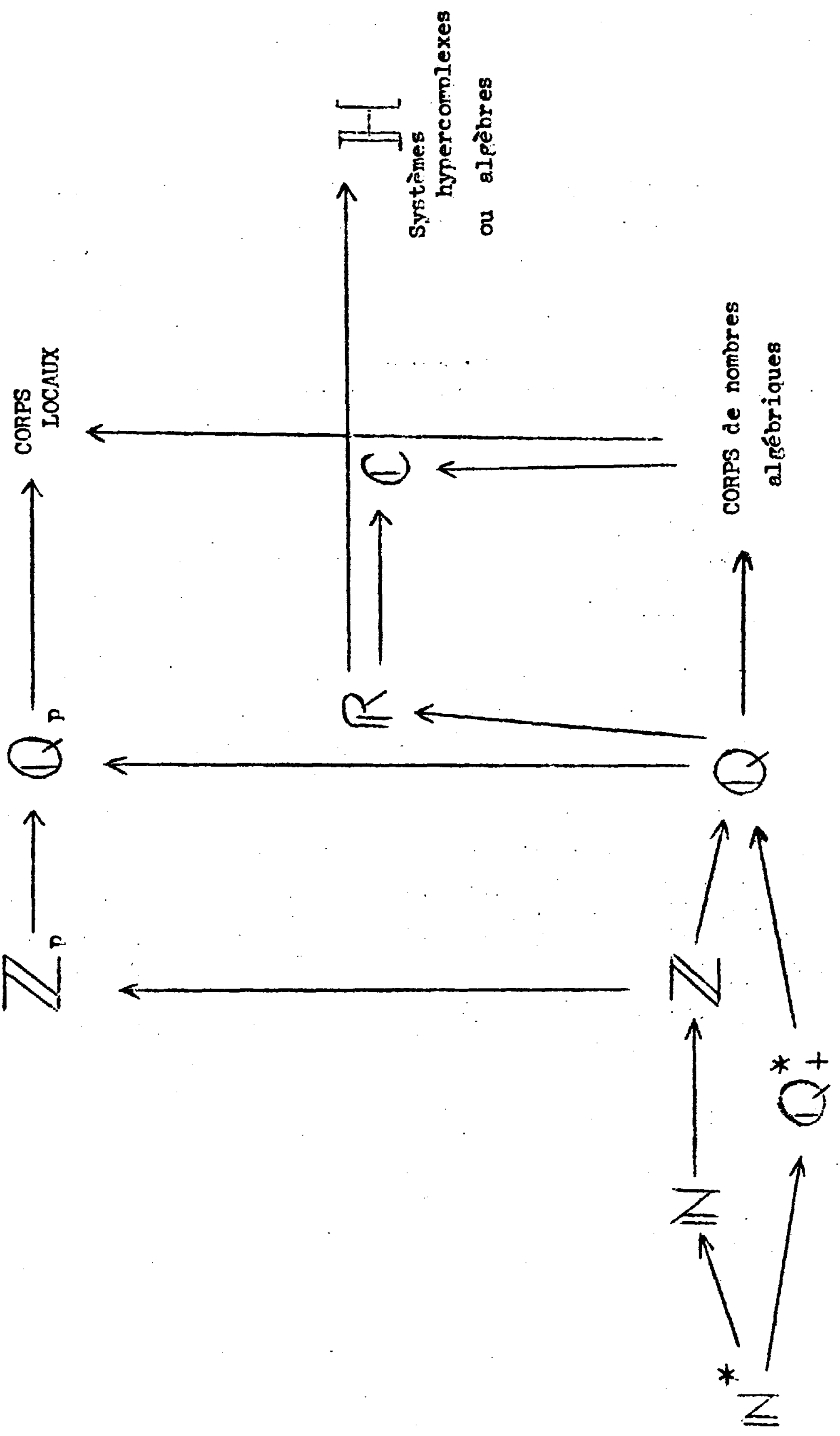
Les notations sont usuelles. Rappelons-les :

$\mathbb{N}$ ensemble des entiers positifs

$\mathbb{N}^*$ ensemble des entiers strictement positifs

$\mathbb{Z}$ ensemble des entiers

$\mathbb{Q}$ ensemble des rationnels


Z p
Q p
CORPS
LOCAUX
R
C
H
Systèmes
hypercomplexes
ou algèbres
Q
CORPS de nombres
algébriques
Z
N
Q* +
N*

$\mathbb{Q}_+^*$ ensemble des rationnels strictement positifs
$\mathbb{R}$ ensemble des réels
$\mathbb{C}$ ensemble des complexes
$\mathbb{H}$ ensemble des quaternions (sur $\mathbb{R}$)
$\mathbb{Z}_p$ ensemble des entiers p-adiques (pour chaque p premier)
$\mathbb{Q}_p$ corps p-adiques

Les rubriques " *corps de nombres algébriques* " et " *corps locaux* " recouvrent une infinité d'exemples possibles. On n'a pas mis dans ce tableau l'ensemble des nombres décimaux, sans importance théorique malgré son utilité pratique.

Les nombres p-adiques et les quaternions figurent sur ce tableau, mais on n'en parlera pas dans cet exposé.

2°) Objet de notre réflexion

Ecartons d'abord toute réflexion sur la théorie de l'ensemble $\mathbb{N}^*$ des entiers strictement positifs, ce n'est qu'à une époque assez récente qu'on a songé à en donner une axiomatique précise (PEANO) ou à la fonder sur la théorie des ensembles. Nous pouvons considérer l'acquisition des entiers strictement positifs comme datant de l'Antiquité, car on fait remonter l'histoire des mathématiques à l'école pythagoricienne, et il est certain que les astronomes babyloniens avaient déjà une bonne pratique du calcul numérique.

Nous pouvons nous demander alors si le tableau ci-contre correspond à l'histoire de la découverte des ensembles d'entiers. Chaque flèche du tableau correspond-elle à une découverte précise et datable ? . L'idée de nombre a-t-elle au contraire progressé suivant une démarche sans rapport avec les idées actuelles sur l'extension de la notion de nombre ?

3°) Quelques réponses simples

Certaines flèches du tableau correspondent à une découverte ou à un théorème qu'on peut identifier, et parfois dater avec une certaine précision.

La flèche allant de $\mathbb{Q}$ aux corps de nombres algébriques est évidemment une découverte de GALOIS, on peut dater cette découverte en la situant peu avant la mort de Galois (1811-1832).

La flèche allant des corps de nombres algébriques à $\mathbb{C}$ peut s'identifier au théorème de D'ALEMBERT-GAUSS, déjà plus difficile à dater car il faut situer le moment où la démonstration devient satisfaisante. Si l'on est très exigeant, il faut attendre une théorie satisfaisante des réels, sans lesquels la théorie des complexes n'est pas fondée rigoureusement ; cependant on peut être satisfait par la démonstration de Gauss qui dit clairement ce qu'elle utilise au sujet des polynômes à coefficients réels et se généralise à la théorie des corps ordonnés maximaux.

La flèche allant de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{H}$ est la découverte des quaternions par HAMILTON vers 1840.

Les flèches concernant les nombres p-adiques et corps locaux sont liées au nom de HENSEL (1861-1941).

4°) Les flèches allant de $\mathbb{N}^*$ à $\mathbb{Q}$

Il nous paraît trivial actuellement de passer de $\mathbb{N}^*$ à $\mathbb{N}$ en adjoignant l'élément " zéro " et normal de définir ensuite les entiers négatifs par une première " symétrisation " puis le corps $\mathbb{Q}$ des rationnels au moyen d'une symétrisation de la multiplication plus délicate que la première car elle met en jeu les deux lois additive et multiplicative.

Ici, la démarche historique n'est pas la même : les fractions strictement positives sont connues depuis Euclide, la théorie en est exposée au livre VII comme un cas spécial de la théorie des grandeurs exposée au livre V dont on reparlera plus loin. Il est surprenant de constater que les notions de nombre négatif,et même de zéro, nous soient venues de l'Inde par l'intermédiaire des Arabes vers la fin du Moyen-Age. L'idée que zéro soit un nombre ne s'est imposée que tardivement après l'usage de zéro comme représentant une place vide dans la numération de position.

5°) La flèche allant de $\mathbb{Q}$ à $\mathbb{R}$

L'élaboration de la notion de nombre réel est sans doute ce qu'il y a de plus étonnant dans l'histoire des mathématiques. Il n'est pas exagéré de dire qu'il s'est passé vingt-trois à vingt-quatre siècles entre la première approche valable de la théorie *(théorie d'Eudoxe, objet du livre V d'Euclide)* et la mise au point définitive de la notion de nombre réel constituée par la théorie des coupures de DEDEKIND.

Le cinquième livre d'Euclide expose la théorie de la mesure des grandeurs, il s'agit d'une théorie axiomatique pouvant s'appliquer à diverses espèces de grandeurs (longueurs, aires, volumes, etc ...). On y considère deux sortes d'objets : les grandeurs et les rapports de grandeurs , qui s'ajoutent, se comparent par une relation d'ordre, et les rapports opèrant sur les grandeurs .

A ceci près qu'il n'y a pas de grandeurs et de rapports négatifs, on serait tenté de dire que les rapports forment un corps, les grandeurs formant un espace vectoriel de dimension 1 sur le corps des rapports. Parmi les axiomes de la théorie, l'axiome dit " d'Archimède " joue un rôle essentiel : il permet de caractériser un rapport de grandeurs par la connaissances des rapports de nombres (identifiés à des rapports de grandeurs) qui lui sont respectivement inférieurs et supérieurs. Il paraît assez clair maintenant que la théorie est (aux rapports négatifs près) la théorie des corps intermédiaires entre $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$.

Remarquons en passant le rôle de la géométrie dans l'éclosion de cette théorie. L'école pythagoricienne avait déjà découvert que certains rapports de longueurs (rapport de la diagonale au côté d'un carré par exemple) ne s'identifient pas à des rapports d'entiers, c'est ce fait principalement qui fait sentir le besoin d'une théorie de rapports, rationnels ou non, que la géométrie faisait apparaître.

Peut-on considérer la théorie des nombres réels (positifs) comme faite dans le cinquième livre d'Euclide ?

Non, car il y manque encore une idée essentielle : celle de complétion, difficile à formuler il est vrai, ou ce qui revient au même, l'idée d'un modèle unique de systèmes de rapports pouvant contenir tous les systèmes possibles.

Cette idée de complétion n'a été clairement exprimée que par CAUCHY qui a posé comme axiome l'équivalence de la convergence d'une suite avec le fait que cette suite vérifie le " *critère de Cauchy* ".

Cauchy était alors en possession d'une théorie axiomatique du corps des nombres réels. Peu après Dedekind donnait une construction de $\mathbb{R}$ au moyen des coupures, construction que l'on peut considérer comme l'un des points de départs de la théorie des ensembles.

Les méthodes de la théorie des ensembles permettent d'ailleurs de construire $\mathbb{R}$ en utilisant les " *suites de Cauchy* " de rationnels, l'axiome sur la convergence des suites devenant alors un théorème.

Entre Euclide et Cauchy, il y a certes des progrès tels que la découverte des logarithmes qui ne pouvaient manquer d'amener les mathématiciens à une vision claire des nombres réels. Cependant la théorie n'était pas écrite, et certains théorèmes comme le théorème d'Alembert durent rester un certain temps à l'état de conjectures en attendant que la théorie définitive de $\mathbb{R}$ donne les moyens de les démontrer.

6°) La flèche allant de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{C}$

En toute rigueur on n'a pu connaître les nombres complexes qu'après avoir connu les nombres réels.

Cependant, une connaissance approximative de $\mathbb{R}$ suffit pour avoir les idées purement algébriques qui permettent de passer de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{C}$. On peut considérer que la découverte des nombres complexes est due à la Renaissance italienne, et plus particulièrement à BOMBELLI, disciple de CARDAN, bien que la théorie de $\mathbb{R}$ ne soit pas entièrement satisfaisante alors.

On pourrait imaginer que la découverte des nombres complexes a été motivée par la théorie de l'équation du deuxième degré. Ce n'est pas ainsi : ce sont des recherches sur l'équation du troisième degré qui ont conduit aux nombres complexes. Pendant longtemps, on a cherché une formule de résolution de l'équation du troisième degré. Pour l'équation $x^3 + ax + b = 0$, Scipione del Ferro découvrit la formule dite " *de Cardan* ".

$$x = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}}$$

Cardan discuta le nombre de racines réelles de l'équation, et constata que pour $\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3 < 0$, l'équation a trois racines réelles, la formule précédente n'ayant aucune signification. L'école de Cardan chercha alors à donner un sens à la formule ci-dessus de manière qu'elle puisse donner les racines de l'équation dans le cas où $\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3 < 0$, cela devait aboutir à la théorie des nombres complexes.

7°) Conclusion

Deux points attirent l'attention :

a) Les extensions dont on a parlé se font actuellement en termes de théorie des ensembles, ce sont des constructions qui utilisent par exemple des ensembles produits, des passages au quotient, etc ..... Aucun problème de non contradiction se pose.

   Avant la théorie des ensembles, on était dans l'alternative suivante : faire des constructions qui, d'une manière inconsciente, utilisaient des idées ensemblistes (fractions par exemple) ou bien faire appel à de nouveaux axiomes, ce qui posait évidemment un problème de non contradiction.

   On voit ainsi quelle économie d'axiomes nous procure la théorie des ensembles.

b) Signalons le rôle de la géométrie dans l'éclosion de ces théories, la géométrie a eu un rôle déterminant dans les recherches qui ont abouti au cinquième livre d'Euclide, ainsi que dans les recherches de Hamilton qui ont abouti aux quaternions. Moins déterminant ailleurs, son rôle n'est pas négligeable dans l'étude des nombres complexes.

La géométrie nous paraît actuellement devoir se fonder sur l'algèbre, mais cela ne l'empêche pas de garder un rôle dans la découverte de certaines intuitions. Une grande théorie de notre siècle : l'algèbre homologique est née d'idées géométriques.

8°) Indication bibliographique

On citera seulement les notices historiques du traité de mathématiques de BOURBAKI. Un certain nombre d'entre elles ont été réunies de manière à constituer l'ouvrage : " *Eléments d'histoire de mathématiques* "
(Hermann, Paris, 1960)

Cet ouvrage est lui-même assorti d'une bibliographie abondante, citant 253 auteurs depuis Aristote et Euclide jusqu'aux mathématiciens contemporains.

COMMUNIQUE DE PRESSE

La première Conférence Internationale *" Informatique et Enseignement "* organisée par l'I.F.I.P. *(I)* à Amsterdam en août 1970, a réuni 850 participants de 42 pays.

Compte tenu de l'évolution constatée et des problèmes nouveaux qui sont apparus dans ce domaine, l'I.F.I.P. organise , en coopération avec l'I.B.I. - I.C.C. *(2)* et l' I.C.M.I. *(3)* et avec le soutien de la Délégation à l'Informatique, la deuxième Conférence Internationale *" Informatique et Enseignement "* à Marseille (France) du Ier au 5 septembre 1975.

Placée sous le Haut-Patronnage de Monsieur le Ministre de l'Education Nationale, cette conférence bilingue (anglais-français) vise à établir un véritable dialogue entre enseignants de toutes disciplines et informaticiens.

La précédente conférence concluait, en effet, dans ses " Recommandations Finales " à la nécessaire distinction entre la méthodologie de l'informatique et les ordinateurs et insistait sur les avantages considérables qu'il y aurait à introduire la méthodologie de l'informatique dans l'enseignement de toutes les disciplines.

Pour faire le point des progrès réalisés dans cette voie et tenter de dégager de nouvelles perspectives d'avenir, une partie importante du programme de la conférence sera consacrée aux problèmes que pose l'introduction de l'informatique dans l'enseignement des différentes disciplines.

Le programme provisoire comprend les points suivants :

a) Les apports de l'informatique à la pédagogie ;

b) Influence de l'informatique sur le contenu et les méthodes d'enseignement dans toutes les disciplines de l'enseignement primaire, secondaire et supérieur ;

c) Evaluation du rôle des ordinateurs dans l'enseignement (hardware, software et langages spécifiques)

(I) I.F.I.P. : International Federation of Information Processing Societies

(2) I.B.I. - I.C.C. : Intergovernmental Bureau of Informatics
International Computing Center

(3) I.C.M.I. : International Commission for Mathematical Instruction

d) La formation des enseignants de toutes les disciplines à l'informatique ;

e) La formation aux métiers de l'informatique ;

f) Utilisation de l'informatique dans la formation permanente ;

g) Les apports de l'informatique à l'enseignement dans les pays en voie de développement.

La Conférence comprendra, en plus de la présentation par leurs auteurs des communications acceptées par le Comité du Programme et des tables rondes de discussion sur les principaux thèmes du programme, un certain nombre d'exposés de synthèse faits par des experts de réputation internationale.

La Conférence se terminera par le vote de " Recommandations Finales " telles qu'elles résulteront des débats et des discussions.

Pour tous renseignements (programme, inscriptions, communications, logement, etc ...) écrire à :

A.F.C.E.T. - Service des Congrès

Immeuble Centre Dauphine

Avenue de Pologne

75775 - PARIS Cedex I6

Tel : 553.50.20 - Poste 45.06

Quelques exemplaires des comptes rendus de la première Conférence Internationale " *Informatique et Enseignement* " sont encore disponibles. S'adresser à l' A.F.C.E.T.

INFORMATIONS DIVERSES

Au BULLETIN OFFICIEL DE L'EDUCATION NATIONALE (B.O.E.N.)

Modification des programmes de mathématiques des classes préparant aux baccalauréats de technicien

A. 27.3.1973 — B.O. n° 25

Programmes de mathématiques dans les classes de Seconde A, C et T conduisant au baccalauréat de l'enseignement du second degré

A. 30.5.1973 — B.O. n° 25

Modification des programmes de mathématiques des classes préparant aux baccalauréats de technicien

A. 27.3.1973 — B.O. n° 26

Enseignement des mathématiques dans les C.E.T.

C. 6.7.1973 — B.O. n° 28

Allègement des programmes des enseignements du second degré pour l'année scolaire 1973-1974 (classes des premier et second cycles)

A. 13.7.1973 — B.O. n° 29

Modification des programmes de mathématiques des classes préparant aux baccalauréats de technicien.

(Rectificatif) A. 27.3.1973 — B.O. n° 33

Programmes de mathématiques des classes de Seconde A, C et T

(Rectificatif) A. 30.5.1973 — B.O. n° 33

Enseignement des mathématiques dans les C.E.T.

(Annexe) C. 6.7.1973 — B.O. n° 33

Allègement des programmes de mathématiques des classes de seconde, première et terminale préparant aux brevets de technicien.

C. 7.8.1973 — B.O. n° 35