Enseigner la notion mathématique d'égalité
Au collège

Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques

Université d'Aix-Marseille - Groupe Collège – Novembre 2017

Table des matières

Introduction

Nous ne pouvons démarrer cette brochure sur l'apprentissage de la notion mathématique d'égalité au collège sans une pensée reconnaissante à notre collègue Olivier Berne. Lors de sa brève collaboration au groupe Irem collège, alors que nous cherchions un thème de réflexion pour le démarrage d'un travail collaboratif, il a suggéré : *l'égalité*. Suggestion qui a cheminé dans nos esprits, au départ un peu sceptiques, puis de plus en plus enthousiastes.

Quoi de plus élémentaire en effet que la notion d'égalité en mathématiques ? Elle est présente dès les premiers pas : les tables de multiplication, les premières additions sont les premiers énoncés que les apprentis mathématiciens affirment. Et ces énoncés, rudimentaires, parlent déjà de l'égalité. Mais les premiers théorèmes que les élèves vont rencontrer au collège, de Thalès à Pythagore, en passant par les règles régissant les calculs littéraux, parlent encore de l'égalité. Et les manipulations que les élèves doivent savoir effectuer, sur les nombres, les expressions numériques puis algébriques, puis plus tard sur les ensembles d'évènements ne sont pas autre chose que des variations sur le thème de l'égalité. De plus, les nouveaux programmes mettent au coeur des apprentissages la notion d'algorithmique, notion pour laquelle le signe égal va devoir adopter d'autres rôles, nouveaux pour les élèves, comme l'assignation.

En bref, aucun chapitre, aucune notion abordée dans les classes de mathématiques ne se passent de cette notion. Alors oui, en ce sens, l'égalité est une notion élémentaire, elle est à la base de tous les objets mathématiques, elle est à la base du langage mathématique.

Pour autant, est-elle élémentaire au sens d'une simplicité de conception et de manipulation ? Rien n'est moins sûr. Nous nous sommes vite rendus compte que notre impression première, "humm, c'est un peu trop facile" ... était bien présomptueuse. Une introspection rapide nous a remis en mémoire les difficultés rencontrées par nos élèves, qu'il n'était pas délirant d'attribuer à une mauvaise appréhension de la notion d'égalité. Pour eux, l'égalité est surtout un signe et ce signe est très souvent un résumé de "je vais vers un résultat" lorsqu'il n'est pas qu'un simple outil de ponctuation entre plusieurs suites d'opérations. Les textes que nous sommes allés consulter ont fini de nous convaincre que nous touchions là une question épineuse pour qui a le soucis de l'enseignement des mathématiques. Alors, même si la littérature sur le sujet de l'égalité mathématique, que cela soit du point de vue didactique ou celui plus pratique de questions précises d'enseignement, est fournie et riche[1], il nous a paru intéressant de faire le point, à partir de nos pratiques, à partir de ces lectures justement, à partir de la situation du collège et des programmes actuels[2]. Cette brochure est le résultat de nos réflexions et expérimentations, dont nous nous avons voulu partager les conclusions avec nos collègues.

Cette brochure est organisée en deux partie, la première présente les éléments de réflexion auxquels nous avons aboutis, la seconde propose des activités que nous avons imaginées et testées, pour aider nos élèves à s'approprier petit à petit cette notion.

Le plan de la première partie suit et restitue les différents axes de réflexion que nous avons suivis pour travailler sur le thème de l'apprentissage de la notion mathématique de l'égalité à partir de notre situation de professeur de mathématiques. Nous avons éprouvé le besoin de compléter, même d'approfondir, notre connaissance théorique de cette notion. Pour enseigner cette notion, et nous devons le faire, même si celle-ci n'est pas un objet explicite d'apprentissage (et on comprends bien pourquoi après avoir beaucoup discuté entre nous pour nous mettre au clair sur cette notion !!!), elle est là, il faut faire avec, et alors, nous enseignants, devons connaître un tant soit peu les multiples facettes de cette notion, les difficultés théoriques qu'elle pose[3] lorsqu'on tente de la définir. Nous proposons une présentation de la notion théorique de l'égalité mathématique en section 1.1.

Il nous fallait également réfléchir aux questions que posent l'apprentissage de cette notion par les élèves du collège. Nous sommes allés nous abreuver à la riche littérature ci-dessus évoquée, et nous en faisons une présentation détaillée et commentée en section 1.2. Nous avons également partagé et interrogé nos expériences des erreurs fréquentes et des difficultés que nous constations chez nos élèves, que nous présentons en section 1.4.

[1] Un point sur cette littérature est fait en section 1.2

[2] Lorsque nous avons commencé, les programmes étaient ceux de 2008, lorsque le programme a vraiment changé, nous avons essayé d'actualiser notre propos.

[3] Et qui continuent d'ailleurs à faire l'objet de recherches actuelles en logique et informatique théorique.

Il nous a paru intéressant, au début du travail du groupe, de visiter les différentes formes par lesquelles la notion se manifeste dans le programme du collège. Un tableau synoptique restituant ces occurrences est fourni en section 1.3.2. Nous avons utilisé pour le faire une grille de classement des usages de la notion d'égalité dans tel ou tel point du programme en fonction des propriétés de l'égalité : selon que celle-ci permet de constituer un énoncé qui peut être ou ne pas être satisfait, comme dans les équations ; selon que celle-ci est le lien entre différentes étapes d'un calcul ; selon qu'elle permet de naviguer entre différentes écritures d'un même objet... Dès cette répartition, et ensuite lorsque nous avons construit des activités qui permettraient de faire travailler tel ou tel aspect de l'égalité, nous nous sommes rendus compte que demeuraient des non-dits, des implicites lorsque nous raisonnions avec la notion d'égalité, qu'il fallait expliciter si nous voulions être efficaces dans la transmission que nous prétendions porter, et même qu'il fallait prendre position quant à la définition que nous adoptions, notamment pour manipuler l'égalité entre objets géométriques. Citons à ce propos l'exemple édifiant avec lequel François Reynes démarre son article [REYNES, 1] : *Il trace trois points alignés sur le tableau, A, B et C, et demande : "lorsque j'écris (AB) = (AC), est-ce que je parle d'une droite ou de deux droites ?"*. Les choix que nous faisons pour circonscrire la définition de l'égalité que nous avons décidé d'adopter lorsque nous enseignons les mathématiques au collège sont précisés dans la section 1.4.2.

La seconde partie de la brochure présente des activités que nous avons imaginées et testées. Bien-sûr, il n'est pas question de travailler directement la notion d'égalité au collège. C'est une notion transversale, présente en filigrane dans la majorité, si ce n'est dans tous les chapitres du programme, d'ailleurs on voit mal comment il pourrait en être autrement tant cette notion est, répétons le, multiforme et finalement trop complexe pour être abordée frontalement. Néanmoins, il semble important que des exercices puissent être effectués, afin que les élèves rencontrent certaines de ses propriétés et que, par petites touches, une appropriation se construise.

Les activités sont des invitations à faire un point sur tel ou tel aspect de l'égalité, que l'on rencontre dans la pratique mathématique à l'occasion de questions plus directement liées aux objets de l'enseignement du collège : les différents ensembles de nombres, les expressions numériques, les programmes de calcul, la géométrie... Elles sont toutes présentées selon un même format : une fiche élève, l'intention des auteurs, une proposition de passation, le compte rendu d'observation de cette activité, et un bilan. Certaines activités s'inscrivent dans une séquence propre du cycle 3 ou du cycle 4 mais d'autres peuvent très bien être utilisées à tout moment, pour permettre aux élèves de mettre des mots sur ces non-dits cités précédemment, et de toucher du doigt les différents statuts que le signe égal peut avoir.

Nous espérons que cette brochure sera utile à l'enseignant de mathématiques de collège désireux soit de faire le point sur cet objet de l'enseignement de la discipline, soit de trouver des activités à utiliser telles quelles ou à adapter dans ses classes, soit à prolonger la réflexion et enrichir un matériel pédagogique pour transmettre, par étapes successives, une notion riche et centrale.

Chapitre 1

A propos de la notion d'égalité en mathématiques : de la théorie à la classe

Bien qu'elle soit omniprésente dans le langage et la pratique mathématiques, la notion d'égalité n'est pas explicitement définie aux élèves du collège, ni même aux lycéens. Et d'ailleurs, lorsqu'on commence à se poser la question de l'enseignement de cette notion, et à chercher une définition mathématique, on se rend compte que cela n'est pas si simple. Plusieurs présentations existent, et il n'y en a pas une qui soit plus primitive que les autres. Bien sûr, on peut dire cela de la plupart des objets mathématiques. Toutefois, au moins pour ceux rencontrés au collège, la littérature sur l'analyse comparée des différentes présentations des objets abonde. Ceci est moins vrai pour la notion d'égalité. Nous nous contenterons ici de restituer les présentations qui nous paraissent les plus familières au monde de l'enseignement secondaire et élémentaire. Nous compléterons cette mise au point sur la notion d'égalité avec une très brève incursion en théorie des types dans laquelle l'égalité est explicitement considérée comme une notion centrale, à partir de laquelle les objets sont construits et manipulés. Cette approche permet d'expliciter des aspects de la notion d'égalité qui semblent importants pour un bon apprentissage.

1.1 La notion d'égalité en mathématiques

1.1.1 L'égalité est une relation

Dans les articles sur la question de l'enseignement de cette notion, comme par exemple [REYNES, 1], [IREM] mais aussi dans les manuels, l'égalité est présentée comme une relation binaire. L'égalité entre des éléments d'un ensemble E (des entiers naturels, ou bien des évènements ou encore des expressions littérales) est une partie du produit cartésien $E \times E$, et cette relation est réflexive, symétrique et transitive. Pour éviter que la définition de l'égalité se confonde avec celle de relation d'équivalence, on peut rajouter que c'est une relation binaire, réflexive, symétrique, transitive *et antisymétrique*. Selon cette présentation, l'égalité est la seule relation[1] qui soit à la fois une relation d'équivalence (1, 2 et 4) et une relation d'ordre (1, 3 et 4). L'égalité est donc la relation qui contient uniquement toutes les boucles de réflexivité, autrement dit l'ensemble $\{(a,a);\ a \in E\}$, que l'on appelle la diagonale.

En tant que définition, cette présentation n'est pas vraiment satisfaisante : elle ne dit pas grand chose, en ce sens qu'elle est plus descriptive que constructive. Pire, elle est circulaire : l'antisymétrie présuppose l'égalité. Cette présentation *ensembliste* pointe toutefois des propriétés qui, quoique implicites, sont très largement utilisées. La transitivité, mais aussi la symétrie permettent lors des calculs, d'assurer la permanence de l'identité de l'objet considéré d'un bout à l'autre d'une chaîne de réécriture ; lors de la résolution d'équations ou d'un raisonnement quelconque ces mêmes propriétés permettent de justifier l'équivalence entre les propositions successives.

Présenter l'égalité comme une relation souligne également sa dimension logique, comme n'importe quelle relation

[1] Soit E un ensemble et soit $R \subset E \times E$ une relation binaire sur E. La relation R est dite :

1. Réflexive lorsque : $\forall x\ x \in E\ R(x,x)$.
2. Symétrique lorsque : $\forall x \in E\ \forall y \in E\ R(x,y) \Rightarrow R(y,x)$.
3. Antisymétrique lorsque : $\forall x \in E\ \forall y \in E\ R(x,y) \wedge R(y,x) \Rightarrow x = y$.
4. Transitive lorsque : $\forall x \in E\ \forall y \in E\ \forall z \in E\ R(x,y) \wedge R(y,z) \Rightarrow R(x,z)$.

l'égalité permet de construire des *propositions ou formules*[2], c'est-à-dire des énoncés mathématiques. En Logique, l'égalité est traitée par des axiomes adéquats, essentiellement ceux qui expriment les propriétés de réflexivité, de symétrie et de transitivité. On dispose également d'un schéma[3] d'axiomes disant comment utiliser l'égalité grâce à l'opération de *substitution*. Dès qu'on a montré que deux termes u et v sont égaux, et que l'on a montré une proposition $P(u)$ alors on peut en déduire $P(v)$. Remarquons que, si on a ces axiomes, on peut alors montrer la réciproque de l'implication ci-dessus. C'est-à-dire que, si on sait que pour tout prédicat unaire P, les propositions $P(u)$ et $P(v)$ sont équivalentes, on a en particulier, pour le prédicat $P(z) := z = u$ que $v = u$ si et seulement si $u = u$, et comme on a également l'axiome de réflexivité de l'égalité, on peut conclure que $v = u$. On retrouve alors la proposition que Leibniz énonçait au 17ème siècle pour définir l'égalité : "deux choses sont égales lorsqu'elles vérifient exactement les mêmes propriétés"[4].

1.1.2 En théorie des types, l'égalité est une notion primitive

La théorie des types est née comme branche de la logique mathématique, son ambition était de constituer une alternative à la théorie des ensembles. En théorie des types, la notion primitive, plutôt que celle d'**ensemble** est celle de **fonction**[5]. La théorie des types manipule des types en même temps que les objets de ces types. L'exemple paradigmatique est celui des fonctions : lorsque A et B sont des types, alors $A \to B$ est un type, un objet de $A \to B$ est uniquement décrit par le fait que lorsqu'il est appliqué à un objet de type A, il fournit un objet de type B. Dans la théorie des types dans sa version contemporaine, introduite par P. Martin-Löf, les types et objets sont introduits à l'aide de quatre règles :
- **une règle de formation des types**. On se donne des types atomiques, comme par exemple $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels. Et on se donne quelques constructeurs permettant de construire de nouveaux types à partir de types déjà construits. Par exemple le type $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est le type des fonctions de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$.
- **une règle d'introduction** qui dit quels sont des objets *canoniques* de chaque type et quelle est l'égalité entre objets canoniques d'un type.
Par exemple, les objets canoniques de N sont 0 et $s(n)$ (successeur de n) dès que n est un objet canonique de N, on note $n = s^n(0)$, $2 = s(s(0))$. Pour l'égalité, on a que $0 = 0$ et si $n = p$ alors $s(n) = s(p)$.
Les objets canoniques du type $A \to B$ sont obtenus à partir d'objets $b(x)$ de type B, dépendants éventuellement d'une variable de type A ; les objets canoniques du type $A \to B$ sont notés $\lambda x b(x)$, pour exprimer que ce sont des fonctions qui, à une variable x de type A, associent un objet $b(x)$, de type B. Deux objets canoniques $\lambda x b(x)$ et $\lambda x c(x)$ de type $A \to B$ sont égaux lorsque $b(x) = c(x)$.
- **une règle d'élimination** qui dit comment interagissent les objets et comment se propage l'égalité par ces interactions. Par exemple si f est un objet de type $A \to B$ et a un objet de type A, alors l'application de f à a, notée $f(a)$ est un objet (non canonique) de type B, et si $f = g$ et $a = a'$ alors $f(a) = g(a')$. Plus concrètement, le résultat de la somme d'un entier n et d'un entier p est un entier mais pas sous forme canonique. Si $n = n'$ et $p = p'$ dans N alors $n + p = n' + p'$ dans N.
- **une règle d'égalité des objets dans les types** qui précise les opérations sur les objets canoniques, c'est-à-dire les étapes élémentaires du calcul. Par exemple $\lambda x f(a) = f[a/x]$ (la fonction qui à x associe f appliquée à a est l'objet f dans lequel a est substitué à x), ou bien $s(n) + p = s(n + p)$.

La théorie des types explicitent certains aspects de l'égalité, elle souligne :
- *l'importance du typage.* L'égalité entre objets est définie en fonction des types auxquels ces objets appartiennent.
- *l'importance des objets canoniques.* Dans un type, tous les objets ne sont pas canoniques, par exemple l'application d'une fonction à un argument, concrètement la somme ou le produit de deux entiers. La règle d'élimination nous assure que les objets sont bien dans le type attendu, on ne sait pas comparer *a priori* les objets non canoniques. Ce n'est qu'en effectuant les calculs qui transforment n'importe quel objet en objet canonique que l'on peut vraiment être assuré de l'égalité entre objets dans un type. Pour savoir que $4 \times (2+3) = 11+4+5$, il faut identifier $4 \times (2+3)$ à 20 et $11 + 4 + 5$ à 20 qui lui est un objet canonique de type $\mathbb{N}$, sous la forme $s^{20}(0)$.

La notion d'élément canonique, suggérée par la théorie des types, permet de préciser la forme ultime des réécritures qui au terme d'un calcul résoud la question de l'égalité par celle d' identité. Cette approche fonctionne particulièrement bien pour l'égalité entre les nombres, entre les expressions numériques, entre les expressions littérales, pourvu que l'on s'entende sur des conventions d'écriture. En effet, si la forme canonique des nombres entiers est immédiate (5 plutôt

[2]Pourvu qu'on se donne deux objets t_1 et t_2, on dispose alors d'une formule élémentaire : $t_1 = t_2$. Et c'est en combinant les formules élémentaires entre elles à l'aide des connecteurs et des quantificateurs, que l'on obtient toutes les formules du calcul des prédicats.

[3]Pour chaque énoncé P dépendant d'une variable, le schéma nous dit : $\forall x \forall y\ (x = y \ \Rightarrow\ P(x) \Leftrightarrow P(y))$

[4]Soit deux objets x et y et soit P un prédicat unaire : $x = y$ si et seulement si $\forall P\ P(x) \Leftrightarrow P(y)$. Cette notion est souvent qualifiée d'égalité *intensionnelle*.

[5]C'est également le cas en Théorie des Catégories : la notion primitive est celle de *morphisme* entre objets.

que $2+3$, 15 plutôt que $2\times 7+1$), il faut choisir la forme irréductible pour les fractions, il faut choisir soit l'écriture $\frac{p}{10^q}$ pour les décimaux ou bien l'écriture décimale, et pour les expressions littérales on peut choisir d'écrire $ax+b$ plutôt que $b+ax$ lorsque a et b sont des nombres. Pour les objets de types moins élémentaires, la notion d'égalité de la théorie des types se mêle à l'approche ensembliste pour manipuler l'égalité. C'est en effet l'égalité extensionnelle que l'on a en tête lorsque l'on parle, au collège, d'égalité entre fonctions ou entre programmes de calculs. Deux fonctions, deux programmes sont égaux lorsque sur la même entrée, il donnent le même résultat. De même, si l'on rencontre, en probabilité par exemple, une égalité entre ensembles d'évènements, c'est la double inclusion qui permettra de conclure sur l'égalité de ces ensembles.

1.1.3 L'égalité en géométrie

Les deux approches théoriques de l'égalité que nous avons considérées, l'égalité comme relation, l'égalité primitive de la théorie des types, si elles sous-tendent l'approche de l'égalité pour la pratique mathématique au collège, tant qu'il s'agit des chapitres relevant de l'arithmétique ou l'algèbre, les fonctions, voire les statistiques ou les probabilités, ne semblent pas complètement satisfaisantes pour parler de l'égalité en géométrie. On ne dispose pas d'une forme canonique des objets géométriques que l'on rencontre au collège. Il semble que l'on va plutôt se ramener à une égalité entre des objets non géométriques comme l'égalité entre nombres pour des longueurs (exprimées dans la même unité), ou des mesures d'angles, l'égalité entre ensembles de points pour les figures géométriques.

Finalement, une investigation sur les objets géométriques élémentaires n'est pas inutile pour mieux comprendre comment on pourrait parler d'égalité entre objets géométriques au collège. Nous nous basons, pour ce faire, sur la riche littérature sur l'enseignement de la géométrie. Divers travaux, comme par exemple ceux de Ferdinand Gonseth, de Bernard Parzysz, de Catherine Houdement et Alain Kuzniak proposent une grille de lecture organisant le statut des objets géométriques au cours de la scolarité mathématique. Ils produisent le classement suivant :

Géométrie I dite *géométrie naturelle*. Les objets de cette géométrie sont des objets dit matériels : ce sont des traces graphiques visibles sur le papier ou sur l'écran de l'ordinateur. Des “maquettes" sont aussi envisagées. Les objets sont “palpables". Mesurer est une technique de résolution acceptée (parmi d'autres). Le raisonnement est étroitement lié à des intuitions, à la visualisation de dessins (l'élève dit : “ça marche comme ça parce que je le vois”). Les instruments “matériels” tels que le compas, l'équerre, la règle servent donc au raisonnement. La géométrie I est pratiquée dans les écoles élémentaires et primaires. Finalement, pour la géométrie I, l'égalité entre des objets dont le statut est hybride entre le dessin et la figure, peut être essentiellement la superposabilité, au sens matériel du terme.

Géométrie II dite *géométrie axiomatique naturelle*. Dans cette géométrie, on étudie des objets dont le statut résulte de définitions, il est donc nécessaire d'établir des axiomes (Euclide). Ces objets sont introduits aux élèves "à partir" des objets de la géométrie I. Puis, à partir des axiomes, de nouvelles connaissances (propriétés, théorèmes, ...) sont créées par l'intermédiaire de démonstrations qui s'appuient sur des dessins, des schémas. Ces derniers sont issus de la géométrie I, mais l'enjeu de l'enseignement est de faire prendre une distance par rapport au dessin. On cherche essentiellement à passer du coté “palpable” de la géométrie au coté “abstrait” (une figure est un représentant d'un objet idéal). Pour le raisonnement en géométrie II, les instruments “matériels” ne sont plus pertinents, mais les instruments doivent être “intellectuels” : “j'ai une (des) hypothèse(s), je sais en théorie que..., donc je déduis (le raisonnement “hypothético-déductif”)”. L'introduction de la géométrie II marque le passage de l'école primaire-6^e au collège-cycle central. On peut noter la difficulté à franchir le pas entre les géométries I et II, lorsqu'un triangle n'est pas rectangle certains élèves affirmeront le contraire en utilisant l'équerre. De même en 5^e, quand on donne les mesures $AB = 12cm$, $AC = 5cm$ et $CB = 7cm$, les élèves tracent un triangle ABC non plat et le codent. La géométrie I est une sorte de terrain d'expérimentation, la géométrie II est une "théorisation" de la géométrie I, elle permet en outre de généraliser des cas particuliers observés, constatés dans la géométrie I. Au collège, on procède à de nombreux va-et-vient entre ces deux géométries. Ainsi, si le statut de l'égalité ne change pas, pour la géométrie II comme pour la géométrie I, c'est toujours la superposabilité des objets qui les rend égaux, les outils pour l'établir ne sont plus les mêmes. On ne se contente plus de “ça se voit sur le dessin”, on a besoin de poser des données, d'utiliser des définitions et des théorèmes pour affirmer ou établir des égalités.

Géométrie III dite *géométrie axiomatique formaliste*. Elle apparaît en même temps que toutes les géométries non euclidiennes, les objets sont purement établis à partir d'une axiomatisation qui se veut complète. Les objets de la géométrie I n'ont définitivement plus lieu d'être. Cette géométrie concerne peu le collège, pourtant, elle sous-tend quand même la conception des programmes. On se trouve face au problème, soulevé par Bkouche [BKOUCHE] d'une approche des objets géométriques relevant de deux ontologies différentes et entre lesquelles les programmes du collège ne tranchent pas. Co-existent dans les programmes du collège une approche qui peut être qualifiée d'*euclidienne*, qui, dans la ligne des programmes de l'école élémentaire et de l'histoire, ancrent les objets géométriques dans la notion de *figure* (autrement dit : des angles, des longueurs, des (segments de) droites, indépendamment d'un espace dans lequel les objets apparaitraient) et une approche héritière de la géométrie moderne (post programme d'Erlangen) selon laquelle les objets élémentaires sont les invariants d'un groupe de transformations, (autrement dit, les fondements des objets géométriques sont les notions consubstantielles d'espaces, de points et de déplacements).

Finalement, il nous a paru important, pour l'objectif qui est le nôtre de faire un point sur l'apprentissage de la notion d'égalité au collège, de fixer une notion d'égalité pour les différents chapitres de géométrie du programme :
- **Les figures**. Pour les triangles, c'est sans doute l'égalité d'Euclide (la caractérisation par trois données parmi les six données d'angles et de longueurs des cotés dont au moins une longueur). De même pour les figures comme les parallélogrammes quelconques ou particuliers, c'est la notion de figures superposables qui sous-tend l'égalité, et alors celle-ci s'exprime par l'égalité entre les données caractéristiques des figures. Ainsi deux cercles seront égaux dès qu'ils auront le même rayon.
- **Les droites**, l'égalité est-elle l'égalité entre ensembles ? Le fond du problème ici est que l'on se situe entre la géométrie I et la géométrie II, le langage ensembliste appartiendrait plutôt à "l'esprit" de la géométrie II. Si on dit que deux droites égales sont deux droites confondues dans le sens de la géométrie I, c'est que la représentation "matérielle" de l'une des deux droites vient se "confondre", dans le sens littéral du terme, avec celle de la deuxième (au tableau cela s'illustre par une ligne droite bleue (la représentation de la première droite) et l'on repasse par dessus par une ligne droite rouge (la représentation de la deuxième droite). Mais quand on assimile l'égalité de deux droites à l'alignement de points ($(AB) = (CD)$ équivaut à dire que A, B, C, D sont alignés) il semble que l'on aborde ici l'égalité dans le sens de la géométrie II par le biais justement de l'égalité entre ensembles sauf que l'on admet la double inclusion sans plus de détail... Les points sont alignés, donc les points de l'une appartiennent à l'autre et les points de l'autre appartiennent à l'une et *hop ! le tour est joué*. Ce moment du programme illustre que le collège est bien le moment de la transition entre les géométrie I et II, l'enseignant parle de points alignés tout en s'appuyant sur les deux représentations des droites qui se confondent au tableau. Ce "passage rapide" est sans doute inévitable, mais il explique la difficulté des élèves à donner du sens à une consigne telle que "démontrer que $(AB) = (BC)$, comme le rappelle F. Reynes dans son article "concept d'égalité : clé ou verrou". Résoudre ce type de problème s'apparente à une tâche complexe si on ne détaille pas la question avec des questions intermédiaires. Parmi les activités que nous proposons, deux abordent cette question de l'égalité entre droites "M. Pythagore, encore vous !" et "M. Thalès, encore vous ?". On retrouve également cette question dans les activités flash.
- **La symétrie**. Là encore, on retient que deux figures sont égales lorsqu'elles sont superposables. On peut dire alors que deux figures sont symétriques (par rapport à une droite, par rapport à un point) lorsqu'elles sont superposables et on évacue ainsi le problème lié au retournement de figures.

1.1.4 L'égalité est aussi un symbole

Le signe "=" est parfois utilisé en mathématiques pour d'autres usages que la notion mathématique dont nous avons étudiée la définition dans les sections précédentes. En analyse on trouve des notations comme $u_n = o(n)$ ou $u_n = O(n)$ $[\dots]$, mais aussi $lim_{n\mapsto\infty} f_n = +\infty$. Dans ces notations, le signe "=" est plutôt utilisé comme une abréviation à la place d'énoncés : "Lorsque n tend vers l'infini, la suite $(u_n)_n$ se comportent comme la suite $(n)_n$, "la fonction f n'est pas majorée lorsque n tend vers l'infini", etc. Si on ne rencontre pas un tel usage au collège, le signe "=" peut être utilisé de manière définitionelle, "soit la fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, définie par $f(n) = 2n + 1$". On trouve également au collège l'usage du signe "=" , pour l'affectation de variable : "calculer la valeur du programme de calcul pour $x = 2$, puis $x = 5$, $\dots$". Nous verrons dans la section 1.4 que l'accumulation d'usages, tant du signe que de la notion d'égalité, est source de difficultés et qu'un enseignement prenant acte des ces difficultés, voire les travaillant pour prévenir les confusions, n'est sans doute pas inutile.

1.2 L'égalité vue à travers différentes lectures de revues didactiques et de manuels scolaires

1.2.1 L'égalité : une notion au coeur des apprentissages et en constante évolution du primaire au collège

"*Qu'y a-t-il de plus familier que le signe égal ?*" C'est la question que pose Henri Bareil dans le bulletin vert de l'APMEP n°468 en préambule à l'article de Claudie Missenard-Asselaim qui évoque "*la difficile adolescence du signe égal*" au niveau collège.

En effet, le signe égal est introduit dès l'école primaire. il est d'abord et avant tout employé dans un contexte purement arithmétique pour annoncer un résultat ou une décomposition. Dans les deux cas, l'élève se construit une conception du signe égal étroitement liée à une dynamique de travail ainsi qu'à une lecture "de gauche à droite". Finalement, pour l'élève, il se trouve être le déclencheur d'un processus mathématique : "je vais vers un résultat", "je donne une décomposition d'un nombre entier", ou, plus généralement : "à droite du signe égal se situe la réponse". C'est ainsi que bien souvent l'élève enchaîne les signes $=$ sur sa copie dans le but d'arriver à une réponse quitte à ce que ce signe perde de son sens mathématique pour ne devenir plus qu'un somple outil de ponctuation. Cette utilisation erronée du signe égal est d'ailleurs constatée très tôt dans la scolarité d'un élève[6]. Plus précisément, Laurent Théis évoque, dans sa thèse[7], le fait que, *dès les premières années de primaire, les élèves ont des difficultés à comprendre le signe $=$, une grande majorité de ces enfants considère ce symbole, non pas comme un indicateur d'une relation d'égalité et d'équivalence, mais comme un opérateur après lequel il faut écrire une réponse à l'opération qui le précède.* Claudie Missenard-Asselain affirme à juste raison, "*qu'il est alors bien évident que le statut symétrique de l'égalité peine à voir le jour pour des élèves de primaire*".

Indépendamment et malgré ces difficultés, l'égalité va ensuite acquérir différents statuts tout au long des années collège avec l'apparition du calcul algébrique[8] et des expressions littérales, des équations, des fonctions, du calcul algorithmique, ... mais aussi en géométrie. Sur ce dernier point, Francis Reynes[9] nous fait d'ailleurs remarquer dans son article que les concerptions des élèves autour de l'égalité peuvent s'avérer très déroutantes pour un enseignant. Il ajoute que "*l'algèbre demande une prise de distance vis à vis de l'écriture du nombre, mais que la géométrie, plus encore, un recul par rapport au dessin*". De plus, il faut bien avoir conscience que la géométrie évolue[10] au collège et de ce fait la conception d'objet géométrique aussi. Enfin, dans tous les cas, que ce soit dans le domaine numérique ou dans le domaine géométrique, pour l'élève, il est parfois difficile de distinguer "écriture" et "objet mathématique".

Comme il est noté dans beaucoup d'articles sur l'égalité et notamment dans l'article de Francis Reynes, si l'élève a une bonne connaissance des objets mathématiques qu'il utilises, alors, ses conceptions de la notion d'égalité ne seront que plus évoluées et ainsi meilleures. Réciproquement, si l'élève a une bonne compréhension de la notion d'égalité alors, il reconnaîtra de manière plus efficace les objets mathématiques qu'il manipule et ainsi il ne sera que plus efficace dans l'élaboration de nouveaux concepts mathématiques autour de ces objets. Il est donc légitime de proposer à l'élève des activités diverses et variées. Nous pouvons aussi remarquer que dans le domaine numérique beaucoup d'idées sont exposées autour de l'égalité mais dans le domaine géométrique la notion d'égalité est moins souvent abordée. D'ailleurs, voit-on souvent dans les manuels ou ailleurs des consignes du type "démontrer que $(AB) = (CD)$? Dans le domaine géométrique la question de l'égalité évolue par le biais des objets que l'élève rencontre mais aussi à travers les "différentes géométries" que l'élève va devoir aborder, l'enseignant sera alors mener à soulever certaines questions : Quand peut-on dire que deux droites sont égales ? Quand peut-on dire que deux triangles sont égaux ? Il faudra aussi tout naturellement statuer sur ces questions afin que l'élève puisse mieux faire évoluer ces conceptions sur l'égalité en géométrie mais aussi sur les objets géométriques sur lesquels il travaille.

1.2.2 Comment l'égalité est-elle abordée dans les manuels scolaires ?

Comme le laisse présager la lecture des programmes, très peu de manuels abordent la notion d'égalité de manière frontale. Il suffit de consulter leurs index et leurs sommaires pour se rendre compte de la quasi-inexistence du "égal" ou "égalité". Finalement, peu de manuels se voient munis d'une quelconque institutionnalisation à ce sujet. On observe cependant quelques rares tentatives au niveau des manuels du cycle 4 (5^e et 4^e), le plus souvent liés au chapitre sur le test d'égalité ou sur celui des équations.

---

[6] Au primaire : "*Rendre compte de dynamiques d'évolution par une suite de calculs est extrêmement périlleux. les enfants ont tendance à écrire de fausses égalité comme : $5 - 3 = 2 - 2 = 0$*". Mobiliser les opérations avec bons sens ! de Laurence Balleux, Cécile Goosens et Françoise Lucas, Edition de boeck.

[7] Les tribulations du signe $=$, dans la moulinette de la bonne réponse de Laurent Théis.
Présenté à l'origine comme thèse (de doctorat de l'auteur à l'Université de Sherbrooke), 2003 sous le titre :
Etude du développement de compréhension du signe égal, chez des enfants de première du primaire.
(...) lorsqu'ils étaient en présence d'une équation du type "$a = b + \_$", par exemple, lorsqu'ils devaient compléter "$5 = 2 + \_$", ils étaient persuadés que l'inconnue correspondait à 7, qui est la somme des deux autres nombres présents dans l'équation : $a + b$

[8] Il est nécessaire ici d'évoquer le travail d'Yves Chevallard et, notamment ses articles parus dans les revus Petit x n°5 - 1984, Petit x n°19 - 1989 et Petit x n°23 - 1989/1990 sur *le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège.* Ce passage est évoqué comme une réelle rupture.

[9] Nous faisons référence ici à l'article paru dans la revue Petit x n°35, *le concept d'égalité : clef ou verrou ?* de Francis Reynes.

[10] Référence au *trois paradigmes géométriques* établis par Ferdinand Gonseth.
La géométrie dans l'enseignement secondaire et en formation de professeurs des écoles : de quoi s'agit-il ? de Bernard Parzysz.
Un article est toujours disponible à l'adresse suivante : $http://math.univ-lyon1.fr/irem/IMG/pdf/quad17\_BParzysz\_06.pdf$.
A la recherche d'une cohérence entre géométrie de l'école et géométrie du collège. De Catherine Houdement, Irem de Rouen. Article paru dans la revu Repère-Irem n°67 - Avril 2007.

Les définitions données dans les manuels de 5^e sont le plus souvent schématisées de façon parfaitement "symétrique" par rapport au symbole = avec l'introduction du vocabulaire : premier membre et deuxième membre ou membre de gauche et membre de droite. Cette conception de l'égalité semble étroitement liée au fait que, conformément aux programmes, pour tester une égalité, on vérifie d'une part la valeur du premier membre et d'autre part la valeur du deuxième membre. Comme nous l'avons vu précédemment ce type d'institutionnalisation est en rupture par rapport à la présentation que nous faisons aux élèves en primaire ainsi qu'en 6^e. Quel type d'approche doit-on alors proposer aux élèves pour arriver à une telle trace écrite ? C'est la question que nous pouvons alors légitimement nous poser.

Dans les manuels de 4^e est évoquée l'équivalence : "$a = b$ est équivalent à $a - b = 0$". Celle-ci justifie le travail "vertical" de la résolution d'équation mais aussi avant cela du va et vient dans un programme de calcul simple entre le nombre de départ et le nombre d'arrivée. En effet, cette équivalence permet ensuite d'introduire les deux règles suivantes : si $a = b$ alors quelque soit c, $a + c = b + c$ ou $a - c = b - c$ puis si $a = b$ alors quelque soit k différent de 0, $ka = kb$. Par rapport au niveau 5^e, nous notons encore une autre évolution du statut de l'égalité et une nouvelle rupture. Là aussi, une nouvelle approche doit-être proposée aux élèves.

1.2.3 Quelles activités propose-t-on autour de la notion d'égalité dans les manuels et les brochures pédagogiques ?

Il paraît difficile de répertorier l'ensemble des activités pouvant aborder la notion d'égalité. Néanmoins, nous pouvons discerner différentes démarches autour de cette notion qu'il nous semble intéressant d'approfondir dans l'enseignement au collège.

D'une part, nous pouvons inciter les élèves à mener une réflexion frontale sur la notion d'égalité et sensibiliser l'élève à l'idée que l'égalité possède différents statuts. Les consignes peuvent être formulées de la manière suivante : "Trier les égalités suivantes...", "Classer ces égalités...", "Reformuler les égalités suivantes sous forme de phrases..." ou encore "Expliquer chacune de ces égalités à l'aide de vos propres mots...". De plus, à travers ces activités nous pouvons généralement faire apprécier aux élèves l'évolution de la notion d'égalité et du statut du symbole =.

Ce type de remarque pourrait marquer un deuxième temps dans l'étude de l'égalité. En effet, il est important de faire prendre conscience à l'élève que l'égalité évolue en fonction des objets mathématiques étudiés mais aussi en fonction du type de réflexion que nous adoptons autour de ces objets ; par exemple, d'un point de vue numérique avec le parallèle entre l'évolution du concept de l'égalité et l'évolution du statut de la lettre[11] mais aussi en géométrie avec les différentes définitions de l'égalité que nous pouvons établir en fonction des objets géométriques étudiés et en fonction du type de géométrie dans laquelle nous évoluons avec les élèves.

D'autre part, et enfin, il faut aussi employer un temps de réflexion sur les aspects les plus fondamentaux de l'égalité. Par exemple, pour Francis Reynes[12] que nous nous permettons de citer partiellement : "*La propriété fondamentale et essentielle de l'égalité*" est la substitution. "*Cette propriété n'est pas difficile à comprendre, mais sa maîtrise demande un apprentissage authentique dont il ne faut pas sous-estimer l'effort qu'il requiert : sa mise en oeuvre nécessite en effet un travail sur les écritures auquel les élèves ne sont pas habitués*". En géométrie, il souligne aussi "'*Un exemple remarquablement important (et intéressant à traiter) qui est celui de la traduction de l'alignement de trois points qui est accessible dès la 6^e*". Nous pouvons aussi et entre autre évoquer le travail sur la notion de valeur exacte et celle de valeur approchée, qui peut être relié avec le travail sur l'affichage de la calculatrice parfois trompeur et source d'erreurs[13].

En conclusion, si nous regardons d'un peu plus près les différentes références littéraires que nous pouvons rencontrer à ce sujet alors, nous remarquons que de nombreuses activités liées à de nombreuses approches du signe égal

---

[11] Entre aute, nous pouvons nous référe à l'article "*L'accès au littéral et à l'algébrique : Un enjeu du collège* de Jean Claude Duperret et Jean Claude Fenice - Irem de Reims extrait de la Revue Repères-Item n°34 de Janvier 1999. Dans cet article - à la page 42 -, il est mentionné le fait que "*...Pour l'élève, entre la recherche d'un nombre inconnu, en quelque sorte préexistant et désigné provisoirement par une lettre acceptée comme un nombre, et les manipulations sur une égalité d'expressions littérales où les lettres ne désignent plus rien de précis, il y a une énorme rupture de contrat*". De plus, "*calculer sur des lettres", à savoir transformer une expression littérale pour prouver son identité à une autre. Les élèves doivent à ce niveau, de dégager des vérifications numériques, et faire, confiance aux règles de transformation pour validé l'identité... C'est un cap d'abstaction difficile.* Ces difficultés, évoquées dans le paragraphe II, sont aussi énoncées par Claudie Missenard-Asselain dans l'article que nous avons déjà mentionné plus haut, *La difficile adolescence du signe égal*.

[12] Nous faisons toujours référence ici à l'article paru dans la revu Petit x n°35, *le concept d'égalité : clef ou verrou ?* de Francis Reynes, page 64

[13] La touche "=" à tendance à disparaître au profit de la touche "exe". La calculatrice exécute un calcul et affiche une indication ou une information à propos de celui-ci. Que se passe-t-il dans la tête d'un élève de 6^e lorsque qu'en il tape 2/3 la calculatrice affiche 0,666666667 ?

peuvent être envisagées et voir le jour. Pour finir, comme le dit clairement Claudie Missenard-Asselain[14] : *l'égalité est en proie à de multiples évolutions au collège, dans les programmes, nous constatons différentes ruptures liées à son enseignement. L'objectif est d'ailleurs ambitieux : l'élève doit, à la fin du collège, appréhender le mieux possible le symbole égal dont l'utilisation peut être "riche et complexe"*. C'est donc au professeur d'assurer la transition entre les conceptions personnelles des élèves et les différents statuts de l'égalité. Comme nous l'avons déjà dit précédemment, pour effectuer cette transition on constate, à travers les différents articles, que les approches enseignantes proposées sont très diverses mais toutes s'attachent à donner du sens à l'égalité et chacune de ces approches peut être utilisée à différents moments de l'année scolaire mais aussi de la scolarité pour former un tout ; Claudie Missenard-Asselain termine en disant : "*Plutôt que de s'étonner devant l'échec et la perte de sens, on devrait tenter [...], mais en n'oubliant pas, en parallèle avec la nécessaire pratique des mécanismes, de revenir au sens des choses, par petites touches, à l'occasion, peu à peu et souvent. [...] Ainsi en est-il des signes mathématiques comme des individus : à travers évolutions, ruptures, et discontinuités, émerge peu à peu leur vraie personnalité, riche et complexe*". Ainsi, cela permettrait à l'élève de multiplier ses points de vue sur l'utilisation du signe égal et, peu à peu, d'améliorer ses conceptions au niveau de la notion d'égalité mais aussi, et par conséquence, au niveau des objets mathématiques qu'il rencontre.

1.3 Comment les élèves rencontrent l'égalité au collège

Ce point rapide sur la notion d'égalité nous a donné l'occasion de réaliser une typologie des modes d'apparition de cette notion au cours de l'enseignement des mathématiques au collège. Nous avons retenu quelques-uns de ces modes, que nous avons qualifiés par leur statut le plus saillant. Puis, nous avons parcouru le programme du collège et nous avons établi un tableau synoptique présenté dans la section 1.3.2, qui indique quels modes de la notion d'égalité sont en question dans les différents points du programme.

1.3.1 Une typologie des modes de la notion d'égalité rencontrés au collège

Les différents modes que nous retenons pour la notion d'égalité diffèrent entre eux essentiellement par leur usage. Selon l'objectif du problème à résoudre, selon la question en jeu qui nécessite un usage direct ou indirect de l'égalité, ce n'est pas tout à fait le même aspect de l'égalité qui est convoqué et ce ne sont pas les mêmes propriétés qui sont utilisées.

- **Calcul (processus de réécriture orienté vers l'expression d'un résultat)**
  L'égalité est le lien entre différentes expressions qui sont les étapes d'un calcul vers un résultat. La manipulation de cet aspect de l'égalité nécessite d'être bien conscient de la nature des objets qui sont liés par l'égalité : nombres entiers, nombres rationnels, expressions littérales,... Lorsque nous demandons de calculer $\frac{1}{2}+\frac{6}{8}$, nous attendons comme résultat : $\frac{1}{2}+\frac{6}{8}=\frac{5}{4}$, et nous n'attendons ni $\frac{1}{2}+\frac{6}{8}=1,25$, ni $\frac{1}{2}+\frac{6}{8}=\frac{10}{8}$. La règle du jeu implicite c'est que le résultat est non seulement un élément du même type que l'objet à calculer mais en plus il doit être sous forme canonique.
  Nous nous étonnons parfois que les élèves manipulent l'égalité comme un symbole de réécriture, c'est-à-dire comme un symbole orienté : ils remplacent parfois le signe "=" par le signe $\rightarrow$ dans une succession d'étapes de calcul. Mais cela n'est pas étonnant. Lorsqu'on leur demande d'effectuer $2(2\times 3)+2(2\times 3)$, on attend $2(2\times 3)+2(2\times 3)=24$ (éventuellement $2(2\times 3)+2(2\times 3)=12+12$). On n'attend pas $2(2\times 3)+2(2\times 3)=2\times 3+2\times 3+2\times 3+2\times 3$ et encore moins $2(2\times 3)+2(2\times 3)=11+13$.
  Lorsqu'on leur demande d'effectuer $2(x+3)$, on attend $2(x+3)=2x+6$, et non $2(x+3)=x+5+x+1$, ni même $2(x+3)=x+3+x+3$, l'orientation est bien implicitement attendue.
  Ainsi, ce mode d'utilisation de l'égalité gagne alors à être éclairé par l'approche venant de la théorie des types, qui met en lumière les deux aspects importants que sont la nature des objets entre lesquels l'égalité nous intéresse, et la notion de forme normale, c'est-à-dire la forme canonique des résultats. Notons que la transitivité, qui assure la permanence de l'objet entre les différentes étapes du calcul, est pleinement utilisée.
- **Différentes écritures d'un même objet**
  Cet usage de l'égalité est peut-être le plus direct, c'est en tout cas celui où l'on utilise complètement toutes les propriétés de l'égalité (et toutes les approches de la notion). Ce mode est concerné par les règles de calcul (distributivité, décomposition des fractions par exemple). Il est mis en oeuvre dans les exercices de développement/factorisation, dans les programmes de calcul. A la différence du mode que l'on a appelé "calcul", la symétrie de l'égalité est utilisée pleinement. L'activité "Le labyrinthe"' que nous proposons vise à rendre un

[14] Nous faison encore référence à l'article paru dans le Bulletin vert de l'APMEP n°468, *la difficile adolescence du signe égal* de Claudie Missenard-Asselain.

peu plus familières aux élèves les propriétés de l'égalité. Mais les propriétés relationnelles ne sont pas les seules pertinentes pour l'usage considéré ici de différentes formes d'écriture, les aspects de l'égalité que met en lumière l'approche "théorie des types" , sont aussi sous-jacents. En effet, l'égalité est ultimement vérifiée par le passage à la forme normale. C'est vrai pour $2 \times 4 = 1 + 7$ comme pour $5(2x + 4) + 3x = 10x + 20 + 3x$ ou encore pour $\frac{18}{12} = \frac{3\times2\times3}{3\times2\times2}$. Que les élèves prennent conscience de la nature des objets entre lesquels est énoncée l'égalité est crucial, c'est un des enjeux de l'enseignement. Par exemple, on s'attend à ce que les élèves comprennent que $\frac{\pi}{3}$ n'est pas égal à $0,04705$. Nous avons justement proposé des activités qui visent une telle prise de recul par les élèves : "Une pluie d'égalités" et "Calculatrices et écritures".

- **Assignation** (ou affectation) Il s'agit ici d'utiliser le signe "=" pour nommer un objet, pour donner une valeur à une variable.
  Exemples : $A = 2x + 3$
  Calculer ...pour $x = 3$ ... ? Le signe "=" peut aussi être utilisé comme symbole d'affectation ou d'assignation, comme par exemple lorsqu'on se propose de calculer $2x + 3$ pour $x = 3$. Ce nouveau statut du signe "=" apparait au collège et joue un rôle important dans le calcul d'expressions littérales et d'utilisation de formules de périmètres, aires ou volumes et peut être abordé donc dès la 6^e. C'est une capacité attendue dès la classe de 5^e : "tester si une égalité comportant un ou deux nombres indéterminés est vraie lorsqu'on leur attribue des valeurs numériques" ou encore en 4^e : "calculer la valeur d'une expression littérale en donnant aux variables des valeurs numériques".
  Ce statut est souvent problématique pour les collégiens, car, encore une fois, le signe "=" ne conduit pas directement à un résultat. On peut trouver par exemple l'utilisation d'affectation avec le tableur, où écrire dans la cellule $A2 := 3 * A1 + 4$ pourra se lire "J'assigne à la cellule $A2$ le résultat de la somme de 4 et du produit de 3 par la valeur assignée à la cellule $A1$". De même, la calculatrice est également un outil où l'assignation apparaît, avec la touche *sto* ► (TI) ou *STO* (Casio). Ici $x = 3$ devient $3 \blacktriangleright X$, et l'affectation devient plus "imagée". On soulignera qu'avec certaines calculatrices, le signe "=" est uniquement utilisé pour tester si une égalité est vraie ou non. Taper "$X = 3$" peut renvoyer FAUX ou VRAI en fonction de la valeur affectée à X.
- **Proposition/relation**
  Nous utilisons cette dénomination pour qualifier les situations dans lesquelles l'égalité entre deux objets permet de fabriquer une proposition, et que l'on s'intéresse justement à la validité de cette proposition. C'est typiquement le cas des équations. Dans cet usage de l'égalité, ce sont les aspects logiques qui sont en jeu : l'égalité est une relation et en tant que telle permet de construire des énoncés des énoncés qui sont des propositions, c'est-à-dire que l'on s'intéresse au fait que ces énoncés soient vrais ou faux. Ici encore, plusieurs notions se rencontrent, des notions qui sont trop abstraites pour être explicitement présentées aux élèves, et dont les différences subtiles rendent leur enseignement particulièrement délicat. Les élèves doivent appréhender en même temps une notion d'égalité entre objets qui fabrique un énoncé, et une notion d'équivalence entre énoncés[15].

[15] Deux énoncés portant sur les mêmes variables sont équivalents lorsque, pour chaque affectation des variables, ils sont en même temps, tous les deux vrais ou tous les deux faux.

1.3.2 Les tableaux récapitulatifs de l'occurrence de la notion d'égalité dans les programmes de mathématiques du collège

Utilisation de l'égalité – programme collège

- Calcul
  (vers une forme normale ou un résultat)
  Que l'on retrouve dans tous les points du programme
- Différentes écritures (accès à) d'un même objet
- Assignation /substitution
  Poser par exemple x :=2,5 cm. Utilisation qui est omniprésente en grandeurs et mesures et qu'on appelle plutôt assignation.
  Une expression étant donnée ou implicite par exemple f(x)=3x-1, donner f(5). Q il s'agit de procédé de calcul, d'expression littérale ou bien encore de fonction, on parle de substitution.
- Proposition/relation
  L'égalité permet d'écrire une proposition. Qui sert à énoncer et utiliser des règles de calcul telles la distributivité, l'associativité … Mais qui sert aussi à définir un objet. C'est aussi cette dimension de l'égalité ``relation'' qui permet d'écrire des équations.

Niveaux	6ème	5ème	4ème	3ème
Proportionnalité.	Égalité de processus : dans chaque colonne la même opération permet de passer d'une ligne à l'autre). 5% = 5/100	Reconnaître un tableau de proportionnalité	Égalité des produit en croix	
Fonctions		Équivalence entre programmes de calculs différents	Équivalence entre programmes de calculs différents	Différentes écritures de la définition d'une fonction. Différentes écritures d'une image. f(x) pour x=5 est f(5)
Organisation, représentation et traitements de données.		Différentes écritures d'un même nombre en lien avec les fréquences.	Moyenne définition et calcul	
Statistiques				Quartiles Référence au sens de l'égalité : pour les médianes (attention au sens linguistique)
Probabilités				Différentes écritures d'un même événement. P(« impair ») = P(« non Pair »)

Niveaux	6ème	5ème	4ème	3ème
Calculs numériques	Calculs (opérations sur les nombres entiers et décimaux) 3/10 = 0,3	Priorité des opérations Nombres en écritures fractionnaires Ex : 5/3 + 2/3 = (5+2)/3 Ex : 5/3 + 2/3 = (5+2)/3 Développer, factoriser Développer, factoriser	Division de nombres en écritures fractionnaires, nombres relatifs et puissances Division de nombres en écritures fractionnaires, nombres relatifs et puissances Division de nombres en écritures fractionnaires, nombres relatifs et puissances Développer Développer	Calculs (nombres irrationnels) **PGCD** Racines carrées : (4)^(1/2)=2 Racines carrées : (4)^(1/2)=2 Racines carrées : (AXB)^(1/2)= A^(1/2)XB^(1/2)
Calcul littéral	a/b x b = a a/b x b = a	Ecritures fractionnaires et nombres relatifs Ecritures fractionnaires et nombres relatifs Développer, factoriser Développer, factoriser Tester une égalité Tester une égalité	Développer en utilisant la double distributivité développer en utilisant la double distributivité Résoudre une équation	Identités remarquables Identités remarquables Identités remarquables Factoriser par des expressions Factoriser par des expressions Systèmes et inéquations, Équations produits
3.1 Figures planes.	Cercle Bissectrice d'un angle Proposition/propriété : Symétrie axiale Médiatrice Angles ; droites M Milieu de [OA] et OM = MA	Parallélogramme Inégalité triangulaire Triangle isocèle Angle alterne-interne Symétrie centrale Inégalité triangulaire Somme des angles d'un triangle	Bissectrice d'un angle Théorème de Pythagore Propriété de Thalès Cosinus d'un angle	Théorème de Thalès Cosinus, sinus, tangente d'un angle
3.2 Figures dans l'espace.	Pavé droit et cube	Prisme droit et cylindre de révolution	Pyramide et cône de révolution	Sphère et Boule
3.3 Transformations du plan	Propriétés : conservation des longueurs, des aires, des angles, etc.			
4.1 Longueurs, masses, durées. **4.2 Angles** **4.3 Aires.** **4.4 Volumes.**	Assignation			
4.5 Grandeurs et mesures	objet-mesure et objet-grandeur Lien entre le coefficient de proportionnalité et les conversions			

1.4 Quelques erreurs fréquentes des élèves

Pour les collégiens, l'égalité est avant tout un symbole : le signe "=". Et en effet, ce que l'on peut observer de la compréhension des élèves par rapport à la notion de l'égalité, c'est surtout leur manipulation du signe "=" dans leur pratique mathématique. C'est à partir de cette manipulation correcte ou erronée, que l'on peut essayer de rendre compte de leur compréhension de la notion. Nous nous intéressons dans ce chapitre aux erreurs des élèves lorsqu'ils manipulent le signe "=".

1.4.1 Quelques erreurs fréquentes

Même si l'écriture dite "en ligne" : $a = b = c = \ldots$ est fautive[16], à strictement parler, nous l'acceptons de nos élèves, et il nous arrive d'ailleurs de la pratiquer au tableau. Sans la remettre en cause, il faut néanmoins avoir conscience qu'elle est responsable de certaines difficultés des élèves. En effet, elle déclenche une confusion entre le signe "=" et l'action de réécriture d'un objet à calculer vers le résultat du calcul. Elle réduit ainsi l'égalité à cette manipulation orientée. Pour beaucoup d'élèves, le symbole de l'égalité ne sert qu'à indiquer le sens des opérations : on écrit de gauche à droite, l'opération est à gauche du signe "= " ; la réponse à un calcul se met toujours à droite. Le signe "=" sert en quelque sorte de symbole de conversion vers la forme normale. Ceci n'incite pas les élèves à prendre conscience de toutes les propriétés de l'égalité ; les écritures du type $6 = 4 + 2$ ne leur sont pas naturelles, (une telle écriture "à l'envers" leur est difficilement concevable). Et cela devient un problème lorsqu'il est nécessaire de manipuler des égalités "à l'envers" lors d'une simplification de fraction

$$\frac{35}{40} = \frac{5 \times 7}{5 \times 8} = \frac{7}{8}.$$

Cet obstacle perdure encore en 3^e, lorsqu'il s'agit de trouver une forme canonique aux racines carrées :

$$\sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = \sqrt{25}\sqrt{2} = 5\sqrt{2}.$$

On peut aussi constater que des élèves ont du mal à concevoir une égalité de la forme : $4 + 2 = 4 + 2$ ou encore $3 = 3$, ce qui tend à confirmer l'hypothèse que le signe "=" doit être, pour eux, synonyme d'une action, cette interprétation occulte la symétrie de l'égalité.

Nous répertorions ci-dessous quelques erreurs d'élèves sur l'utilisation du symbole "=" que nous avons remarquées et que nous avons classées en trois catégories.

- Les erreurs faisant intervenir une utilisation intempestive du signe "=".
- Les erreurs provenant d'un déficit de connaissance sur la notion étudiée.
- Les erreurs entre valeur exacte et valeur approchée.

Les erreurs faisant intervenir une utilisation intempestive du signe "="

Plutôt que de penser le signe "= " comme un symbole qui placé entre deux objets permet de fabriquer des énoncés, l'élève l'utilise soit comme séparateur entre deux étapes de calculs, soit pour marquer un calcul en début de ligne. La dérive souvent observée est que les élèves l'utilisent alors en oubliant sa signification, c'est-à-dire sans tenir compte que le membre de droite doit bien être égal au membre de gauche.

EXEMPLE : En réponse à la consigne *calculer astucieusement* $6 + 17 + 4$, nous avons comme trace écrite d'élève :

$$6 + 17 + 4 = 6 + 4 = 10 + 17 = 27$$

ou encore
$6 + 17 + 4$
$= 6 + 4 + 17$
$= 10 + 17$
$= 27$

Les exercices faisant intervenir des programmes de calcul sont souvent source d'utilisation intempestive du signe "=". Il est intéressant alors d'en profiter pour soulever un débat dans la classe sur son utilisation.

[16] En effet, l'égalité entre deux termes est une expression, mais comment comprendre l'écriture $a = b = c$, c'est en fait un raccourci pour $a = b$ et $b = c$.

EXEMPLE : Pour calculer $7 - 5 \times 2$, certains de nos élèves écrivent

$$7 - 5 \times 2 = 10 - 7 = 3$$

(au lieu de -3 attendu en réponse). Les élèves réalisent une inversion : la priorité de la multiplication les pousse à faire ce calcul en premier, mais leur écriture transcrit leur démarche mentale et ils écrivent ce résultat qu'ils ont calculé en priorité au lieu de respecter l'ordre d'écriture proposée (et qui correspond à l'expression en question). Calculer en colonne peut résoudre ce problème (mais la dérive déjà évoquée est que le signe "=" risque de devenir un symbole de début de ligne...).

Nous remarquons aussi que les élèves manipulent le signe "=" lorsqu'ils ont besoin d'un symbole pour formuler un énoncé dont le sens leur paraît proche de l'égalité. Ils utilisent alors improprement le signe "=", faute de comprendre suffisamment son sens et alors les limites de son utilisation.
EXEMPLE : Pour indiquer une échelle $\frac{1}{500}$, ils écrivent 1 cm = 5 m.

Notons enfin que le signe "= " est souvent utilisé pour remplacer le verbe "être" lors d'une phrase réponse, ils en arrivent parfois à écrire des choses étranges.
EXEMPLE En réponse à la question " Quel est le double de 3 ?", on peut lire $3 = 6$.

Les erreurs provenant d'un déficit de connaissance sur la notion étudiée

Les élèves font parfois des erreurs qui, même si elles apparaissent sur les écritures d'égalités, ne sont pas tant dues à une mauvaise utilisation du signe "=" qu'à des lacunes sur les objets mathématiques concernés. Ceci permet de souligner que la compréhension de l'égalité est indissociable de la bonne compréhension des notions mathématiques dans lesquelles des égalités s'expriment. Relevons quelques exemples :

- L'écriture d'égalité entre des expressions littérales est extrêmement fréquente. Par exemple lorsqu'il s'agit que les élèves s'approprient les techniques de développement et de factorisation. Mais les élèves doivent en même temps s'approprier la notion d'expression littérales et les difficultés surgissent.
  EXEMPLE Lors d'une réduction d'une expression littérale comme $3x + 5x + 2$ on peut obtenir une trace écrite comme suit : $3x + 5x + 2 = 8x + 2 = 10x$.
  L'erreur ici n'est pas une utilisation abusive du signe égal mais bien une méconnaissance de la notion de réduction, qui elle est consubstantielle à une bonne manipulation de l'égalité. Autrement dit, avant même de maitriser la forme canonique des expressions littérales, les élèves doivent comprendre la signification de ces objets.
  Nous pouvons remarquer (avec une certaine ironie) que lorsqu'on demande de résoudre l'équation $5x + 2 = 7x$, les élèves peuvent être surpris puisqu'on ne cesse de leur répéter par ailleurs que $5x + 2$ est différent de $7x$.
- Des élèves essaient parfois d'écrire de mémoire une égalité. Mais s'ils se souviennent d'une forme d'écriture, ils ne cherchent pas à se souvenir d'une signification. On peut regretter qu'ils n'aient pas intégré le fait que l'utilisation du signe "=" permet de fabriquer un énoncé, ou plus précisément une proposition, qui a la propriété d'être vraie ou fausse.
  EXEMPLES
  - Les élèves essaient de de souvenir de l'algorithme d'Euclide. Ils utilisent leurs calculatrices pour déterminer quotients et restes, et ils écrivent
    $a = b + q_1 \times r_1$
    $b = r_1 + q_2 \times r_2$
    Ainsi les écritures sont complètements fausses (inversion des signes + et $\times$), l'élève n'a pas conscience que l'algorithme repose sur une division ni ne pense à vérifier son écrit.
  - Un autre exemple d'erreur, signalant à la fois un manque de maîtrise de la notion étudiée et un déficit de compréhension de l'égalité, s'observe lorsque les élèvent rencontrent les tests d'égalité (ou contraposée du théorème de Thalès et Pythagore). Les élèves mettent le signe "= " avant même la vérification de l'égalité des membres.
- Des erreurs de notation utilisant le signe "=" révèlent également que la connaissance d'objets mathématiques n'est pas suffisante.
  EXEMPLES
  - Lors de l'utilisation de la trigonométrie ou pour les fonctions, on relève fréquemment des écritures erronées comme la suivante :

$$f : 7 = 3 \times 7 + 4 \text{ au lieu de } f : 7 \mapsto 3 \times 7 + 4$$

– La géométrie n'est pas en reste avec des erreurs de notation, on trouve des écritures comme

$$(AB) = (CDE)$$

La faute n'est pas tant sur l'égalité en elle-même que sur le fait que (CDE) ne signifie rien. L'élève invente une notation.

Il existe bien évidemment d'autres erreurs et essayer de toutes les lister serait peine perdue. Nous mentionnons ci-dessous un dernier type d'erreurs qui révèle à la fois une utilisation intempestive du signe "=" et un déficit de connaissance de notions mathématiques précises.

Les erreurs entre valeur exacte et valeur approchée :

Des élèves écrivent : $\sqrt{3} = 1,7$ ou encore $\frac{1}{3} = 0,33$. De telles erreurs d'utilisation de l'égalité plutôt que d'un symbole indiquant une approximation entraînent des confusions, qui peuvent ensuite entraîner des problèmes lors d'une substitution. Elles peuvent alors être l'occasion d'une explicitation du sens de l'égalité en même temps qu'un retour sur la bonne appréhension de la différence entre nombres réels et nombres décimaux.

1.4.2 En guise de conclusion, quelques propositions ...

Suite à notre réflexion sur l'apprentissage de la notion d'égalité, et en particulier, suite aux erreurs observées des élèves et aux diverses "errances" que peut susciter l'emploi du signe égal, il nous a paru important que l'enseignant de mathématiques prenne conscience de son attitude didactique vis à vis de l'égalité. Nous précisons ici, à titre d'exemple, certains choix didactiques et pédagogiques qui ont découlé de notre réflexion commune et nous avons décidé d'adopter, et qui concernent plus particulièrement l'égalité dans le domaine du numérique.

Tout d'abord en 6^e, pour ce qui est du domaine numérique, il ne sera pas demandé aux élèves de détailler un calcul du type $17 + 6 + 3 + 4$. Certes, l'élève pourra utiliser un brouillon[17] où il effectuera des calculs intermédiaires en utilisant ses propres conceptions des calculs et de la façon de les poser mais il ne lui sera demandé comme "trace écrite" que le résultat. De sorte que l'élève utilisera le signe $=$ dans un seul registre, celui de l'annonce d'un résultat. C'est à dire qu'il écrira : $17+6+3+4 = 30$ en termes de trace écrite tandis que les étapes et les écrits intermédiaires qui lui auront permis d'arriver au résultat resteront sur un brouillon. L'emploi du signe $=$ est ainsi indirectement institutionnalisé dans son emploi : annonce de la forme canonique, c'est à dire comme symbole de réécriture. Les autres utilisations du signe $=$ faites par l'élève sur son brouillon, justes ou erronées, sont alors oubliées. Selon les programmes concernant "le calcul posé, les nombres doivent rester de taille raisonnable et aucune virtuosité technique n'est recherchée". On considérera que l'élève doit être à même d'effectuer ce calcul mentalement. D'ailleurs, nous pensons que ces calculs doivent être travaillés essentiellement lors d'activités de calcul réfléchi[18] ou de calcul mental[19]. Nous pouvons ajouter que lors de résolutions de problèmes simples ou complexes, on exige des élèves que chaque étape de la résolution soit constituée d'une opération effectuée et accompagnée d'une phrase explicative (La succession de ces étapes devant constituer un ensemble cohérent et permettant d'arriver à la résolution du problème) ; ainsi l'élève n'est pas confronté à une expression numérique constituée de plusieurs opérations et faisant appel à une quelconque technique "experte" de résolution telle que l'application des priorités opératoires. Pour finir, en 6^e, nous exigerons des élèves qu'ils détaillent les calculs "étape par étape" uniquement dans deux situations :

1) Les calculs du type $a \times b/c$: nous commencerons alors à introduire et à institutionnaliser les deux types de présentations suivants :

$A = 123 \times 3/6$	$120 \times 3/6 = 120 \times 3 \div 6$
$A = 123 \times 3 \div 6$	$120 \times 3/6 = 360 \div 6$
$A = 360 \div 6$	$120 \times 3/6 = 60$
$A = 60$	

[17] A l'occasion, ce brouillon peut-être exploité par l'enseignant afin qu'il puisse mieux comprendre et apprécier le cheminement de l'élève. Par l'intermédiaire de ce brouillon, l'enseignant peut ainsi mieux apprécier la technique opératoire de l'élève, dépister ses erreurs de calcul ou de raisonnement numérique (utilisation des priorités opératoires, bonne compréhension du problème,... etc.) et bien sûr voir s'il manipule la notion d'égalité de façon pertinente. Néanmoins ce brouillon est une trace du travail personnel de l'élève, en aucun cas, bien sûr, il ne sera utilisé dans une évaluation sommative.

[18] "Le calcul réfléchi consiste souvent à rendre un calcul plus simple, en procédant par étapes plus nombreuses, mais en s'appuyant sur des résultats immédiatement disponibles. (...) Le calcul réfléchi s'oppose au calcul automatisé en cela que les procédures construites sont avant tout personnelles... En dehors de quelques procédures appelées à devenir automatisées, l'explication des procédures ne doit pas donner lieu à l'institutionnalisation particulière, car ce qui est simple pour un élève ne l'est pas nécessairement pour un autre,..." [EDUSCOL2].

[19] "La capacité à calculer mentalement est une priorité et fait l'objet d'activités régulières. La maîtrise des différents moyens de calcul doit devenir suffisante pour ne pas faire obstacle à la résolution de problèmes." Bulletin officiel spécial n°6 du 28 août 2008 - 6^e - page 15.

2) De même pour les calculs de périmètre du cercle ou de calculs d'aires et de volumes :

périmètre(cercle) $= 2 \times Rayon \times \pi$
périmètre(cercle) $= 2 \times 5 \times \pi$
périmètre(cercle) $\approx 10 \times 3,14$
périmètre(cercle) $\approx 31,4$(en cm)

Ces deux types de calculs interviennent, selon nos progressions en 6^e, de façon épisodique tout au long de l'année et de manière plus approfondie vers la fin de l'année (troisième trimestre). Cela permet ainsi la transition vers les calculs qui seront effectués en 5^e, puis en 4^e, avec en premier lieu les calculs des valeurs des expressions numériques en suivant les priorités opératoires puis avec les expressions littérales lorsqu'il s'agit, entre autre, de réduire, de développer ou bien de factoriser une expression[20]. Les calculs seront présentés de la même manière et l'enseignant exigera des élèves qu'ils présentent de cette façon :

$C = 9 - 5 \times 1,5$	$B = 6 \times (x + 3)$
$C = 9 - 7,5$	$B = 6 \times x + 6 \times 3$
$C = 1,5$	$B = 6x + 18$

L'objectif étant de limiter les utilisations erronées du signe "égal" évoquées dans les parties précédant la section 1.4. En ce qui concerne le cycle 4, une grande rigueur est exigée envers les élèves et les égalités successives écrites en ligne sont évitées le plus possible. Le traitement "vertical" du calcul étape par étape est privilégié tout au long du cycle 4 et jusqu'à la fin de la 3^e. Au passage, un autre point important du programme de 5^e est le test d'égalité sur lequel nous voulons nous attarder. Lorsque l'élève doit répondre à une question du type : "tester l'égalité $12 + 7x = 48 - 2x$ pour $x = 4$", nous exigeons de l'élève qu'il sépare bien les calculs qui constituent ce test de l'égalité, il présentera par exemple de la manière suivante :

Si $x = 4$ alors

D'une part	$12 + 7x = 12 + 7 \times 4$
	$12 + 7x = 12 + 28$
	$12 + 7x = 40$
D'autre part	$48 - 2x = 48 - 2 \times 4$
	$48 - 2x = 48 - 8$
	$48 - 2x = 40$

Donc pour $x = 4$ l'égalité $12 + 7x = 48 - 2x$ est vraie[21].

Cette présentation sera "ritualisée" tout au long du collège et sera notamment employée pour démontrer qu'un triangle n'est pas rectangle en 4^e.

Pour terminer, ce n'est qu'en fin de 4^e et en 3^e qu'une plus grande liberté peut être laissée aux élèves, une fois que leurs conceptions sur l'utilisation des égalités sont plus avancées. C'est-à-dire lorsque les élèves évitent de trop grosses erreurs d'utilisation de celles-ci et lorsqu'ils sont à même de se corriger si on souligne une erreur de leur part. Par exemple pour des situations simples telles que la simplification d'une racine, on autorisera par exemple la présentation du calcul en ligne suivant :

$$\sqrt{75} = \sqrt{25 \times 3} = \sqrt{25} \times \sqrt{3} = 5 \times \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$$

Même si l'on considère cette écriture fautive[22], elle permet toutefois, et en toute connaissance de cause, d'écrire le "chemin plus ou moins rapide" qui nous mène ici vers une forme canonique... A l'occasion, cette présentation en ligne permet ainsi de travailler, avec l'élève, la lecture des résultats donnés par la calculatrice, le sens de lecture de l'écran de la calculatrice s'effectuant de gauche à droite. En effet, les élèves vont parfois un peu vite en besogne. Prenons à titre d'exemple ici une somme de fractions, si nous lorsque la calculatrice affiche : $3/14 + 3/10 = 18/352$[23] les élèves l'écrivent cela sans se poser plus de question. En 4^e et en 3^e, les élèves sont énormément tentés de ne pas détailler ce type de calcul. L'enseignant doit alors pousser l'élève à réfléchir sur les étapes intermédiaires qui mènent

[20] "...la succession d'opérations, si elle est nécessaire, se fait étape par étape." Bulletin officiel spécial n° 6 du 28 août 2008 - 5^e - page 21.

[21] Bien sûr d'autres consignes seront données aboutissant à des égalités fausses, le but n'est pas d'obtenir forcément à des égalités justes, ce serait une grossière erreur.

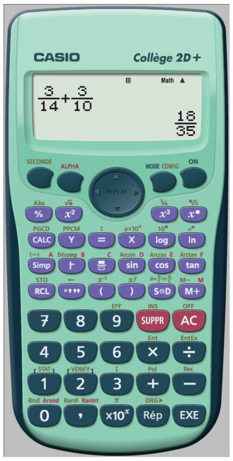
[22] C'est à dire si l'on se place dans le contexte de notre étude sur l'emploi du signe égal. Voir "quelques erreurs fréquentes."

[23] Sans le signe "=" qui plus est.

au résultat affiché ; cela permet également de faire comprendre à l'élève que le raisonnement mathématique se fait aussi dans le domaine numérique[24].

Voici un type d'activité qui pourrait-être alors proposée :

ACTIVITE



1) Observez l'écran de la calculatrice ci-contre.
2) Expliquez, en détaillant, comment la calculatrice arrive à ce résultat :

....

3) Pouvez-vous expliquer de la même manière pourquoi la calculatrice affiche l'égalité suivante ?

$$\frac{2}{33}+\frac{4}{55}=\frac{2}{15}$$

....

Un même type d'activité peut-être proposée avec les valeurs affichées par la calculatrice : valeurs exactes ou valeurs approchées.

En géométrie, si l'élève produit des erreurs inhérentes à la notion d'égalité, c'est peut-être et avant tout parce que pour affiner sa perception dans ce domaine, il doit opérer de multiples aller-et-retour entre la géométrie I et II. Nous voulons dire par là que, même s'il emploie un vocabulaire de plus en plus cohérent et si ses conceptions de la géométrie évoluent, il peut toutefois éprouver des difficultés à utiliser la notion d'égalité selon qu'il travaille dans le cadre de la géométrie I ou dans celui de la géométrie II ou encore si son travail l'amène à effectuer une transition entre ces deux géométries ! La nature fondamentale des objets n'étant pas la même d'une géométrie à l'autre, la notion d'égalité est alors plus ardue à faire émerger. Cette hypothèse n'explique pas tout. Néanmoins, pour palier à ces difficultés, il paraît nécessaire de définir l'égalité en géométrie d'une façon cohérente et de telle manière qu'elle puisse donc s'adapter à ces aller-et-retour. L'élève pourra donc mieux appréhender la notion d'égalité et peut-être mieux saisir la nature des objets géométriques dans le sens de la géométrie II.

Nous avons alors pris le parti de donner comme sens à l'*égalité entre figures*, celui de *superposabilité des figures*[25] au sens d'Euclide. C'est un point de vue qui se défend d'une part parce que cette conception de l'égalité paraît naturelle aux élèves, mais plus encore parce qu'elle peut ainsi se formuler dans le sens de la géométrie II par la coïncidence des données caractéristiques des figures qui paraît tout aussi naturelle. Nous utiliserons cette même définition de l'égalité, lorsque nous travaillerons avec les transformations du plan et en particulier avec la symétrie afin d'évacuer, comme nous l'avons évoqué plus en amont, le problème du retournement (pour lequel une approche plus subtile dépasse le cadre de notre étude de la notion d'égalité en géométrie au niveau collège).

Il appartiendra aux enseignants niveau lycée de redéfinir la notion d'égalité de figures, sans doute par le biais d'une institutionnalisation plus rigoureuse des transformations du plan[26]. Enfin, nous rappelons que pour ce qui est

[24] Si on n'y prend pas garde, pour beaucoup d'élèves le raisonnement mathématique se résume à la démonstration géométrique, faute à Pythagore et à Thalès, ces noms qui ont fait frémir des générations d'élèves !

[25] Nous incluons alors la possibilité du retournement afin de vérifier la superposition et donc l'égalité entre deux figures.

[26] Nous parlerons plus de triangles isométriques par exemple. L'expression de "figures égales" deviendra alors peut-être inappropriée au vu de l'évolution du langage mathématique à un plus haut niveau d'étude. Nous nous éloignons alors bien du cadre de la géométrie I. Nous sommes conscients que le sujet peut faire débat mais ce n'est pas l'objectif de notre brochure que de prendre part à celui-ci, nous pouvons cependant renvoyer le lecteur, notamment, aux différents écrits de Daniel Perrin dont voici un extrait : " (. . .) L'appellation "cas d'égalité" est évidemment mauvaise. les canons de langage actuels (selon lesquels égalité signifie identité) imposent de parler plutôt de cas d'isométrie (ou de congruence comme disait Hilbert et comme disent les italiens). (En revanche je ne vois pas pourquoi le Groupe Technique Disciplinaire a préféré parler de triangles de même forme plutôt que de triangles semblables.) Je considère pour ma part que

de l'égalité de droites, l'affaire est un peu plus délicate. En effet, lorsque la "représentation matérielle" de l'une vient se confondre littéralement avec la "représentation matérielle" de l'autre nous travaillons dans le sens de la géométrie I, mais lorsque nous parlons d'alignement de points nous parlons en termes d'ensembles de points et nous travaillons alors dans le sens de la géométrie II. Nous sommes bien dans une situation qui demande d'assumer la co-existence de deux représentations.

Pour conclure, s'il nous est apparu important de souligner que la géométrie au collège est "en mouvement constant" c'est pour mieux mettre en évidence que les élèves peuvent l'abordée selon différents points de vue. Notre position est d'évoquer ce passage délicat avec les élèves par le biais d'activités que nous proposons dans cette brochure. Le but étant de leur faire prendre conscience que le fait de dire que deux figures sont "égales" ou dire que "deux droites sont égales" peut soulever certaines difficultés au niveau du raisonnement mathématique : ainsi parler d'égalité en géométrie nécessite un cadre de travail précis qu'il faut définir, et dont il faut dévoiler l'évolution selon l'éventuelle prise de conscience des élèves.

En guise de conclusion sur cette partie, nous pourrions dire qu'il est difficile de dresser une liste exhaustive des choix pédagogiques et didactiques qui ont découlé de notre réflexion sur l'utilisation vaste de la notion d'égalité. Mais il semblait important de faire le point sur la façon de mener un calcul et de l'écrire, notamment quand il s'agit d'institutionnaliser une réponse pour les élèves. Nous avons pu constater, avec la pratique, que ces choix et cette rigueur imposés permettent d'éviter beaucoup d'erreurs de la part des élèves lorsqu'il utilisent le signe égal. Cela permet aussi une meilleure évolution des conceptions des élèves en ce qui concerne la notion d'égalité. Enfin, même s'il est hors de question d'expliciter d'une quelconque manière une notion d'égalité, il ne nous paraît pas incongru, ni superflu que l'enseignant souligne oralement ce qui justifie, en situation, l'écriture/l'énoncé d'une égalité, utilisant des phrases comme : « si deux termes sont égaux à un même troisième, ils sont égaux entre eux » , « c'est bien parce que les deux programmes amènent aux mêmes résultats lorsqu'on leur donne à manger les mêmes entrées qu'on peut dire qu'ils sont égaux »...

---

l'abandon des cas d'isométrie est une des erreurs importantes commises au moment de la réforme des maths modernes, et ce, même si on pense la géométrie en termes de transformations, dans la ligne du programme d'Erlangen. On peut dire sans exagération qu'en les supprimant on a privé plusieurs générations d'élèves de l'outil le plus simple pour faire de la géométrie." Lire aussi : [PERRIN]."

Chapitre 2

Activités

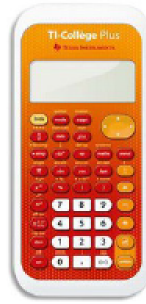
Nous proposons dans cette partie quelques activités permettant de travailler sur tel ou tel aspect de la notion d'égalité. Chacune de ces activités est présentée suivant le même format, la fiche élève puis un commentaire comportant les rubriques suivantes :

- l'intention des auteurs qui précise l'objectif de l'activité, les prérequis nécessaires à sa passation et sa situation dans la progression ;
- une proposition de passation (matériel et déroulement) ;
- un compte rendu de l'observation de l'activité qui a été expérimentée en classe ;
- un bilan, commentaire et éventuellement des suggestions de prolongement.

2.1 Activité : Calculatrices et écritures (Fiche élève)

Le professeur écrit au tableau l'expression numérique suivante et demande à la classe de compléter :

$$3 \times \ldots = 8$$



Laura, Anaîs, Thomas et Benoit sortent leur calculatrice et tapent "$8/3 =$".

Laura obtient : "$2,67$".
Thomas obtient : "$\frac{8}{3}$".
Benoit obtient : "$2,666666667$".
Anaîs obtient : "$\frac{16}{6}$.

Ils écrivent chacun cette réponse sur leur copie.

Qui a raison ?

Activité : Calculatrices et écritures (Commentaires)

Intention des auteurs (objectif, prérequis, situation dans la progression)

L'activité est destinée à une classe de 6^e. Elle peut être menée pendant la séquence portant sur l'écriture fractionnaire. Les élèves doivent avoir étudié la compétence du programme suivante : *interpréter le quotient* $\frac{a}{b}$ *comme le nombre qui, multiplié à* b *donne* a.

Cette activité possède plusieurs objectifs :

- Revenir sur le sens du signe "égal" à partir de quelques situations rencontrées en 6^e.
- Faire émerger la nécéssité d'une nouvelle écriture pour écrire le quotient exact de divisions dont l'écriture décimale du quotient est infinie.
- Travailler sur des erreurs du type : $\frac{8}{3} = 2,666666667$.
- Donner un sens au signe "égal" entre deux fractions dont les numérateurs et dénominateurs sont différents.
- Savoir comprendre comment une calculatrice fonctionne, et savoir interpréter des résultats.

Proposition de passation (matériel, dispositif)

Matériel :

- Ordinateur muni d'un vidéo-projecteur ou d'un TBI.
- La fiche élève vidéo-projetée sur le tableau/TBI.
- Des calculatrices seront distribuées aux élèves, dont certaines ne seront pas configurées de la même façon.
  - Certaines donneront une valeur approchée au centième près.
  - Certaines donneront une fraction.
  - Certaines donneront un nombre décimal approchant la fraction dans la limite de l'affichage de la calculatrice (ex : $2,6666666667$).

Proposition de passation :

a) Dispositif :

Les élèves travaillent par deux ou par trois suivant la disposition des tables dans la classe. Chaque élève reçoit une calculatrice. Chaque groupe doit avoir des calculatrices réglées différemment pour générer de la discussion dans le groupe d'élève.

b) Scénario prévu par l'enseignant :

1ère étape : (5 minutes environ)
Le professeur distribue les fiches élèves, et la fiche est vidéo-projetée au tableau. Les élèves expérimentent **sans** les calculatrices.
Une première observation peut-être donnée en fonction des résultats des élèves :
- Division de 8 par 3 posée ?
- La réponse de $2,67$ est déjà évacuée parce que $2,67 \times 3 = 8,01$ arrive rapidement ?

2ème étape : (30 minutes)
Les calculatrices sont distribuées. Les élèves doivent confirmer ou infirmer les réponses des quatre personnes de l'activité. Le professeur peut guider les élèves en leur demandant comment peut-on savoir si une personne a raison, avec uniquement une multiplication ? Des bilans peuvent être réalisés progressivement en fonction des réponses des élèves. Le professeur passe dans les rangs pour observer les recherches des élèves. Dès qu'un ou deux groupes trouvent une explication a une des réponses, on demande aux élèves de stopper quelques instants la recherche pour écouter le groupe d'élève interrogé.

Le professeur peut mettre le doigt sur $2,6666666667$ en se rapportant à la division posée. "D'où vient le 7 ?".
La réponse $\frac{8}{3}$ peut être confirmée en se rapportant à la définition du nombre $\frac{a}{b}$.
"Peut-on écrire le résultat d'une division qui ne s'arrête jamais ?" Le professeur doit montrer que l'écriture décimale ne suffit plus pour ce genre de résultat.
On peut passer au résultat $\frac{16}{6}$. La calculatrice peut permettre de donner la réponse.

3ème étape : (5 minutes)
Un bilan est effectué sur l'écriture fractionnaire. À quoi sert l'écriture fractionnaire ?

4ème étape : (5 minutes)
Les cahiers sont fermés, le vidéo-projecteur éteint.

Le professeur écrit $\frac{8}{3} = 2,6666666667$ et demande à la classe si cette égalité est vraie en justifiant leur réponse. Il peut demander également si $\frac{1}{2} = 0,5$ est vraie.

c) Institutionnalisation :

L'écriture fractionnaire permet d'écrire le quotient de deux entiers.
Il permet toujours d'écrire le quotient exact d'une division dont la partie décimale est infinie.
Utiliser l'écriture décimale pour exprimer le quotient d'une division dont la partie décimale est infinie ne donnera qu'une valeur approchée.
Ainsi, on ne peut utiliser le signe "=" entre une écriture fractionnaire et une écriture décimale si cette dernière est une valeur approchée du quotient.
On peut utiliser le signe "=" entre deux fractions si...

Compte rendu d'observation

L'activité a été proposée à une classe de 6^e le 1er juin à 16h30. La classe comportait 18 élèves et le collège est classé REP+.

Dans les dialogues, P représentera le professeur et E un élève sans distinction. Contrairement à ce qui est indiqué dans la proposition de passation, l'activité s'est déroulée sans vidéo-projecteur, celui-ci étant hors service.

16h35 : Les élèves entrent en classe, s'assoient et commencent à faire des multiplications à trou écrites au tableau. Pendant ce rituel de début d'heure, les élèves réfléchissent dans le calme. Au bout d'une dizaine de minutes, un élève passe au tableau pour corriger.

16h50 : Le professeur met les élèves par 2, distribue et fait coller l'activité dans le cahier. P lit l'activité, distribue les calculatrices et laisse travailler les élèves en autonomie. Pendant ce temps, P passe dans les rangs pour répondre aux questions. Certains élèves commencent à soumettre des propositions, le professeur les invite alors à expliciter leurs réponses. D'autres élèves remarquent que les calculatrices n'affichent pas le même résultat (en raison de leur paramétrage).

E : En fait ça dépend des calculatrices. Ils ont tous raison.
E : Quand on utilise cette calculatrice on tombe sur ça (montrant Laura), quand on utilise cette calculatrice, on tombe sur ça (montrant Thomas)... En fait tout le monde a raison.
P : Ok, tu es en train de me dire que 2,666666667 est égal à 8 sur 3.
E : Euh... Non, alors en fait tout le monde a raison sauf lui.
P : Continue à chercher.

17h01 : Le professeur reprend la main pour commencer à étudier les différents cas.

P : Ceux qui pensent que Laura a raison ?
E : Moi.
P : Pourquoi ?
E : Calculatrice.
P : Alors qui pense que Laura a tort ?

P : Est-ce que 4 est une bonne réponse ?
E : Non.
P : Comment je vérifie ?
E : On calcule, on fait la multiplication.
P : Est-ce que 2,67 est une bonne réponse ?
E : Oui.
P : Comment on vérifie ?
E : On la pose !

P écrit le calcul au tableau.

P : Ça fait combien ?
E : 8,01.
P : Est-ce que c'est la bonne réponse ?
E : Non.

P : Donc Laura a tort.
E : La calculatrice elle ment !

E intervient pour dire que les deux fractions obtenues par Thomas et Anaïs sont égales en expliquant la méthode. P écrit au tableau la méthode correspondante.

P : Et le groupe de E me dit que si Thomas a tort alors Anaïs a tort. En fait c'est un peu la même réponse.

17h05 : Le professeur remet les élèves en autonomie pour continuer à réfléchir.

E : Je pense que Benoît a raison.
P : Tu as fait la division pour vérifier ?
E : J'ai fait le début.
P : Et tu penses qu'il y aura un 7 à la fin ?
E : Non.

17h10 : Une seconde phase de mise en commun débute.

P : Est ce que des groupes ont des réponses pour Benoît ?
E : J'ai pas mis le 7 et je suis tombé sur 8 pile.
E : Moi j'ai mis le 7 et je suis tombé sur 8.
P : Alors on a un résultat intéressant : On a deux calculs différents qui tombent sur le même résultat à la calculatrice. Qu'est-ce qu'on peut en conclure ?
E : Moi en fait j'ai trouvé 7,99999998.
P : Tu l'as fait à la main ?
E : Oui.
P : Est-ce que 7,99999998 est égal à 8 ?
E : Non.
P : Donc qu'est-ce qu'on peut en conclure ?
P : Est-ce que le calcul que vous avez posé à la main est juste ?
E : Oui.
P : Donc qu'est-ce qu'on peut dire de Benoît ?
E : Il a faux.

17h17 : Le professeur laisse une dernière fois les élèves en autonomie pour réfléchir sur les réponses de Thomas et d'Anaïs. Pendant ce temps, il passe dans les rangs pour aider certains élèves.

P : On a vu que la calculatrice n'affiche pas toujours le résultat exact. Essaye de le faire sans calculatrice.
E : Monsieur, Thomas et Anaïs ils ont juste.
P : Pourquoi ?
E : Parce que je l'ai fait à la calculatrice.
P : Mais on a vu que la calculatrice n'indique pas toujours une réponse exacte.

17h22 : Le professeur reprend la main une dernière fois pour conclure l'activité.

P : Alors E a fait ça (P écrit au tableau le calcul sous forme fractionnaire et tombe sur le résultat 8).
P : Vos intuitions étaient bonnes et on voit que Thomas et Anaïs ont raison.
P : Là on a la réponse à l'activité. On sait que Laura et Benoît ont tort et que Thomas et Anaïs ont raison.

17h25 : La phase de bilan de l'activité débute :

P : Alors si on fait la division sur le cahier (8 :3) on tombe sur quoi ?
E : Ca donne 2,666666666...
P : Je m'arrête quand ?
E : On s'arrête pas.
P : Alors tout le monde est d'accord pour dire que la division est infinie. Comment je l'écris ?
E : Sous forme de fraction.

P : Est ce qu'on peut dire que 8 :3 = 8/3 = 2,66666667 ?
Les élèves à la volée : Oui ! Non !
P : Ce qui est important c'est que certains calculs n'aboutissent pas à la calculatrice. Conclusion est-ce que je peux écrire cette égalité ?
E : Non.
P : Ok, Mais pourquoi la calculatrice a-t-elle mis un 7 ?

E : Pour donner la valeur la plus proche.
P : Est-ce que je peux écrire une infinité de chiffre sur la calculatrice ?
E : Oui.
P : Comment je fais ?
P : Donc c'est pas possible et la calculatrice elle s'arrête sur ce résultat alors ?
E : Elle a arrondi.

P : Petite conclusion rapide. On est d'accord 8/3 n'est pas égal à 2,66666667 ?
E à la volée : Non !
P : Est-ce que je peux écrire ce nombre (8/3) comme un nombre à virgule ?
E à la volée : Non !

P écrit la conclusion au tableau puis la sonnerie retentit.

Remarques :

Peut-être insister à un moment donné sur le fait que si tout le monde a raison, on peut écrire une égalité entre les résultats et les démonter au fur et à mesure.
Donner la raison pour laquelle les calculatrices ne donnent pas le même résultat.

Bilan, commentaire, prolongement.

Cette activité fonctionne très bien avec des élèves en difficulté car elle met en situation une erreur fréquente des élèves : je tape sur ma calculatrice et j'écris le résultat sans trop me poser de questions. L'intérêt de les mettre en groupe de travail avec des calculatrices configurées différemment permet de susciter le débat et les techniques de vérification.

L'objectif est double car on cherche à continuer d'asseoir le besoin de passer à l'écriture fractionnaire mais également de montrer que la calculatrice ne donne pas toujours un résultat « direct » : dans le cas de 8 divisé par 3, la calculatrice peut donner un résultat décimal qui semble fini, mais en réalité les élèves doivent comprendre que la partie décimale est infinie. Il faut donc demander à la machine de donner le résultat sous une autre forme.
Il est nécessaire de faire comprendre que la calculatrice effectue toujours la bonne opération, mais l'affichage obtenu doit nous faire réfléchir : comment peut-elle afficher une partie décimale infinie ?
On peut retrouver la même situation avec le nombre π ou les racines carrées. Et là encore, la calculatrice peut donner la valeur exacte. Ce qui n'est plus possible avec l'utilisation des formules de trigonométrie.

En prolongement, on peut demander aux élèves pourquoi la fraction $\frac{16}{6}$, étant une bonne réponse, n'est donnée par aucune calculatrice, ou bien leur demander s'il existe une multiplication à trou dans laquelle $\frac{16}{6}$ est une bonne réponse mais $\frac{8}{3}$ n'en n'est pas une.
On peut également leur demander d'écrire une autre multiplication à trou dans laquelle $\frac{16}{6}$ et $\frac{8}{3}$ sont toutes les deux des bonnes réponses.
Enfin, on peut demander aux élèves de trouver une autre multiplication à trou dans laquelle la calculatrice peut, encore une fois, nous induire en erreur.

Peut-on trouver une technique pour s'assurer que deux fractions sont ou non égales entre-elles :
- En effectuant une division ?
- Sans passer par la division ?

2.2 Activité : Le labyrinthe (Fiche élève)

Relier la case départ à la case d'arrivée en respectant les règles ci-dessous.

Règles :
- Pour relier deux cases, il faut que leurs contenus soient égaux.
- On ne peut relier que 2 cases côte à côte ou l'une au-dessus de l'autre.
- On ne peut pas relier 2 cases en diagonales.

4 dizaines et 3 unités	$60 \div 3$	14	**Départ :** 8+7	15	$0,15 \times 10$	1 unité et 5 dixièmes
16	$27 - 13$	$2,5 + 11,5$	16	3×5	5×5	8 dizaines et 5 unités
Le triple de 5	15	$29 - 14$	$30 \div 2$	1 dizaine et 5 unités	$8 + 7$	$0,15 \times 10$
$7 + 8$	15 unités	4 dizaines et 3 unités	$18 - 4$	$27 - 13$	15	$150 \div 100$
16	5×3	5 dizaines et 1 unité	1 unité et 5 dixièmes	$15,00001$	$60 \div 3$	$14,99999$
La moitié de 30	$1,5 \times 10$	Le triple de 5	15	$8 + 7$	$150 \div 100$	1 dizaine et 5 unités
$0,15 \times 10$	La moitié de 45	14	$2,5 + 11,5$	$7 + 8$	15	$15,00001$
$18 - 4$	$14,99999$	5×5	$60 \div 4$	Le quintuple de 3	3×5	1 dizaine et 5 unités
$60 \div 3$	$27 - 13$	5 dizaines et 1 unité	$0,15 \times 100$	5×5	$15,00001$	$14,99999$
4 dizaines et 3 unités	$18 - 4$	La moitié de 30	**Arrivée :** 15	$2,5 + 11,5$	1 unité et 5 dixièmes	14

Activité : Le labyrinthe (Commentaires)

Intention des auteurs (objectif, prérequis, situation dans la progression)

Cette activité permet de faire travailler les élèves sur plusieurs aspects de l'égalité en même temps. Le nombre de cases à traverser pour aller du point de départ jusqu'au point d'arrivée permet de manipuler de nombreuses expressions d'un même objet. Cette multiplicité des expressions n'est pas artificielle car elle est justifiée par la nature du "jeu". Cette activité propose en outre une situation dans laquelle le modèle égalité comme réécriture n'est pas adéquat. Ni dans la forme, puisque les chemins dans un labyrinthe ne sont justement pas orientés gauche/droite *a priori*, ni dans le fond puisqu'il est autant justifié de passer d'un objet en forme normale (15) à une de ses expressions (3×5) que l'inverse.

Enfin, l'aspect ludique fournit naturellement une motivation à la recherche d'égalité entre différents objets.

Le labyrinthe proposé est destiné à une classe de 6^e. Elle ne suppose pas d'autre pré-requis que le programme de l'école primaire. Néanmoins, il est intéressant de la faire en guise de révision du chapitre "Connaître et utiliser la valeur des chiffres en fonction de leur rang dans l'écriture d'un entier ou d'un décimal".

Proposition de passation (matériel, dispositif)

La fiche élève est distribuée individuellement, en même temps qu'elle est projetée sur tableau interactif ou sur vidéo-projecteur. Les élèves cherchent individuellement. Lors de la mise en commun la projection du labyrinthe où les chemins proposés sont matérialisés en couleurs et permettront commentaires et discussions à partir des chemins impossibles (et donc des échecs d'égalité), des raccourcis et des détours.

Compte rendu d'observation

Dans les dialogues qui suivent, le professeur sera noté P et les élèves seront notés E sans distinction.

L'activité a été proposée à une classe de 6^e :

A 10h20, après la correction d'un exercice fait à la maison, l'activité est lancée : le labyrinthe apparaît sur le TBI, et le professeur distribue sa reproduction sur feuille à chaque élève. Un élève volontaire lit la consigne. L'enseignant la lit à nouveau et l'explicite gestuellement sur le TBI : il fait le geste d'entourer les cases, il esquisse les directions autorisées : verticales et horizontales. Il commente la consigne, précisant que s'ils arrivent à un cul-de-sac, les élèves peuvent revenir en arrière.

Les élèves se mettent au travail rapidement, ceux-ci sont intéressés et posent de nombreuses questions. Le professeur doit alors à nouveau expliciter le vocabulaire (quintuple, cul de sac,...) ou le fonctionnement de l'activité (ne pas aller en diagonale, ne pas sauter de case,...). Le professeur circule dans les rangs pour aider ou donner des conseils. Il invite les élèves à utiliser la calculatrice si cela est nécessaire ou à travailler avec un crayon. Les réponses sont débattues individuellement avec les élèves (15,00001 ce n'est pas pile 15).

Au bout d'une dizaine de minutes, les premières réponses sont soumises, le professeur invite alors les élèves à chercher un chemin plus rapide.

Au bout d'une vingtaine de minutes, le professeur prévient que la correction va commencer malgré le fait que certains élèves n'aient pas encore terminé. Un dialogue entre la classe et le professeur s'installe alors :

P : Alors, quel est le symbole qu'on va utiliser ?
E : Le symbole "="
P : Qu'est-ce que le symbole "=" ? Quelle est sa défnition ?
E : Il donne le résultat de deux nombres.
P : Est-ce que tout le monde est d'accord ?
E : Oui, mais on peut aller jusqu'à l'infini ?
P : Tu as le choix. Alors pourquoi on l'utilise, c'est pour les calculs ?
E : Oui on le met entre deux nombres qui sont pareils.
P : Vous vous en servez beaucoup pour les calculs, mais comme on vient de le dire, on le met entre deux nombres identiques, pareils.
P : On commence.

Le professeur interroge successivement plusieurs élèves, entoure les cases en bleu, violet et rouge et il réécrit les égalité sur une autre feuille du TBI. Lorsque la ligne des égalités correspondant au parcours le plus court est explicitée au tableau, le professeur reprend :

P : Alors le but était de parler du signe "=", quand est-ce qu'on le met ?
E : Entre deux chiffres égaux.
P : Entre deux nombres égaux. Quelle est l'utilisation dont vous avez l'habitude ?
E : $8 + 7 = 15$.
P : En effet, pour faire un calcul, alors ? Est-ce qu'on met toujours le résultat à droite ?
E : Oui.
P : Regardez ce passage au tableau, on a $15 = 8 + 7$, rien n'empêche de mettre le résultat à gauche.

P : Est-ce qu'on utilise forcément l'écriture d'un résultat ?
E : Non, on a $3 \times 5 = 1$ dizaine et 5 unités.
P : En effet. (le professeur le réécrit au tableau). Est-ce qu'on a encore une autre utilisation ?
E : 15 unités $= 15$.
P : En effet, c'est intéressant. Vous voyez, le signe "=", on peut s'en servir sans faire aucun calcul.

E : Le triple de $5 = 15$.
P : C'est quoi le triple de 5, c'est 3×5, donc c'est un calcul.

E : $60 \div 4 = 0,15 \times 100$.
P : $60 \div 4$, c'est quelle valeur ?
E : 15.
P : $0,15 \times 100$, c'est quelle valeur ?
E : 15.
P : Donc on peut écrire l'égalité entre deux représentation différentes du même nombre.

P : Est-ce qu'on peut mettre le signe égal entre deux nombres différents ? Par exemple, comment calcule-t-on $1 + 2 + 4$? Vous écrivez souvent $1 + 2 + 4 = 3 = 3 + 4 = 7$ (le professeur l'écrit au tableau).

P : Est-ce que j'ai écrit quelque chose qui ne va pas ?
E : 3, ce n'est pas pareil que $1 + 2 + 4$.
P : OUI.

P : On ne peut pas écrire $1 + 2 + 4 = 3$, pourquoi l'ai-je fait ?
E : Oui mais c'est pour le calcul.
P : En math, on doit écrire les choses correctement : le signe égal s'écrit entre des éléments qui ont la même valeur. (Le professeur construit un cache pour effacer $= 3$).

Bilan, commentaire, prolongement.

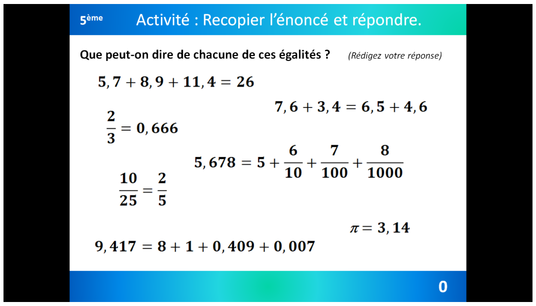
Cette activité marche bien avec des élèves en difficulté. De plus, les élèves adhèrent très bien à ce type d'activité, peut-être en vertu de son aspect ludique ? Ils participent tous, cherchent, demandent la parole, ont un avis (ainsi un élève qui "revendique" une écriture qui lui paraît pertinente pour le calcul), en redemandent.

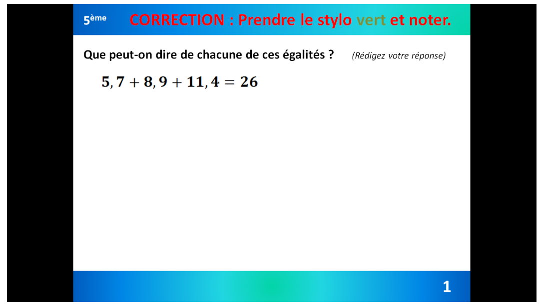
Le commentaire à partir de la chaîne d'égalité correspondant au parcours, ici sous forme de discussion guidée par l'enseignant, semble être indispensable pour expliciter les propriétés de l'égalité qui ont été mobilisées lors de la recherche de parcours. Le format peut être adapté à de nombreux points du programme du collège, et à de nombreux objets. On peut imaginer des parcours avec raccourcis permettant de mettre en évidence des propriétés telle que la distributivité... Lors de la réalisation du tableau, il est important d'anticiper les étapes du chemin et les impasses sur lesquelles l'enseignant pense qu'il est intéressant de se focaliser lors de la correction. Nous avons également noté qu'il convenait de veiller à contrôler la complexité des parcours, pour ne pas décourager les élèves par des voies de garage trop longues à repérer.

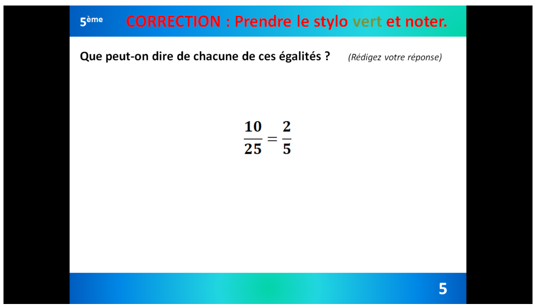
2.3 Activité : Une pluie d'égalités

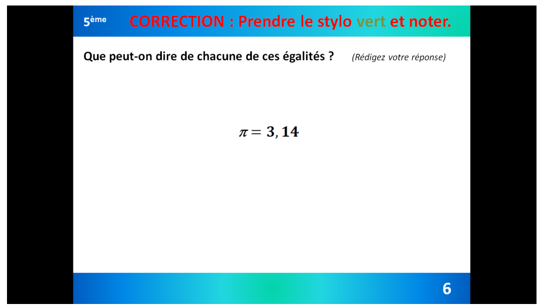
Captures d'écran

Il n'y a pas de fiche élève mais il y a utilisation d'un diaporama que l'on restitue sous forme d'une capture d'écran.









Activité : Une pluie d'égalités (Commentaires)

Intention des auteurs (objectif, prérequis, situation dans la progression)

Situation dans la progression :

Cette activité a été envisagée dès le début de l'année scolaire de 5^e. Elle fait partie de l'introduction du premier chapitre de l'année qui a pour but d'étudier les expressions numériques et leur utilité dans la résolution de problèmes. Dans un premier temps, une activité d'introduction a d'abord été proposée aux élèves sur les expressions numériques visant à réactiver les connaissances des élèves et à mettre en exergue l'utilité de ces expressions dans la résolution de problèmes. Dans un deuxième temps, cette activité est proposée aux élèves afin de parler de l'égalité.

Matériel :

Les égalités sont présentées à l'aide d'un diaporama vidéo-projeté au tableau, les égalités "tombent" de façon désordonnée. Un ordinateur relié à un vidéo projecteur ou à un TBI est donc nécessaire. Les élèves sont autorisés à utiliser la calculatrice et noterons le fruit de leurs réflexions sur leurs "cahiers de recherche".

Intentions des auteurs :

Comme nous l'avons dit un peu plus haut, Il nous paraît important d'aborder l'égalité dès les premiers jours de l'année de 5^e. Cela nous permettra d'initier, de la manière la plus simple, une réflexion sur le sens de l'égalité et sur l'utilité du signe égal à partir de quelques situations rencontrées en 6^e dans le domaine numérique. L'objectif est que si les élèves ont une idée plus claire sur cette notion alors ils limiteront les erreurs d'utilisation de l'égalité qui est une notion assez prépondérante dans ce chapitre sur les expressions numériques. Ainsi, nous pourrons faire émerger l'idée que le signe égal peut être utilisé dans différentes situations et qu'une égalité peut être vraie ou fausse. Son statut est alors différent selon la situation dans laquelle on se trouve. Nous pourrons aussi rappeler le vocabulaire en début de 5^e : "membre de gauche/membre de droite", "expression numérique", "somme", "termes", "produit", "facteurs", "simplification d'une fraction",...

Au niveau du socle :

En ce qui concerne le programme, les éléments rattachés aux compétences du socle commun que nous pouvons citer et qui peuvent être abordés dans cette activité sont :

- utiliser sur des exemples numériques des égalités du type : ac/bc = a/b. (Extrait du programme de 5^e) ;
- associer diverses désignations d'un nombre décimal : écriture à virgule, fraction décimale,..., addition des nombres décimaux et connaître et utiliser la formule de la longueur d'un cercle. (Avec, notamment, la connaissance du nombre). (Extrait du programme de 6^e).

Remarque : Les valeurs approchées décimales ne sont pas un élément du socle en 6^e tout comme il est écrit :
le programme de la classe de 6^e a pour objectif d'interpréter aussi 7/3 comme :
- le tiers de 7;
- le nombre qui multiplié par 3 donne 7;
- un nombre dont une valeur approchée est 2,33.
(En italique et précédée d'une étoile : cela sera un exigible du socle dans un niveau ultérieur.)

Pour ce qui est du Livret Personnel de Compétence :
Palier 2 :

- écrire, nommer, comparer et utiliser les nombres entiers, les nombres décimaux (jusqu'au centième) et quelques fractions simples.
- calculer mentalement en utilisant les quatre opérations.
- utiliser une calculatrice.

Palier 3 :

nombres et calculs : connaître et utiliser les nombres entiers, décimaux et fractionnaires. Mener à bien un calcul : mental, à la main, à la calculatrice, avec un ordinateur.

Proposition de passation (matériel, dispositif)

Dispositif :

Les élèves travaillent par deux ou par trois suivant la disposition des tables dans la classe.

Scénario prévu par l'enseignant :

1ère étape : (15 minutes environ)
Les différentes égalités sont proposées aux élèves, ils doivent recopier l'énoncé sur leur cahier.
Les élèves doivent ensuite commenter, classer, réécrire,... chacune de ces égalités en les abordant dans l'ordre qu'ils veulent. (Le professeur peut ainsi analyser les différentes stratégies adoptées par les élèves). Le professeur n'intervient pas dans la réflexion des élèves mais il peut pousser les élèves à se poser des questions sur les égalités projetées au tableau. (Qu'est-ce que tu penses de ces égalités ? Est-ce que ce sont toutes les mêmes ? Quand utilise-t-on ces égalités ?...)

2ème étape : (30 minutes)
Un moment de synthèse est proposé par l'enseignant. Une synthèse est faite quant à l'emploi du signe égal dans chaque situation ; chaque élève peut s'exprimer à condition de lever la main au préalable et le professeur note au tableau les différentes remarques évoquées par les élèves lorsque le consensus est établi.

3ème étape : (5 à 10 minutes ou au début de la séance suivante, selon le temps réellement pris pour les deux premières étapes).
Les cahiers sont fermés, le vidéo projecteur est éteint. L'enseignant efface toutes les traces du travail qui ont été faites. Il écrit dans une bulle un grand signe "=". Il demande ensuite aux élèves de récapituler ce qui a été dit autour du signe égal et d'exprimer ce qu'ils ont envie d'ajouter à propos du signe égal et de son utilisation.

Institutionnalisation :

A l'issue de cette activité, nous pourrons convenir avec les élèves que le signe égal peut être employé de différentes manières selon la situation mathématique dans laquelle on se trouve. Ainsi, le signe égal peut être utilisé tour à tour pour annoncer un résultat, une décomposition, ou encore mettre en relation deux expressions ou deux écritures fractionnaires. De plus certaines égalités sont fausses, on distinguera alors les égalités vraies des égalités fausses et mettre ainsi en évidence le sens du signe égal. Dans ce dernier cas, il est alors parfois plus judicieux de remplacer le signe égal par d'autres symboles : $<$; $>$; $\approx$ ou bien $\neq$.
A noter aussi que les élèves pourront aborder le cas des unités de mesures et donc le fait que l'on puisse utiliser les égalités de conversions de mesures.

Compte rendu d'observation

L'activité se déroule sur deux séances.

1) Première séance.

La séance a lieu dans un collège de centre ville qui n'a jamais été classé en zone prioritaire d'éducation. Elle se passe lors d'un cours de 55 minutes en mars dans une classe de 25 élèves. Le début du cours a eu lieu à 13h30, le professeur utilise un vidéoprojecteur pour afficher les diapositives de son activité. A noter la présence d'un élève qui réalise son premier cours dans cette classe.

Dans les dialogues qui vont suivre, le professeur sera désigné par P et les élèves par E.

13h32 : le professeur demande aux élèves d'écrire dans leur cahier de recherche les égalités affichées au tableau puis de les commenter, de les trier et de les classer. Il leur laisse 15 minutes pour cela. Les élèves s'exécutent, pendant ce temps, le professeur passe dans les rangs pour aider les élèves ayant des questions. Il précise l'objectif de l'activité : « le but c'est de les trier, d'avoir une opinion sur les égalités, vous avez le droit à la calculatrice ». Certains élèves commencent à travailler à plusieurs pendant que d'autres s'agacent rapidement.

13h50 : Le professeur propose de faire le bilan sur chaque égalité, demande aux élèves de recopier ces synthèses dans leur cahier et passe à la diapositive qui reprend la première égalité : $5,7 + 8,9 + 11,4 = 26$.
E : "Le symbole égal donne un résultat."
P : "Obtient-on le bon résultat ? Qui a vérifié ?" Quelques élèves lèvent la main.
E : "Le résultat est juste". Le professeur écrit la synthèse de la première égalité au tableau sous la dictée des élèves.

Le symbole égal donne un résultat
Ce résultat est juste
Les nombres sont décimaux mais le résultat entier.

13h55 : Seconde égalité : $7,6+3,4=6,5+4,6$.
P : "Je vous écoute".
E : "Les deux résultats ne sont pas les mêmes".
P : "Que veux-tu dire ?"
E : "Ben $7,6+3,4$ ça fait 11 et $6,5+4,6=11,1$; les résultats ne sont pas égaux."
E : "En fait le symbole égal ne sert à rien là".
P : "Que peut-on dire plutôt que ça ne sert à rien ?"
E : "L'égalité est fausse et on peut remplacer le $=$ par $\neq$ ou $\approx$ car les résultats ne sont pas loin d'être identiques."
Le professeur écrit la synthèse sous la dictée des élèves :

Résultats pas égaux
Le symbole égal ne sert à rien
On peut mettre $\neq$; l'égalité est fausse
On peut mettre $\approx$.

14h02 : Troisième égalité : $\frac{2}{3}=0,666$.
E : C'est égal.
E : Non c'est pas égal.
E : Non c'est pas égal, normalement c'est à l'infini.
P : Que veux-tu dire ?
E : Ben les 6 il y en a jusqu'à l'infini.
E : Moi à la calculatrice j'ai un 7.
P : A la calculatrice on a neuf 6 puis un 7, qu'est ce que la calculatrice fait pour afficher ce résultat quand on tape $\frac{2}{3}$?
Le professeur voyant qu'il n'y a pas de réponse rappelle que $\frac{2}{3}$ est le résultat d'une division, la calculatrice fait donc 2 divisé par 3, puis il réalise la division au tableau faisant "apparaitre" une infinité de 6.
P : Alors pourquoi la calculatrice met un 7 ?
E : Elle est pas assez puissante ?
E : Avec le 7 elle montre qu'elle arrête le calcul car elle n'a plus de place.
P : Bon et le symbole égal il est bon là ?
E : Non il faut un $\approx$.
P : Alors c'est quoi ?
E : Une approximation.
P : Oui une valeur approchée.

Egalité fausse
C'est une approximation il faut mettre le $\approx$
Infinité de 6

14h11 : Quatrième égalité $5,678=5+\frac{6}{10}+\frac{7}{100}+\frac{8}{1000}$.
E : Le symbole égal montre une décomposition.
P : C'est quoi une décomposition ?
E : Le nombre a été décortiqué en plusieurs nombres.
E : Si on additionne la décomposition ça doit faire le nombre de départ.
E : Oui et là, la décomposition est juste.
Le professeur réalise un calcul au tableau pour justifier l'égalité.

Ce symbole égal annonce une décomposition

14h17 : Cinquième égalité $\frac{10}{25}=\frac{2}{5}$.
E : "$\frac{2}{5}$ est une simplification de $\frac{10}{25}$."

Le professeur demande plus d'explications.
E : "$\frac{2}{5}$ c'est 2 divisé par 5 qui fait 0,4 et 10 divisé par 25 aussi."
P : "Donc tu dis deux choses, tu expliques pourquoi on met le symbole = (même forme canonique) et tu dis aussi que $\frac{2}{5}$ est une simplification de $\frac{10}{25}$".
E : "Oui on divise par 5".
P : "Ce sont deux écritures du même nombre."

$$\frac{2}{5} = 0,4 \ et \ \frac{10}{25} = 0,4$$

L'égalité est juste
C'est une simplification

14h22 : Sixième égalité $\pi = 3,14$.
E : "C'est faux".
P : "Pourquoi ?"
E : "Normalement c'est environ ; 3, 14 c'est une valeur approchée."

Fin du cours, le professeur signale aux élèves qu'ils continueront la prochaine fois.

2) Deuxième séance.

Cette séance à lieu le lendemain. Les élèves s'installent et le professeur fait l'appel. Il demande ensuite aux élèves d'ouvrir le cahier de recherche pour terminer l'activité de la veille. Au tableau est déjà vidéo-projetée la dernière égalité qui doit être commentée :

$$9,417 = 8 + 1 + 0.409 + 0.007.$$

Tout en ouvrant leurs cahiers des élèves chuchotent : "c'est une décomposition", "ouais, mais il y a un problème avec l'addition".

10h05 :
P : "Alors dites-moi : que pensez-vous de cette dernière égalité ?".
E : "On a voulu décomposer le nombre."
E : "Ouais, sauf que là, il y a une erreur."
P : "Pourquoi ?"
E : "Parce qu'à droite la valeur c'est 9, 416 donc c'est une égalité fausse."
P : "Alors qu'est-ce que je note ?"
E : "C'est une décomposition fausse." Le professeur note.

Un élève veut que l'on écrive la justification : "car...", le professeur sous sa dictée s'exécute en disposant les calculs en colonne, cela permet de convaincre un élève qui ne comprenait pas.

E : "Mais c'est presque la même valeur, on pourrait remplacer le symbole = par ≈ ?"
E : "Il y a aussi ≠, . . . "
P : "Et quoi d'autre ? Ne voyez-vous pas un autre symbole que l'on pourrait utiliser ?"

La même élève hésitante : "Il y a supérieur ?"
E : "Ah oui le plus grand que ! Pour l'ordre décroissant."

Le professeur note comme bilan pour cette dernière égalité :

On pourrait utiliser les symboles : ≈ , ≠ ou > puisque le symbole = ne convient pas.

Personne ne voulant ajouter autre chose, le professeur demande qu'une fois la synthèse écrite, les élèves ferment leurs cahiers.

10h15 : Une fois le silence obtenu, le professeur dessine une grosse bulle avec à l'intérieur le symbole "=".

P : "Qu'est ce que ce symbole vous évoque maintenant ? Dites moi ce qui vous vient à l'esprit."
Une élève a ouvert son cahier de cours et dit : "on peut utiliser des égalités de conversions de mesures."
P : " Ah, est-ce qu'il y en avait dans l'activité que je vous ai proposée."
La même élève : "Non mais le signe égal sert aussi à annoncer des conversions de mesures, comme 5 dm = 500 mm."

Un autre élève intervient : "Oui, il annonce un résultat, une décomposition ou une conversion de mesures."
P : "Alors, attendez, pas trop vite, je note au fur et à mesure."

10h42 : La séance se termine sur cette synthèse que les élèves notent ensuite sur leur cahier de recherche.

Bilan, commentaire, prolongement.

Suivant les élèves ou le moment où l'on choisit de proposer cette activité, nous pouvons jouer sur quelques variables didactiques afin de rendre cette activité plus adaptée : le nombre d'égalités traitées, la diversité des égalités ainsi que les nombres utilisés dans ces égalités.
Certaines égalités ou certaines notions rattachées à ces égalités peuvent poser des problèmes aux élèves, le professeur peut revenir un peu plus tard sur celles-ci séparément.
Dans la progression adoptée par l'enseignant, cette activité peut être reprise à différents moments avec de nouvelles notions : des nombres en écriture fractionnaire, des nombres relatifs, des égalités de conversions de mesures, des expressions littérales, des équations, etc. Cela peut permettre de mieux sensibiliser les élèves à l'importance de l'utilisation du signe égal et des égalités de manière générale. A chaque nouvelle utilisation du signe égal, le professeur peut rebondir en évoquant cette activité et en demandant de bien définir le nouveau statut du signe égal dans cette nouvelle situation.

2.4 Activité : Trouver l'intrus ! (Fiche élève)

Voici cinq programmes de calcul :

Programme de calcul n°1	**Programme de calcul n°2**
• Choisir un nombre • Multiplier par 10 • Ajouter 2	• Choisir un nombre • Ajouter 1 • Tripler le résultat
Programme de calcul n°3	**Programme de calcul n°4**
• Choisir un nombre • Multiplier par 3 • Ajouter 3	• Choisir un nombre • Multiplier par 10 • Ajouter 1
Programme de calcul n°5	
• Choisir un nombre • Multiplier par 5 • Ajouter 1 • Doubler le résultat	

1) Tester chacun de ces programmes de calcul : choisir le même nombre de départ.
   Recommencer avec d'autres nombres. Que peut-on constater ?
2) Former les deux paires de programmes qui vous semblent "équivalents".
3) Comment peut-on être sûr que ces programmes sont équivalents ?
   Bonus : Inventer deux programmes de calcul équivalents.

Activité : Trouver l'intrus (Commentaires)

Intention des auteurs (objectif, prérequis, situation dans la progression)

Cette activité propose d'étudier l'équivalence entre des programmes de calcul, en s'appuyant sur la distributivité de la multiplication sur l'addition.
L'élaboration de cette activité a été motivée pour aider les élèves à dépasser les obstacles qu'ils rencontrent au collège à produire une seule expression à partir d'un programme de calcul. Une difficulté lors de l'exécution du programme est qu'ils utilisent à tort le symbole égal comme un simple séparateur de calcul.
La traduction de l'équivalence de deux programmes par l'égalité de deux expressions apporte, en outre, un sens nouveau au symbole égal : il permet de traduire une identité, justifiée par la distributivité de la multiplication sur l'addition. Il s'agit donc également d'un travail préparatoire au calcul littéral, l'aspect procédural d'un calcul étant au cœur de l'activité.
La recherche des paires conduit à écrire des expressions égales mais pourtant de formes différentes, motivant ainsi l'abandon de l'écriture des calculs "pas à pas".
Cette activité a été testée quelques semaines après l'enchaînement de calculs, et l'utilisation de la distributivité sur des exemples numériques. Des programmes de calculs ont été donnés régulièrement mais sans contrainte sur l'écriture des calculs. Placée ainsi comme ré-investissement, cette activité a pour objectif de réactiver la notion de distributivité, en vue du passage au calcul littéral.

Proposition de passation (matériel, dispositif)

Les élèves font d'abord une lecture individuelle de l'énoncé, puis les premières remarques peuvent être notées au tableau pour un éclaircissement ultérieur. Les élèves travaillent ensuite en binôme.
Les élèves choisissant eux même les nombres à tester, il est préférable de les inciter à choisir d'autres nombres que les nombres entiers.
Une fiche d'aide, sous la forme d'un tableau à double entrée avec les programmes en colonne et les nombres testés en ligne, peut être préparée pour les élèves qui auraient des difficultés à ordonner leurs essais.
La mutualisation des résultats lors de la question 2 est l'occasion d'inciter les élèves à écrire des égalités entre les expressions des programmes qui leur semblent équivalents et ainsi préparer la question 3.
L'utilisation du tableur permet, en testant une grande quantité de nombres, d'introduire la notion de variable via la référence relative des cellules.

Compte rendu d'observation

Une classe de 5^e dans un collège classé REP+. La séance se déroule en demi-groupe (10 élèves), entre 14h15 et 16h, en présence d'un doctorant, qui, dans le cadre de ses recherches en sciences de l'éducation, est venu filmer la séance, et d'un observateur du groupe IREM.

Les élèves ont déjà vu la notion de programme de calcul. Ils ont également eu une introduction sur la règle de distributivité : ils l'ont formulée sur des exemples numériques.

Ci-dessous, E désigne un élève quelconque, sauf mention du contraire, des E successifs désignent des élèves différents.

A 14h, les élèves arrivent et se mettent en place rapidement, un peu étonnés de la présence de deux adultes étrangers dans la salle. Ils écoutent attentivement ces deux personnes qui, à la demande de l'enseignante (désignée par P dans la suite du texte), se présentent et expliquent la raison de leur présence.

Des fiches d'aide sont disposées sur les tables. P distribue la fiche "Trouver l'intrus". Les élèves se mettent très vite en activité.

P : Je vois que certains se précipitent sur leur calculatrice. Avant de vous lancer dans cette activité, est-ce que tout le monde a bien compris ce qu'il doit faire. Avez-vous des questions ?

D'emblée, on remarque que l'expression "trouver l'intrus" peut se révéler difficile pour certains élèves. Un bref travail dans cette direction est mené avec la classe. Les élèves s'emparent du sens du terme "intrus" en l'utilisant oralement dans des contextes différents. Le but de l'activité est ainsi clarifié. Le terme "tripler" peut également susciter des incompréhensions auprès des élèves et doit être, à ce titre, expliciter.

P passe dans les rangs et observe les premiers calculs des élèves. Certains utilisent la fiche aide. D'autres utilisent des feuilles libres pour écrire leurs calculs.

P : Lydia n'était pas avec nous au début de l'année, qu'est-ce que vous pouvez dire de ce qu'elle écrit ?
P écrit au tableau $5 \times 10 = 50 + 2 = 52$.
P : Alors, c'est quoi qui est faux ?
Plusieurs élèves répondent. Le professeur complète : $5 \times 10 \neq 50 + 2 = 52$.
P : Tu as trouvé le résultat mais il y a une manière de communiquer le résultat qui est aussi importante.
Les élèves sont tous actifs et appelle P pour lui montrer leurs résultats.
E : Ca y est, j'ai trouvé l'intrus.
P : Attention, j'ai dit de faire plusieurs tests, plusieurs nombres. Fais d'autres essais pour confirmer ta conjecture. *A la cantonade* : C'est quoi une conjecture ?
[...]
P : C'est une idée de résultat que l'on n'a pas encore démontré, c'est une hypothèse, qui reste à démontrer.

Le professeur précise qu'il faut former des paires de programme conduisant aux mêmes résultats, une fois l'intrus conjecturé. Certains ont du mal à s'engager dans cette démarche dans la mesure où ils testent chaque programme avec des nombres différents. Le professeur oriente la démarche de ces élèves en leur demandant de tester chaque programme avec le même nombre.

P explicite individuellement, selon l'avancé des élèves, qu'ils doivent formuler les paires de programmes équivalents par des égalités et suggère aux élèves les plus avancés que la démonstration est encore à faire.
P : Comment avoir la preuve du résultat ? On ne peut pas tester tous les nombres. Comment on fait, en maths, quand on ne veut pas tester tous les nombres ?

Juste avant la récréation, tous les élèves finissent de rédiger deux tests pour tous les programmes, en respectant plus ou moins la consigne : une égalité entre deux expressions. Par contre, une fois qu'ils ont trouvé l'intrus, ils ne comprennent pas bien ce qu'ils pourraient faire de plus.
A la sonnerie, la plupart des élèves restent pour montrer à P ce qu'ils ont écrit et finissent par sortir.

A 15h15, les élèves sont de retour, regagnent leur place et se remettent dans l'activité. P propose de récapituler ce qui a été obtenu jusque là. La fiche d'aide est projetée, P l'utilise pour expliciter ses propos.

P : Tous les élèves sont en train de réécrire tous les calculs en une seule fois : $9 \times 10 + 2$ au lieu de $9 \times 10 = 90$, $90 + 2 = 92$. Pour le programme 2, j'ai vu écrit $9 + 1 \times 3$, est-ce que cela convient ? Il faut des parenthèses $(9 + 1) \times 3$.
P : Et alors qui est l'intrus ? Le programme 4 en effet. Et les paires ?

P écrit au tableau. le programme 1 et le 5 marchent ensemble. le 2 et le 3 aussi.

P : Quelles égalités expriment que ces programmes marchent ensemble ?
E : Il faut utiliser les lettres.
P : En effet, c'est ce qu'on va voir à la fin. On ne va pas essayer tous les nombres. Une vie n'y suffirait pas.
P : Mais d'abord, quelles égalités peut-on écrire ?
E : Pour 5 et 1 : $9 \times 10 + 2 = (9 \times 5 + 1) \times 2$.
E : Pour 2 et 3 : $(9 + 1) \times 3 = 9 \times 3 + 3$.

Une élève montre ses essais à P.

P : Et qu'est-ce qu'on fait là ?
E : On est parti d'une addition et on est arrivé à une multiplication.
P : Oui, on va faire comme a dit cette élève. On passe d'une addition à une multiplication. Et on va utiliser des lettres pour ne pas tester tous les nombres.

Les élèves sont bloqués par la distributivité qui n'émerge pas. (Peut-être est-ce le $+1/\times 1$ qui est en cause, car la symétrie $\ldots \times a + \ldots \times a$ est cachée). Les enfants préfèrent essayer la question bonus.
Sur cette question bonus, "créer deux programmes équivalents", ils n'avancent pas vraiment, ils proposent des programmes qui ne sont pas équivalents, confondent programme de calcul et calcul.

E : Comment est-ce qu'on fait 201 ?

Un élève trouve deux programmes équivalents : $\times 5 + 4$ et $\times 5 + 3 + 1$.
P reprend la main au tableau. Elle écrit l'égalité $(5 + 1) \times 3 = 5 \times 3 + 3$. Et demande, désignant le premier membre.

P : C'est quoi comme opération ? Une multiplication ? Pourquoi ?
P : C'est l'opération qui est faite en dernier qui commande.
P : Et l'autre membre ? Une addition ? Est-ce que vous vous rappelez dans quels cas on transforme les multiplications en additions ? Quand on factorise et quand on développe.

P explicite alors, sur les exemples écrits au tableau la règle de distributivité et annonce qu'on reviendra sur cela en classe entière.

Bilan, commentaire, prolongement.

La première partie de l'activité marche bien. Les élèves s'approprient immédiatement l'activité, et réussissent à avancer après quelques tatonnements. Ils ont l'occasion de revoir des règles de calculs (priorité des opérations, usage des parenthèses), ils réussissent à comprendre la notion d'équivalence entre progammes de calcul et le lien avec l'égalité.
Par contre, le passage à une écriture algèbrique ne passe pas.

Peut-être pourrait-on justifier le besoin de *prouver* en donnant un exemple : deux programmes différents qui coïncident sur une entrée particulière, comme $+3$ et $\times 2+1$ coïncident sur l'entrée 2.

Peut-être serait-t-il possible de séparer cette activité en deux séances (plus courtes). La première séance, si elle a lieu à un moment de l'année où l'algèbre n'est pas encore abordée ou à peine, contiendrait les questions 1 et 2. Puis plus tard, une deuxième séance reviendrait sur cette activité avec les questions 3 et bonus, et en demandant, plutôt qu'une preuve de l'équivalence, de trouver les programmes équivalents sans faire de test.

La question 3 de cette activité peut donc être abordée plus tard, après avoir étudié "produire une expression littérale".

Les instructions des programmes peuvent évidemment être modulées. Ici, le choix a été fait de ne pas aborder le cas de la soustraction afin de multiplier les exemples avec des opérations identiques et ainsi faciliter le reconnaissance "graphique" de la distributivité.

On peut également jouer sur le choix des variables didactiques.
Le couple de programmes 2 et 3 peut être traduit littéralement par : $3(x+1) = 3x+3$.
Le couple de programmes 1 et 5 par : $10x+2 = 2(5x+1)$.
Dans le couple 2 et 3, le facteur commun est bien mis en évidence. Alors que dans l'autre couple, la variable ayant le coefficient 5 dans la forme factorisée, cette reconnaissance du facteur commun peut-être moins aisée. Ce choix de la "transparence" peut être modifié pour augmenter ou diminuer la complexité de l'activité.

2.5 Activité : Une solution peut en cacher une autre (Fiche élève)

Voici un programme de calcul :

Etape 1 : Prendre un nombre
Etape 2 : Additionner 3
Etape 3 : Reprendre le nombre de départ
Etape 4 : Soustraire 3
Etape 5 : Multiplier les résultats des étapes 2 et 4
Etape 6 : Ecrire le résultat final

Question :

Quel(s) nombre(s)doit-on choisir au départ pour obtenir 16 à l'arrivée ? Même question avec 135 puis avec $-1,16$.

Activité : Une solution peut en cacher une autre (Commentaires)

Intention des auteurs (objectif, prérequis, situation dans la progression)

Cette activité a été conçue pour des élèves de 3^e. Les élèves doivent avoir déjà rencontré des programmes de calculs et savoir les remonter, l'étude des identités remarquables n'est pas nécessaire mais facilitera l'approche de l'activité.

A travers cette activité, les auteurs souhaitent : revenir sur le sens du signe égal et sur son usage intempestif en début de ligne ; redécouvrir une égalité remarquable ; travailler sur la mise en équation en utilisant la propriété de transitivité de l'égalité et résoudre des équations de la forme $x^2 = a$.

Proposition de passation (matériel, dispositif)

Matériel :

Le programme de calculs doit être visible au tableau, le mieux serait de le vidéo-projeter. L'usage d'un tableur peut être envisagé.

Scénario prévu par l'enseignant :

Les élèves travaillent seul ou en binôme.

Première étape : (environ 5 minutes) distribution des fiches élèves, vidéo-projeter le programme de calcul au tableau. Les élèves sont laissés en autonomie pendant quelques minutes puis le professeur rompt le silence pour répondre aux premières questions afin de lever les doutes des élèves.

Deuxième étape : (environ 20 minutes) Les élèves avancent dans l'activité, le professeur donne des informations supplémentaires ou suggère des pistes aux élèves les plus en difficulté. Le professeur mettra le doigt sur le fait que $(x-3)(x+3)$ est peut être égal à x^2-9, ainsi que sur le fait qu'il existe plusieurs nombres de départ qui peuvent donner le même résultat final suite à l'exécution du programme de calcul.

Troisième étape : (environ 20 minutes) Mise en commun de l'activité. Le professeur devra insister :
- sur l'utilisation intempestive du signe "égal" ;
- $(x-3)(x+3) = x^2-9$ est une identité remarquable ;
- sur la transitivité de l'égalité permettant la mise en équation suivante : $x^2-9 = 16$;
- $x^2 = 25$ admet plusieurs solutions, possibilité d'utiliser le tableur pour convaincre les élèves les plus dubitatifs.

Institutionalisation :

- $x^2 = a$ admet deux solutions si a est strictement positif qui sont $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.
- $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ qui s'utilisera dans les deux sens.

Compte rendu d'observation

Classe de 3^e dans un collège au niveau "très hétérogène".

9h05 : Une fois les élèves installés et l'appel effectué, le professeur présente le travail de la séance.

P : "Je vais vous distribuer une activité, je vous laisse tranquillement la découvrir et ensuite nous ferons un premier bilan."

Un élève distribue les feuilles de l'activité. Les élèves se mettent rapidement au travail.
Pendant que les élèves cherchent, le professeur écrit au tableau le programme de calcul.

9h12 : E : "Je ne comprends pas par quoi on multiplie ?" (Son voisin lui explique)
E au professeur : "Vous pouvez contrôler pour voir si le résultat est juste ?"

Le professeur vérifie, valide le calcul puis en profite pour passer dans les rangs pour vérifier l'avancée du travail et réexplique le principe du programme de calcul pour les élèves les plus en difficulté.

E : "Monsieur, j'ai trouvé", Le professeur vérifie les calculs de l'élève et soulève une erreur.

9h15 : Beaucoup d'élèves testent des valeurs avec la calculatrice et essaye d'obtenir 9, un élève au fond de la classe dit avoir trouver une solution : "c'est 5, avec 5 on obtient 16". Le professeur lui demande alors s'il n'y a pas d'autres solutions.

9h17 : Le professeur propose aux élèves de faire une première synthèse des différentes démarches qu'ils ont adoptées.
E : "On prend un nombre au hasard et on teste le programme dans le bon sens". Le professeur note son idée au tableau en écrivant exactement ce qu'il a dit.
E : "On a déjà fait des exercices de ce type, on pouvait prendre le programme à l'envers mais là ce n'est pas possible parce que l'on ne peut pas remonter les étapes 2 et 4".
P : "Effectivement, on peut être bloqué, mais je le note." Le professeur écrit au tableau : "Remonter le programme de calcul ?".
E : "Par rapport à 135, on voit que ça se termine par 5 donc le programme de calcul est peut être une multiplication par 5."
Certains élèves ne sont pas d'accord, le professeur intervient : "c'est à vérifier, je le note." Le professeur écrit : "Multiplication par 5 ?"
Le professeur ajoute : "Vous me dites que l'on a déjà fait ce type d'exercice, en passant dans les rangs, j'ai observé qu'il y a des élèves qui ont fait d'autres choses."
E : "On fait une équation avec x , on prend x au départ et on essaye de faire une équation."
Le professeur note cette idée au tableau : "Prendre x au départ et essayer d'écrire une équation."
Puisque aucun élève n'exprime d'autre idée, le professeur relit ce qu'il a noté et demande quelles valeurs pourraient être testées par rapport au premier point qu'il a noté au tableau. Les élèves donnent les valeurs suivantes : 8 ; 2 ; 5 ; 7 et 12, le professeur leurs proposent de rajouter -2.
P : "Je vous laisse encore un temps de recherche, faîtes les calculs avec les valeurs proposées."

Les élèves se remettent au travail.
Certains écrivent sur leur cahier : $(x+3)(x-3) = x$ ou encore $(x+3)(x-3) = y$.
D'autres calculent sur leurs feuilles en présentant de la manière suivante :

$$8$$

$$8 + 3 = 11$$

$$8$$

$$8 - 3 = 5$$

$$11 \times 5 = 55$$

etc.

9h35 environ : Le professeur demande un volontaire pour faire le calcul avec 8. Un élève se porte volontaire et écrit :

$$8 + 3 = 11$$

$$8 - 3 = 5$$

$$11 \times 5 = 55$$

Le professeur demande si tout le monde est d'accord : "Le calcul est-il juste ? Est-ce que c'est bien écrit ?"
E : "oui les calculs sont justes et les égalités sont bien écrites car il les a écrites en allant à la ligne, il ne les a pas enchaînées.
Ensuite les élèves vont à tour de rôle écrire les solutions suivantes :
E :

$$5$$

$$5 + 3 = 8$$

$$5$$

$$5 - 3 = 2$$

$$8 \times 2 = 16$$

E :

$$2 + 3 = 5$$

$$2 - 3 = -1$$

$$5 \times (-1) = -5$$

E :

$$-2$$

$$-2+3=1$$

$$-2-3=-5$$

$$1\times(-5)=-5$$

Une fois les solutions écrites au tableau, le professeur demande si les élèves ne remarquent pas quelque chose.
E : "Oui, Avec 2 et -2, on obtient la même chose."
E : "Si avec 5 on obtient 16 alors avec -5 aussi ?"
E se propose d'aller au tableau avec sa calculatrice et d'écrire les calculs avec -5. Le professeur l'autorise.
L'élève écrit :

$$-5$$

$$-5+3=-2$$

$$-5$$

$$-5-3=-8$$

$$(-2)\times(-8)=16$$

P : "Donc avec 5 et -5 on obtient 16", le professeur écrit au tableau : "Deux nombres différents au départ donnent un même nombre à l'arrivée."
P : "J'ai vu que des élèves essayaient avec x. Qui veut essayer au tableau ?"
E va au tableau et écrit $(x+3)(x-3)=x^2-3^2$. Les autres élèves : "C'est une identité remarquable !" ; "oui, mais il faut détailler" ; "étape par étape".
Le professeur écrit sous la dictée des élèves :

$$x$$

$$x+3$$

$$x$$

$$x-3$$

$$(x+3)(x-3)$$

E : "On peut ensuite factoriser, on utilise $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$, on obtient x^2-9. P : "Et ensuite que fait-on ? Je vous rappelle qu'un élève proposait de prendre x et ensuite d'écrire une équation, Qui veut écrire une équation à partir de ça ?"
E lève la main et va écrire l'équation : $x^2-3^2=16$ en disant : "On ne connait pas la valeur de x, donc on cherche x tel que x^2-3^2 de l'étape 6 est égal à 16.
P : "Essayer maintenant de résoudre cette équation en détaillant.
Les élèves se mettent au travail.

9h55 La sonnerie marque la fin de la séance, le professeur demande de terminer l'activité pour la séance prochaine (le lendemain).

Bilan, commentaire, prolongement.

Cette activité a été menée sur une heure. Il est cependant préférable de prévoir deux heures, le professeur ayant manqué de temps (les solutions pour $-1, 16$ n'ont pas été traitées). Il devra donc prévoir un travail à donner à ses élèves entre les deux séances (faire par exemple écrire aux élèves un programme de calcul équivalent mais comportant moins d'étapes).

Le tableur pourrait être mis en oeuvre dans cette activité pour illustrer le fait que l'équation $x^2=a$ n'admet de solution que pour des valeurs positives de a. Le recours à la représentation graphique de la fonction carré peut également être mobilisée pour montrer qu'un nombre a, strictement positif, possède deux antécédents par la fonction carré.

L'intérêt de cette activité est qu'elle motive l'utilisation d'autres procédures. Les élèves ont déjà été confrontés à ce type de problème en classe de 4^e lors de la résolution d'équations du premier degré à une inconnue. Une méthode de résolution consiste à "remonter" le programme en ayant recours aux opérations inverses (à la multiplication on fait correspondre la division et à l'addition on fait correspondre la soustraction). La formulation du programme ainsi que la nature de l'équation concernée (équation du second degré) rend le recours à cette méthode impossible.

2.6 Activité : Chercher l'intrus (Fiche élève)

Voici quatre programmes de construction.

a) Tracer les quatre figures ci-dessous.
b) Observer les quatre quadrilatères et chercher l'intrus en justifiant la réponse.

1) Tracer un rectangle ABCD tel que AB = 6 cm et BC = 4,5 cm.	2) Tracer un triangle ABD rectangle en A tel que AB = 6 cm et AD = 4,5 cm. Placer I le milieu de [BD]. Tracer C symétrique du point A par rapport à I. Tracer le quadrilatère ABCD ainsi obtenu.
3) Tracer un triangle ABD rectangle en A tel que AB = 6 cm et AD = 4,5 cm. Tracer un triangle BCD rectangle en C différent du premier et situé de l'autre côté de l'hypoténuse [BD].	4) Tracer un triangle ABD tel que AB = 6 cm, AD = 4,5 cm et BD = 7,5 cm. Tracer le cercle circonscrit au triangle ABD, appeler I son centre. Placer le point C intersection du cercle et de la droite (AI) et différent du point A. Tracer le quadrilatère ABCD ainsi obtenu.

Activité : Chercher l'intrus (Commentaires)

Intention des auteurs (objectif, prérequis, situation dans la progression)

Cette activité permet de faire travailler la classe sur le concept d'égalité en géométrie (deux figures sont considérées comme égales si elles sont superposables). Deux scénarios sont alors possibles. Les élèves peuvent dans un premier temps définir des critères afin d'exclure l'une des quatre figures (figures superposables), puis en utilisant les propriétés connues démontrer que les trois autres quadrilatères sont bien égaux car possédant les même propriétés (celles du rectangle). Ils peuvent également tenter de montrer que chacun des quadrilatères est un rectangle et lorsqu'une démonstration n'est pas possible, identifier l'intrus.

Cette activité peut être proposée à des élèves en fin de 4^e et ayant déjà vu le théorème de Pythagore ainsi que le cercle circonscrit à un triangle rectangle, ou bien elle peut être proposée à des élèves en début de 3^e comme une révision sur les notions abordées en 4^e.

Proposition de passation (matériel, dispositif)

Une fois la fiche distribuée, les élèves travaillent individuellement en traçant chacune des figures. Lors de la mise en commun, le professeur pourra utiliser un logiciel de géométrie dynamique afin d'enrichir sa correction. Ensuite vient la phase de démonstration. Deux situations sont possibles, l'intrus a été trouvé et les élèves devront alors confirmer que les trois autres quadrilatères sont bien des rectangles. Ou bien, l'intrus n'a pas encore été trouvé et les élèves devront alors prouver quels quadrilatères sont des rectangles et par élimination trouver l'intrus. Cette phase de démonstration peut se faire soit en autonomie avec une classe d'un bon niveau soit guidée par le professeur avec une classe d'un niveau plus faible.

Compte rendu d'observation

L'activité a été proposée pour une classe de 3^e générale, 25 élèves le 15 septembre à 11h00, donc en début d'année.
Le collège est un collège classé REP.
Il n'y aucun absent lors de la séance.
Dans les dialogues, P représentera le Professeur et E soit un élève, soit un groupe d'élèves.

L'activité est distribuée aux élèves. Elle est lue, puis le travail commence. Au bout de cinq minutes, le professeur corrige la première figure sous les indications des élèves et en profite pour rappeler qu'un quadrilatère n'a besoin que de trois angles droits pour être un rectangle.

11h21 : Correction du cas n°2 par le professeur, discussion autour de la longueur de BD, le professeur demande alors aux élèves comment peut-on trouver la longueur BD, l'égalité de Pythagore arrive très rapidement.
Le professeur écrit l'égalité de Pythagore avec les longueurs, puis avec les nombres. Les élèves donnent rapidement la longueur du troisième côté.

11h27 : Travail des élèves autour du cas n°3.

En passant dans les rangs, le professeur voit une élève tracer un rectangle sans tomber dans le piège (elle trace une forme en cerf-volant), mais l'efface pour faire comme sa voisine qui a fait un triangle rectangle.
Durant le travail autour du cas n°3, des élèves ont demandé plusieurs fois les mesures. L'enseignant leur répond qu'ils doivent suivre la consigne.

11h34 : Correction par un élève du cas n°3, le professeur transcrit le programme de construction d'un élève nourri par les interventions d'autres élèves.

11h40 : Correction du cas n°4, le professeur effectue à cette occasion un court rappel sur la notion de cercle circonscrit et la caractérisation du triangle rectangle inscrit.

11h43 : Les élèves commencent à aborder la notion d'intrus.

P : Que signifie être un intrus ?
E : C'est être un intrus, c'est être pas comme les autres.
P : D'accord et pour une figure, cela veut dire quoi être un intrus ?

Les élèves donnent diverses réponses, mais ne parviennent pas à formuler une réponse proprement mathématique.

Le professeur dessine alors trois rectangles au tableau : deux de taille et forme sensiblement les mêmes, et un troisième beaucoup plus petit que les deux autres.

P : Quel est l'intrus ?
E : (en chœur) "lui" (en pointant le troisième).
P : Pourquoi ?
E : Parce qu'il n'est pas comme les autres, ça se voit !

Le professeur rappelle alors qu'en mathématiques, on ne peut pas toujours dire que "comme ça se voit alors c'est vrai". Pour le montrer, le professeur efface alors le troisième rectangle et en dessine un autre, de même taille et même forme que les deux autres.

P : Et là ?

Les élèves pointent différents rectangles.

P : Comment je pourrais savoir qui est l'intrus ?

Des élèves répondent différentes choses mais un répond : "On cherche celui qui n'est pas comme les autres."

P : Comment savoir lesquels vont ensemble alors ? Quelles sont les figures "égales" ?
E : Celles qui ont les mêmes mesures.
E : Les mêmes angles !
P : Mais encore ? Comment je sais qui a les mêmes mesures ?
E : On mesure !
P : Oui, mais là je vais supposer que je n'ai aucune instrument de mesure.

Silence. Puis certains élèves annoncent des techniques en relation avec des instruments de mesure, le professeur réfute rapidement.

P : Si je les superpose, comment je peux savoir qui est l'intrus ?
E : Celui qui n'est pas comme les autres !
P : Voilà, donc en géométrie, des figures égales sont des figures superposables. Maintenant revenons à notre activité, Quel est l'intrus ? Comment le trouver ?
E : L'intrus est le cas 1.
P : Pourquoi ?
E : Parce que c'est un rectangle et les autres sont des quadrilatères.
P : Qui te dit que les autres ne sont pas des rectangles ? Quand est-ce qu'un rectangle est superposable à un quadrilatère ?

Les élèves énoncent que le quadrilatère doit être superposable, donc avoir les mêmes longueurs et les mêmes angles.

P : Donc ? Comment s'appelle un quadrilatère qui a les mêmes angles qu'un rectangle ?
E : Un rectangle.
P : Donc il va falloir montrer que les quadrilatères sont, ou pas, des rectangles. Et à quelle condition des rectangles sont superposables ?
E : Quand les longueurs et les angles sont les mêmes.

Les élèves travaillent sur comment montrer que les cas 2 et 4 sont des rectangles. Le professeur indique à ceux qui sont perdus qu'il va falloir chercher à démontrer que les quadrilatères ont bien trois angles droits et que les longueurs sont les mêmes.

11h55 : Fin de la séance. Le professeur annonce que les cas 2 et 4 sont bien des rectangles, et que comme le précise l'énoncé, les cas 1, 2 et 4 ont les mêmes longueurs.

P : L'intrus est donc le cas 3. Car il y avait un piège dans l'énoncé.

Le cas 3 est rapidement expliqué par l'enseignant, puis les élèves rangent leurs affaires.

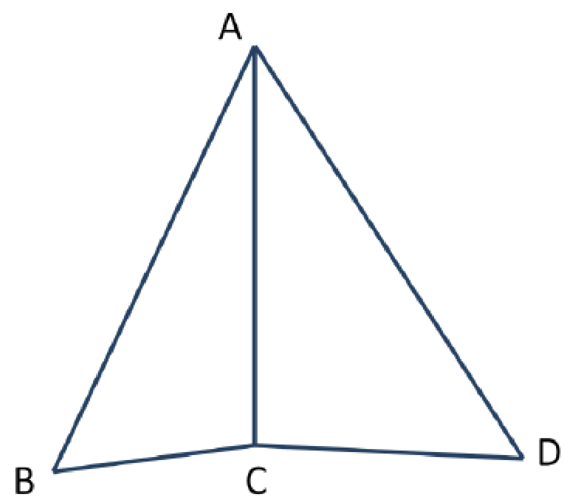
Bilan, commentaire, prolongement.

En premier lieu, après avoir expérimenté cette activité, il nous paraît judicieux de partager le temps de travail en deux parties car une seule séance n'est pas suffisante pour permettre à tous les élèves de bien comprendre chaque construction et ainsi de développer l'idée de démontrer que les cas 1, 2 et 4 sont des rectangles superposables. De

plus, il peut s'avérer aussi nécessaire de consacrer plus de temps à la synthèse de cette activité afin et, entre autre, de mieux mettre en valeur la notion de figures égales.
Nous pouvons également dire que le temps passé à cette activité nous paraît légitime dans le sens où il s'avère qu'elle constitue une bonne séance de révision pour des élèves en fin de 4^e ou en début de 3^e.
Pour finir, d'autres scénarios pourraient-être envisagés comme des travaux de groupes par exemple. Nous n'avons pas approfondi ces pistes de travail, nous laissons le soin aux lecteurs de réfléchir à ces éventualités.

2.7 Activité : Monsieur Pythagore, encore vous ! (Fiche élève)

Mathéo a tracé une figure à main levée comme ci-dessous :



Chloé lui propose de construire cette figure avec les instruments de géométrie telle que :

AB = 15 cm, BC = 9 cm, AC = 12 cm, DC = 16 cm et AD = 20 cm.

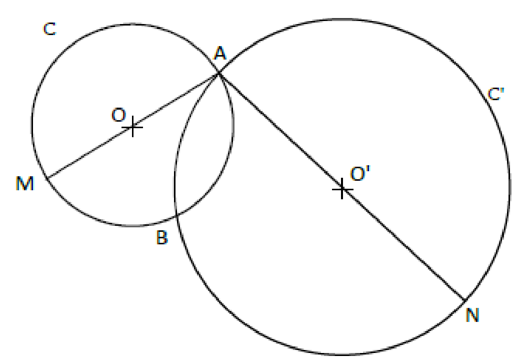
Dans ce cas, démontrer que (BC) = (CD).

Exercice **(Avec le théorème des milieux)**

Soit ABC un triangle quelconque et M un point de [BC] distinct de B et de C.
Soit I, J et K les milieux respectifs de [AB], [AM] et [AC].
Démontrer que (IJ) = (JK).

Exercice **(Avec la caractérisation d'un triangle rectangle dans un cercle)**

On considère la figure ci-contre dans laquelle A et B sont les points d'intersection des cercles C de centre O et C' de centre O'.
[AM] est un diamètre du cercle C .
[AN] est un diamètre du cercle C'.
Démontrer que (BM) = (BN).



Activité : Monsieur Pythagore, encore vous ! (Commentaires)

Intention des auteurs (objectif, prérequis, situation dans la progression)

L'objectif de cet exercice est de traiter la notion d'égalité de droites à travers l'utilisation de la réciproque du théorème de Pythagore. Il est proposé aux élèves à la fin du chapitre sur la réciproque du théorème de Pythagore en guise d'exercice d'approfondissement. Ce chapitre est traité, selon notre progression, lors de la quatrième période scolaire, entre les vacances de février et les vacances de Pâques. Sachant que le théorème de Pythagore direct et la caractérisation d'un triangle rectangle dans le cercle ont été traités dans les périodes précédentes (respectivement la deuxième et la troisième période).

En ce qui concerne la notion d'égalité de droites, suivant notre progression sur l'ensemble des niveaux collège, les élèves sont sensés l'avoir abordée en 6^e, en 5^e et au moins une fois en 4^e, notamment par l'intermédiaire d'un exercice sur le théorème des milieux et/ou par l'intermédiaire de la caractérisation d'un triangle rectangle inscrit dans un cercle. Pour certains élèves, la notion d'égalité de droites n'est donc pas inconnue.

Proposition de passation (matériel, dispositif)

L'exercice peut-être vidéo-projeté au tableau pour présenter la figure à main levée et avoir une discussion sur le statut de cette figure. Un ordinateur relié à un vidéo-projecteur ou à un TBI peut donc être nécessaire. Sinon, l'exercice peut-être envisagé sans aucun autre support que le papier. Les élèves sont autorisés à utiliser la calculatrice ainsi que leurs instruments de géométrie et noteront le fruit de leurs réflexions sur leurs feuilles de classeur, ainsi que la synthèse qui sera faite sur cette activité. Cet exercice a été testé avec des élèves travaillant en binôme.

<u>Scénario prévu par l'enseignant :</u>

<u>1ère étape :</u> (15 à 20 minutes)
Le professeur distribue l'exercice sur une feuille. L'énoncé est aussi vidéo-projeté au tableau. Une fois l'activité distribuée, le professeur lit l'énoncé à voix haute et demande aux élèves s'ils ont des questions, il y répond le cas échéant. Un temps est laissé aux élèves afin que ceux-ci s'approprient l'énoncé et commencent leur recherche individuellement. Le professeur rappelle si besoin que les élèves ont droit aux instruments de géométrie ainsi qu'à la calculatrice.

<u>2ème étape :</u> (10 minutes)
Le professeur interrompt les recherches des élèves et fait un point sur les différentes démarches adoptées. Ces dernières peuvent être brièvement écrites sur le côté du tableau afin de laisser une trace écrite que les autres élèves pourront réinvestir. Si la question sur l'égalité des droites n'a pas émergé dans la première partie de la séance, il faudra alors la soulever afin que les élèves les plus en difficulté saisissent l'objectif mathématique de l'exercice et comprennent les démarches adoptées par ceux qui ont avancé dans leurs recherches.

<u>3ème étape :</u> (15 à 20 minutes)
Dans un premier temps, l'enseignant demande aux élèves de rédiger plus précisément sur leurs feuilles le raisonnement qu'ils ont choisi pour répondre à la question à partir de ce qui est déjà noté au tableau. Puis, dans un deuxième temps, l'enseignant demande à certains élèves d'aller écrire une partie de leur raisonnement dans le but de soumettre une solution qui convienne à l'ensemble des élèves.

<u>4ème étape :</u> (5 à 10 minutes ou au début de la séance suivante, selon le temps réellement pris pour les deux premières étapes)
Les classeurs sont fermés, le vidéo-projecteur est éteint. L'enseignant efface toutes les traces du travail, puis il écrit au milieu du tableau $(AB) = (BC)$. Il demande ensuite aux élèves de dire ce que cette égalité leur évoque et de récapituler ce qui a été dit sur la notion d'égalité de droites dans cet exercice. Chaque élève peut proposer son point de vue en levant la main ; le professeur note au tableau tout ce que l'ensemble de la classe veut retenir, après discussion, avec l'accord d'une majorité d'élèves et du professeur. Les élèves notent alors ce qui a été écrit au tableau.

<u>Institutionnalisation :</u>
Le signe « égal » peut être utilisé dans différentes situations mathématiques notamment pour évoquer une égalité de droites. Celle-ci peut être reliée à la fois à la notion d'alignement de points et à celle de droites confondues.

Compte rendu d'observation

Séance de Mathématiques
Classe de 4^e, Miramas

Contexte. *La séance se déroule dans une classe de 4ème, au mois de juin. Le professeur prévient l'observateur que quelques élèves savent qu'ils vont continuer en 3^e prépa-pro (anciennement 3^e DP6) et ne jouent plus leur rôle d'élève très sérieusement.*

Observation. Ci-dessous, P désigne le professeur, O désigne l'observateur, E désigne un élève quelconque, sauf mention du contraire, des E successifs désignent des élèves différents. Lorsqu'ils interviennent de façon très proche, les élèves sont plutôt désignés E et E'. Les dialogues rapportés sont soit glanés par l'observateur lorsqu'il circule entre les tables pendant les phases de recherche, soit ont lieu plus formellement de manière à être entendus par l'ensemble de la classe lors des phases de mise en commun.

14h30. Démarrage.

Les élèves s'installent rapidement, l'observateur IREM se présente. Le professeur distribue ensuite la fiche élève, et laisse quelques minutes aux élèves pour qu'ils prennent connaissance du problème posé. Tout de suite la question de la signification de $(AB) = (CD)$ se pose. Plusieurs élèves interviennent pour donner leur avis. Un élève intervient posément :

E : C'est une égalité de droites, c'est la même droite, ce n'est pas une égalité de mesure.
P *répète et confirme cette remarque, il ajoute* : c'est le sens du codage, si c'est mis entre parenthèses, c'est bien que ce que l'on demande de montrer, c'est que c'est la même droite.

Je vous laisse réfléchir en autonomie pendant 10 minutes, vous pouvez éventuellement en discuter avec votre voisin.

14h40. Certains élèves commencent à construire la figure, utilisant compas et règle graduée. Spontanément, ils font la même droite.

E : *en désignant au professeur l'angle $\widehat{BCD}$ qu'il a tracé.* C'est un angle droit ?
P : Bonne question. Comment le savoir ?
E : Avec Pythagore ?
P : Fais-le.

E' : *Qui a peut-être entendu qu'il s'agissait d'établir qu'un angle était droit. Ou bien qui pousse la démarche de mise en question/justification le plus loin possible.* Comment savoir quel angle doit être droit ?
O : Hé bien, dans un triangle rectangle, où est l'angle droit ? dans un triangle rectangle, de quoi parle-t-on ? de l'hypoténuse, qui est le coté le plus long, alors s'il y a un angle droit, c'est l'angle opposé au coté le plus long.

14h50. Au bout des dix minutes, quelques élèves ont réalisé des figures correctes, c'est à dire avec le codage des longueurs des cotés et les angles droits. Le professeur fait une premième synthèse au tableau.

P : J'attends vos informations.
E : On ne sait pas comment montrer qu'ils sont rectangles.
P : Tu parles de quoi ?
E : Les triangles.
P : Peux-tu les nommer ?
E : ABC et CAD.

Le professeur esquisse la figure au tableau et commente : certains ont rencontré des difficultés pour tracer la figure à main levée.

P : Quelle difficulté ?
E : Une longueur de $20cm$.

Le professeur écrit : "difficulté : une longueur de 20cm".

P : Et ensuite ?
E : Il y a des angles obtus.
P : Ah ?
P : Est-ce que cela nous fait avancer pour la question posée ?

E' : Il faut montrer qu'il y a des angles droits.
P : Lesquels ?
E' : En C.

Le professeur reprend le dessin au tableau, et code les angles droits.

P : Comment le montrer ?
E : On peut utiliser l'équerre ou le rapporteur pour mesurer les angles $\widehat{BCA}$ et $\widehat{DCA}$.
P : Est-ce que tu vas pouvoir te fier à cette mesure ?
E : Oui, il faut avoir du bon matériel et être précis.
P : Est-ce que cela suffit ?
E' : Certains instruments, surtout avec une telle longueur, entraînent des petites erreurs.
P : Bon, je vous laisse encore 10 minutes.

Immédiatement des doigts se lèvent. Le professeur ajoute : *Ah, une petite question, est-ce que certains ont utilisé la réciproque de Pythagore ?* Les doigts se lèvent, *P : Bon, je vais les voir tout de suite.*

15h00. Une petite moitié d'élèves ont utilisé correctement la réciproque du théorème de Pythagore et déduit que les triangles étaient rectangles en C. Quelques uns ont complètement répondu à la question en rédigeant que si les angles sont droits alors l'angle $\widehat{BCA} + \widehat{ACD}$ est plat et que dont, il s'agit bien de la même droite.

15h10. Un élève est envoyé au tableau pour rédiger cette étape. Il écrit :

$$BA^2 = BC^2 + AC^2$$
$$AB = 15cm \qquad AB^2 = 225cm$$
$$9^2 = 81 \qquad 12^2 = 144$$
$$81 + 144 = 225$$

P *à la classe* : Est-ce que vous pouvez faire quelques commentaires ?
E : D'abord, il dit pas dans quel triangle on se place. *L'élève au tableau ajoute au dessus de ses écrits* "dans le triangle ABC"
P : Et ensuite ?
E' : C'est brouillon, il faut écrire, d'une part, d'autre part.

Au tableau, l'élève complète, avec l'aide du professeur, qui au passage va transformer les cm en cm^2 lorsque c'est nécessaire. Finalement, au tableau on lit :

Dans le triangle ABC
D'une part :
$$AB = 15cm \qquad AB^2 = 225cm^2$$
D'autre part :
$$BC = 9cm, \qquad BC^2 = 9^2cm^2 = 81cm^2 \text{ et } AC = 12cm,\ AC^2 = 12^2cm^2 = 144cm^2$$
$$81 + 144 = 225$$
Donc $BA^2 = BC^2 + AC^2$

P : Et ensuite
E : D'après la réciproque de Pythagore, on peut affirmer que le triangle ABC est rectangle en C.
P : Et pour l'autre triangle ? *Il envoie un volontaire au tableau qui écrit :*

Dans le triangle ADC
D'une part :
$$AD = 20cm \qquad AD^2 = 400cm^2$$
D'autre part :
$$CD = 16cm, \qquad CD^2 = cm^2 = 256cm^2 \text{ et } AC = 12cm,\ AC^2 = 12^2cm^2 = 144cm^2$$
$$256 + 144 = 400$$
Donc $DA^2 = DC^2 + AC^2$
La réciproque de Pythagore nous permet de dire que le triangle ADC est rectangle en C.

E : Il a oublié un mot. "D'après".
P : Est-ce que cela change quelque chose ?
E : Non.
P : Alors, a-t-on avancé pour répondre à la question initiale ?
E' : On a un angle plat donc on a les mêmes demi-droites.
P : Que veux-tu dire ?

Le professeur envoie l'élève au tableau pour proposer la fin de la rédaction. Celle-ci écrit :

Les deux angles font un angle de 180°, donc les droites sont les mêmes.

P : Pourquoi ? Peux-tu réécrire exactement quels deux angles et indiquer le codage.

$\widehat{BCD} = 180°$, donc les demi-droites $[BC)$ $[CD)$ forment une même droite.

La cloche sonne. Le professeur attend le silence et récapitule. Nous avons montré que les angles $\widehat{BCA}$ et $\widehat{ACD}$ étaient droits, et qu'alors leur somme est égale à 180°. Nous en avons déduit que les points B, A et D sont sur la même droite. Nous ferons la synthèse demain.

Fin de la séance

Mardi 3/06/2015, de 13h30 à 14h30 (première heure de l'après-midi)
Classe 4^e
Observation de la deuxième partie de l'activité - Première partie observée le lundi 2/06/2015.

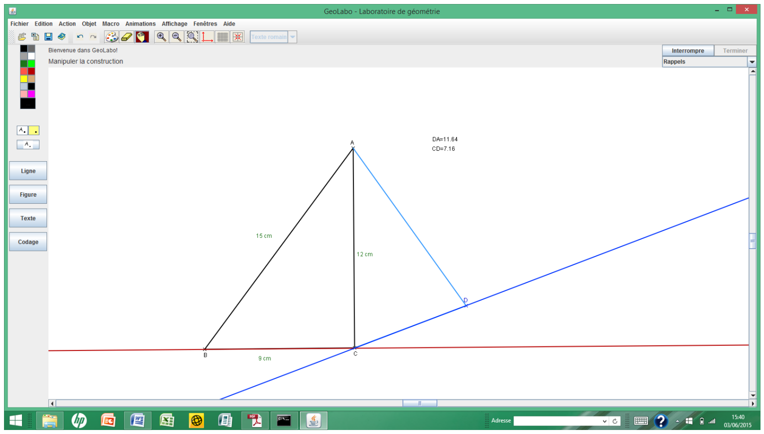
13h30 : Entrée en classe, au dernier moment le professeur a dû changer de salle et travailler dans une salle qui ne possède qu'un vidéo-projecteur portatif orienté vers un écran situé sur le côté de la salle et une disposition des bureaux-élèves différentes par rapport à la séance de lundi. Le professeur procède à l'appel et fait écrire un mot dans le carnet de correspondance pour une modification d'emploi du temps.

13h40 : Les élèves reprennent le travail effectué la veille. Le professeur vidéo projette l'énoncé tout en demandant à un volontaire de résumer la séance précédente. Un élève lève la main, P l'interroge.

E : On a démontré que les deux triangles étaient des triangles rectangles, comme ça, les points sont alignés.
P : Peux-tu préciser...
Un autre élève lève la main en prenant la parole :
E : En C, il y a deux angles adjacents de 90°, cela donne 180°, un angle plat.
E (élève qui a écrit la conclusion lors de la séance précédente) : Et puisque l'angle est plat, ces deux côtés sont des demi-droites qui forment en fait une droite sur laquelle se trouve les points B, C et D, c'est la même droite, on peut écrire $(BC) = (CD)$... En fait, (BC) et (CD) sont deux noms que l'on peut donner à cette droite.
Une bonne moitié de la classe approuve.
P : Oui, c'est intéressant notons-le pour compléter notre synthèse.
Entre-temps un élève visiblement préoccupé a levé la main.
E : N'aurait-on pas pu démontrer qu'un seul angle est droit ? Si ABC est rectangle en C, cela suffit non ?
P : Que pensez-vous de cette question ?
P : Alors ?
P : Antoine qu'est-ce que tu en penses. P désigne la figure de l'énoncé.
E : Ben... De l'autre côté, on ne sait pas la valeur de l'angle, c'est un autre triangle.
E : Justement on ne sait pas si les points sont alignés, donc $\widehat{BCA} = 90°$ ne permet pas de terminer l'exercice.
P interroge un élève qui a levé la main.
E : Si ABC est rectangle en C, le triangle ACD lui peut varier et l'angle $\widehat{ACD}$ aussi, donc on ne peut pas conclure.
P : Alors est-ce que vous comprenez les arguments de vos camarades qui disent que cela ne suffit pas à démontrer que l'angle est plat ?

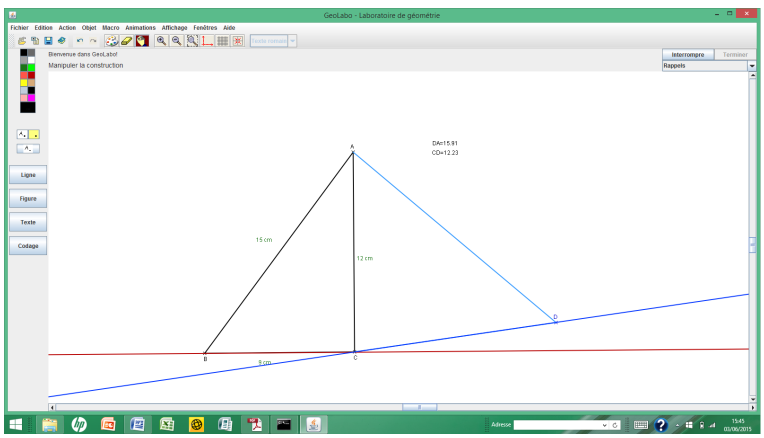
Environ 14h50.

E (l'élève préoccupé) : Oui, il me semble.
Comme E ne semble toujours pas convaincu le professeur ouvre le logiciel Géolabo et lui présente la figure suivante :
Capture d'écran :

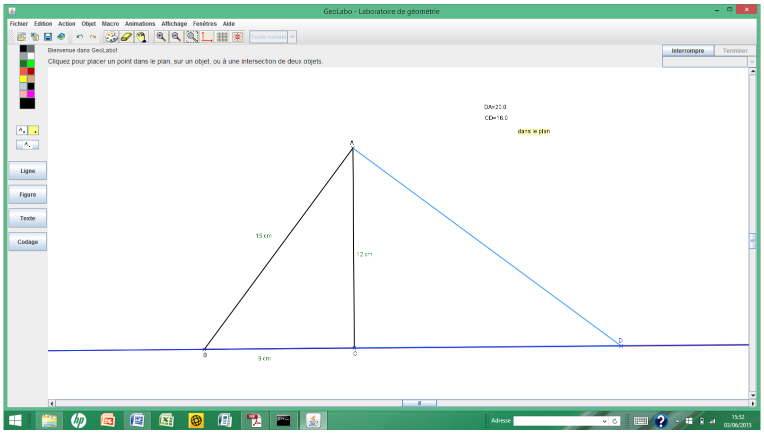


Tout en faisant la figure P commente à la classe : On trace ABC en respectant les mesures et je place D (point "magique") au hasard pour ensuite tracer ACD, est-ce que vous êtes d'accord ? (Approbation de la classe, l'écran étant sur le côté , les élèves se tournent pour mieux voir)

P : je peux ainsi manipuler D grâce aux logiciel et en même temps je vois que les mesures de DA et de CD varient.
E (jusque là en retrait) : Et la mesure de l'angle $\widehat{ACD}$ aussi !

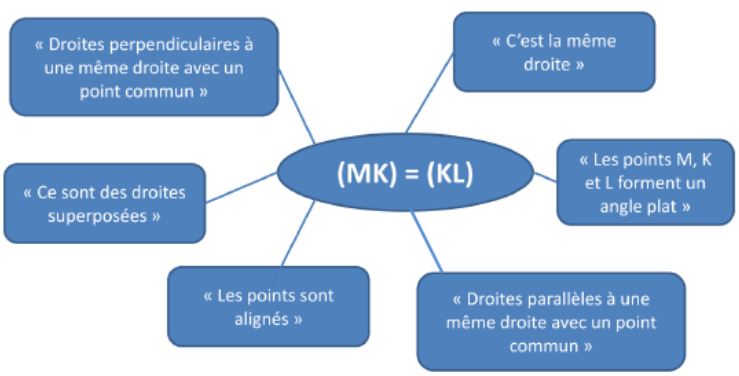


P : Oui aussi, mais pour gagner un peu de temps je n'affiche pas sa valeur, vous voyez bien D et les mesures ?
E : Mais alors on peut essayer avec les vraies valeurs de DA et CD ?
P : Oui bien sûr on essaye avec $DC = 20$ cm P s'est trompé.
E : Non monsieur, c'est $CD = 16$ cm et $AD = 20$ cm.
P : Excusez-moi, je corrige.
P obtient au bout de quelques minutes quand même l'écran suivant :



P : Qu'en pensez-vous ?
E : Avec $DA = 20$ cm et $CD = 16$ cm, on peut démontrer que ACD est rectangle en C et donc les deux angles en C forment un angle plat, là on le voit, c'est comme nos figures à nous.
P : Est-ce que cela va mieux ?
E (élève préoccupé) : oui oui, j'ai mieux compris, les deux côtés sont indépendants au départ, donc on doit démontrer que les deux sont rectangles.
P : Bien, y a-t-il d'autres questions à propose de cet exercice ?
Pas de réponse, un groupe d'élèves parlent en montrant l'écran du doigt. P s'adresse à eux : Des questions ?
E : Non, la droite bleue est sur la droite rouge, c'est tout.
P : Tu veux ajouter quelque chose par rapport à ça ?
Pas de réponse, les autres élèves ne souhaitent manifestement pas suivre cette idée.
P : Bien maintenant en guise de conclusion à notre travail, j'aimerais que vous me disiez tout ce à quoi vous pensez si j'écris ça au tableau :

P écrit : $(MK) = (KL)$ au milieu du tableau. Plusieurs élèves interviennent mais les élèves qui ont participé jusque-là ne sont pas manifestés lors de cette phase de travail se contentant juste d'écouter et de noter.
Au final voilà ce qui est écrit :



P demande aux élèves de noter ceci dans leur cahier de recherche et après quelques minutes les élèves passent à une autre activité sur le cosinus d'un angle aigu dans un triangle rectangle.
Fin de l'observation, il est environ : 14h15. - Fin de l'heure à 14h25.

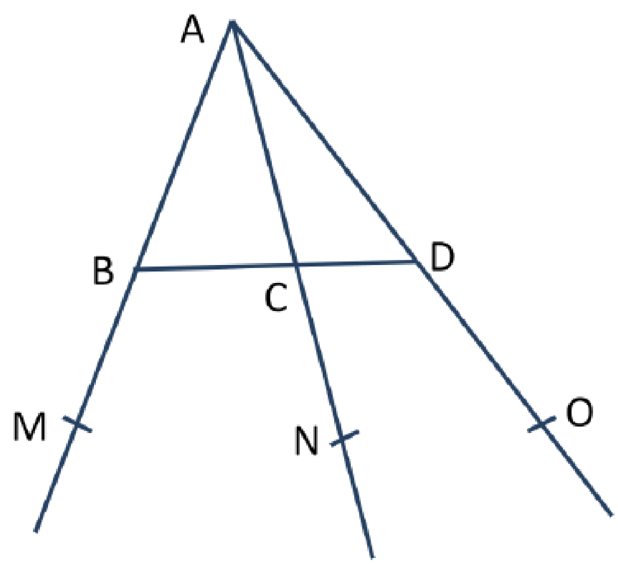
Bilan, commentaire, prolongement.

L'activité a bien fonctionné, les élèves étaient accrochés, ils ont compris des éléments au fur et à mesure.

Suivant les élèves ou le moment de passation, nous pouvons jouer sur quelques variables didactiques afin de rendre cette activité plus adaptée (les nombres utilisés au niveau des données numériques ou encore la façon de proposer la figure aux élèves). Un logiciel de géométrie dynamique peut-être utilisé par l'enseignant ou par les élèves afin de rendre la séance plus vivante et permettre aux élèves d'adhérer plus encore à l'activité. Cette utilisation peut aussi être un moyen de convaincre les élèves les plus sceptiques quant à la possibilité d'avoir des droites "confondues" et leur permettre de se lancer plus activement dans la démonstration. Ce problème peut être guidé par le biais de questions intermédiaires pour les élèves en difficulté ou bien au contraire, pour rendre le problème plus ouvert, la question n°2 pourrait être formulée ainsi : "Chloé affirme que dans ce cas $(BC) = (CD)$ es-tu d'accord ? Justifie ta réponse." Pour terminer, à chaque nouvelle activité proposée sur le même sujet, c'est-à-dire l'égalité de droites, le professeur peut rebondir en utilisant cette activité comme référence.

2.8 Activité : Monsieur Thalès, encore vous ? (Fiche élève 1)

Mathéo a tracé la figure à main levée comme ci-dessous :



Chloé lui propose de construire cette figure avec les instruments de géométrie telle que :

AB = 4 cm, AC = 6 cm, AD = 8 cm, BD = 6 cm, BC = 3,6 cm et CD = 2,4 cm.

De plus, M, N et O sont trois points tels que:

M ∈ [AB) tel que AM = 6 cm.

N ∈ [AC) tel que AN = 9 cm.

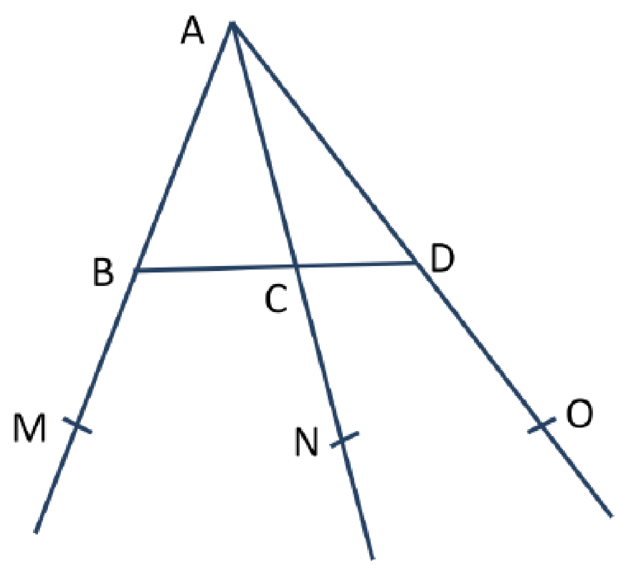
O ∈ [AD) tel que AM = 12 cm.

Dans ce cas, démontrer que (MN) = (NO).

2.9 Activité : Monsieur Thalès, encore vous ? (Fiche élève 2)

Sans la difficulté de démontrer que les points B, C et D sont alignés.

Mathéo a tracé la figure à main levée comme ci-dessous :



Chloé lui propose de construire cette figure avec les instruments de géométrie telle que :

AB = 4 cm, AD = 8 cm, BD = 6 cm,

et C ∈ [BD] tel que AC = 6 cm.

De plus, M, N et O sont trois points tels que:

M ∈ [AB) tel que AM = 6 cm.

N ∈ [AC) tel que AN = 9 cm.

O ∈ [AD) tel que AM = 12 cm.

Dans ce cas, démontrer que (MN) = (NO).

Activité : Monsieur Thalès, encore vous ! (Commentaires)

Intention des auteurs (objectif, prérequis, situation dans la progression)

L'objectif de cet exercice est de traiter la notion d'égalité de droites à travers l'utilisation de la réciproque du théorème de Thalès. Cet exercice d'approfondissement est proposé en fin de séquence. Ce chapitre est abordé entre les vacances de Noël et les vacances de février. Le théorème de Thalès, prérequis nécessaire, a été quant à lui traité en début d'année.

Connaissances	Capacités	Observations
Configuration de Thalès.	*- Connaître et utiliser la proportionnalité des longueurs pour les côtés des deux triangles déterminés par deux parallèles coupant deux droites sécantes.* *- Connaître et utiliser un énoncé réciproque.*	Il s'agit de prolonger l'étude commencée en classe de quatrième qui, seule, est exigible dans le cadre du socle commun. La réciproque est formulée en tenant compte de l'ordre relatif des points sur chaque droite mais, dans le cadre du socle commun, les élèves n'ont pas à distinguer formellement le théorème direct et sa réciproque. L'utilisation d'un logiciel de construction géométrique permet de créer des situations d'approche ou d'étude du théorème et de sa réciproque.

A noter que les connaissances et capacités qui ne sont pas exigibles pour le socle commun des connaissances et des compétences étaient en italiques.

Rappelons aussi les objectifs de la classe de 3^e en géométrie au niveau de la résolution de problèmes. Il s'agit :
- de connaître les objets usuels du plan et de l'espace, de calculer les grandeurs attachées à ces objets ;
- de développer les capacités heuristiques, les capacités de raisonnement et les capacités relatives à la formalisation d'une démonstration ;
- d'entretenir la pratique des constructions géométriques (aux instruments et à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique) et des raisonnements sous-jacents qu'elles mobilisent ;
- de solliciter dans les raisonnements les propriétés géométriques et les relations métriques associées vues dans les classes antérieures...

En ce qui concerne la notion d'égalité de droites, suivant notre progression sur l'ensemble des niveaux collège les élèves sont censés l'avoir abordée en 6^e, en 5^e et plus précisément en 4^e, à l'occasion d'exercices sur le théorème des milieux et/ou par l'intermédiaire de la caractérisation d'un triangle rectangle inscrit dans un cercle.

Proposition de passation (matériel, dispositif)

L'exercice peut être vidéo-projeté au tableau pour présenter la figure à main levée et avoir une discussion sur le statut de cette figure. Mais, l'exercice peut être envisagé sans aucun autre support que le papier. Les élèves sont autorisés à utiliser la calculatrice ainsi que leurs instruments de géométrie. Ils noteront le fruit de leurs réflexions sur leurs feuilles de classeur, ainsi que la synthèse qui sera faite sur cette activité. Tel que cet exercice a été testé, les élèves étaient disposés par deux, face au tableau.

Scénario prévu par l'enseignant :

1ère étape :

(15 à 20 minutes)

Le professeur distribue l'exercice sur une feuille. l'énoncé est aussi vidéo-projeté au tableau. Une fois l'activité distribuée, le professeur lit l'énoncé à voix haute et demande aux élèves s'ils ont des questions, il y répond le cas échéant. Un temps est laissé aux élèves afin que ceux-ci s'approprient l'énoncé et commencent leur recherche individuellement. Le professeur rappelle si besoin que les élèves ont droit aux instruments de géométrie et aussi à la calculatrice.

2ème étape :
(10 minutes)
Le professeur interrompt les recherches des élèves et fait un point sur les différentes démarches adoptées (Ces démarches peuvent être brièvement écrites sur le côté du tableau afin de laisser une trace écrite que les autres élèves pourront réinvestir.). Si la question sur l'égalité des droites n'est pas intervenue dans la première partie de la séance alors il faudra la soulever afin que les élèves les plus en difficulté saisissent l'objectif mathématique de l'exercice et comprennent les démarches adoptées par les élèves qui auront avancé dans leurs recherches.

3ème étape :
(15 à 20 minutes)
Dans un premier temps, l'enseignant demande aux élèves de rédiger plus précisément sur leurs feuilles le raisonnement qu'ils auront choisi pour répondre à la question à partir de ce qui est déjà noté au tableau. Puis, dans un deuxième temps, l'enseignant demande à certains élèves d'aller écrire une partie de leur raisonnement dans le but d'écrire une solution qui convienne à l'ensemble des élèves.

4ème étape :
(5 à 10 minutes ou au début de la séance suivante, selon le temps réellement pris pour les deux premières étapes)
Les classeurs sont fermés, le vidéo projecteur est éteint. L'enseignant efface toutes les traces du travail qui a été fait, puis il écrit au milieu du tableau (AB) = (BC). Il demande ensuite aux élèves de dire ce que cette égalité leur évoque et de récapituler ce qui a été dit sur la notion d'égalité de droites dans cet exercice. Chaque élève peut proposer son point de vue en levant la main ; le professeur note au tableau tout ce que l'ensemble de la classe veut retenir après discussion avec l'accord d'une majorité d'élèves et du professeur. Les élèves prennent ensuite des notes de ce qui a été écrit au tableau.

Institutionnalisation :
Le signe « égal » peut être utilisé dans différentes situations mathématiques notamment pour évoquer une égalité de droites. L'égalité de droites est reliée à la notion d'alignement des points et de droites confondues.

Compte rendu d'observation

La séance se déroule dans une classe de 3ème. Le chapitre sur le théorème de Thalès ayant été terminé récemment. Les élèves ont été prévenus qu'un observateur du groupe IREM, viendrait ce jour pour assister à leur activité.
Ci-dessous, P désigne le professeur, E désigne un élève quelconque, sauf mention du contraire, des E successifs désignent des élèves différents. Les dialogues rapportés sont soit glanés par l'observateur lorsqu'il circule entre les tables pendant les phases de recherche, soit ont lieu plus formellement de manière à être entendus par l'ensemble de la classe lors des phases de mise en commun. Ces deux rubriques sont respectivement désignées par *Travail en parallèle* et *Mise en commun*.

9h00 : Démarrage, travail en parallèle. Les élèves s'installent rapidement, l'observateur IREM se présente. Le professeur distribue ensuite la fiche élève, et laisse quelques minutes aux élèves pour qu'ils prennent connaissance du problème qui leur est posé et qui va être l'objet de l'activité de la séance. Les élèves interpellent le professeur pour demander des éclaircissements divers, mais aussi pour partager les pistes qui leur viennent à l'esprit. Très vite les élèves reconnaissent une configuration de Thalès même s'ils hésitent entre le théorème et sa réciproque.

9h10 : Première mise en commun. Le professeur demande à une élève de lire l'énoncé à haute voix. Celle-ci s'exécute. Notons qu'elle ne traduit pas le codage et prononce les lettres, sans préciser demi-droite, droite, longueur.

Le professeur demande : "En français, qu'est ce que cela veut dire ? Que veut dire $(MN) = (NO)$?
E : La droite (MN) est égale à la doite (NO).
P : Ca veut dire quoi ?
E : même longueur.
On entend un élève qui s'exclame : "C'est pas possible, c'est des droites !", en même temps que le professeur : "Une égalité de longueur. Tout le monde est d'accord ?"
E : Mais les droites c'est infini !
P : Alors, qu'est ce que cela veut dire ?
E : C'est la même droite.
P : Tout le monde est d'accord ?
E (un grand nombre, à l'unisson) : oui.

P : Alors, qu'est ce que cela veut dire ?
E : C'est la même droite, il y a une seule droite.

Travail en parallèle.

Des élèves essayent de montrer l'égalité des longueurs MN et NO.

E : Je ne comprends pas, je trouve que $\frac{MN}{BC}$ est plus petit que $\frac{NO}{CD}$.
P : Tu as dû te tromper. Vérifions. Ah, voilà l'erreur.

E : C'est aligné, parce que, en utilisant la réciproque de Thalès, on a que $(BC)//(MO)$ et $(BC)//(NO)$.
P : Oui, la clé est là. Il faut montrer que c'est aligné.
E : Il est dans le théorème et pas dans la réciproque ?
P : Mais qu'est-ce qu'il faut pour utiliser le théorème ? Des droites parallèles.
E : Si on montre que $(BD)//(NO)$ ça suffit ?
P : Mais pourquoi ? On peut faire un dessin (qu'il fait) où ce n'est pas le cas.
E : Ce n'est pas possible car elles partent du même point.

Mise en commun.

P (s'adressant à toute la classe) : Il y en a qui mélange (il écrit au tableau) $MN = NO$ et $(MN) = (NO)$. Quelle est la différence ?
E : Il y a des parenthèses.
P : Et alors, quel est le sens ?
E : Avec les parenthèses, ce sont des droites.
P : C'est ça. Plusieurs, d'entre vous font des calculs pour essayer de montrer que les longueurs sont égales, ce n'est pas cela. On veut l'égalité entre droites, autrement dit, comme vous l'avez dit vous-même "c'est la même droite".

P : Un certain nombre d'entre vous a de bonnes idées. Il fait le dessin au tableau de deux droites sécantes en B, l'une portant le point A, l'autre le point C. Les droites (AB) et (AC) sont-elles égales ?
E : On ne peut pas les calculer.
P : En effet, mais est-ce la question ?
E : Elles n'ont pas la même direction.
P : Oui, où faudrait-il mettre le point C pour que les droites soient égales ?

Un élève passe au tableau et met le point C en A.
P : C'est une possibilité. Est-ce la seule ?
E : Non, on peut à l'infini.
E : On peut entre A et B.
P : Oui, donc si les droites (AB) et (AC) (ou (BC)) sont les mêmes, alors les points sont alignés.

> Est-ce que les droites sont égales ?
> Est-ce que c'est la même droite ?
> Est-ce que les points sont alignés ?

P : On écoute S. (une élève qui veut parler).
S : Si on prouve que les droites BCD et MNO sont parallèles, on aura la réponse.
P : Oui, si on prouve que les points B, C, D sont alignés, et que les droites sont parallèles on aura la réponse. Pourquoi les points B, C, D sont-ils alignés ?
S : Si on ajoute BC et CD, on trouve BD
P : Oui, il dessine un triangle au tableau et demande si la somme des longueurs de deux coté est égale à la longueur du troisième. Les élèves hésitent, puis tous semblent convaincus qu'il y a égalité lorsque les points sont alignés.

P : Bon, reprenons, qu'est ce qu'on fait ? On montre que B, C et D sont alignés et après ?
E : On montre que $(BD)//(MO)$.
P : Bon rédigez cela et après on verra.
Montrez aussi que que $(BC)//(MN)$.
Au début vous avez bien avancé. certains on trouvé MN, d'autres ont trouvé NO. Alors on pourrait faire comme pour BCD, faire les sommes et conclure que MNO sont alignés.

Le professeur change son fusil d'épaule, car les élèves sont décidément plus à l'aise avec des valeurs.

Travail en parallèle : Des élèves continuent sur la lancée précédente. Elles trouvent que $(MN)//(BC)$ et que $(NO)//(CD)$ mais elles ont du mal à exprimer que $(MN)//(NO)$.

P dessine une droite, puis demande comment construire une nouvelle droite qui lui soit parallèle et qui passe par un point de la première droite. Les élèves ne sachant pas répondre, proposent une droite perpendiculaire ...

Alors le professeur retourne au tableau pour partager ce questionnement avec la classe entière.
Mise en commun. Le professeur écrit au tableau $(AB) = (BC)$. Qu'est ce que cela veut dire ?
E : Que les droites (AB) et (BC) sont égales.
P : Et encore ?
E (le même) : C'est peut-être la même situation que celle qu'on a. Deux droites avec un point commun.
P : Et alors qu'est ce que cela veut dire ?
Que les points A, B et C sont alignés ?

P : Vous avez presque trouvé. Vous avez trouvé que $(BC)//(MN)$ par exemple. Qui vient rédiger ?

Une élève va au tableau et rédige :

D'une part, $\frac{AC}{AN} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$
D'autre part, $\frac{AB}{AM} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

Elle s'en va.
P : Et la conclusion ?
Elle revient et écrit :

Donc elles sont parallèles.

P : Qui vient calculer MN ?
Une élève va au tableau et rédige.

$B \in (AM) \quad C \in (AN) \quad (BC)//(MN)$
Donc, d'après le them de Thalès , $\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN} = \frac{BC}{MN}$
$\frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{3{,}6}{MN} \qquad 3,6 \times 9 : 6 = 5,4cm$
$MN = 5,4cm$

Pendant ce temps, les élèves montrent au professeur qu'ils ont trouvé l'alignement avec l'égalité des longueurs : $MN + NO = MO$.

Fin de la séance

Bilan, commentaire, prolongement.

Commentaire de l'observateur : "Pour ma part cela a bien fonctionné, les élèves étaient accrochés, ils ont compris des éléments au fur et à mesure".

De la même manière que l'activité de "Monsieur Pythagore, encore vous !", nous pouvons jouer sur quelques variables didactiques afin de rendre cette activité plus adaptée : les nombres utilisés au niveau des données numériques, la façon de proposer la figure aux élèves ainsi que la façon de formuler l'énoncé avec la difficulté de démontrer que B, C et D sont alignés, ou sans cette difficulté (Fiche élève 1 ou Fiche élève 2). Un logiciel de géométrie dynamique peut-être utilisé par l'enseignant ou par les élèves afin de rendre la séance plus vivante et permettre aux élèves d'adhérer un peu plus à l'activité. Cette utilisation peut aussi être un moyen de convaincre les élèves les plus sceptiques quand à la possibilité d'avoir des droites "confondues" et leur permettre d'approfondir leur recherche. A chaque nouvelle activité proposée sur le même sujet, c'est-à-dire l'égalité de droites, le professeur peut rebondir en évoquant cette activité en particulier. Un certain "rafraîchissement" (ou évocation pure et simple) de l'axiome : *par un point donné, on peut mener une et une seule droite parallèle à une droite donnée*, peut s'avérer nécessaire. L'enseignant peut réfléchir sur ce dernier point et ainsi prévoir des aménegements au niveau de l'activité. Cela permettrait aux élèves de mieux comprendre la solution de cet exercice.

Annexe

Des exercices de géométrie amenant à des débats sur le symbole "=".

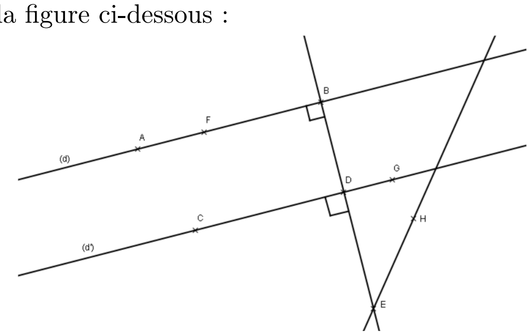
Exercice 1 :

Construire un triangle ABC tel que $AB = 6$ cm ; $AC = 4$ cm et $AB = BC$.

Certains élèves ont du mal à construire le triangle, plusieurs raisons à cela : BC n'a pas de valeur numérique (du mal à voir la transitivité de l'égalité) mais surtout BC n'est pas en premier dans la lecture de l'égalité $AB = BC$, beaucoup d'élèves ne comprennent pas pourquoi on nous donne deux fois le AB (problème avec la symétrie).

Exercice 2 :

Observe la figure ci-dessous :



Recopier et compléter avec un symbole mathématiques si c'est possible :

a) (AF) . . . . (DE)
b) (AF) . . . . (AB)
c) (d) . . . . (CG)
d) (HE) . . . . (FB)
e) (d') . . . . (BE)
f) (BD) . . . . (HE)
g) (AH) . . . . (FG)
h) (DG) . . . . (d')

Cet exercice peut entraîner plusieurs débats, notamment une discussion sur l'égalité de droites dans les cas (b) et (g).
Commentaire d'un professeur qui a testé cet exercice dans une classe de 6e :
"Quelques élèves veulent placer un symbole entre (AF) et (AB), le débat est vif entre ces élèves, après discussion avec eux je comprends qu'ils essaient d'utiliser le symbole d'inclusion (sans le connaître), j'en profite pour demander si pour eux (AB) = (AF). Pour eux oui, on a donc une double inclusion qui a émergée et je saute sur l'occasion pour dire que donc dans ces cas-là on met le symbole "="."

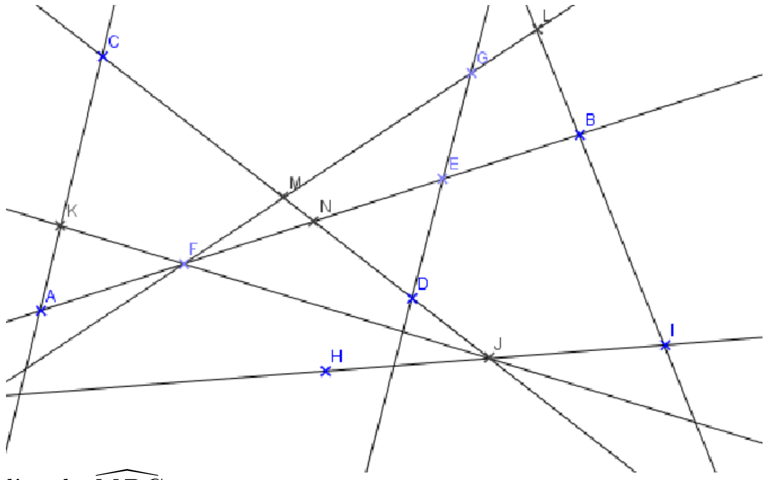
Exercice 3 :

La fonction f telle que $f(x) = (4x+1)(3x+5) - (2x+1)(6x+7)$ est-elle une fonction affine ? Si oui donner le coefficient directeur. Calculer $f(\frac{2}{3})$.

Beaucoup d'élèves répondent non car la fonction n'est pas dans sa forme canonique (importance de cette forme). Une fois la forme réduite, il faut donc identifier le coefficient directeur.

Calculer $f(4)$ fait intervenir plusieurs notions, assignation, transitivité ... autre ?

Exercice 4 :



- Marquer en bleu l'angle $\widehat{MDG}$.
- Marquer en rouge l'angle $\widehat{FBI}$.
- Marquer en vert l'angle $\widehat{CAN}$.
- Marquer en noir l'angle $\widehat{CDE}$.

Les élèves marquent les angles et sont surpris pour le dernier car ils ont déjà colorié en bleu, le professeur peut alors rebondir et demander ce qu'on peut dire des deux angles : ils sont égaux (et donc nous avons deux noms pour un même objet)

Exercice 5 :

Pour chaque question, placer les points A, B, C et D tels que :
1) $AB = CD$.
2) $(AB) = (CD)$.
3) $[AB] = [CD]$.

Permet aux élèves de voir des égalités qui sortent un peu de l'ordinaire (égalité numérique) et qui les perturbent beaucoup. (difficultés de réalisation, de compréhension des symboles ...) [REYNES, 1]

Bibliographie

[REYNES, 1] REYNES Francis, *Le concept d'égalité : clef ou verrou ?* Brochure « petit x » n°35 pp. 61 à 73, 1993-1994. IREM de Grenoble.

[REYNES, 2] REYNES Francis, *L'équivalence logique en collège : Fantasme didactique ou impératif catégorique ?* Brochure « petit x » n°37 pp. 35 à 42, 1993-1994. IREM de Grenoble.

[REYNES, 3] REYNES Francis, *La notion de mesure exacte : De l'impossibilité physique à la nécessité mathématique, Les conditions d'une rupture inévitable.* Brochure « petit x » n°53 pp. 69 à 79, 2000, IREM de Grenoble.

[EDUSCOL] EDUSCOL, Document d'accompagnement, Ressources pour les classes de 6^e, 5^e, 4^e, et 3^e du collège. *Du numérique au littéral*, Février 2008.

[EDUSCOL2] EDUSCOL, Document d'accompagnement, Ressources pour les classes de 6^e, 5^e, 4^e, et 3^e du collège. *le calcul numérique au collège*, page 4, Janvier 2007.

[DUPERRET, FENICE] DUPERRET Jean-Claude et FENICE Jean-Claude, *L'accès au littéral et à l'algébrique : un enjeu du collège.* Brochure Repères - IREM n°34, janvier 1999. Autour de la page 46 notamment.

[THEIS] THEIS Laurent, Thèse, *Les tribulations du signe =. Dans la moulinette de la bonne réponse.* Edition Bande Didactique, Mathèse.

[GERMIE, BESSOT] P.E. GERMI et A. BESSOT, *Statut des lettres et notion de variable*, « petit x » n° 45 pp. 55 à 58, 1996-1997. IREM de Grenoble.

[APMEP] Articles parus dans l'APMEP numero 468 et 470.

Egalite, ah oui ! Mais que sais-je ? d'Henri BAREIL.

La difficile adolescence du signe égal de Claudie ASSELAIN-MISSENARD.

"Je sais que" de Frédérique FOURNIER.

Le signe de l'égalité à l'école de Serge PETIT.

Les autres articles sont des réactions de lecteurs aux articles précédents :

A propos du signe "=" de Roger CUPPENS.

Encore "=" de Raymond RAYNAUD.

A propos d'articles du signe = du groupe MOTS.

[IREM] Brochure IREM de Rennes : *Autour du signe égal*, 1997.

[CHEVALLARD] Yves CHEVALLARD, *Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement au collège*, Petit x n°5 - 1984, Petit x n°19 - 1989 puis Petit x n°23, 1989/1990.

[BERTHELOT, SALIN] René BERTHELOT et Marie-Hélène SALIN, *L'enseignement de la géométrie au début du collège, Comment concevoir le passage de la géométrie du constat à la géométrie déductive ?* Petit x n°56, 2000-2001.

[BKOUCHE] Rudolf BKOUCHE, *De l'enseignement de la géométrie*, Repères - Irem n°76, Juillet 2009.

[HOUDEMENT] Catherine HOUDEMENT, *A la recherche d'une cohérence entre géométrie de l'école et géométrie du collège*, Repères - Irem n°67, Avril 2007.

[PARZYSZ] Bernard PARZYSY, *La géométrie dans l'enseignement secondaire et en formation de professeurs des écoles : de quoi s'agit-il ?*
http ://www4.pucsp.br/pensamentomatematico/quad17_BParzysz_06.pdf.

[PERRIN] Daniel PERRIN, *La géométrie : un domaine hors programme ?*, article du 24 décembre 2011 du Bulletin vert n°496 de l'APMEP. http ://www.apmep.fr/La-geometrie-un-domaine-hors.

[WALTER] Anne WALTER, *Quelle géométrie pour l'enseignement en collège ?* Petit x n° 54, 2000-2001.

AUTEURS

Alain Barichard (*Collège Pont de Vivaux - Marseille*), Matthieu Bruno (*Collège la Carraire - Miramas*), Charly Friche (*Collège Pythéas - Marseille*), Olivier Garrigue (*Collège la Carraire - Miramas*), Lionel Haddad (*Collège Thiers - Marseille*), Florence Neny (*Collège Marie Laurençin - Marseille*), Myriam Quatrini (*I2M, CNRS/AMU*)

TITRE

Enseigner la notion mathématique d'égalité au collège

PUBLIC VISE

Professeurs de collèges, Etudiants en Master d'enseignement, Formateurs d'enseignants

---

RESUME

Omniprésente dans le langage et la pratique mathématiques, la notion d'égalité ne fait pas l'objet d'un enseignement explicite au collège ni même au lycée. Pour autant, elle est centrale dans la quasi totalité des chapitres abordés au collège, il nous a paru intéressant de partager nos expréриences d'enseignants concernant cette notion, d'abord entre les membres du groupe collège de l'IREM d'Aix-Marseille, puis avec l'ensemble des enseignants de mathématiques intéressés par cette question.

Dans cette brochure, après un bref retour sur la notion théorique d'égalité mathématique, nous exposons les questions qui nous paraissent saillantes dans l'apprentissage de ce savoir mathématique et des savoir-faire qui lui sont relatifs. Nous proposons ensuite quelques activités à mener en classe pour travailler différents aspects, différentes facettes de l'égalité mathématique.

MOTS CLES

Egalité, Réflexivité, Symétrie, Transitivité, Réécriture, Typage, Egalité en géométrie, Equations, Collège, Cycle 3 (6^e), Cycle 4, Liaison Collège-Lycée

---