Beniamino

ACADEMIE D'AIX-MARSEILLE

2

Information Mathématique

Enseignement du Second Degré

inrdp
CRDP
MARSEILLE

IREM
MARSEILLE

Centre Régional de Recherche
et de Documentation Pédagogiques

55, rue Sylvabelle

I329I - MARSEILLE Cedex 2

Tel : 37.40.39 (096)

Institut de Recherche sur
l'enseignement des mathématiques

70, route Léon Lachamp

I3009 - MARSEILLE-LUMINY

Tel : 4I.I5.40 (38.06)

INFORMATION MATHEMATIQUE

Enseignement du Second Degré

-=-=-=-=-=-=-

N° 2 SOMMAIRE Juin I973

Dépôt légal : 2ème trimestre 1973

EDITORIAL

A la lecture du sommaire du premier numéro d' " Information Mathématique " *le nombre des professeurs de mathématiques de l'Académie d'Aix-Marseille ayant demandé à recevoir ce bulletin pendant l'année scolaire I972-I973 a dépassé II00 ; preuve que les besoins en information étaient réels.*

Ce bulletin, dont voici le second numéro, répond-il à ces besoins? C'est ce que nous aimerions savoir. Nous comptons donc sur vos critiques, vos suggestions (elles nous permettront de faire mieux) et sur vos articles (ils permettront au bulletin de vivre) car nous souhaitons poursuivre cette expérience à la rentrée prochaine.

Ce second numéro présente, en cette fin d'année scolaire, des thèmes de réflexion

- *proches des programmes à enseigner et des préoccupations du cours dans les trois premiers articles.*
- *d'aspect plus original dans le quatrième article.*

ainsi que des informations concernant en particulier les documents qui sont à votre disposition.

- 0 -

UNE PRESENTATION DE LA GEOMETRIE DE TROISIEME DANS L'OPTIQUE DU COMMENTAIRE

(fin)

R. RAYNAUD *(Lycée de Digne)*

Document de travail à critiquer et à améliorer

C Isométries du Plan Euclidien

C_1 Définition

On appelle isométrie du plan euclidien $\mathcal{P}$ <u>toute bijection de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ conservant les distances</u>

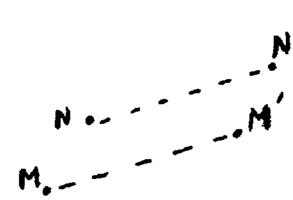
c'est-à-dire telle que M et N étant deux points quelconques et M' et N' leurs transformés :

$$MN = M'N'$$

C_2 Exemples

I) <u>L'identité de $\mathcal{P}$</u> est une isométrie

II) <u>Les translations</u> de $\mathcal{P}$ sont des isométries



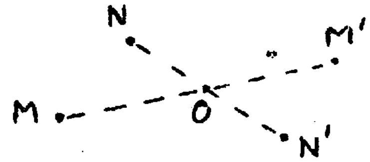
En effet, soit une translation T quelconque

Elle transforme tout bipoint (M,N) en un bipoint (M',N') équipollent.

Nous savons alors que

$$MN = M'N'$$

III) Les symétries centrales de $\mathcal{P}$ sont des isométries.



En effet, soit S la symétrie de centre O

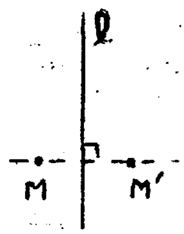
Elletransforme tout bipoint (M,N) en un bipoint (M'N') tel que (M,M') et (N,N') aient le même milieu.

(M,N) et (N',M') sont donc équipollents, et par suite

$$MN = M'N'$$

IV) Examinons maintenant les symétries orthogonales

I) Df La " *symétrie orthogonale d'axe* ℓ " est l'application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui, à chaque point M fait correspondre le point M' défini comme suit :



si $M \in \ell$, $M' = M$

si $M \notin \ell$, ℓ est la médiatrice de $[MM']$

Cette symétrie orthogonale est évidemment une bijection involutive de $\mathcal{P}$; l'ensemble de ses points invariants est ℓ

Elle est la traduction mathématique du "pliage" physique autour de ℓ

2) Démontrons que toute symétrie orthogonale est une isométrie.

Soit S la symétrie orthogonale d'axe ℓ

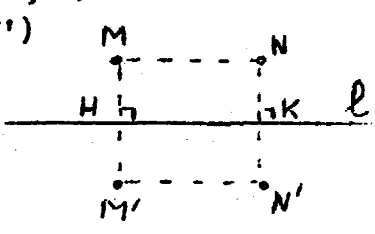
Soit M et N deux points quelconques, M' et N' leurs transformés

a) Si M = N, alors M' = N' ; donc MN = M'N' = 0

b) Supposons $M \neq N$

Examinons d'abord quelques cas particuliers

- Si (MN) // ℓ, l'application de l'axiome de Thalès montre que (M'N') // (MN). (M,N,N',M') est un parallélogramme. Les bipoints (M,N) (M',N') sont équipollents ;



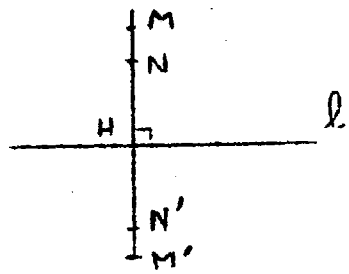
donc :

$$MN = M'N'$$

- Si $(MN) \perp \ell$, les bipoints (M,N) et (M'N') sont symétriques par rapport au point H où la droite (MN) coupe ℓ ;

  donc :

  $$MN = M'N'$$

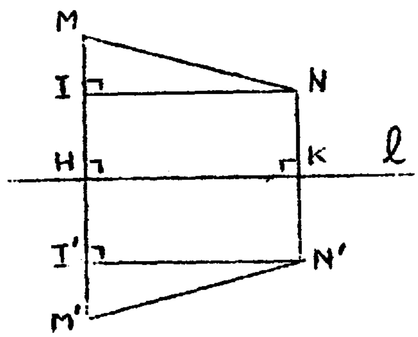


Ces cas particuliers écartés, menons de N et N' les parallèles à ℓ qui coupent (MM') en I et I'. La figure s'étudie facilement.

On établit que :

$$IN = I'N' \text{ et } IM = I'M'$$

On en déduit que $MN = M'N'$ par application du théorème de Pythagore.



a,b) Dans tous les cas $MN = M'N'$. S est donc une bijection qui conserve les distances.
<u>S est une isométrie</u>.

C_3 | Transformation par isométrie des figures usuelles

Soit une isométrie F et une " figure " de $\mathcal{P}$, c'est-à-dire un sous-ensemble de $\mathcal{P}$,que nous appellerons $\mathcal{A}$

La " figure transformée de $\mathcal{A}$ par F " est, par définition, <u>l'ensemble des transformés par F des points de $\mathcal{A}$</u> . Nous la noterons, par abus de langage, F $(\mathcal{A})$

<u>Soit M' un point quelconque de $\mathcal{P}$. Il a un antécédent unique M :</u>

$$\boxed{(M' \in F(\mathcal{A})) \iff (M \in \mathcal{A})}$$

Cette équivalence fondamentale sera constamment utilisée dans ce qui suit.

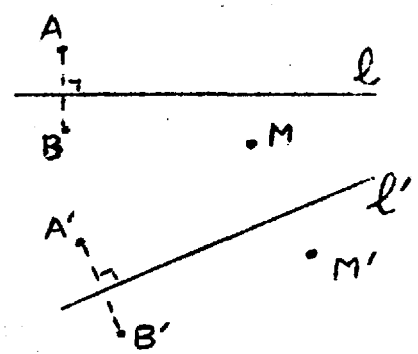
I) <u>Transformation de la droite</u> Avec tout ce qui se greffe là-dessus

- <u>On peut</u> d'abord démontrer que toute droite est transformée par isométrie en une droite.

Soit une isométrie F et une droite ℓ. Etudier $F(\ell)$

Après recherche sauvage, critique, mise au point, on peut proposer la démonstration que voici :

- Soit A un point fixé hors de ℓ
  et B son symétrique par rapport à ℓ
  $A \neq B$
  Soit $A' = F(A)$ et $B' = F(B)$
  $A' \neq B'$



- Soit M' un point quelconque de $\mathcal{P}$
  Il a un antécédent unique M
  Notons que $M'A' = MA$ et $M'B' = MB$

$$(M' \in F(\ell)) \Longleftrightarrow (M \in \ell) \Longleftrightarrow (MA = MB) \Longleftrightarrow (M'A' = M'B') \Longleftrightarrow (M' \in \ell' \text{ médiatrice de } A'B')$$

Les deux propositions extrêmes sont simultanément vraies ou bien simultanément fausses pour tout point M' de $\mathcal{P}$, il en résulte que les deux ensembles $F(\ell)$ et ℓ', médiatrice de $[A'B']$ sont égaux. $F(\ell) = \ell'$.
Le problème est résolu : Toute droite est transformée par isométrie en une droite.

On s'apercevra que, le plus souvent, les enfants se contentent de la demi-démonstration qui consiste à établir que tout point de ℓ a pour transformé un point qui appartient à ℓ'. Il faudra bien leur faire comprendre que leur démarche établit seulement que

$$F(\ell) \subset \ell'$$

Cette démarche est seulement une " analyse ", elle doit être suivie d'une " synthèse " au cours de laquelle on démontre que tout point de ℓ' est le transformé d'un point de ℓ, d'où il résulte que

$$\ell' \subset F(\ell)$$

C'est seulement de la double inclusion que l'on peut déduire que

$$F(\ell) = \ell'$$

Ce n'est probablement qu'après cette démarche en deux temps que les enfants pourront bien pénétrer la présentation condensée par équivalences que j'ai proposée d'abord.

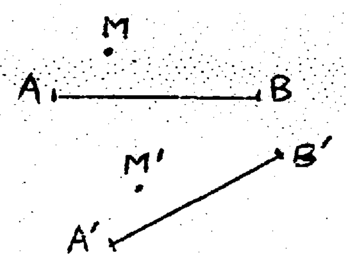
- On peut aussi préférer le plan que j'adopte maintenant :

I°) Transformation d'un segment

Soit une isométrie F et un segment $[AB]$, étudier $F([AB])$.

On peut s'appuyer sur cette propriété caractéristique de tout segment $[PQ]$ de $\mathcal{P}$: $[PQ] = \{M \in \mathcal{P} \ : \ MP + MQ = PQ\}$ et employer la technique de la page précédente

. Soit $A' = F(A)$ et $B' = F(B)$ $A'B' = AB$



. Soit M' un point quelconque de $\mathcal{P}$, il a un antécédent unique M ; et
$$\begin{cases} M'A' = MA \\ M'B' = MB \end{cases}$$

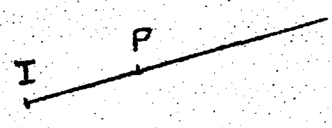
$$M' \in F([AB]) \Leftrightarrow (M \in [AB]) \Leftrightarrow (MA + MB = AB) \Leftrightarrow (M'A' + M'B' = A'B') \Leftrightarrow (M' \in [A'B'])$$

De l'équivalence des propositions extrêmes, il résulte que $F([AB]) = [A'B']$
tout segement $[AB]$ est transformé en un segment $[A'B']$ tel que $A'B' = AB$

2°) Transformation d'une demi-droite

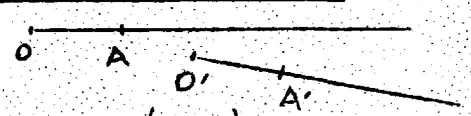
Soit une isométrie F et une demi-droite $[OA)$, étudier $F([OA])$.
La même technique qu'au I°) s'appuyant sur cette propriété caractéristique de toute demi-droite $[IP)$ de $\mathcal{P}$.

$$(IP) = \left\{ M \in \mathcal{P} : \begin{cases} MI + MP = IP \\ MI - MP = IP \end{cases} \right\}$$ permet de



démontrer que, si O' et A' sont les images de O et A, la transformée de la demi-droite $[OA)$ est la demi-droite $[O'A')$.

Toute demi-droite $[OA)$ est transformée en une demi-droite $[O'A')$.

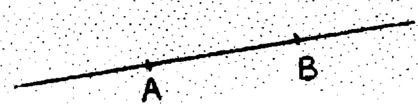


3°) Transformation d'une droite

Soit une isométrie F et une droite (AB), étudier $F((AB))$

On peut cultiver le 2°) et le fait que

$$(AB) = [AB) \cup [BA)$$



ou bien cette propriété caractéristique de toute droite (PQ) de $\mathcal{P}$:

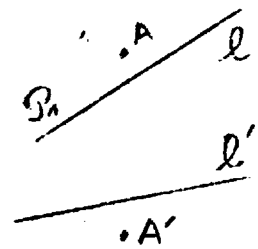
$$(PQ) = \left\{ M \in \mathcal{P} : \begin{cases} MP + MQ = PQ \\ MP - MQ = PQ \\ MQ - MP = PQ \end{cases} \right\}$$

On démontre que si $A' = F(A)$ et $B' = F(B)$, la transformée de la droite (AB) est la droite (A'B')

<u>Toute droite est transformée en une droite</u>

4°) <u>Transformation d'un demi-plan</u>

Soit une isométrie F et un demi-plan $[\ell, A)$,[1] étudier $F([\ell, A))$



Désignons par ℓ' et A' les images de ℓ et A, et transformons d'abord $\mathcal{P}_1 =]\ell, A)$, demi-plan ouvert de bord ℓ contenant A.

Soit M' un point quelconque de $\mathcal{P}$; il a un antécédent unique M :

$$\underline{(M' \in F(\mathcal{P}_1))} \Leftrightarrow (M \in \mathcal{P}_1) \Leftrightarrow ([AM] \cap \ell = \emptyset) \underset{(2)}{\Leftrightarrow} ([A'M'] \cap \ell' = \emptyset) \Leftrightarrow \underline{(M' \in]\ell', A'))}$$

De l'équivalence des propositions extrêmes, il résulte que

$$F(\mathcal{P}_1) =]\ell', A')$$

(I) Etant donné une droite ℓ et un point A hors de ℓ :

$$]\ell, A) = \{ M \in \mathcal{P} : [AM] \cap \ell = \emptyset \} ; [\ell, A) =]\ell, A) \cup \ell$$

(2) " $\Longleftarrow$ " du fait que F est une application ; et " $\Longrightarrow$ " du fait que F est injective.

On en déduit immédiatement que $F([\ell, A)) = [\ell', A')$

<u>Tout demi-plan $[\ell, A)$ est transformé en un demi-plan $[\ell', A')$</u>

5°) " <u>Conservations</u> "

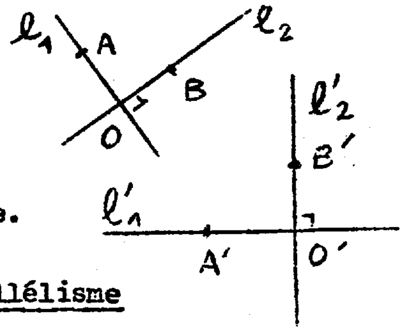
a) Soit une isométrie F et deux droites ℓ_1, ℓ_2

F les transforme en deux droites ℓ'_1, ℓ'_2

- Si $\ell_1 = \ell_2$, alors $\ell'_1 = \ell'_2$

Si $\ell_1 \cap \ell_2 = \emptyset$, alors $\ell'_1 \cap \ell'_2 = \emptyset$, puisque F est injective

Donc Si $\ell_1 // \ell_2$, alors $\ell'_1 // \ell'_2$



- Si $\ell_1 \perp \ell_2$, alors $\ell'_1 \perp \ell'_2$ comme on le voit immédiatement en appliquant le théorème de Pythagore.

- - <u>Les isométries conservent le parrallélisme et l'orthogonalité des droites</u>

b) Soit une isométrie F, un segment [AB] et son milieu I ; IA = IB. F transforme le segment [AB] en un segment [A'B'] et le point I de [AB] en le point I' de [A'B'] tel que I'A' = I'B', c'est-à-dire le milieu de [A'B'].

<u>Les isométries " conservent le milieu " des segments</u> .

Il en résulte immédiatement que :

<u>Les isométries conservent l'équipollence des bipoints</u> .

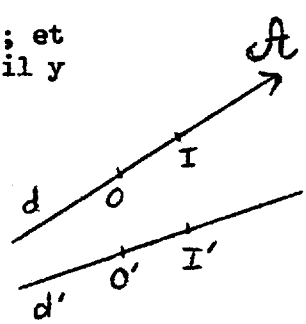
En effet :

Soit une isométrie F et deux bipoints équipollents (A,B) (C,D) (A,B) et (C,D) ont même milieu I. F transforme (A,B) et (C,D) en deux bipoints (A'B'), (C'D') de même milieu I' image de I.

6°) <u>Transformation d'un axe</u>

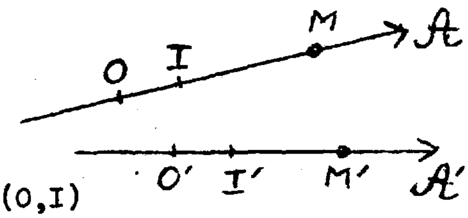
a) Soit une isométrie F et un axe $\mathcal{A}$ de support d

F transforme la droite d en une droite d' ; et sur la droite euclidienne de support d', il y a deux axes opposés.



Soit (O,I) un repère de $\mathcal{A}$, O' et I' les images de O et I.
Sur $\mathcal{A}$, $\overline{OI} = 1$, donc OI = 1 , donc O'I' = 1 ; (O'I') est un repère de la droite euclidienne de support d', et par suite un repère de l'un des deux axes portés par cette droite.
Les repères de $\mathcal{A}$ sont les bipoints de d équipollents à (O'I') ; ces derniers sont les repères de l'un des deux axes portés par d' ; nous déciderons que c'est cet axe qui est le transformé de $\mathcal{A}$

<u>L'image d'un axe $\mathcal{A}$ dont un repère est (O,I) est l'axe $\mathcal{A}'$ dont un repère est (O'I') image de (O,I)</u>



b) Soit M un point quelconque de $\mathcal{A}$
et M' son transformé

Soit x l'abscisse de M pour le repère (O,I)

et x' l'abscisse de M' pour le repère (O',I')
transformé de (O,I)

- F transforme (O,M) en (O'M')
donc OM = O'M', donc $|x| = |x'|$
- En outre :

- ou bien $M \in [OI)$, alors $M' \in [O'I')$
$x \geqslant 0$, $x' \geqslant 0$ $x = x$

- ou bien $M \notin [OI)$, alors $M' \notin [O'I')$
$x < 0$, $x' < 0$ $x = x'$

<u>Le point M de $\mathcal{A}$ d'abscisse x pour le repère (O,I) est transformé en le point M' de $\mathcal{A}'$ de même abscisse pour le repère (O'I') transformé de (O,I)</u>

<u>Il en résulte que si P et Q sont deux points quelconques de $\mathcal{A}$ et P' et Q' leurs images sur $\mathcal{A}'$: $\overline{PQ} = \overline{P'Q'}$</u> ;

que si G est le barycentre de P et Q affectés de deux coefficients α et β , alors G' = F (G) est le barycentre de P' et Q' affectés des mêmes coefficients.

II) <u>Transformation du cercle, du disque</u>

- Soit une isométrie F et un cercle $C_{(O,r)}$ de centre O et de rayon r

  Soit O' = F (O)

  Soit M' un point quelconque du plan ; il a un antécédent M.

$$(M' \in F(C)) \Longleftrightarrow (M \in C) \Longleftrightarrow (OM = r) \Longleftrightarrow (O'M' = r) \Longleftrightarrow (M' \in C'_{(O',r)})$$

C' désignant le cercle de centre O' et de rayon r

<u>L'image d'un cercle est un cercle de même rayon</u>

- On démontrera de même que l'image d'un disque est un disque de même rayon.

C 4 | Le Groupe des Isométries

I) Le groupe $(\mathcal{J}, o)$

La composée de deux bijections de $\mathcal{P}$ est une bijection de $\mathcal{P}$.
La composée de deux transformations conservant les distances conserve elle-même les distances. Donc, la composée de deux isométries est toujours une isométrie. Autrement dit :

<u>L'opération o est une opération interne dans l'ensemble $\mathcal{J}$ des isométries de $\mathcal{P}$</u>

Etudions $(\mathcal{J}, o)$

I) Nous savons que l'opération o est associative.

2) Elle a un élément neutre : l'application identité de $\mathcal{P}$, qui appartient à $\mathcal{J}$

3) Toute isométrie F étant une bijection a une bijection réciproque F^{-1}, qui est évidemment aussi une isométrie, et

$$F^{-1} o F = F o F^{-1} = 1_{\mathcal{P}} \quad \text{identité de } \mathcal{P}$$

Tout élément de $\mathcal{J}$ a donc un symétrique dans $\mathcal{J}$ pour l'opération o.

I, 2, 3) $\boxed{(\mathcal{J}, o) \text{ est un groupe}}$

- Ce groupe n'est pas commutatif, comme on pourra le remarquer en composant par exemple dans deux ordres différents une translation et une symétrie -point.
- $\mathcal{E}$ désignant l'ensemble des translations de $\mathcal{P}$, $(\mathcal{E}, o)$ est un groupe déjà étudié en 4e. C'est un sous-groupe commutatif de $(\mathcal{J}, o)$

II) <u>Application à la relation de lien verbal " est isométrique à "</u> dans l'ensemble des figures du plan.

Soit E et E' deux figures du plan. Nous dirons que

" E est isométrique à E' " pour exprimer qu'il existe une isométrie qui transforme E en E'.

En utilisant successivement chacune des trois propriétés de groupe de $(\mathcal{J}, o)$, les enfants reconnaîtront facilement que la relation étudiée est réflexive, symétrique, transitive, c'est-à-dire que <u>cette relation est une équivalence.</u>

C'est la traduction mathématique de la relation physique " est superposable à ".

III. Quelques compositions dans ($\mathcal{J}$, o)

Si le temps ne manquait pas, quelques compositions d'isométries intéresseraient les enfants :

I) Composition de deux translations - déjà vue en 4ème

2) Composition de deux symétries-point, d'une symétrie-point et d'une translation.

3) Composition de deux symétries orthogonales par rapport à deux droites perpendiculaires ; sous-groupe de ($\mathcal{J}$, o) engendré par ces deux symétries.

C 5 | Bijection vectorielle associée à une isométrie

Il serait dommage que le manque de temps nous fasse négliger cette question et partant l'outil vectoriel.

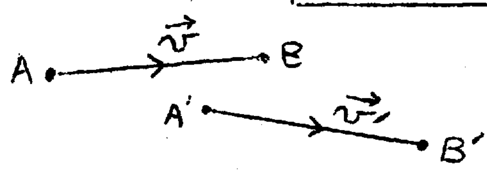
I) Bijection vectorielle associée à une isométrie

Soit une isométrie F ; elle transforme un bipoint (A,B) en un bipoint (A'B') et l'ensemble des bipoints équipollents à (A,B) en l'ensemble des bipoints équipollents à (A'B')

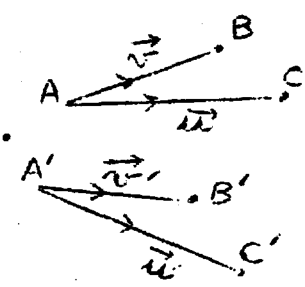
A F , application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$, on peut donc associer f, application de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}$, qui, à chaque vecteur $\vec{v}$ fait correspondre le vecteur $\vec{v}'$ représenté par le bipoint (A'B') image par F d'un représentant (A,B) quelconque de $\vec{v}$

$$F : \begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ A & \longmapsto & A' \\ B & \longmapsto & B' \end{array}$$

$$\boxed{f : \begin{array}{ccc} \mathcal{V} & \longrightarrow & \mathcal{V} \\ \vec{v} = \overrightarrow{AB} & \longmapsto & \vec{v}' = \overrightarrow{A'B'} \end{array}}$$



Constatons que f est une bijection :



- Deux vecteurs différents pouvant être représentés par deux bipoints distincts de même origine, il est clair que leurs images par f sont différentes. f est injective.

- Soit $\vec{v}'$ un vecteur donné quelconque. Représentons-le par un bipoint (A'B'). Soit A et B les antécédents de A' et B' par F ; l'image par f de $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ est $\vec{v}'$ f est surjective

- • **f est une bijection**

Cette bijection conserve la norme des vecteurs et leur orthogonalité.

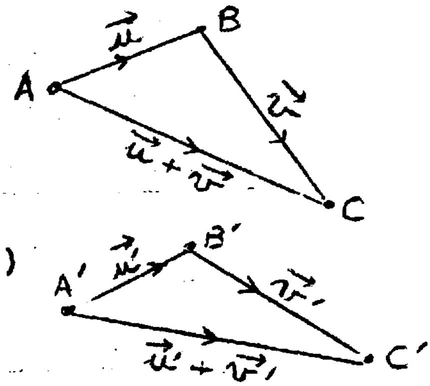
II) Propriétés linéaires de f

I) Soit deux vecteurs quelconques $\vec{u}, \vec{v}$ et leur somme $\vec{u} + \vec{v}$ représentés par les bipoints (A,B), (B,C), (A,C).

Soit $A' = F(A)$

$B' = F(B)$

$C' = F(C)$



$$f(\overrightarrow{AC}) = f(\vec{u} + \vec{v})$$

$$\overrightarrow{A'C'} = f(\overrightarrow{AC})$$

$$\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'C'} = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$$

Ainsi :

$$\forall \vec{u} \in \mathcal{V}, \forall \vec{v} \in \mathcal{V} \quad \boxed{f(\vec{u}+\vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})}$$

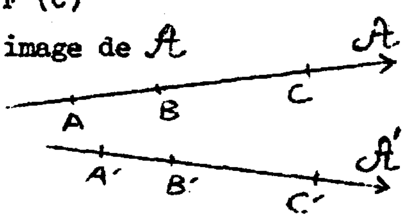
2) Soit un vecteur quelconque $\vec{u}$, un réel quelconque λ, et le vecteur $\lambda.\vec{u}$;

Soit (A,B) et (A,C) deux représentants de $\vec{u}$ et $\lambda\vec{u}$ sur un axe $\mathcal{A}$

Soit $A' = F(A)$ $B' = F(B)$ $C' = F(C)$

A', B', C' appartiennent à l'axe $\mathcal{A}'$ image de $\mathcal{A}$ et nous savons que

$$\overline{AB} = \overline{A'B'} \quad \text{et} \quad \overline{AC} = \overline{A'C'}$$



Or, par définition de $\lambda \cdot \vec{u}$:

$$\overline{AC} = \lambda \cdot \overline{AB} \quad \text{donc} \quad \overline{A'C'} = \lambda \cdot \overline{A'B'}$$

$$f(\overrightarrow{AC}) = f(\lambda . \vec{u})$$

$$\overrightarrow{A'C'} = f(\overrightarrow{AC})$$

$$\overrightarrow{A'C'} = \lambda . \overrightarrow{A'B'} = \lambda . f(\vec{u})$$

Ainsi :

$$\forall \vec{u} \in \mathcal{V}, \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \boxed{f(\lambda . \vec{u}) = \lambda . f(\vec{u})}$$

I,2) Conséquence

Quels que soient deux vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$, et deux réels x et y

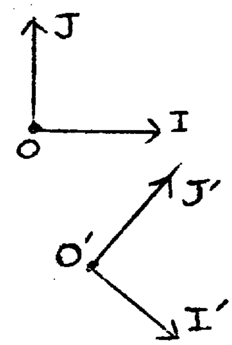
$$f(x.\vec{i} + y.\vec{j}) = x.f(\vec{i}) + y\, f(\vec{j})$$

C 6 | Détermination d'une isométrie

I) Par deux repères orthonormés

I) Soit un repère orthonormé $= (o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et une isométrie F quelconques.

- F transforme O en O', et les bipoints (O,I) et (O,J) représentant $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ en deux bipoints (O'I') et (O'J') représentant $\vec{\imath}\,' = f(\vec{\imath})$ et $\vec{\jmath}\,' = f(\vec{\jmath})$



- OI = OJ = 1 , donc O'I' = O'J' = 1
- (OI) $\perp$ (OJ) , donc (O'I') $\perp$ (O'J')

- Le repère (O', $\vec{\imath}\,'$, $\vec{\jmath}\,'$) est donc aussi orthonormé.

Admettons l'abus de langage qui consiste à dire que F transforme le repère $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ en le repère $(O', \vec{\imath}\,', \vec{\jmath}\,')$ (En fait, F transforme O en O', mais c'est f qui transforme la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ en la base $(\vec{\imath}\,', \vec{\jmath}\,')$ .... (avec un autre abus de langage) .... et concluons :

L'isométrie F transforme le repère orthonormé r en un repère orthonormé r'.

- Considérons maintenant un point M quelconque de coordonnées (x,y) dans r et son transformé M'

O' = F (O) M' = F (M)

Donc :

$$\overrightarrow{O'M'} = f(\overrightarrow{OM}) = f(x\vec{\imath} + y\cdot\vec{\jmath}) = x\, f(\vec{\imath}) + y\, f(\vec{\jmath}) = x.\vec{\imath}\,' + y.\vec{\jmath}\,'$$

M' a donc mêmes coordonnées dans r ' que M dans r

- <u>Dans une isométrie quelconque, chaque repère orthonormé r est transformé en un repère orthonormé r ', et un point M quelconque de coordonées (x,y) dans r en le point M' de mêmes coordonées (x , y) dans r'</u>

2) Considérons maintenant deux repères orthonormés quelconques r et r'

. Y a-t-il des isométries transformant r en r'?

Analyse Supposons qu'il existe une isométrie transformant r en r'. Alors, d'après le I), c'est l'application F de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui à chaque point M de coordonnées (x,y) dans r fait correspondre le point M' de mêmes coordonées (x,y) dans r'

Synthèse Examinons cette application F.

- A O de coordonées (o,o) dans r elle fait correspondre le point de mêmes coordonnées (o,o) dans r', c'est-à-dire O'.

  A I de coordonées $(1, o)$ dans r elle fait correspondre le point de mêmes coordonnées $(1, o)$ dans r', c'est-à-dire I'.

  A J elle fait de même correspondre J'.

  Donc F transforme r en r'

- F est évidemment une bijection puisque chaque point $M'(x,y)_{/r'}$,

  a par F un antécédent unique qui est le point $M(x,y)_{/r}$.

- Enfin, étant donné deux points quelconques $A(xo, yo)_{/r}$ et $B(x_1, y_1)_{/r}$ et leurs transformés par F $A'(xo, yo)_{/r'}$, et $B'(x_1, y_1)_{/r'}$, $AB^2 = (xo - x_1)^2 + (y_o - y_1)^2 = A'B'^2$

$AB = A'B'$..... F est donc une isométrie qui transforme r en r'

Concluons :

<u>Etant donné deux repères orthonormés r et r', il existe toujours une isométrie et une seule transformant r en r'.</u>
<u>Cette isométrie est l'application</u>

$$F : \begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ M(x,y)_{/r} & \longmapsto & M'(x,y)_{/r'} \end{array}$$

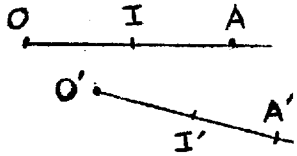
I,2) Cette étude montre un procédé pour construire toutes les isométries du plan, à partir d'un repère orthonormé fixé r, en associant à chaque repère orthonormé r' l'isométrie qui transforme r en r'.

3) <u>Complément</u>

Soit deux points distincts O,A et deux points O',A' tels que OA = O'A'

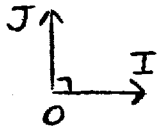
Recherchons les isométries transformant (O,A) en (O'A')

Marquons le point I de [O A) tel que OI = 1



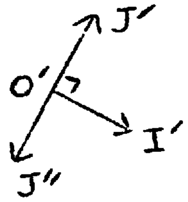
et le point I' de [O'A') tel que O'I' = 1

Une isométrie transforme (O,A) en (O'A') seulement si elle transforme (O,I) en (O'I').
Recherchons les isométries qui transforment (O,I) en (O',I')



A) Introduisons l'un des deux repères orthonormés construits à partir de (O,I)

soit $r = (O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$



Et imaginons une isométrie transformant (O,I) en (O',I'). Elle transforme r en l'un des deux repères orthonormés r', r'' construits à partir de (O',I'). Elle est donc l'une des deux isométries F et F' qui transforment respectivement r en r' et r''.

S) Or F et F' transforment toutes les deux (O,I) en (O',I')

A, S) <u>Il existe donc deux isométries exactement transformant (O,I) en (O',I'), et par suite (O,A) en (O',A')</u>

Chacune d'elle est la composée de l'autre et de la symétrie orthogonale par rapport à (O'I').

II) <u>Par deux triangles propres</u>

I) Soit un triangle t = (A,B,C) et une isométrie F quelconques.

F transforme t' en un triangle t' = (A',B',C') tel que $\begin{cases} AB = A'B' \\ AC = A'C' \\ BC = B'C' \end{cases}$

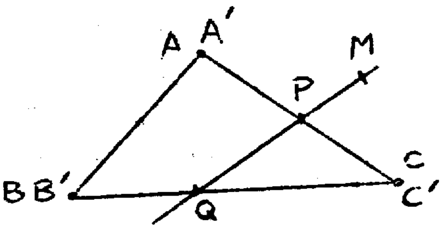
2) Considérons maintenant deux triangles propres

t = (A,B,C) , t' = (A',B',C') tels que $\begin{cases} AB = A'B' \\ AC = A'C' \\ BC = B'C' \end{cases}$

Y a-t-il des isométries transformant t en t' ?

Etudions la question en plusieurs étapes.

a) <u>Supposons que A = A' , B = B', C = C'</u>



α) Une isométrie solution saute aux yeux, c'est $1_{\mathcal{P}}$, l'identité du plan.

β) Y en a-t-il d'autres ?

Pour répondre à cette question observons d'abord ceci :

Si une isométrie laisse invariants deux points distincts P et Q, elle laisse invariant tout point de (PQ)

En effet :

Soit F une isométrie laissant P et Q invariants.

Soit M un point quelconque de (PQ) ; posons $\overrightarrow{PM} = \lambda \cdot \overrightarrow{PQ}$.

Soit M' = F (M) et soit f la bijection vectorielle associée à F.

$$\overrightarrow{PM}' = f\,(\overrightarrow{PM}) = f\,(\lambda \cdot \overrightarrow{PQ}) = \lambda \cdot f\,(\overrightarrow{PQ}) = \lambda \cdot \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PM}$$

Donc M = M' ; c'est ce que nous voulions établir.

Cela noté, imaginons une isométrie F transformant (A,B,C) en (A,B,C), et demandons-nous en quoi elle transforme un point M de $\mathcal{P}$ arbitrairement choisi.

Menons par M une droite qui coupe les deux droites (AC) et (BC), par exemple, en deux points distincts P et Q.

F (A) = A et F (C) = C , donc F (P) = P

F (B) = B et F (C) = C , donc F (Q) = Q

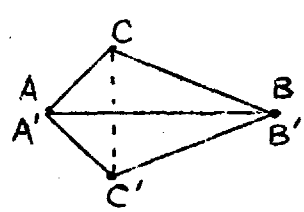
F (P) = P et F (Q) = Q donc F (M) = M, cela quel que soit M

Donc F = $1_{\mathcal{P}}$

α,β) <u>Il existe donc une isométrie unique transformant (A,B,C) en (A,B,C), et cette isométrie est $1_{\mathcal{P}}$</u>

b) <u>Supposons que A = A' , B = B' , C ≠ C'</u>

α) Alors (AB) est la médiatrice de [CC'] , et une isométrie solution saute aux yeux, c'est la symétrie orthogonale S par rapport à (AB)



β) Y en a-t-il d'autres ?

Imaginons une isométrie solution F.

$$\begin{tikzcd} t \arrow[r, bend left, "S"] \arrow[r, bend right, "F"'] & t' \arrow[loop above] \end{tikzcd}$$

On peut toujours considérer F comme composée de S et d'une isométrie transformant t en t'.
Or, d'après le a) il n'y a qu'une isométrie transformant t en t' c'est $1_{\mathcal{P}}$

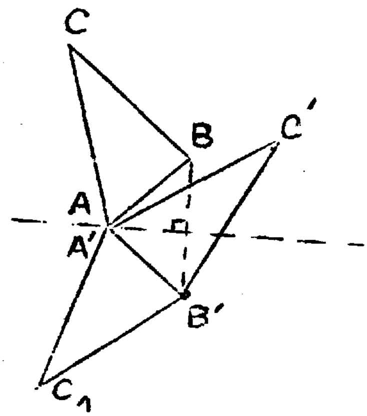
Il en résulte que F = S

$\alpha\beta$) Il existe donc une isométrie unique transformant (A,B,C) en (A,B,C') et cette isométrie est la symétrie orthogonale par rapport à la droite (AB)

c) Supposons que $A = A'$, $B \neq B'$, $C \neq C'$

Toute isométrie F peut être considérée comme composée de la symétrie S par rapport à la médiatrice de [BB'] et d'une isométrie G :

$F = G \circ S \qquad (G = F \circ S)$



S transforme A en A, B en B' et C en un point C_1

$F = G \circ S$ transforme (A,B,C) en (A,B'C')

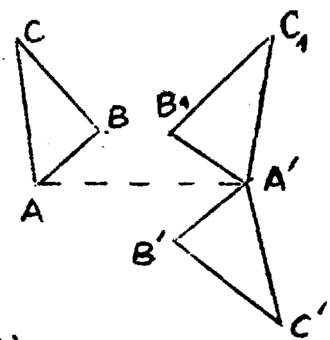
si G transforme (A,B',C_1) en (A,B',C')

Or, d'après a) et b) il existe une unique isométrie transformant (A,B', C_1) en (A,B',C')

(Cette isométrie est $1_{\mathcal{P}}$ si $C' = C_1$, et la symétrie orthogonale par rapport à (A'B') si $C' \neq C_1$).

Il existe donc une unique isométrie transformant (A,B,C) en (A,B',C'). Et cette isométrie est, suivant les cas, soit une symétrie orthogonale, soit une composée de deux telles symétries.

d) Supposons que $A \neq A'$, $B \neq B'$, $C \neq C'$



Toute isométrie F peut être considérée comme composée de la symétrie S par rapport à la médiatrice de [AA'] et d'une isométrie G : $F = G \circ S$

S transforme A en A', B en B_1 et C en C_1

$F = G \circ S$ transforme (A,B,C) en (A',B',C')
ssi G transforme (A',B_1 , C_1) en (A',B',C')

Or, d'après a) b) c) il existe une unique isométrie transformant (A', B_1, C_1) en (A',B',C')

(Cette isométrie est, suivant les cas, soit $1_{\mathcal{P}}$, soit une symétrie orthogonale, soit la composée de deux telles symétries).

Il existe donc une isométrie unique transformant (A,B,C) en (A',B'C') Et cette isométrie est, suivant les cas, soit une symétrie, soit la composée de deux ou trois telles symétries.

a b c d) Concluons

Etant donné deux triangles propres $t = (A,B,C)$ $t' = (A',B',C')$

tels que $\begin{cases} AB = A'B' \\ AC = A'C' \\ BC = B'C' \end{cases}$

il existe toujours une isométrie et une seule transformant t en t'

Et cette isométrie F est, suivant les cas,

- soit l'identité de $\mathcal{P}$
- soit une symétrie orthogonale
- soit la composée de deux symétries orthogonales
- soit la composée de trois symétries orthogonales

Si l'on observe que l'identité de $\mathcal{P}$ peut être considérée comme composée de deux symétries orthogonales, et que toute symétrie orthogonale peut être considérée comme composée de trois telles symétries, on peut conclure que

dans tous les cas F est la composée de deux ou trois symétries orthogonales

Il sera intéressant de vérifier expérimentalement la propriété du plan physique que suggère ainsi l'étude du modèle :

Etant donné deux triangles superposables t et t' du plan physique, on peut toujours appliquer t sur t' par une succession de deux ou trois pliages.

Remarque

Nous venons de démontrer que si les deux triangles $t = (A,B,C)$, $t' = (A',B',C')$ sont tels que $\begin{cases} AB = A'B' \\ AC = A'C' \\ BC = B'C' \end{cases}$

alors ils sont isométriques

C'est là la version nouveau style de l'ancien " troisième cas d'égalité " des triangles.

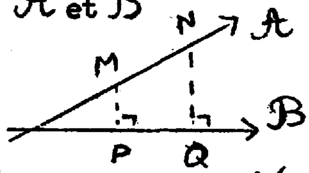
Observons, pour finir, que toute isométrie peut être considérée comme l'isométrie qui transforme un certain triangle t en un certain triangle t'. Il en résulte que :

Toute isométrie est soit une symétrie orthogonale, soit la composée de deux ou trois telles symétries.

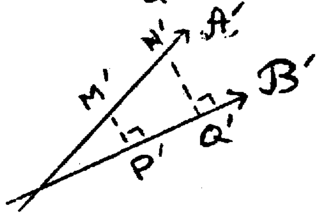
Le groupe ($\mathcal{J}$, o) des isométries est donc engendré par l'ensemble des symétries orthogonales .

III) Par deux couples d'axes sécants

I) Soit un couple d'axes $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ et une isométrie F quelconques.
F transforme les axes $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ ou deux axes $\mathcal{A}'$ et $\mathcal{B}'$



Soit M et N deux points distincts de $\mathcal{A}$ et P et Q leurs projections orthogonales sur $\mathcal{B}$



Soit M',N',P',Q' respectivement les images de M,N,P,Q par F. Comme F conserve l'orthogonalité des droites, P' et Q' sont les projections orthogonales de M' et N' sur $\mathcal{B}'$.

Or $\overline{MN} = \overline{M'N'}$ et $\overline{PQ} = \overline{P'Q'}$

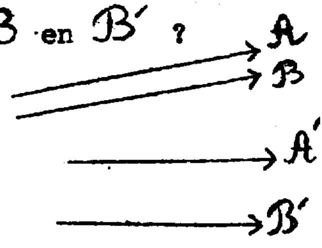
Donc : $\dfrac{\overline{PQ}}{\overline{MN}} = \dfrac{\overline{P'Q'}}{\overline{M'N'}}$ $\qquad \mathcal{C}(\mathcal{A},\mathcal{B}) = \mathcal{C}(\mathcal{A}',\mathcal{B}')$

<u>Par isométrie, deux axes quelconques sont transformés en deux axes ayant même rapport de projection orthogonale que les axes donnés</u>

Propriété de " conservation du rapport de projection orthogonale de deux axes par isométrie ".

2) Considérons maintenant deux couples d'axes $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ $(\mathcal{A}',\mathcal{B}')$ tels que $\mathcal{C}(\mathcal{A},\mathcal{B}) = \mathcal{C}(\mathcal{A}',\mathcal{B}') = C$

Y a-t-il des isométries transformant $\mathcal{A}$ en $\mathcal{A}'$ et $\mathcal{B}$ en $\mathcal{B}'$?

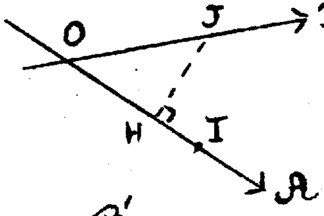


Notons que si $|c| = 1$, cela n'a rien de sûr.

Supposons donc, en outre, que $|c| \neq 1$ c'est-à-dire que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont sécants, ce qui entraîne que $\mathcal{A}'$ et $\mathcal{B}'$ sont sécants également.

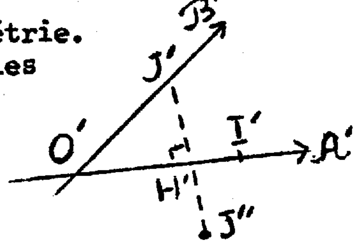
Armons les quatre axes de repères :

(OI) , (O,J), (O',I'), (O',J')



- S'il existe une isométrie transformant $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ en $(\mathcal{A}', \mathcal{B}')$, elle transforme (O,I,J) en (O',I',J'), donc elle est unique.

- Démontrons qu'il existe une telle isométrie. Soit H et H' les projections orthogonales de J et J' sur $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$



Par hypothèse $\overline{OH} = \overline{O'H'} = C$

Soit F l'une des deux isométries qui transforment (O,I) en (O',I')

Elle transforme H en H', et J en un point J_1 qui appartient

$$\begin{cases} \text{à la droite } (H'J') \\ \qquad \text{et} \\ \text{au cercle de centre } O' \\ \text{et de rayon } 1 \end{cases}$$

J_1 est donc soit le point J'
soit le symétrique J" de J' par rapport à $\mathcal{A}'$

. Si $J_1 = J'$, F est une isométrie qui transforme $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ en $(\mathcal{A}', \mathcal{B}')$

. Si $J_1 = J''$, la composée de F et de la symétrie orthogonale S par rapport à $\mathcal{A}'$, est une isométrie qui transforme $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ en $(\mathcal{A}', \mathcal{B}')$.

• • Etant donné deux couples d'axes sécants ayant même rapport de projection orthogonale, il existe toujours une isométrie et une seule transformant le premier couple en le second.

3) Complément

Etant donné un nombre γ de l'intervalle $[-1, 1]$, existe-t-il un couple d'axes $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ tel que $\mathcal{C}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \gamma$?

S'il en existe un, il en existe évidemment une infinité, qui se déduisent du premier par les isométries du plan.

Si $\gamma \in \{-1, 1\}$

il saute aux yeux que la réponse à la question posée est oui.

Supposons que $\gamma \in \;]-1, 1[$

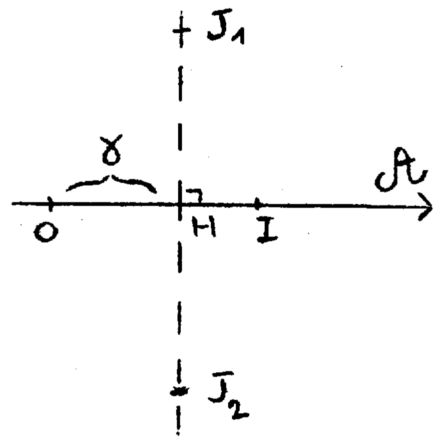
Choisissons un axe $\mathcal{A}$, fixons-y un repère (O,I), et recherchons s'il existe un axe $\mathcal{B}$ $\begin{cases} \text{passant par O} \\ \text{et tel que } \mathcal{C}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \gamma . \end{cases}$

Soit H le point de $\mathcal{A}$ tel que

$$\overline{OH} = \gamma$$

et soit $\mathcal{B}$, de repère (O,J), un axe quelconque passant par O.

$\mathcal{B}$ est solution de notre problème ssi J, qui est sur le cercle $\mathcal{C}(o, 1)$, est aussi sur la droite d perpendiculaire en H à $\mathcal{A}$



Comme OH < 1 , d coupe $\mathcal{C}$ en deux points J_1 , J_2 symétriques par rapport à $\mathcal{A}$

Il existe donc deux axes solutions :

$\mathcal{B}_1$, de repère (O, J_1)

$\mathcal{B}_2$, de repère (O, J_2) ,

symétriques par rapport à $\mathcal{A}$

<u>Etant donné un nombre γ de l'intervalle $]-1, 1[$</u>
<u>un axe $\mathcal{A}$ et un point O de $\mathcal{A}$,</u>

<u>Il existe deux axes $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ passant par O tels que</u>

$$\mathcal{E}(\mathcal{A}, \mathcal{B}_1) = \mathcal{E}(\mathcal{A}, \mathcal{B}_2) = \gamma$$

<u>Ces deux axes sont symétriques par rapport à $\mathcal{A}$</u>

Toute correspondance concernant ce bulletin

doit être adressée, en franchise postale, à :

Monsieur le Recteur de l'Académie d'Aix-Marseille
Monsieur le Directeur du Centre Régional
de Recherche et de Documentation Pédagogiques

" *Information Mathématique* "

55, rue Sylvabelle

I329I - MARSEILLE Cedex 2

A CONSULTER, à la bibliothèque du C.R.D.P. :

Une présentation de la géométrie en classe de troisième

(M. CAILLE - *Annales du C.R.D.P. d'AMIENS - 1972*)

Compte rendu du stage mini-ordinateurs de DIJON

(*IREM de Grenoble - Novembre 1972*)

UNE CONSTRUCTION DE LA FONCTION LOGARITHME NEPERIEN DANS LE CADRE DU PROGRAMME DE TERMINALE C

(J.C. BENIAMINO - *Lycée P. Puget et I.R.E.M. de Marseille*)

I. INTRODUCTION

On admet en terminale C qu'une fonction f continue sur un segment $[a,b]$ y est intégrable au sens de l'intégrale de Riemann. On peut remarquer que la mise au point d'une telle démonstration demande l'introduction de la continuité uniforme pour f, propriété qui est acquise car f est continue sur un segment.

On doit alors étudier la fonction $f : x \longmapsto \frac{1}{x}$ définie sur $]o, +\infty[$ et l'on constate que si f est continue sur $]o, +\infty[$ elle n'y est pas bornée et de plus $]o, +\infty[$ n'est pas un segment. Il ne peut donc être question d'appliquer brutalement le résultat rappelé plus haut.

Nous nous servirons cependant de ce résultat en étudiant les restrictions de la fonction f aux divers segments inclus dans $]o, +\infty[$ pour un choix convenable de ces segments.

Nous utiliserons le résultat du théorème de Rolle dans la partie II : Si une fonction continue et dérivable admet une dérivée nulle alors elle est constante. (f continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$; si $f'(x) = 0 \quad \forall x, x \in]a, b[$, f est alors constante sur $[a, b]$).

II. RELATION ENTRE LES PRIMITIVES D'UNE FONCTION QUAND LE SEGMENT D'INTEGRATION VARIE

$f : x \longmapsto \frac{1}{x}$ est donc continue et intégrable sur tout segment inclus dans $]o, +\infty[$. I_1 et I_2 désignent deux segments, F_1 et F_2 deux primitives quelconques de f sur I_1 et I_2.

a) $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ La fonction F définie par :

$$\begin{cases} F(x) = F_1(x) & \forall x, \quad x \in I_1 \\ F(x) = F_2(x) & \forall x, \quad x \in I_2 \end{cases}$$

est une primitive de f sur $I_1 \cup I_2$

b) $I_1 \cap I_2 \neq \emptyset$ $\alpha \in I_1 \cap I_2, I_1 = [a,b]$, $I_2 = [c,d]$

avec par exemple : $a < c \leq b < d$

Sur $I_1 \cap I_2$ la question posée est de savoir si F_1 et F_2 coïncident. On doit avoir :

$$F_1(\alpha) = F_2(\alpha)$$

cette condition étant suffisante quand $\{\alpha\} = I_1 \cap I_2$

Elle est encore suffisante dans le cas général ($I_1 \cap I_2$ est un segment) ; en effet, sur $I_1 \cap I_2$ la fonction ϕ définie par $\phi(x) = F_1(x) - F_2(x)$ est dérivable de dérivée nulle, elle est donc constante et comme

$$\phi(\alpha) = 0 \quad , \text{ elle est nulle .}$$

$$(\forall x, \; x \in I_1 \cap I_2 \;, \; F_1(x) = F_2(x)) \Longleftrightarrow F_1(\alpha) = F_2(\alpha)$$

On peut donc définir sur $I_1 \cup I_2$ une fonction F par

$$\begin{cases} F(x) = F_1(x) & \forall x \;, \quad x \in I_1 \\ F(x) = F_2(x) & \forall x \;, \quad x \in I_2 \end{cases}$$

F est continue dérivable et est une primitive de f sur $I_1 \cup I_2$.

III. CONSTRUCTION D'UNE FONCTION F DERIVABLE SUR $]0 + \infty[$ DE DERIVEE EGALE A $\frac{1}{x}$ ET TELLE QUE $F(1) = 0$

Considérons les deux suites de nombres réels $(\varepsilon_n)_n$ et $(X_n)_n$ l'une décroissante, l'autre croissante avec $\lim\limits_{n \to +\infty} \varepsilon_n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} X_n = +\infty$ et $\varepsilon_n < 1 < X_n \quad \forall n, n \in \mathbb{N}$

On pose $I_n = [\varepsilon_n, X_n]$ et F_n une primitive de $x \longmapsto \frac{1}{x}$ sur I_n avec $F_n(1) = 0$. D'après ce qui précède F_{n+1} et F_n coïncident sur I_n $(I_{n+1} \supset I_n)$

On pose donc $\forall x, x \in]0, +\infty[, F(x) = F_n(x)$ où n est un entier tel que $x \in I_n$ ce qui est toujours possible.

F est alors une fonction définie sur $]0, +\infty[$, continue et dérivable avec

$$F'(x) = \frac{1}{x} \qquad \text{et} \quad F(1) = 0$$

F est unique car si ϕ était continue dérivable sur $]0, +\infty[$ avec

$$\phi'(x) = \frac{1}{x} \qquad \text{et} \quad \phi(1) = 0 \ldots.$$

.... F et ϕ coïncideraient sur chaque segment I_n et en définitive

$$F = \phi$$

R E G I O N A L E   A.P.M.E.P.   D' AIX-MARSEILLE

L'Assemblée Générale s'est tenue le mercredi 9 mai 1973 au lycée Saint-Charles. Il a été procédé à l'élection du nouveau Comité Régional pour l'année scolaire 1973-74 qui a ensuite élu son Bureau.

BUREAU	*Président d'Honneur*	M. BOREL
	Président	M. NOE 48, rue Daumier 13008 - Marseille
	Vice-Président	Mlle CAR - M. PFEIFFER
	Secrétaires	Mlle MABILLY 136, Bd. National 13003 - Marseille *(siège de la Régionale)* Mlle VERDELHAN
	Trésorière	Mlle MARGAILLAN
	Membres	Mme BLANCHARD , M. BRIANÇON M. DREVET , M. THOMAS

Autres membres du Comité :

M. BERNARD, Mme CORDONNIER, M. COSTE, M. GUENOUN, Melle LIGNEE, M. LECHENE, M. LE GAC, Melle PELISSIER, M. MARION, M. ROLLAND, Mme RAULIN, Mme MESTRANO, M. SEVAJOL.

- 0 -

Le nouveau Comité se réunira le 19 septembre 1973 à 15 heures au lycée Saint-Charles pour organiser le travail du 1er trimestre 1973-74. En particulier, il préparera une séance d'information de tous les membres de la Régionale sur l'enseignement élémentaire.

UN PEU DE MATHEMATIQUES AUTOUR D' UN DE

(cycle d'observation)

(G. THOMAS - *C.R.D.P. de Marseille*)

On considère l'expérience qui consiste à jeter deux fois un dé cubique ordinaire dont les faces sont numérotées de I à 6. Soit la variable aléatoire X qui prend pour valeur la différence des points obtenus.

Déterminer la loi de probabilité de X.

Calculer l'expérance mathématique de X.

etc ......

Non, il ne s'agit pas d'introduire la notion de variable aléatoire en classe de 6ème ! Tout du moins pas encore .....

Débarrassons simplement cet exercice - proposé à des élèves de Ière - de sa carapace probabiliste, et étudions ce que l'on peut faire, en classe de 6ème ou de 5ème, avec ce qu'il en reste.

Tout d'abord un dé, cubique, ordinaire.

Chaque élève peut construire, en Travaux Manuels par exemple, un cube en carton, c'est pour lui un excellent exercice de manipulation. Mais c'est aussi un exercice de géométrie :

- géométrie dans le plan (tracer et découpage du carré, notion d'angle droit, de droites parallèles, utilisation d'instruments de mesure, précision des mesures, etc...)

- géométrie dans l'espace (construction du cube, notions d'arêtes, de faces, etc ....)

C'est aussi, pour le professeur de mathématiques, une occasion de travailler avec son collègue de travaux manuels - pourquoi pas dans l'atelier même ? - pour introduire, pendant que les élèves font de véritables travaux pratiques, des notions géométriques utiles.

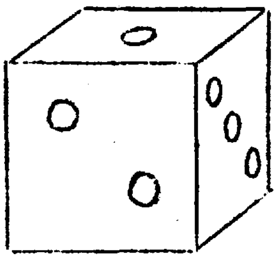
Il faut avoir fait cette expérience pour voir combien, dans ce cas, ces notions de construction " passent " tout naturellement.

Le cube est donc construit. C'est un cube ordinaire, en ce sens qu'on suppose qu'il n'est pas pipé, ou si peu .... On le pipera officiellement plus tard, dans le second cycle !

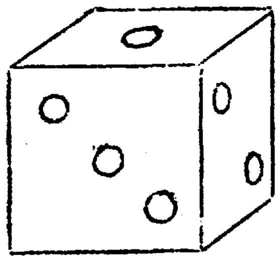
Il reste à numéroter les faces de I à 6.

Encore quelques notions de géométrie pour déterminer le centre du carré, pour placer correctement les points sur les diagonales, pour aligner les points sur la face 6 par exemple, les notions de médiatrice, de milieu de segment pouvant intervenir, etc .....

On étudie, bien sûr, un dé déjà construit pour découvrir d'abord la règle de numérotation des faces opposées (le total des points de deux faces opposées est égal à 7) et ensuite l'existence de deux types de dés, selon la façon dont les faces ont été numérotées, illustrées par les figures ci-dessous :



I



II

Ce qui amène tout naturellement l'élève à approcher la notion d'orientation de l'espace et la notion de déplacement - disons plutôt correspondance - dans l'espace :

Existe-t-il une correspondance faisant passer du type I au type II n'utilisant que des " transports" du dé ?

Peut-on trouver facilement les correspondances permettant de passer d'une position du dé du type I à une autre position du dé du même type ? Comment décrire alors la suite des opérations à effectuer ?

On trouvera un prolongement de cette étude menant à la notion de repérage dans l'espace et aux groupes de transformations dans un article de M. GLAYMANN : " *Géométrie sur un cube* " , dans le Bulletin de l'A.P.M. n° 28I.

Chaque élève dispose donc maintenant d'un dé cubique ordinaire dont les faces sont numérotées de I à 6.

On peut alors l'amener à une approche de la notion d'entier relatif à partir de couples d'entiers naturels et, plus particulièrement, à l'approche de la partie $\{-5, -4, -3, -2, I, 0, +I, +2, +3, +4, +5\}$ de $\mathbb{Z}$, ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X citée plus haut.

L'élève jette son dé deux fois et note les points obtenus. Le résultat du jeu se présente sous la forme d'un couple d'entiers naturels.

- Le premier entier naturel va représenter un gain.
- Le second entier naturel va représenter une perte.

Chaque élève ayant joué, on compare les résultats.

Les classes du cycle d'observation sont (le plus souvent) de 35 élèves .... plus le professeur - qui peut jouer lui aussi - cela fait 36 résultats possibles : juste ce qu'il faut pour, pense -t-on, obtenir une distribution proche de la distribution de X ..... Pas du tout ! Et quand bien même la classe serait encore plus surchargée à une centaine d'élèves, on trouverait une distribution encore bien différente de celle donnée par le modèle probabiliste.

Un préjugé dont il faut se défaire.

Il s'agit là de statistiques sur un petit échantillon, nous ne ferons donc que des statistiques descriptives.

Certains élèves ont (peut-être) obtenu les mêmes résultats, c'est-à-dire les mêmes couples.

D'autres élèves, n'ayant pas obtenu les mêmes couples, diront qu'ils ont pourtant gagné autant, ou perdu autant, ou ni gagné ni perdu.

En canalisant leurs interventions et en y mettant un peu d'ordre, on arrive à la notion de classe en groupant les couples :

I°) obtenus par les élèves qui ont gagné à ce jeu :
par exemple $\{(6,4), (5,3), (3,I)\}$; $\{(6,2), (5,I)\}$

2°) obtenus par les élèves qui ont perdu
par exemple $\{(I,4), (2,5)\}$; $\{(2,3),(3,4), (4,5), (5,6)\}$

3°) obtenus par ceux qui n'ont ni gagné ni perdu
par exemple $\{(I,I), (4,4), (5, 5)\}$

On s'aperçoit qu'il y a des " trous " dans ces classes. Il est alors intéressant de rechercher, pour cette situation donnée, l'ensemble de tous les résultats possibles, c'est-à-dire l'ensemble des 36 couples d'entiers naturels représentés dans le tableau ci-dessous :

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Une étude de ce tableau permet de dégager un certain nombre de remarques sur d'éventuelles symétries par exemple, les éléments des classes obtenues précedemment composant des diagonales.

Vient le moment où l'on peut donner un nom à ces classes.

La classe des résultats obtenus par ceux qui n'ont ni gagné ni perdu au jeu peut recevoir, assez naturellement, le nom " zéro ".

Les autres classes porteront un nom précédé du signe + ou du signe - suivant qu'elles correspondent à un gain définitif ou à une perte définitive ; ce nom étant symbolisé par le montant du gain ou de la perte, exprimé en entier naturel.

Pour ne pas perdre le signe en route, inscrivons ceci dans un rond, y compris zéro. Puisque ce dernier peut être précédé du signe + comme du signe - , on ne lui affectera pas de signe.

	I	2	3	4	5	6
I	(I,I)	(I,2)	(I,3)	(I,4)	(I,5)	(I,6)
2	(2,I)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,I)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,I)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,I)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,I)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

- 5

- 4

- 3

- 2

- I

0

+ 5   + 4   + 3   + 2   + I

De nombreuses remarques concernant ce tableau peuvent être faites en ce qui concerne, par exemple, le nombre de couples constituant chaque classe.

On peut alors représenter graphiquement la distribution des classes suivant le nombre de couples obtenus.

- en utilisant le tableau avec tous les couples possibles (*fig. I*)
- en utilisant les résultats effectivement obtenus par les élèves (*fig.2*)

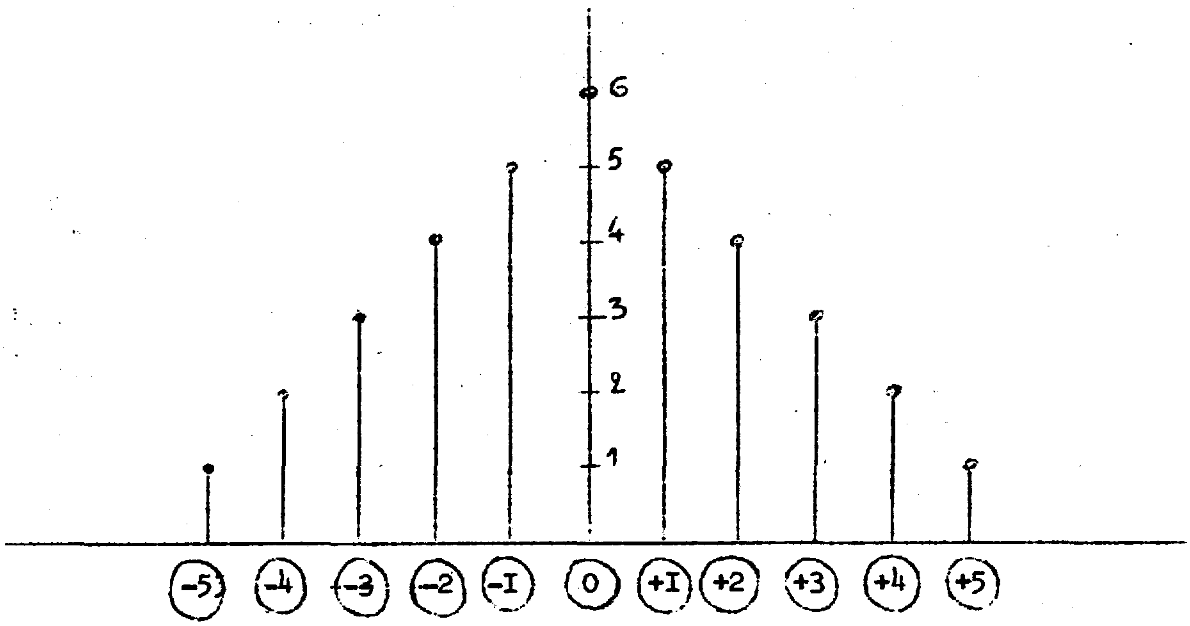


fig. I

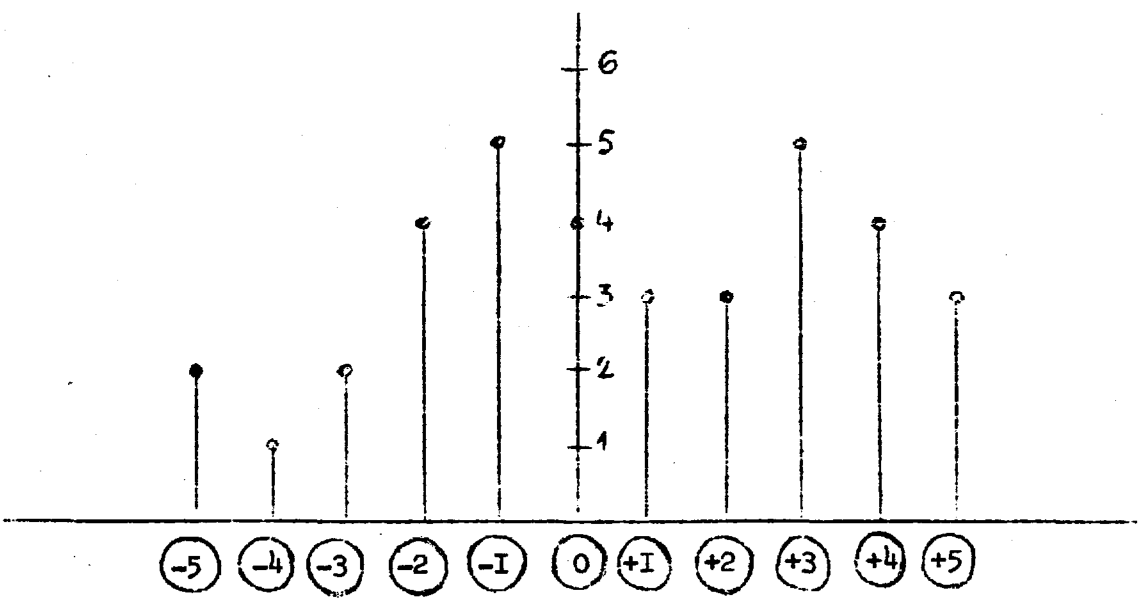


fig. 2

(résultats effectivement obtenus dans une classe de 6e)

Si l'on recommençait cette expérience dans la classe, obtiendrait-on la même représentation en fig. I ? , la même représentation en fig. 2 ?

Ces diagrammes en bâtons, ces questions que les élèves peuvent être amenés à se poser constituent déjà un premier pas - timide - vers les probabilités.

On peut aller plus loin, avec des élèves de 5ème par exemple. La seule difficulté réside dans la notion de fréquence (qui est le moyen à ce niveau d'approcher les probabilités). Cette difficulté peut être tournée par l'utilisation de pourcentages dont l'intérêt pour le calcul numérique est évident et dont un prolongement peut être une représentation graphique en secteurs circulaires, l'unité choisie étant le grade.

Pour revenir aux entiers relatifs, la construction effective de $\mathbb{Z}$ à partir des couples de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ peut intervenir après quelques exercices de ce genre.

On pourra noter alors les éléments de $\mathbb{Z}$: (-4), (0), (+ 3) évitant les couleurs différentes, les flèches en haut ou flèches en bas, les $^{m}4$ ou $^{p}3$, ou tout autre <u>artifice</u> , inutile pour les bons élèves, source de confusion pour les moins bons.

-.-.-.-.-.-

UN MODELE MATHEMATIQUE POUR LA THEORIE DE L' APPRENTISSAGE

(J. MARION - *Lycée d'Aubagne et I.R.E.M. de Marseille*)

INTRODUCTION

Soit T le contenu d'une " théorie " à " enseigner " à un ensemble donné fini E d'élèves ; il s'agira, pour ces derniers, d'apprendre et d'assimiler un certain nombre d'éléments (définitions, observations de résultats, etc ...) et de maîriser un certain nombre de difficultés (physiques, manuelles, propres au " raisonnement " inductif ou déductif, etc ...).

Plaçons-nous dans l'hypothèse heureuse où pédagogues, savants (ou quelque chose modulo le préfixe psycho) ont recensé toutes les " difficultés " du contenu de T à faire " passer " aux élèves de E et qu'ils les ont décomposées en " difficultés élémentaires " , c'est-à-dire en difficultés aisément surmontables par les élèves de E et telles que toute décomposition de ces difficultés élémentaires donnerait des sous-difficultés triviales pour les élèves de E.

Nous supposons que ces difficultés élémentaires forment un ensemble que nous noterons une fois pour toutes A (T,E).

Nous nous proposons d'élaborer un modèle mathématique inspiré du langage des ensembles et de la théorie des graphes pour décomposer A (T,E) en " leçons ". En général, les difficultés élémentaires ne s'enchaînent pas linéairement et on peut raisonnablement penser qu'il faille revenir ou réutiliser plusieurs fois des difficultés élémentaires pour " enchaîner " avec la " suite " comme on dit.

Le cours du professeur apparaît comme un ensemble de leçons, chaque leçon pouvant s'identifier à un sous-ensemble de A (T,E) ; l'ensemble des leçons sera donc un sous-ensemble de l'ensemble des parties de A (T,E).

DEFINITIONS

I°) On appelle base tout sous-ensemble de codimension 1 d'une leçon.

2°) Nous disons que deux leçons sont consécutives si elles ont une base en commun.

3°) Nous appellerons chemin de longueur n une suite ($\ell_o, \ell_1, \ldots\ldots \ell_n$) de n + 1 leçons telles que $\forall i_i = o, I, 2, \ldots n-I$ les leçons ℓ_i et ℓ_{i+I} soient consécutives - ℓ_o et ℓ_n sont alors appelées les extrêmités du chemin.

4°) Un chemin sera dit injectif si $\ell_i \neq \ell_{i+I}$ pour tout i = o,I,...n-I si ce chemin est ($\ell_o, \ell_1, \ldots \ell_n$), et minimal s'il n'existe pas d'autre chemin de mêmes extrêmités et de longueur inférieure.

5°) On appellera Cours pour enseigner la théorie T, le couple $[A (T,E), \mathcal{L}]$ où $\mathcal{L}$ est une partie de $\mathcal{P}(A (T,E))$ et constitue l'ensemble des leçons et tel que :

a) Tout élément de A(T,E) est dans une leçon au moins ;
b) Etant données 2leçons de $\mathcal{L}$, il existe un chemin ayant pour extrêmité ces deux leçons.

6°) Un morphisme du cours $[A (T,E), \mathcal{L}]$ dans le cours $[A'(T',E'), \mathcal{L}']$ est une application $\varphi : A (T,E) \longrightarrow A' (T',E')$ telle que $\forall \ell \in \mathcal{L}$, $\varphi(\ell) \in \mathcal{L}$ et la restriction de φ à ℓ est une bijection de ℓ sur $\varphi(\ell)$.

On définit de manière évidente les endomorphismes et automorphismes d'un cours, lesquels peuvent s'interpréter comme des " remaniements " du cours.

7°) Un cours primaire est un cours tel que toute base est contenue dans exactement deux leçons.

8°) Nous appellerons " révision " tout endomorphisme p d'un cours primaire tel que $p^2 = p$ et tel que toute leçon soit l'image par p de 0 ou 2 leçons consécutives.

I. RESULTATS GENERAUX SUR LES COURS

Proposition I

> Soit b une base commune à 2 leçons consécutives ℓ et ℓ' d'un cours.
> Alors : - ou bien $\ell = \ell'$
> - ou bien $b = \ell \cap \ell'$

Démonstration

On a $b \subset \ell$ avec card (ℓ) - card (b) = 1 ; donc il existe $x \in \ell$, $x \notin b$ tel que $\ell = b \cup \{x\}$. De même, il existe $x' \in \ell'$, $x' \notin b$ tel que $\ell' = b \cup \{x'\}$; donc ou bien $x = x'$ et alors $\ell = \ell'$ ou bien $x \neq x'$ et alors $b = \ell \cap \ell'$

C.Q.F.D.

Proposition 2

> Dans un cours toutes les leçons ont le même nombre de difficultés élémentaires.

Démonstration.

Soient ℓ et ℓ' deux leçons d'un cours A (T,E), et montrons que card (ℓ) = card (ℓ'). Si $\ell = \ell'$ c'est évident ; sinon il existe un chemin $\gamma = (\ell_o = \ell, \ell_1, \ldots\ldots, \ell_n = \ell')$ qu'on peut toujours prendre injectif. Pour tout indice i = 0,1, ... , n-1 , les leçons consécutives distinctes ℓ_i et ℓ_{i+1} ont la base $b_i = \ell_i \cap \ell_{i+1}$; reprenant la démonstration de la proposition 1 ; il existe $x_i \in \ell_i - b_i$ et il existe $y_i \in \ell_{i+1} - b_i$ tels que $\ell_i = b_i \cup \{x_i\}$, $\ell_{i+1} = b_i \cup \{y_i\}$

Donc card (ℓ_i) = card $(b_i) + 1$ = card (ℓ_{i+1})

C.Q.F.D.

Corollaire $\left\{\begin{array}{l}\text{Toutes les bases des leçons d'un cours ont le même nombre}\\ \text{de difficultés élémentaires}\end{array}\right.$

(évident)

On pourra donc parler de base sans référence à une leçon particulière

Proposition 3 | Les morphismes d'un cours transforment une base en une base |

Démonstration

Cela résulte du fait que la restriction d'un morphisme φ à une leçon ℓ est une bijection de ℓ sur $\varphi(\ell)$ et donc si b est une base de ℓ,
$\text{card}\left(\varphi(b)\right) = \text{card}(b) = \text{card}(\ell) - 1 = \text{card}\left(\varphi(\ell)\right) - 1$

C.Q.F.D.

Remarque

On peut constater que l'on a défini une nouvelle catégorie dont les objets sont les cours et dont les morphismes sont les morphismes du cours.

Proposition 4

| Soit $[A(T,E), \mathcal{L}]$ un cours ; pour $\ell, \ell' \in \mathcal{L}$ on pose $d(\ell, \ell') = 0$ si $\ell = \ell'$ et, si $\ell \neq \ell'$ $d(\ell, \ell')$ = longueur du chemin minimal d'extrêmités ℓ et ℓ' ; alors d est une distance sur l'ensemble $\mathcal{L}$ des leçons du cours. |

Démonstration

On a de manière évidente une application d de $\mathcal{L} \times \mathcal{L}$ dans $\mathbb{R}^*$ telle que $d(\ell, \ell') = 0 \Longleftrightarrow \ell = \ell'$ et telle que $d(\ell', \ell) = d(\ell, \ell')$.

Cela étant, soient 3 leçons ℓ, ℓ' et ℓ'' ; en remarquant que :
si $(\ell = \ell_o, \ell_1 \ldots\ldots \ell_n = \ell')$ est un chemin minimal d'extrêmités ℓ et ℓ' et si $(\ell' = \ell_n, \ell_{n+1} ; \ldots\ldots \ell_{n+p} = \ell'')$ est un chemin minimal d'extrêmités ℓ' et ℓ'' $[(\ell = \ell_o, \ell_1 \ldots \ell_m, \ell_{n+1}, \ldots \ell_{n+p})$ est un chemin d'extrêmités ℓ et $\ell'']$

on en déduit que $d(\ell, \ell'') \leqslant d(\ell, \ell') + d(\ell', \ell'')$

II. QUELQUES TYPES DE COURS FINIS

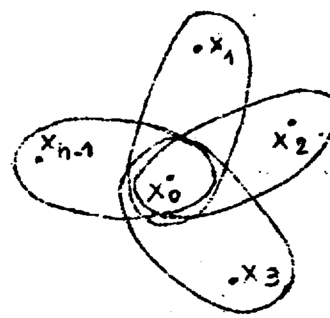
Si card $\left(A\ (T,E) \right)$ = n et card ℓ = k pour $\ell \in \mathcal{L}$ on dira que le cours $\left[A\ (T,E), \mathcal{L} \right]$ est de type (n,k) ; on a nécessairement k $\geqslant$ 2 sinon les leçons n'auraient pas de bases.

I° Cours de type (n,2) étoilé

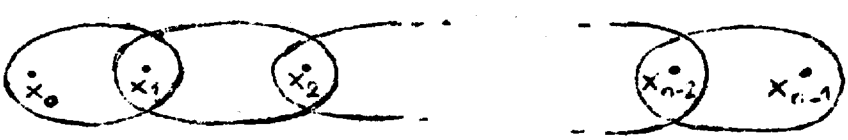
Les bases se réduisent à une seule difficulté élémentaire.

Le cas étoilé est le cas où toutes les leçons ont la même base commune. En particulier ce n'est pas un cours primaire (sauf si n = 2 !)

Deux leçons sont dans ce cas toujours consécutives. Il y a n - 1 leçons. C'est le cas d'un cours qui exploitant une " difficulté " théorique donnée x_o, associée à un modèle mathématique, l'applique à des cas particuliers x_1, x_2 ..., x_{n-1} .



2° Cours du type (n,2) - linéaire



$$\text{Si } A\ (T,E) = \left\{ x_o , x_1 , x_2 \dots , x_{n-1} \right\}$$

on prend $\ell_o = \left\{ x_o , x_1 \right\}$, $\ell_1 = \left\{ x_1 , x_2 \right\}$.., $\ell_k = \left\{ x_k , x_{k+1} \right\}$

.... $\ell_{n-2} = \left\{ x_{n-2} , x_{n-1} \right\}$ et $\mathcal{L} = \left\{ \ell_o , \ell_1 \dots\dots \ell_{n-2} \right\}$

Le cours $\left[A\ (T,E), \mathcal{L} \right]$ de type (n,2) linéaire est un modèle pour un cours programmé en leçons enchaînant chaque difficulté à la suivante.

3° Cours primaire standard de type (n ,2)

C'est le cas qui peut se présenter lorsque partant d'un problème x_o, il faut résoudre un certain nombre de difficultés élémentaires, chacune impliquant la suivante, jusqu'à ce que la réponse à x_{n-1} fournisse la solution à x_o

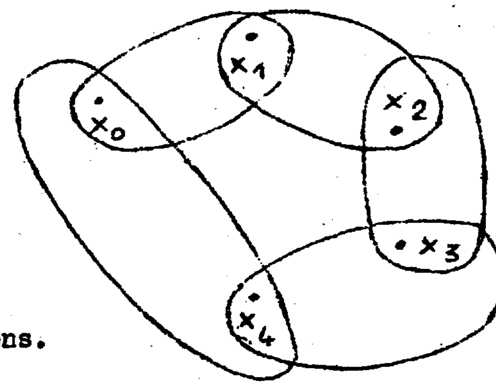
Soit $A\ (T,E) = \{x_o \ldots\ldots x_{n-1}\}$

on pose $\ell_o = \{x_o , x_1\}$

$\ell_1 = \{x_1 , x_2\}$

$\vdots$

$\ell_{n-1} = \{x_{n-1} , x_o\}$



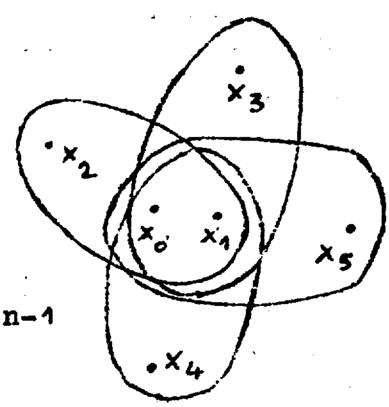
Chaque base est dans exactement deux leçons.
Il y a n leçons. On a un cours primaire.

4° Cours de type (n,3) étoilé

Les bases pour les cours de type (n,3) ont 2 éléments ; le type étoilé est le type où toutes les leçons ont une même base commune.

Si x_o et x_1 sont les éléments de cette base commune, les leçons sont les

$$\ell_i = \{x_o, x_1 , x_i\} \qquad 2 \leqslant i \leqslant n-1$$



Le cours comprend n-2 leçons

Il est évident que plus k est grand, plus le nombre de cas non isomorphes de cours de type (n,k) va se compliquer et est très vite non représentable par un dessin. Il faut donc se donner une représentation maniable et exploitable d'un cours de type (n,k) de genre donné.

Le cours est caractérisé par la donnée de la suite $({}^t i_1 , i_2 \ldots i_k)$ $(1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots\ldots < i_k \leqslant n)$, défini de la manière suivante :

Soit $\{x_{p1} , x_{p2} \ldots\ldots x_{pk}\}$ une partie à k éléments de A (T,E) indexée de telle sorte que $p_1 < p_2 < \ldots\ldots < p_k$; alors

$$t_{i_1 , i_2 ,\ldots, i_k} \begin{cases} = 1 \iff \{x_{i_1} , x_{i_2} , \ldots , x_{i_k}\} \text{ est une leçon .} \\ = 0 \quad \text{sinon} \end{cases}$$

Cette suite est donc la suite (pour une indexation choisie sur A (T,E)) des images de la fonction caractéristique de $\mathcal{L}$ dans l'ensemble des parties à k éléments de A (T,E) et représente donc le cours A (T,E)

III. ETUDES DES COURS PRIMAIRES

Proposition 5

> Soit f un endomorphisme d'un cours primaire $[A(T,E), \mathcal{L}]$ laissant fixes toutes les difficultés élémentaires d'une leçon $\ell_o \in \mathcal{L}$ donnée.
>
> Alors pour tout chemin $(\ell_o, \ell_1 \ldots\ldots \ell_n)$ dont une extrêmité est ℓ_o, deux cas seulement sont possibles :
>
> (i) le chemin $(\ell_o, f(\ell_1), f(\ell_2) \ldots, f(\ell_x))$ n'est pas injectif.
>
> (ii) $f(x) = x \quad \forall x \in \ell_o \cup \ell_1 \cup \ldots \cup \ell_n$

Démonstration

Il suffit de montrer que si (i) n'a pas lieu, alors (ii) est nécessairement vérifié. Raisonnons par récurrence sur la longueur n du chemin.

* L'assertionest vraie pour $n = 0$; (ℓ_o) est bien un chemin injectif et $\forall x \in \ell_o$ on a bien $f(x) = x$ par hypothèse.

* Supposons l'assertion vraie pour n = k et soit un chemin
$\gamma = (\ell_o, \ell_1 \ldots \ell_k, \ell_{k+1})$ et soit γ' = l'image par f de γ:

$$\gamma' = (\ell_o, f(\ell_1) \ldots\ldots\ldots\ldots f(\ell_k), f(\ell_{k+1})).$$

Supposons γ' injectif ((i) non vérifié). A fortiori $\gamma'_o = (\ell_o, f(\ell_1) \ldots f(\ell_k))$ est injectif, et d'après l'hypothèse d'induction alors c'est que $f(x) = x \quad \forall x \in \ell_0 \cup \ell_1 \cup \dots \cup \ell_k$

ℓ_k et ℓ_{k+1} étant deux leçons consécutives, si b est la base commune à ces 2 leçons, il existe $a \in \ell_k$, $a \notin b$ et $a' \in \ell_{k+1}$, $a' \notin b$ $a \neq a'$ tels que $\ell_k = b \cup \{a\}$, $\ell_{k+1} = b \cup \{a'\}$.

Comme $b \subset \ell_k$, $f(x) = x$, $\forall x \in b$; donc $f(a') \notin b$ sinon on aurait $f(\ell_{k+1}) = f(b) = b$, alors que $f(\ell_{k+1})$ est une leçon et non une base.

Mais $f(\ell_{k+1}) = f(b \cup \{a'\}) = f(b) \cup \{f(a')\} = b \cup \{f(a')\}$ si l'on avait $f(a') \neq a'$ on aurait $\ell_k = f(\ell_k)$, ℓ_{k+1} et $f(\ell_{k+1})$ trois leçons distinctes qui contiendraient en commun la base b, contrairement au fait que l'on a un cours primaire ; donc $f(a') = a'$; par suite $f(x) = x$ $\forall x \in \ell_{k+1}$ donc finalement $\forall x \in \ell_0 \cup \ell_1 \cup \dots \cup \ell_k \cup \ell_{k+1}$.

C.D.F.D.

Corollaire

> Soit f un automorphisme d'un cours primaire laissant fixes toutes les difficultés élémentaires d'une leçon donnée, alors f est l'identité.

En effet, soit $[A(T,E), \mathcal{L}]$ le cours primaire, $\ell_0 \in \mathcal{L}$ telle que $f(x) = x \quad \forall x \in \ell_0$ et soit $y \in A(T,E)$; il existe une leçon ℓ telle que $y \in \ell$, et il existe un chemin $(\ell_0, \ell_1, \ell_2 \dots \ell_n = \ell)$ d'extrêmités ℓ_0 et ℓ (par définition même des cours), qu'on peut toujours prendre injectif ; f étant une bijection sur $A(T,E)$, $(\ell_0, f(\ell_1) \dots f(\ell))$ est donc injectif, et par suite, d'après la proposition 5 nous sommes successivement dans l'éventualité (ii), donc en particulier

$$f(y) = y$$

C.Q.F.D.

Proposition 6

Soit $[A\ (T,E), \mathcal{L}]$ un cours primaire, p une révision de ce cours et ℓ_o une leçon telle que $p(\ell_o) = \ell_o$. Alors

(i) $p(x) = x, \quad \forall x \in \ell_o$

(ii) Pour toute leçon ℓ consécutive de ℓ_o on a $p(\ell) = \ell_o$ ou $p(\ell) = \ell$

(i) p étant un endomorphisme de cours, sa restriction p/ℓ_o à ℓ_o est une bijection de ℓ_o sur $p(\ell_o) = \ell_o$; donc $(p/\ell_o)^{-1}$ est aussi une bijection de ℓ_o sur ℓ_o. Comme $p^2 = p$ on a en particulier $(p/\ell_o)^2 = (p/\ell_o)$ donc $(p/\ell_o)^2 \cdot (p/\ell_o)^{-1}$ = Identité sur ℓ_o

donc $p(x) = x, \quad \forall x \in \ell_o$.

(ii) ℓ_o et ℓ étant consécutives, considérons le chemin (ℓ_o, ℓ) nous sommes dans les hypothèses de la proposition 5 ; donc ou bien $(\ell_o, p(\ell))$ n'est pas injective et donc $p(\ell) = \ell_o$ ou bien $p(x) = x, \ \forall x \in \ell_o \cup \ell$ donc en particulier $p(\ell) = \ell$.

C.Q.F.D.

Proposition 7

Soit $[A\ (T,E), \mathcal{L}]$ un cours primaire, p une révision, ℓ_o une leçon telle que $p(\ell_o) = \ell_o$

Pour tout chemin $(\ell_o, \ell_1, \dots, \ell_n)$ dont une extrêmité est ℓ_o, deux cas seulement sont possibles :

(i) $p(\ell_i) = \ell_i \qquad i = 0, 1, 2, \dots, n$

(ii) Le chemin $(\ell_o, p(\ell_1), \dots p(\ell_n))$ contient deux leçons consécutives égales.

Démonstration

Supposons que (i) ne soit pas vérifié ; il existe donc un indice k tel que $p(\ell_i) = \ell_i$ pour $0 \leq i < k$ et tel que $p(\ell_k) \neq \ell_k$; comme $p(\ell_{k-1}) = \ell_{k-1}$, la proposition 6 nous permet d'affirmer que

$$p(\ell_k) = \ell_{k-1} = p(\ell_{k-1})$$

donc le chemin $(\ell_o, p(\ell_1) .. p(\ell_{k-1}), p(\ell_k) ..... p(\ell_n))$ n'est pas injectif.

Corollaire $\left\{ \right.$ Tout chemin minimal d'un cours primaire, dont les extrêmités sont invariantes par la révision p, est invariant par p

Démonstration

Soit $\gamma = (\ell_o, \ell_1, ..., \ell = \ell_n)$ un chemin minimal de longueur n tel que $p(\ell_o) = \ell_o$ et $p(\ell) = \ell$, appliquons la proposition 7 : l'éventualité (ii) ne peut avoir lieu car le chemin

$$(\ell_o, p(\ell_1), ..., p(\ell_n) = \ell = \ell_n)$$

de longueur n ne serait pas minimal. C'est donc (i) qui est vérifié.

C.Q.F.D.

Proposition 8

Soit $[A(T,E), \mathcal{L}]$ un cours primaire, ℓ_1 et ℓ_2 deux leçons consécutives distinctes, p et p' deux révisions telles que $p'(\ell_1) = \ell_2$ et $p(\ell_2) = \ell_1$

Pour toute leçon ℓ du cours les trois conditions suivantes sont équivalentes :

(1) $p(\ell) = \ell$

(2) $d(\ell, \ell_1) < d(\ell, \ell_2)$

(3) $p'(\ell) \neq \ell$

Démonstration

$(1) \Longrightarrow (2)$

Considérons un chemin minimal d'extrêmités ℓ et ℓ_2 $(\ell = \ell'_0, \ell'_1, \ldots, \ell'_n = \ell_2)$; on a $d(\ell, \ell_2) = n$ avec $p(\ell_2) \neq \ell_2$ puisque $p(\ell_2) = \ell_1$; la proposition 7 nous permet d'affirmer que le chemin $(\ell = p(\ell), p(\ell'_1), \ldots, p(\ell_2) = \ell_1)$ qui est de longueur n n'est pas minimal ; donc :

$$d(\ell, \ell_1) < d(\ell, \ell_2)$$

$(2) \Longrightarrow (3)$

Soit $d(\ell, \ell_1) < d(\ell, \ell_2)$ et considérons un chemin minimal $(\ell, \ell''_1 \ldots \ell''_m = \ell_1)$ d'extrêmités ℓ et ℓ_1, de longueur m ;

On a donc $d(\ell, \ell_2) > m$; si on avait $p'(\ell) = \ell$, comme $p'(\ell_1) \neq \ell_1$ le chemin de longueur m : $(p'(\ell) = \ell, p'(\ell''_1) \ldots p'(\ell_1) = \ell_2)$ ne serait pas minimal et donc on aurait $d(\ell, \ell_2) < m$, d'où contradiction ; on a bien $p'(\ell) \neq \ell$.

$(3) \Longrightarrow (1)$

Soit $\ell \in \mathcal{L}$ telle que $p'(\ell) \neq \ell$, et posons $\ell' = p'(\ell)$; donc ℓ et ℓ' sont consécutives distinctes, et on a

$$p'(\ell) = \ell', \quad p'(\ell') = \ell'.$$

a) On a $p(\ell') \neq \ell'$: si on avait $p(\ell') = \ell'$, comme $(1) \Longrightarrow (3)$ on aurait $p'(\ell') \neq \ell'$ ce qui est faux.

b) On a $p(\ell) \neq \ell'$: si en effet on avait $p(\ell) = \ell'$, on en déduirait

$$p(\ell') = p^2(\ell) = p(\ell) = \ell'$$

contrairement à (a).

c) On a $p'p(\ell) \neq p(\ell)$; en effet $pp(\ell) = p(\ell)$ et comme $(1) \Longrightarrow (3)$ il en résulte que

$$p'p(\ell) \neq p(\ell)$$

d) $d(\ell', p(\ell)) \leqslant 2$

En effet, supposons ℓ', $p(\ell)$ non consécutives ; comme ℓ' et $p(\ell')$ sont consécutives et que $p(\ell')$ et $p(\ell)$ sont consécutives , alors $(\ell', p(\ell'), p(\ell))$ d'extrêmités ℓ' et $p(\ell)$ est un chemin minimal ; comme $p'(\ell') = \ell'$ et $p'p(\ell) \neq p(\ell)$, la proposition 7 nous permet d'affirmer que le chemin $(\ell', p'p(\ell'), p'p(\ell))$ a 2 leçons consécutives égales.

Or, $p'p(\ell') \neq p'p(\ell)$ car sinon on aurait ou bien $p(\ell') = p(\ell)$ et alors $(\ell', p(\ell'), p(\ell))$ n'aurait pas été minimal ou bien $p(\ell') = p(\ell) = p'p(\ell)$ mais alors $(\ell', p(\ell'), p(\ell))$ aurait ses extrêmités invariantes par p' donc serait invariante d'après le corollaire de la proposition 7, et on aurait donc alors $p'p(\ell') = p(\ell')$ ce qui est impossible car en vertu de $(1) \Longrightarrow (3)$ on avait $p'p(\ell') \neq p(\ell')$.

Comme $(\ell', p'p(\ell'), p'p(\ell))$ doit avoir 2 leçons consécutives égales, c'est donc nécessairement que $p'p(\ell') = \ell'$; or les deux seules leçons dont ℓ' est l'image par p' sont ℓ et ℓ' ; donc $p(\ell') = \ell$ ou $p(\ell') = \ell'$; or $p(\ell') = \ell'$ d'après (a) ; donc $p(\ell') = \ell$ donc $p(\ell) = pp(\ell') = p(\ell') = \ell$. Dans tous les cas,

si $p'(\ell) \neq \ell$ on a montré que $p(\ell) = \ell$

C.Q.F.D.

CONCLUSION

Un modèle un peu plus sophistiqué peut être mis au point en se donnant, pour un cours $[A(T,E), \mathcal{L}]$ donné une application φ de $A(T,E)$ dans un ensemble S qu'on pourrait appeler barème, telle que pour toute leçon ℓ , la restriction de φ à ℓ soit une bijection de ℓ sur S, qui, à chaque difficulté élémentaire, associerait un nombre qui serait un " degré " de difficulté ; cela supposerait alors que les difficultés soient toutes différentes, par exemple strictement croissantes pour un ordre donné.

Pour un sous-ensemble $\mathcal{U}$ de ℓ, $\varphi(\mathcal{U})$ serait appelé le type de difficulté de $\mathcal{U}$.

On a alors le résultat suivant que j'ai démontré et que le lecteur pourra essayer de retrouver :

> Soit $[A(T,E), \mathcal{L}]$ un cours associé à un barème S par une application φ , soit f un endomorphisme du cours et ℓ une leçon telle que $\forall x \in \ell$, x et f (x) aient le même degré de difficulté.
>
> Alors $\forall x \in A(T,E)$, x et f (x) ont le même degré de difficulté.

A VOTRE SERVICE
LA BIBLIOTHEQUE DE L'I.R.E.M.

Les ouvrages peuvent être retirés au Secrétariat de l'I.R.E.M. (une fiche à remplir - durée du prêt : 1 mois).

J. BREUER - Initiation à la théorie des ensembles
Dunod

PAPY - Les groupes
Dunod

E. DUPONT - Apprentissage mathématique
Tome 1 - Sudel

R. SMETS et P. COTTIN - Approche mathématique
Ligel

Z.P. DIENES - Relations
O.C.D.L.

Z.P. DIENES et E.W. GOLDING - La géométrie par les transformations
Tome I - O.C.D.L.

Z.P. DIENES et E.W. GOLDING - La géométrie par les transformations
Tome 2 - O.C.D.L.

Z.P. DIENES et E.W. GOLDING - La géométrie par les transformations
Tome 3 - O.C.D.L.

B.V. GNEDENKO et A. LA KHINTCHINE - Introduction à la théorie des probabilités
Dunod

G. CALOT - Cours de statistique descriptive
Dunod

Z.P. DIENES et M.A. JEEVES - Pensée et structure
O.C.D.L.

Z.P. DIENES - Comprendre la mathématique
O.C.D.L.

M. GLAYMANN et P. JANDOT - Apprentissage du calcul numérique
O.C.D.L.

UNESCO - Tendances nouvelles de l'enseignement des mathématiques 66

H. STEINHAUS - Mathématiques en instantanés
Flammarion

P. DEDRON et J. ITARD - Mathématiques et mathématiciens
Magnard

A. SAINTE LAGUE - Avec des nombres et des lignes
Vuibert

LEWIS CARROLL - Logique sans peine
Hermann

N. BOURBAKI - Eléments d'histoire des mathématiques
Hermann

Z.P. DIENES - Opérateurs multiplicatifs
O.C.D.L.

R. POLLE - Notions de mathématique moderne
Delagrave

M. BARBUT - Mathématique des Sciences Humaines
Tome 1 - P.U.F.

I. ADLER - Initiation à la mathématique d'aujourd'hui
O.C.D.L.

P.S. ALEXANDROFF - Introduction à la théorie des groupes
Dunod

P. ROSENTIEHL et J. MOTHES - Mathématiques de l'action
Série A 2 - Dunod

J.G. KEMENY, J.L. SNELL et G.L. THOMSON - Algèbre moderne et activités humaines
Dunod

M. DUMONT - Algèbre - Classe de 5e et de 4e
Fascicule 1 - Dunod

P. BARTHIER et autres - Les mathématiques en terminale D
Colin - 2ème édition - Géométrie et Cinématique

P. LOUQUET et autres - Les mathématiques en terminale D
Probabilités - 2ème édition - Colin

E. RICHE - Mathématiques 6e
Hatier

E. RICHE - Mathématiques 5e
Hatier

L. FELIX et A. DONEDDU - L'enseignement de la mathématique - 3 - Terminale C.T. Dunod

Réunion de Professeurs - Analyse cinématique, calculs numériques - Terminale C.D.T. - Ligel

A. DONEDDU - L'enseignement de la mathématique - 1 terminale C.T.
Dunod

L. FELIX - L'enseignement de la mathématique - 2 terminale C.T.
Dunod

M. MONGE et J.Y. HEE - Algèbre 2e A.C.T.
Belin

M. BELLAICHE et J. DE BIASI - L'enseignement de la mathématique - 1e C.T.
Dunod 1

M. MONGE et autres - Guide pédagogique - 6e
Belin

M. MONGE et autres - Corrigé des exercices 6e
Belin

M. BELLAICHE et J. DE BIASI - L'enseignement de la mathématique - 1e C.
Dunod 2

L. BOUR et autres - Cours de mathématiques
Tome 1 - Colin - Exercices et corrigés

L. BOUR et autres - Cours de mathématiques
Tome 1 - Colin

V. LESPINARD - Mathématique - 6e
A. Desvigne

V. LESPINARD - Algèbre - 2e C.T.A.
A. Desvigne

P. DROUZI et autres - Mathématique - 2e
Ligel

M. BOISSONADE et A.M. HALBIQUE - Statistiques et probabilités
Ligel

E. RICHE - Mathématique - 2e
Hatier

Réunion de Professeurs - Mathématique - 4e
Ligel

Réunion de Professeurs - Algèbre, arithmétique - Terminale C.D.T.
Ligel

Réunion de Professeurs - Mathématique - 3e
Ligel

M. MONGE et autres - Mathématique - 6e
Belin

L. GOYENEIX et autres - Mathématiques en 1ère B Tn
Colin

L. GOYENEIX et autres - Mathématiques en 1ère B Tn E 1
Colin

L. et F. GOYENEIX et autres - Mathématiques en 1ère B Tn E 2
Colin

E. GALION - Mathématiques - 6e
O.C.D.L. - Hatier

E. GALION - Mathématique - 5e
O.C.D.L. - Hatier

Réunion de Professeurs - Algèbre et trigonométrie cinématique - 1e C.T.
Ligel

Réunion de Professeurs - Géométrie
Ligel

R. SMETS et J. COAT - Mathématique pour aujourd'hui - 6e
Ligel

V. LESPINARD - Géométrie - 2e C
Desvigne

Réunion de Professeurs - Mathématiques - 5e
Ligel

Réunion de Professeurs - Géométrie - Terminale C - Complément

Réunion de Professeurs - Géométrie - 1e C.T.
Ligel

A. COMBES et M. SAADA - Probabilités et statistiques - (Exercices et problèmes de) 1e terminales
Vuibert

A. COMBES - Exercices et problèmes de mathématiques - 2e
Tome 1 - Vuibert

A. COMBES - Exercices et problèmes de mathématiques - Terminale D
Vuibert

A. COMBES - Exercices et problèmes de mathématiques - 2e
Tome 2 - Vuibert

M. CLAVIER - Mathématiques - 5e
Vuibert

Collection A. Fouché - Mathématiques - 1e B
Tome 2 - Vuibert

G. THOVERT - Trigonométrie - 1e A'.C.M.M'.
Vuibert

Collection A. FOUCHE - Mathématiques - 2e A"
Vuibert

H. MAZET et G. THOVERT - Mathématiques - 3e A"
Vuibert

M. CLAVIER - Mathématiques - 4e
Vuibert

A. COMBES - Exercices et problèmes de mathématiques - le
Tome 2 - Vuibert

A. COMBES - Exercices et problèmes de mathématiques - le
Tome 1 - Vuibert

Collection A. Fouché - Mathématiques - le B.D.
Tome 1 - Vuibert

P. MARTIN - Application de l'algèbre et de l'analyse à la géométrie
A. Colin

Cours de mathématiques supérieures - Complément du Tome 3 -
Algèbre de Boole Masson et Cie - P. THUILLIER

N. BOURBAKI - Elements d'histoire des mathématiques -
2e édition - Hermann

S. BRAY et M. CLAUSARD - Les jeux de Nathalie et de Frédéric
O.C.D.L.

S. BRAY et M. CLAUSARD - Les jeux de Jean et d'Isabelle
O.C.D.L.

C. CATTEGNO et autres - L'enseignement des mathématiques -
Tome 2 - Delachaux et Niestlé

O. ZARISKI et P. SAMUEL - Commutative Algebra
Vol. 1 - D. Van Nostrand

J. DIEUDONNE - Eléments d'analyse
Tome 1 - Gauthiers-Villars

J. DIEUDONNE - Eléments d'analyse
Tome 2 - Gauthiers-Villars

M. HAGEGE - Initiation à la statistique
O.C.D.L.

S. LANG - Algebra
Addison-Wesley Publishing Cie

R. WATTIAUX et autres - Mathématique - 4e
Cours Bredif - Hachette

R. WATTIAUX et autres - Mathématique - 4e
Bredif - Complémentaire - Hachette

G. GIRARD et A. LENTIN - Terminale C
Tome 2 : Arithmétique - Algèbre - Notion d'analyse
Hachette

G. GIRARD et A. LENTIN - Géométrie mécanique - Terminale C
Hachette

BREDIF - Livre de 6e
R. WATTIAUX et autres
Hachette

R. WATTIAUX et autres - Bredif 4e
Hachette

Bredifiches 6e
Hachette
J. BENHADJ-LEROY et autres

G. GIRARD et C. THIERCE - Aleph$_0$/Géométrie III - Géométrie métrique - 2e A.C.T.
Hachette

C. GAUTHIER et autres - Aleph$_0$/Algèbre II - Fonctions et équations numériques 2e A.C.T.
Hachette

C. GAUTHIER et autres - Aleph$_0$/Algèbre I - Ensembles, applications, nombres réels - 2e A.C.T.
Hachette

G. GIRARD et autres - Aleph$_0$/Géométrie IV - Géométrie dans l'espace et géométrie descriptive - 2e T
Hachette

Bredif Maître - 6e
Hachette

R. WATTIAUX et autres - Bredif 3e
Hachette

R. WATTIAUX et autres - Cours Bredif - Livret complémentaire 3e
Hachette

Gerhard SCHROTER - Transformation des égalités
Colin

R. A. CARMAN - Les vecteurs
Colin

R. BEC et autres - Les mathématiques en Terminale D
2e édition - Analyse - Colin

A. TARSKY - Introduction à la logique
Série A 16 - Gauthier-Villars

G. CHOQUET - L'enseignement de la géométrie
Hermann

E. ARTIN - Algèbre géométrique
Fascicule 18 - Gauthier-Villars

J. DIEUDONNE - Algèbre linéaire et géométrie élémentaire
3e édition - Hermann

L. FELIX - Mathématiques modernes - Enseignement élémentaire
Blanchard

Mathématiques modernes - Guide pour enseignants
O.C.D.E.

A. CALAME - Mathématiques modernes
Tome 1 - Dunod

A. CALAME - Mathématiques modernes
Tome 2 et 3 - Dunod

G. POLYA - La découverte des mathématiques
Tome 1 - Dunod

G. CATTEGNO et autres - L'enseignement des mathématiques
Tome 1 - Delachaux et Niestlé

A. WITTENBERG et autres - Redécouvrir les mathématiques
Delachaux et Niestlé

M. DUMONT - Etude intuitive des ensembles - 6e
Dunod

PAPY - Initiation aux espaces vectoriels
Gauthier-Villars

P. LIBOIS - Espaces affins et espaces projectifs
Dunod

G. POLYA - La découverte des mathématiques
Tome 2 - Dunod

G.J. TEE et K.L. SEWARD, L.A. LYNSTERNIK et autres - Handbook for computing elementary functions
Perganon Press

J. DIEUDONNE - Calcul infinitésimal
Hermann

J.L. LIONS - Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles
Dunod et Gauthier-Villars

FREDERIQUE et PAPY - L'enfant et les graphes
Didier

Livre du Maître - 5e
Hachette

Fiches expérimentales - 5e
Hachette

A. LICHNEROWICZ - Algèbre et analyse linéaires
Masson

Z.P. DIENES - Fractions
O.C.D.L.

A. LENTIN et J. RIVAUX - Leçons d'algèbre moderne
Vuibert

Exercices logiques

E. LUCAS - Récréations mathématiques
Tomes 1, 2, 3, 4 - Blanchard

T.J. FLETCHER - L'apprentissage de la mathématique aujourd'hui
O.C.D.L.

Z.P. DIENES et E.W. GOLDING - Les premiers pas en mathématique : Logique et jeux logiques
O.C.D.L.

Z.P. DIENES et E.W. GOLDING - Les premiers pas en mathématiques : Ensembles, nombres et puissances
O.C.D.L.

Z.P. DIENES et E.W. GOLDING - Les premiers pas en mathématique : Exploration de l'espace et Pratique de la mesure
O.C.D.L.

Z.P. DIENES - La mathématique moderne dans l'enseignement primaire
O.C.D.L.

PAPY - Mathématique moderne
Tomes 1, 2, 3, 5, 6 - Didier

REVUZ - Mathématique moderne - Mathématique vivante
O.C.D.L.

GROSS-LENTIN - Notions sur les grammaires formelles
Gauthier-Villars

BERGE - Principes de combinatoire
Dunod

A. KAUFMANN et C. CULLMANN - Mathématiques nouvelles pour le recyclage des parents
Dunod

A. KAUFMANN - Des points et des flèches - La théorie des graphes
Dunod

J. LELONG-FERRAND - Les notions de mathématique de base dans l'enseignement du second degré
Colin

B.A. TRAHTENBOT - Algorithmes et machines à calculer
Dunod

R. GODEMENT - Cours d'algèbre
Hermann

D. PONASSE - Logique mathématique
O.C.D.L.

A. MONJALLON - Introduction aux mathématiques modernes
Vuibert

A. DONEDDU - Géométrie euclidienne plane
Dunod

R.V. ANDREE - Introduction à l'algèbre
Gauthier-Villars

S. BERMAN et R. BEZARD - Mathématiques pour papa
Chiron

M. RICHARDSON - Eléments de mathématiques modernes
Dunod

J. DIEUDONNE - Fondements de l'analyse moderne
1 fascicule 18 - Gauthier-Villars

M. BARBUT - Mathématiques des sciences humaines - Nombres et mesures

Combinatoire et Algèbre

J. PIAGET - La psychologie de l'intelligence

POLLE et CLOPEAU - Mathématique en 5e

POLLE et CLOPEAU - Fiches mathématiques

C. BREARD - Test d'acquisition "l'école" - 5e

G. BAL et autres - Activités mathématiques - 6e

G. BAL et autres - Activités mathématiques - 5e

CAGNAC RAMIS - Tomes 1, 2, 3, 4

RAMIS - Exercice - Analyse

RAMIS - Exercice - Géométrie

L. SCHWARTZ - Cours d'analyse
Tomes 1, 2

M. ZAMANSKY - Introduction à l'algèbre et l'analyse moderne
Tome 1

E. MENDELSON - Introduction to mathematical logic

J. BASS - Eléments de calcul de probabilités

G. CHOQUET - Cours d'analyse
Tome 2

J. BASS - Cours de mathématique
Tomes 1, 2

L. CHAMBADAL et J.L. OVAERT - Cours de mathématiques
LELONG - Cours d'analyse
LELONG - Cours d'analyse
Tome 3

S. KARLIN - Initiation aux processus aléatoires

S. GUIASU et R. THEODORESCU - La théorie mathématique de l'information

JAMES C. COLEMAN - Psychology and effective behavoir

J.L. KRIVINE - Théorie axiomatique des ensembles

G.E. HOERNES et M.F. HEILWEIL - Introduction à l'algèbre de Boole et aux dispositifs logiques

J.C. QUINIOU et J.M. FONT - Les cerveaux non humains

Michel QUEYSANNE - Algèbre M.P. et spéciales A.A'

PAPY - Mathématique moderne 2

PAPY - Mathématique moderne 1

B.A. TRAHTENBROT - Algorithmes et machines à calculer

S. MAC LANE et G. BIRKHOFF - Algèbre, structures fondamentales

A. KAUFMANN et R. FAURE - Invitation à la recherche opérationnelle

J. DIEUDONNE - Algèbre linéaire et géométrie élémentaire

PAPY - Le premier enseignement de l'analyse

G. LEFORT - Exercices d'algèbre et d'analyse

P. DUBREIL et M.L. DUBREIL JACOTIN - Leçons d'algèbre moderne

Cours de mathématiques du premier cycle
Gauthier-Villars

M. DEBRAY et M. GOURION - Mathématique
I.C.D.E.

G. KERAMSI et M. QUEYSANNE - Mathématique

F. RIESZ et B.SZ. NAGY - Leçons d'analyse fonctionnelle

PAPY - Mathématique moderne - 5e

R. BOURGNE et J.P. AZRA - Ecrits et mémoires mathématiques d'Evariste Galais

Paul R. HALMOS - Introduction à la théorie des ensembles

S. SAKS et A. ZYGMUND - Fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes

H. CARTAN - Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes

A. DONEDDU - Mathématiques supèrieures et spéciales - Analyse et géométrie différentielle

D. DACUNHA-CASTELLE, D. REVUZ et M. SCHREIBER - Recueil de problèmes de calcul des probabilités

G. CHOQUET - Cours d'analyse
Tome 2

J. NEVEU - Bases mathématiques du calcul des probabilités

A. TORTRAT - Calcul des probabilités

A. DONEDDU - Mathématiques supérieures et spéciales - Algèbre et géométrie

J. DIXMIER - Cours de mathématiques du premier cycle

S. SAKS et A. ZYGMUND - Fonctions analytiques

M. CONDAMINE - Mathématique - Terminales C et E - Géométrie

M. CONDAMINE - Mathématique - Terminales C et E - Algèbre

M. CONDAMINE - Analyse et Algèbre

M. CONDAMINE - Analyse

M. CONDAMINE - Algèbre linéaire et géométrie

Z.P. DIENES - La mathématique moderne dans l'enseignement primaire

M. CONDAMINE - Mathématique - Terminales C et T - Algèbre

R. CLUZEL et P. VISSIO - Statistique et probabilités

L. FELIX - Initiation à la géométrie - Classe de 5e - Cours de mathématiques pour l'enseignement des premier et second degrés

M. DUMONT - Algèbre - Fascicule 1 - Classes de 5e et 4e

C. BREARD - Mathématique - 6e

C. BREARD - Mathématiques - 5e

C. BREARD et B. BELLOCQ - Mathématiques - 5e

D. THIERRY - Fiches complémentaires pour le professeur - Mathématiques - 5e

D. THIERRY - Fiches complémentaires pour le professeur - Mathématiques - 6e

D. THIERRY - Travaux dirigés mathématiques 6e

D. THIERRY - Travaux dirigés mathématiques 5e

Collection QUEYSANNE REVUZ - Mathématique - 6e

Collection QUEYSANNE REVUZ - Mathématique-5e

M.A. TOUYAROT et C.L. HAMEAU - Itinéraire mathématique - CM - le année
Tome 2

M.A. TOUYAROT et C.L. HAMEAU - Itinéraire mathématique - CM2
Tome 1

M.A. TOUYAROT et C.L. HAMEAU - Itinéraire mathématique - CM1
Tome 1

Alan B. HOWER - Teaching litterature to adolescents plays

Leonard Van DEMAN MILES - Basic learning in the langage arts

W.K. FRANKENA - Three historical philosophies of education

P.E. FIELDS - Teaching tests in general psychology

P.C. ROSENBLOOM - The elements of mathematical logic

THOMAS L. HEATH - The thirteen books of en clid's elements

H. WICLAUDT - Finite permutation groups

S. LANG - A second course in calculus

D. CORENSTEIN - Finite groups

S. LANG - Analyse I

R.D. CARNICHAEL - Introduction to the theory of groups of finite order

A. YA KHINCHIN - The teaching of mathematics

I. KUNTZMANN - Où vont les mathématiques

MINISTRE de l'EDUCATION NATIONALE - Programmes du 2e cycle

PAPY - Mathématique moderne

L. FELIX et A. DONEDDU- L'enseignement de la mathématique

A. CRUMEYROLLE - Compléments d'algèbre moderne
PAPY - Mathématique moderne
G. LEFORT - Exercices d'algèbre et analyse - 1er cycle - MP le année -
Préparation aux grandes écoles
Tome 1

A. GUICHARDET - Analyse harmonique commutative

J. SCHWEITZER - Ordinateurs et comportement conscient

F.H. RAYMOND - Les principes des ordinateurs

M. BOSOM et G. CHATY - Mathématiques et automatique

G. POLYA - La découverte des mathématiques

M. BARBUT et E. MONJARDET - Ordre et classification - Algèbre et combinatoire

G. CAPARROS - Mathématiques - 6e

G. CAPARROS - Mathématiques - 5e

G. CAPARROS - Fiches de mathématiques - Classe de 5e

G. CAPARROS - Fiches de mathématiques - Classe de 6e

ERI.JABOTINSKY - Israël journal of mathematic

M. ABELLAN, A. BRAILLY et M. GUILLANEUX - La mathématique en classe de 6e
en classe de 5e

K. KURATOWSKI - Introduction à la théorie des ensembles et à la topologie

E. CASTELNUOVO - Didattica della matematica

Programme de mathématiques

DIXMIER - Cours de mathématiques du 1er cycle

RIESZ - Leçons d'analyse fonctionnelle

E. GALION - Premier séminaire international

Ivan NIVEN - An introduction to the theory of numbers

N. BOURBAKI - Eléments de mathématique - Algèbre modules et anneaux semi-simples

N. BOURBAKI - Intégration vectorielle

N. BOURBAKI - Intégration = mesure de Haar

N. BOURBAKI - Intégration = inégalités de convexité

N. BOURBAKI - Algèbre, formes sesquilinéaires et formes quadratiques

N. BOURBAKI - Intégration des mesures

N. BOURBAKI - Eléments de mathématique - Topologie générale

N. BOURBAKI - Eléments de mathématique - Modules et anneaux semi-simples

N. BOURBAKI - Eléments de mathématique - Théories spectrales

N. BOURBAKI - Théorie des ensembles : structures

N. BOURBAKI - Groupes et corps ordonnés modules sur les anneaux principaux

M.A. TOUYAROT et J. GERMAIN - Itinéraire mathématique - CE2

M.A. TOUYAROT et J. GERMAIN - Itinéraire mathématique - CE2 - 3e cahier

M.A. TOUYAROT et J. GERMAIN - Itinéraire mathématique - CE1 - 2e cahier
3e cahier

M.A. TOUYAROT et J. GERMAIN - Itinéraire mathématique - CE 1 - 1e cahier

M.A. TOUYAROT et J. GERMAIN - Itinéraire mathématique "3"

M.A. TOUYAROT et J. GERMAIN - Itinéraire mathématique "2"

M.A. TOUYAROT et J. GERMAIN - Itinéraire mathématique "1"

M.A. TOUYAROT et M. TOURNIER - Itinéraire mathématique "3" - 3e cahier

M.A. TOUYAROT et M. TOURNIER - Itinéraire mathématique - 2e cahier

M.A. TOUYAROT et M. TOURNIER - Itinéraire mathématique - 1e cahier

Collection QUEYSANNE REVUZ - Mathématique - 5e

Collection QUEYSANNE REVUZ - Mathématique - 6e

M.A. TOUYAROT - Comment faire ?

Christian CORNE et F. ROBINEAU - Les mathématiques nouvelles

J. PIAGET - La psychologie de l'intelligence

J. PIAGET - Six études de psychologie

H. FREUDENTHAL - Mathématiques et réalités

Z.P. DIENES et M.A. JEEVES - Pensées et structure

G. BERGE - Principes de combinatoire

MINISTERE de l'EDUCATION NATIONALE - Mathématiques

P. CLUZEL et P. VISSIO - Statistiques et probabilités

R. GOUYON - Calcul tensoriel

R. GOUYON - Intégration et distributions

H. STEINHAUS - Mathématiques en instantanés

M. GOUTARD - Les mathématiques et les enfants

J. CHAUVINEAU - La logique moderne -
P.U.F. - Que sais-je ? - 1969

L. CHAMBADAL - Calcul des probabilités - 1e cycle
Dunod - 1969

G. KREISEL et J.L. KRIVINE - Eléments de logique mathématique
Dunod 1967

M. METIVIER - Notions fondamentales de la théorie des probabilités
Dunod - Université - 1968

P.S. NOVIKOV - Introduction à la logique mathématique
Dunod - 1964

L. VANDENDRIESSCHE et autres - Les mathématiques modernes à l'école primair
grâce aux nombres en couleurs de G. Cuisenaire
Delachaux et Niestlé - 1957 n°s 2 et 3

S.C. KLEENE - Mathematical logic
John Wiley and Sons - 1968

A. HEYTHING and others - Dictionary of symbols of mathematical logic
R. Fey F.B. Fitch - 1969

Roger C. LYNDON - Notes on logic
Van Nostrand - 1966

Richard C. JEFFREY - Formal logic : its scope and limits
Mc Graw Hill Book Company - 1967

Raymond M. SMULLYAN - First order logic
New-York - 1968

ALONZO CHURCH - Introduction to mathematical logic
Princeton - 1956

J. BARKLEY ROSSER - Logic for mathematicians
Mc Graw Hill Book Company

M. DAVIS - Lectures on modern mathematics
Gordon and Breach - 1966

J.R. SHOENFIELD - Mathematical logic
Addison Wesley

S. BRAY et M. CLAUSARD - Initiation mathématique à l'école maternelle
O.C.D.L. - 1969

N. PICARD - Des ensembles à la découverte du nombre
O.C.D.L. - 1969

N. PICARD - Blocs logiques
O.C.D.L. - 1968

N. PICARD - A la conquête du nombre
O.C.D.L. - 1969

P. FAUVERGUE et R. BRIANÇON - Initiation à la mathématique moderne
Tomes 1 et 2 - Hachette - 1969

L. DUVERT et autres - Les lois de composition
O.C.D.L. - 1968

L. DUVERT et autres - Les relations
O.C.D.L. - 1968

L. DUVERT et autres - Les ensembles
O.C.D.L. - 1968

J. COLOMB et M. GLAYMANN - Ensembles, logique et cartes perforées
O.C.D.L. - 1967

PAPY - Géométrie affine plane et nombres réels - 1
P.U. - Bruxelles - 1967

R. MARTIN - Logique contemporaine et formalisation
P.U.F. - 1964

J.L. KRIVINE - Théorie axiomatique des ensembles
P.U.F. - 1969

R. FAURE et autres - Aide-mémoire
Tomes 1 et 2 - Dunod - 1964

CENTRE INTERNATIONAL de CALCUL - Théorie des graphes - Journées internationales d'études - Rome 1966
Dunod - 1967

G. CASANOVA - L'algèbre de Boole
P.U.F. - Coll. Que sais-je ? - 1969

P. THUILLIER - Cours de mathématiques supérieures - Analyse - Fonction d'une variable réelle
Masson

P. THUILLIER - Cours de mathématiques supérieures - Calcul intégral - Equations différentielles - Fonctions de plusieurs variables
Masson

P. THUILLIER - Cours de mathématiques supérieures - Ensembles, vecteurs ...
Masson

P. THUILLIER - Cours de mathématiques supérieures - Géométrie analytique - Calcul numérique
Masson

DIEUDONNE - Géométrie - groupes classiques

SHILOV - Theory of linear spaces

PAPY - Géométrie affine plane et nombres réels
P.U. - Bruxelles

E. CASTELNUOVO - Didattica della matematica -
La Nuova Italia Editrice

H. MOREL - Statistiques et Probabilités

A. HOCQUENGHEM et autres - Vocabulaire élémentaire des ensembles et de l'algèbre Masson

G. LEFORT - Exercices d'algèbre analyse et probabilités, 1er cycle - MP -
2e année - Tome 2

A.P.M.E.P. - Bulletin de l'association

C. MUGLER - Euclide - Extrait des éléments

G. LEFORT - Exercices d'algèbre et analyse
Tome 1

M. GLAYMANN - Formation continue des enseignants de la mathématique au nive
secondaire
O.C.D.L.

School Mathematics Project book (1/2/3/4/5)

N. BOURBAKI - Intégration : inégalités de convexité

N. BOURBAKI - Eléments de mathématique - chapitre de 1 à 3

N. BOURBAKI - Eléments d'histoire des mathématiques

B. VAUQUOIS - Probabilités

H. CARTAN - Formes différentielles

H. CARTAN - Calcul différentiel

L. SCHWARTZ - Etude des sommes d'exponentielle

A. WEIL - L'intégration dans les groupes topologiques

N. BOURBAKI - Topologie générale : utilisation des nombres réels

N. BOURBAKI - Théorie des ensembles

N. BOURBAKI - Espaces vectoriels topologiques

N. BOURBAKI - Fonction d'une variable réelle

N. BOURBAKI - Intégration - chapitre 9

BOYER - A history of mathematics

W. RUDIN - Real and complex analysis

R. ZAZZO - Manuel pour l'examen psychologique de l'enfant

J. GANDOUIN - Correspondance et rédaction administratives

H. HASSE - Vorlesungen über zahlentheorie

Karl PRACHAR - Primsahlverteilung

GORO SHIMURA - Automorphic functions and nomber theory

Walter RUDIN - Fourier analysis on groups

Paul A. HARTMAN - Miniaturized microbiological methods

Serge LANG - Introduction to algebraie geometry

Serge LANG - Abelian varieties

Serge LANG - Diophantine geometry

E.C. TITCHMARSCH - The theory of the riemann zeta-function

-=-=-=-=-=-=-=-

LISTE des DOCUMENTS reproduits par L'I.R.E.M. de MARSEILLE

Deuxième Trimestre 1972-73

M. MARION

- Espaces mesurables - Espaces probabilisables
- Sur certains groupes d'isométries engendrés par des symétries orthogonales
- Groupe opérant sur un ensemble - Orbites
- Probabilités en 1ère et terminale :
  - . Espaces probabilisables
  - . Espacex probabilisés

M. BENIAMINO

- Généralités sur la notion de limite
- Espaces topologiques et dénombrabilité
- Topologie produit
- Espaces compacts
- Espaces connexes

MM. CARMONA, DIDIER

- Présentation du calculateur Hewlett-Packard

DERNIERES ACQUISITIONS

DE LA BIBLIOTHEQUE DU C.R.D.P.

Extrait du règlement :

" ...... La bibliothèque du C.R.D.P. de Marseille est destinée aux membres de l'enseignement public - et privé sous contrat d'association - de l'Académie d'Aix-Marseille et à toute personne assurant des cours de formation professionnelle.

Pour bénéficier du prêt, un certificat d'exercice signé par le Chef d'établissement est nécessaire. L'inscription est valable pour une année scolaire.

La durée du prêt est limitée à 3 semaines (maximum 3 volumes)
I semaine pour I revue

Les lecteurs résidant en dehors de Marseille peuvent demander l'envoi des ouvrages par la poste.

L'expédition au lieu de fonction et le retour des ouvrages bénéficient de la franchise postale sous le couvert de Monsieur le Recteur de l'Académie d'Aix-Marseille.

621.38 *Logique et organes des calculateurs numériques*
BOU G. BOULAYE - Dunod 1970

621. *Le Fortran, un langage spécifique des ordinateurs*
LEV J.F. LEVENQ - Dunod 1971

373.3 *Mathématique moderne*
DUB C. DUBALLET - Sudel 1971

371.694 *L'enseignement assisté par ordinateur*
G. BARBEY - Casterman 1971

Initiation à la mathématique moderne
BACHELIER, LEMASSON - Foucher 1973

- *Utilisation de mini-ordinateurs dans la classe de Mathématiques*
(I.R.E.M. Nancy 1972)

- *Langage mathématique et enseignement de la physique*
COMBEL, CROIBIER - C.R.D.P. Grenoble 1973

INFORMATIONS DIVERSES

AU BULLETIN OFFICIEL DE L'EDUCATION NATIONALE (B.O.E.N.)

- Enseignement des Mathématiques en 4ème et 3ème.
  Circulaire n° 73.087 du 19.2.1973 B.O. n° 8

SERVICE D'EDITION ET DE VENTE DES PUBLICATIONS DE L'EDUCATION NATIONALE (C.R.D.P. de MARSEILLE)

- Emploi de calculateurs programmables dans le second degré (Bilan d'une expérimentation menée par les I.R.E.M. et l'I.N.R.D.P.).
  N° 54 1972 15 francs

- Enseignement du Français et Enseignement des Mathématiques (2ème cycle du second degré).
  N° 56 1973 11 francs

CENTRES DEPARTEMENTAUX DE DOCUMENTATION PEDAGOGIQUE et ANTENNES du C.R.D.P. de Marseille

AIX-en-PROVENCE	Antenne du C.R.D.P. Ecole Normale d'Instituteurs 8, avenue Jules Isaac
ARLES	Antenne du C.R.D.P. Ecole de garçons Montplaisir Rue J. et F. Curie
AVIGNON	C.D.D.P. 8, rue F. Mistral Tél. 81.36.08
DIGNE	C.D.D.P. Ancien Lycée de jeunes filles Place des Cordeliers Tél. 587
GAP	C.D.D.P. Inspection Académique 2, avenue Maréchal Foch Tél. 18.54