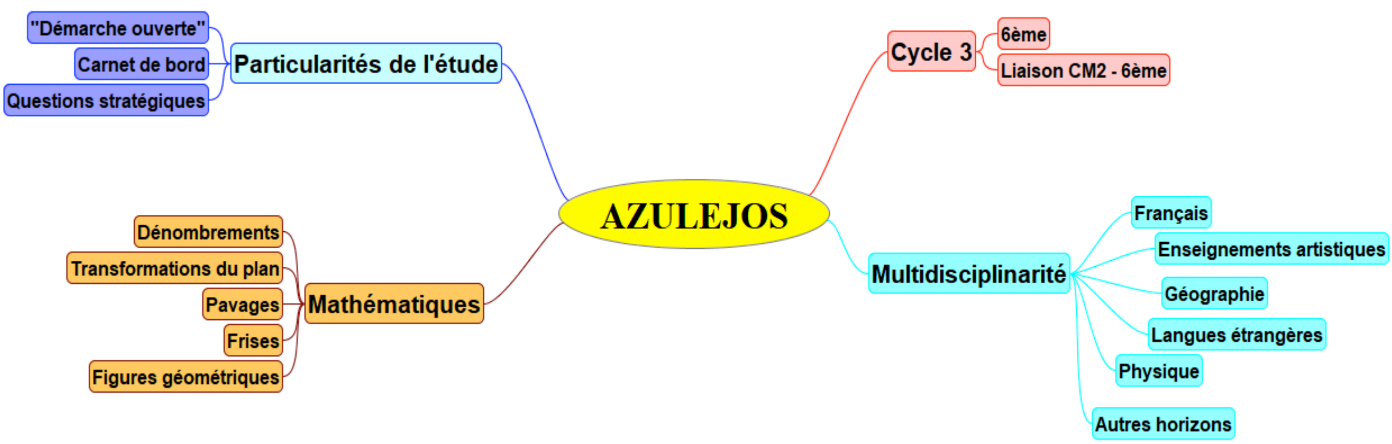
Institut de **R**echerche en **E**ducation des **M**athématiques
Aix-Marseille Université, Groupe Collège

Etudes de quelques AZULEJOS

Frises et Carreaux

Niveau : 6ème/5ème - Cycle 3.

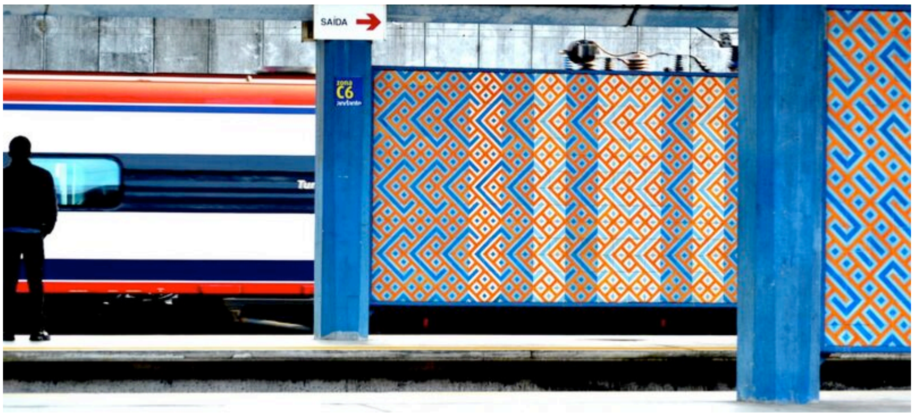


1. Le parcours.

Ce parcours scolaire [1] s'est déroulé au rythme d'une séance toutes les deux ou trois semaines pendant l'année 2016-2017 avec deux classes de 6ème du collège La Carraire de Miramas (13) il a été repris en 2017-2018 avec deux nouvelles classes de 6ème.

Lors de la première séance de l'année chaque groupe de 3 élèves découvre dans une enveloppe une collection de 12 azulejos plastifiés. Ceux-ci présentent des propriétés géométriques particulières. Après un temps d'observation et de discussion ils partent sur une suite d'interrogations mathématiques.
Chemin faisant les élèves ont soulevé des nouvelles questions et ils ont trouvé certaines réponses dans des domaines variés tels que: les **symétries** par rapport à des axes, les symétries de translation et de rotation et leurs compositions; les **pavages** et leurs domaines fondamentaux; le **dénombrement et la combinatoire** des frises; la notion de **puissances** et son efficacité; la **divisibilité** des nombres et son utilité; l'**invention de nouvelles formes** d'azulejos et la reconnaissance de leurs propriétés, etc. Même si l'orientation du parcours était guidée par la dynamique des questions et des découvertes des élèves, le professeur est intervenu quand la dispersion menaçait de noyer le fil des idées et des recherches.
Soulignons que nous ne pensons évidement pas que cette approche remplace l'acquisition plus structurée des savoirs ou des connaissances. Mais elle constitue un levier complémentaire qui suscite des envies de plus réfléchir et d'apprendre.

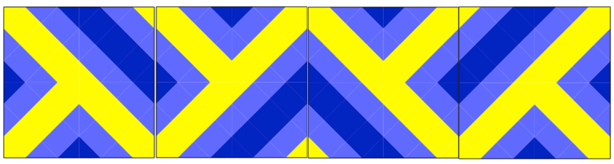
2. Des azulejos.



Gare de Contumil, Porto, Portugal. Panneaux d'azulejos, Eduardo Nery, 1993-1994.

Eduardo Nery (1938-2013) est un artiste Portugais qui, avec d'autres, consacra une partie de son œuvre à « *la revalorisation esthétique des espaces urbains quotidiens…*», [1]. Voici l'un des azulejos crée par Eduardo Nery:

Remarquons que ces azulejos s'assemblent dans toutes les orientations possibles en respectant une continuité de couleurs et de motifs:



[1] Parcours que nous différencions d'une démarche de projet. Un projet étant un parcours dont on fixe le but dès le départ.

Ce n'est là qu'une des propriétés mathématiques de ce motif. En fait ,[2], ce motif et bien d'autres inventés par la suite [3] possèdent des propriétés de symétrie remarquables qui se combinent étonnamment dans les multiples pavages qui en résultent. Ces propriétés font appel, entre autres, à la théorie des groupes finis [4], [5].

INTRODUIRE ICI LA FENETRE IMAGE DE VIMEO PERMET DE CLIQUER SUR LE FILM:

Variations en Azulejos

https://vimeo.com/304010059

Changer les numéros de page dans la table de matières du début si nécéssaire.

3. Quel type d'enseignement ?

Les prémices qui ont orienté le déroulement de cette activité se résument ainsi:

Une démarche : Au début de l'année, nous proposons aux élèves ***un parcours***. Malgré les aléas pouvant provenir du fonctionnement propre de l'établissement, les élèves vont être les acteurs de séances indépendantes de l'enseignement classique que nous leur dispensons au quotidien.
Un artefact: les azulejos plastifiés présentés au début comme « un trésor » caché dans une enveloppe (« habillage pédagogique »), vont être étudiés tout au long de l'année. Au rythme des séances, les élèves découvriront différents azulejos et un grand nombre de questions.
Un carnet de bord : Chaque élève a son carnet de bord, il constitue le « fil rouge » de sa réflexion. Il en dispose tout au long du projet et il écrit et dessine ce qu'il jugera bon pour mieux comprendre la nature de l'objet étudié.
Deux principes : Le premier est celui de la démarche ouverte , c'est-à-dire que ce sont les élèves qui pilotent le plus possible l'avancée du parcours et les pistes de réflexion. Le deuxième est le respect du rythme de chaque élève. Au niveau des 6ème nous avons, bien sûr, noté les dérives que peuvent prendre les réflexions des élèves qui du fait de leur enthousiasme, peuvent rapidement partir dans toutes les directions. C'est ici que le rôle de l'enseignant prend tout son sens. Dans ce type d'enseignement, il est le garant du respect du cadre, c'est-à-dire qu'il peut lui arriver de recentrer le questionnement des élèves par le biais d'une sélection de questions stratégiques.
Ajoutons qu'il existe des outils informatiques performants en libre accès, ex. [8], qui peuvent être utilisés par les élèves pour la construction et l'étude de pavages.

4. Que s'est il passé ?

Nous avons distingué trois phases de travail qui jalonnent ce parcours. Cette séquence se vérifie aussi à chaque séance. Une certaine ritualisation de cette progression a été bénéfique dans le travail des élèves rendant plus efficace leur réflexion.

1– Phase d'adaptation:

Les élèves découvrent le cadre de travail et s'adaptent à la situation proposée par l'enseignant. C'est un moment clef. En ouvrant l'enveloppe ils découvrent les azulejos et se familiarisent avec cet objet. Nous remarquons le plus souvent que les élèves se posent énormément de questions durant cette phase :

- Sur la façon de disposer les carreaux pour obtenir des « formes particulières » par exemple. La recherche de symétries apparaît rapidement au sujet des pavages mais aussi celle de motifs dépassant l'azulejo pour s'étendre aux frises et aux pavages.
- Sur le nombre de possibilités qu'il y a de générer des pavages, des frises, etc.

L'enseignant doit être attentif à ce questionnement car c'est à partir de celui-ci qui peuvent se développer des ***questions stratégiques*** qui aideront les élèves à mieux construire leurs réflexions

2– Phase de penser dans l'action:

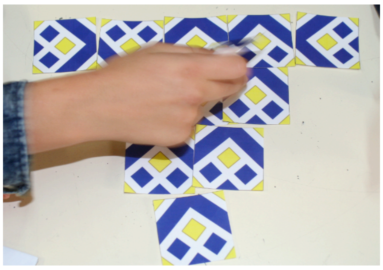
En premier lieu, et en guise de transition, cette phase peut être l'occasion de travailler de manière plus approfondie sur les pavages et la symétrie ainsi que sur les frises et les motifs glissés mais l'objectif principal de cette phase reste d'appuyer la pensée des élèves et de leur permettre de formuler explicitement leurs questions, leurs opinions. Les élèves continuent de manipuler les azulejos pour mieux expliquer à leurs camarades et/ou au professeur leurs points de vue, leurs questions. Il s'agit de montrer aux élèves qu'il faut être précis et rigoureux dans l'argumentation.

3– Phase d'élaboration du questionnement et de la réflexion :

A la fin de la deuxième phase, il est judicieux de faire une synthèse des réflexions des élèves. Jusque-là, lors de nos expérimentations, la question du dénombrement est souvent l'une des principales questions, ainsi que la façon dont les azulejos sont conçus pour avoir de telles propriétés. L'enseignant peut alors poser la question du nombre de possibilités différentes de créer une frise de deux carreaux, puis de trois, etc. Ici, l'invention d'un système de notation efficace est décisive. Etablir des règles rigoureuses pour construire un azulejo semble-être aussi une bonne piste de travail pour les élèves et peut être étroitement liées à la question du dénombrement. Toutefois, si nous revenons au principe d'un parcours tel que nous l'envisageons, il se peut que les élèves ne prennent pas du tout cette orientation et ce sera alors à l'enseignant d'accompagner les élèves dans de nouvelles voies.

5. Fragments du journal de bord du parcours.

Découverte :

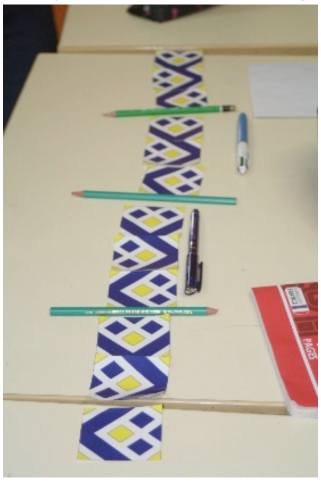



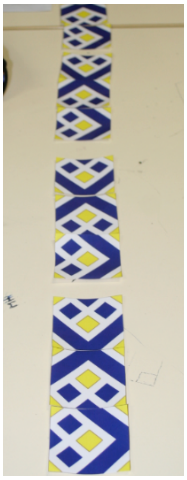

Les pavages et leurs symétries:

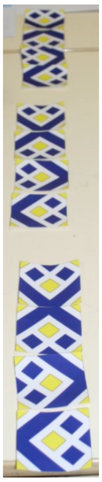


Certains groupes essayent... **... et corrigent:**

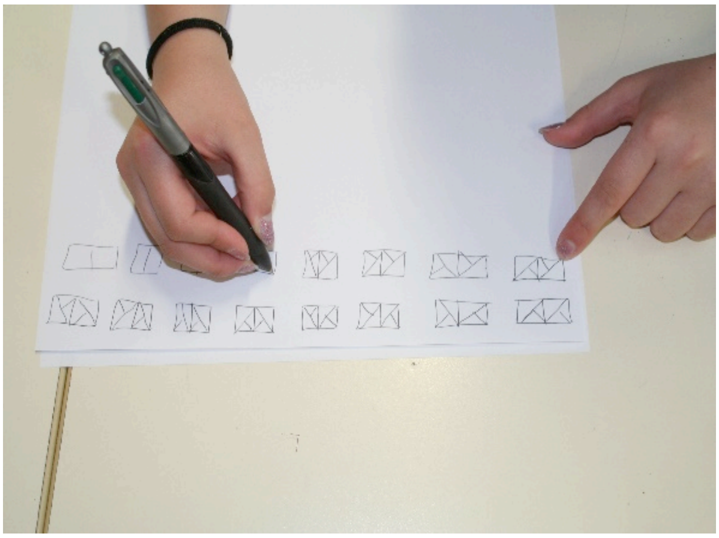
Les frises, la symétrie axiale et le glissement de motifs:

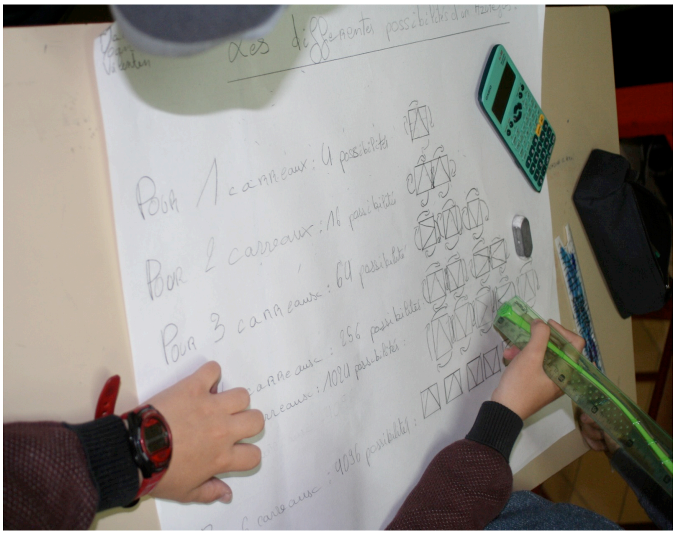






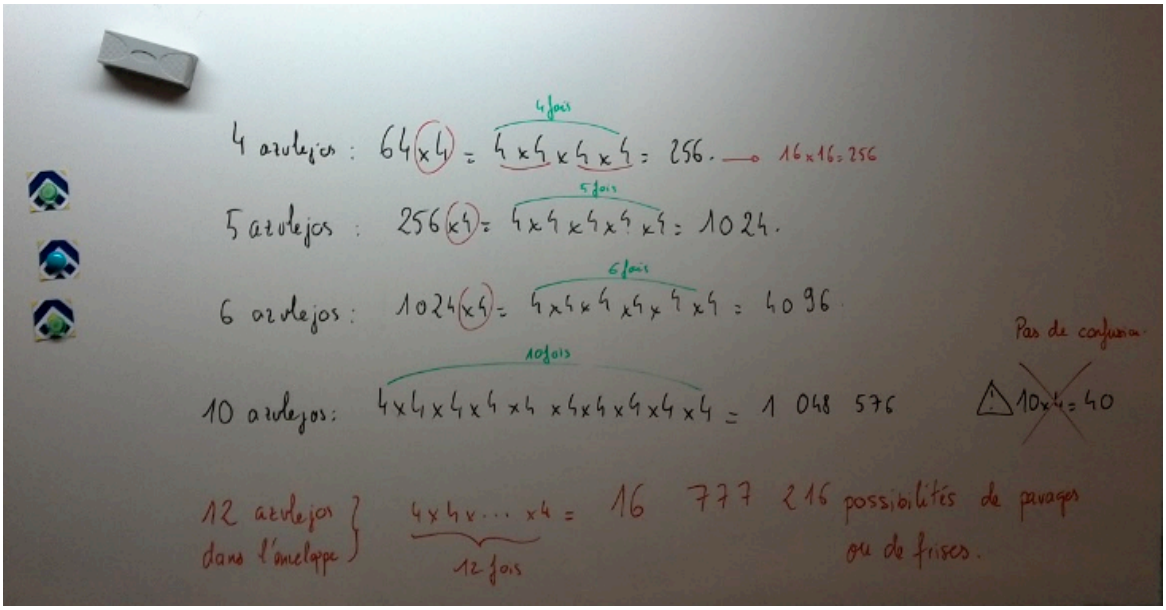
Le dénombrement des possibilités, les élèves développent une notation.



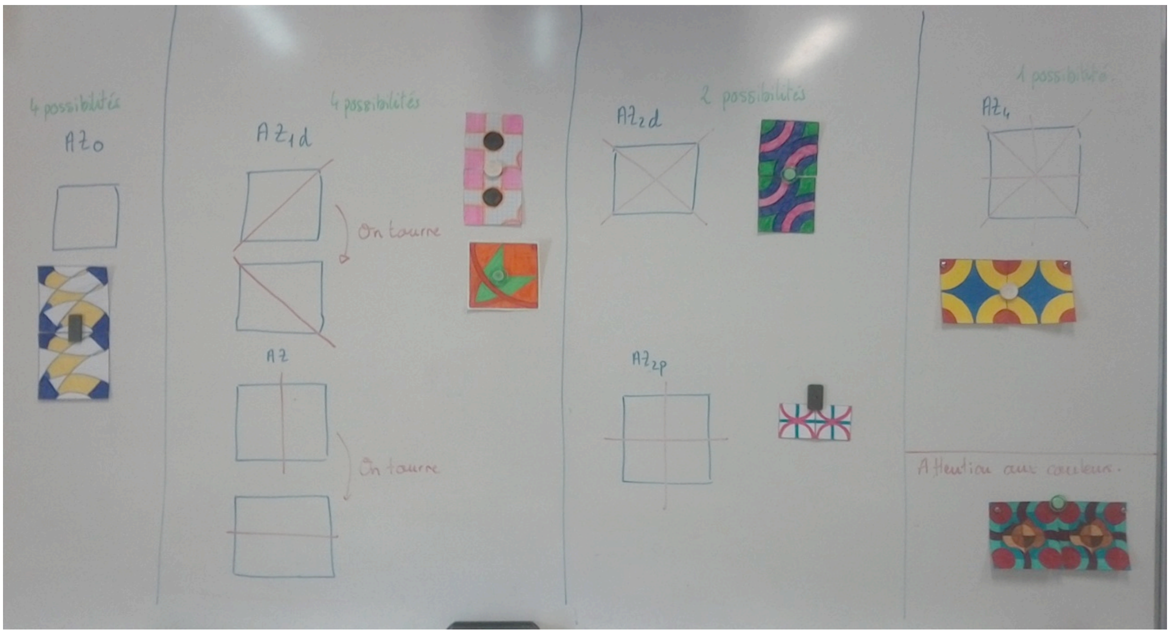


Exemples de carnet de bord :

Moments de synthèse au tableau, un exemple: Le dénombrement avec plus de trois azulejos:



De la création d'azulejos par les élèves au dénombrement des possibilités dans tous les cas de figure. Les élèves se lancent dans une classification :



Trois extraits notés pendant le parcours, pour donner le ton.

1. Lors de la première séance, classe 6ème B.

Les élèves s'intéressent aux possibilités offertes par les azulejos, certains essayent d'obtenir des petits carrés « le plus possibles » (6ème exemple), d'autres font naturellement un pavage 4x3 : « 12 c'est 4x3, vas-y, fais un rectangle de 4 sur 3 ». « C'est comme un puzzle. ». Certains groupes commencent à chercher des variantes possibles d'assemblage.

Une fois chaque production photographiée, le professeur enchaine "Mais alors combien peut-il y avoir de pavages différents? Beaucoup d'élèves lèvent la main pour dire « une infinité ! » Trois-quatre élèves semblent ne pas être d'accord, l'un d'eux lève la main : « Il ne peut pas y avoir une infinité de possibilités, il n'y a que 12 azulejos. » Un autre veut prendre la parole : « Oui ça limite les possibilités. » Le professeur : « Pourquoi ? » Le premier élève : « B'hein 12 azulejos c'est pas infini. » L'enseignante de technologie : « On peut les mettre comme on veut non ? », un élève : « oui mais en fait chaque azulejo n'a que 4 possibilités donc ça n'ira pas jusqu'à l'infini. » Le professeur : « tu en es sûr ? ». L'élève : « Oui, 12 carreaux avec chacun 4 possibilités, ça fait beaucoup mais ça ne fait pas l'infini. » Le professeur : « Est-ce que tu veux aller plus loin dans ton idée ? » L'élève : « Non. »

2. Lors de la troisième séance, classe 6ème B.

Beaucoup d'élèves veulent s'exprimer, le professeur choisi de rester au tableau pour mieux gérer le débat. Jusqu'à la fin de la séance, il notera les suggestions des élèves sur le tableau blanc. Une élève (du binôme n°8) qui jusque-là ne s'était pas exprimée tient à expliquer pourquoi on doit obtenir 64 combinaisons.

- « Le raisonnement est identique, pour 2 azulejos ont a $4 \times 4 = 16$ possibilités, donc pour 3 on doit calculer $4 \times 4 \times 4$, du coup, on sait déjà que $4 \times 4 = 16$, on doit juste calculer 16×4. »
- « Et ça fait 56 ! » Dit son voisin.
- « Non ça fait 64 ! » Reprend l'élève interrogée.

Quinze minutes après.

Le professeur : « Est-ce que tout le monde est d'accord ? »
Elève #1: « C'est finalement plus facile de compter le nombre de possibilités que de noter toutes les combinaisons… »
Le professeur : « Je ne sais pas, qu'est-ce que tu en penses ? » « Les autres, qu'est-ce que vous en pensez ? »
Elève #2: « Moi je préfère compter, en plus, on peut assembler les multiplications par 4. »
Le professeur : « C'est intéressant ce que tu dis, par exemple, si je te demande de me donner le nombre de combinaisons pour 6 azulejos, qu'est-ce que tu peux me répondre ? » (Au milieu du tableau)
Elève #2: « Pour 4 azulejos, j'aurais fait $4 \times 4 \times 4 \times 4$ ça donne 16×16 et enfin le résultat c'est 256. »
Le professeur : « Et tu as fait le calcul de tête ? »
Elève #2: « Non j'ai pris ma calculatrice pour 16×16. »
Le professeur : « D'accord, mais et pour 6 azulejos alors ? »
Elève #3: « alors là on reprend comme pour 3 azulejos, on sait que : $4 \times 4 \times 4 = 64$ donc là je fais $4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4$ ça donne $64 \times 64 = 4096$. Mais là j'ai aussi pris ma calculatrice pour 64×64. »
Elève #4: « Oui, quand les calculs se répètent c'est intéressant quand même la calculatrice… »
Le professeur : « Puisqu'il reste un peu de temps (10h51) qui peut m'expliquer : si je veux calculer : $4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4$, comment je fais ? »
Elève #5: « On regroupe par 2, ça donne : $16 \times 16 \times 16 \times 16 \times 16$, et après 64×64… il en reste un, il faut encore écrire …$\times 16$. »
Elève #6:: « C'est long quand même ! »
Elève #7: : « Mais il y a pas une histoire de puissance ? »
Elève #8: « Non de racine carrée ! »

Le professeur : « C'est très intéressant ce que vous dites, mais est-ce que vous savez de quoi de vous parlez ? »
Elève #9: « C'est pas la racine carrée, c'est une sorte de 'V' comme ça (l'élève fait le symbole de la racine carrée). »
Le professeur au tableau : « comme ça ? »
Elève #9: Oui comme ça !
Le professeur : « Alors, puissance ou racine carrée ? »
Elève #7: « Moi je pense que c'est la puissance. »
Les autres élèves ne se prononcent pas mais parlent entre eux. La séance touche à sa fin.
Le professeur : « Je propose que d'ici la semaine prochaine vous réfléchissiez à ça, faites vos recherches et on en reparlera. »

[Fin de la séance]

3. Lors de la cinquième séance, classe 6ème B.

Comment classer en familles les motifs inventés par les élèves.

Les élèves se mettent au travail et discutent en même temps avec leurs voisins, le professeur tolère les discussions mais demandera à deux reprises de baisser d'un ton et de chuchoter. Il passe dans les rangs pour observer mais il n'interviendra pas auprès des élèves sauf pour les encourager à dessiner les possibilités qu'ils « imaginent ».

Au bout de 10 minutes, les élèves font le bilan suivant :
« Il y a plusieurs choix possibles quand on construit un azulejo, on peut faire un azulejo sans aucun axe de symétrie (comme P6), avec 1 axe de symétrie, 2 axes de symétrie (P1 mais aussi P2 et celui d'Odelya) ou encore 4 axes de symétrie. » 4 familles sont ainsi créées est détaillées, à noter que les notations « AZ.. » sont mises en place par l'enseignant et très vite adoptées par les élèves.

Et quinze minutes après.

...
Elève #1: « En fait s'il n'y a pas beaucoup d'axes de symétrie, il y a plus de possibilités. »
Le professeur : « Pouvez-vous préciser ? Combien dans chaque cas ? »
Elève #1: « Pour 0 ou 1 axe, il y a 16 possibilités parce que 4×4 égal 16, pour 2 axes il y a 4 possibilités et pour 4 axes il y a une seule possibilité. »
Le professeur : « Bon, j'ai mis au propre et noté l'essentiel de ce que vous m'avez dit, ce sera notre conclusion, notre synthèse sur les azulejos, notez cela dans vos cahiers de recherche avant que ça sonne. »

[Fin de la séance]

6.Notes :

Ce travail est le fruit d'une collaboration au sein de l'IREM d'Aix-Marseille, Groupe Collège. Y ont directement participé: Olivier Garrigue, Professeur de Mathématiques au collège La Carraire de Miramas (13) et ses élèves, Jorge Rezende, Universidade de Lisboa et Ricardo Lima, Dream & Science Factory et CNRS, Marseille. Merci à Myriam Quatrini pour ses encouragements et à Nicole Paoletti pour une lecture attentive.

Contact: **olivier garrigue: email: <ogarrigue@gmail.com>**

Bibliographie

[1] L'Art de l'Azulejo au Portugal, Centre Virtuel de l'Instituto Camões, http://cvc.instituto-camoes.pt/azulejos/fr/index.html

[2] Jorge Rezende, A Contribution for a mathematical classification of square tiles, 2012, arXiv :1206.3661v1 [math.HO]

[3] Jorge Rezende, http://polyedros.blogspot.fr/

[4] D. Schattschneider, The Plane Symmetry Groups: Their Recognition and Notation, American Mathematical Monthly, Volume 85, issue 6, 439-450.

[5] André Deledicq et Raoul Raba, *Le monde des pavages – Les voir et les faire* – ACL – Les éditions Kangourou. Mars 2014.

[6] Eduscol Ressources pour l'évaluation en mathématiques, ehttp://eduscol.education.fr/ressources.

[7] Eduscol, Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer, un exemple de tâche intermédiaire, Analyse et Construction d'un pavage, ehttp://eduscol.education.fr/ressources.

[8] http://pascal.peter.free.fr/pavages.html Pavages 2: un logiciel libre pour réaliser des pavages du plan.