UN TEXTE FONDATEUR DES MATHEMATIQUES

EMERGENCE

LES ELEMENTS D'EUCLIDE

Ouvrage de recherche ou ouvrage pédagogique ?

__*Les Éléments*__ (*stoichéïa*) sont constitués de treize livres (deux autres livres sont aussi attribués à Euclide) présentant des connaissances élémentaires au sens qu'elles servent de base à nombreuses démonstrations .
Partant de définitions , d'axiomes et de cinq postulats, Euclide y énonce des propositions traitant de tous les domaines mathématiques connus à l'époque. Il enchaîne les démonstrations dans un ordre suivant rigoureusement les règles de la logique.

Architecture et quelques contenus des 13 volumes

Exemple : Pour énoncer et démontrer les propositions du livre IV, il faut connaître celles des livres I, II et III

GEOMÉTRIE

LIVRE I

- Définition des notions de point, de ligne, de segment.
- Énoncé des cinq postulats et des axiomes.
- Une démonstration du fameux théorème de Pythagore (Prop. I-47 et I-48).

LIVRE II

Démonstration des identités remarquables par la géométrie.
Les nombres y sont associés à des grandeurs (longueurs, aires, volumes). Ainsi l'aire d'un rectangle de côtés *a* et *b* représente le produit *ab*.

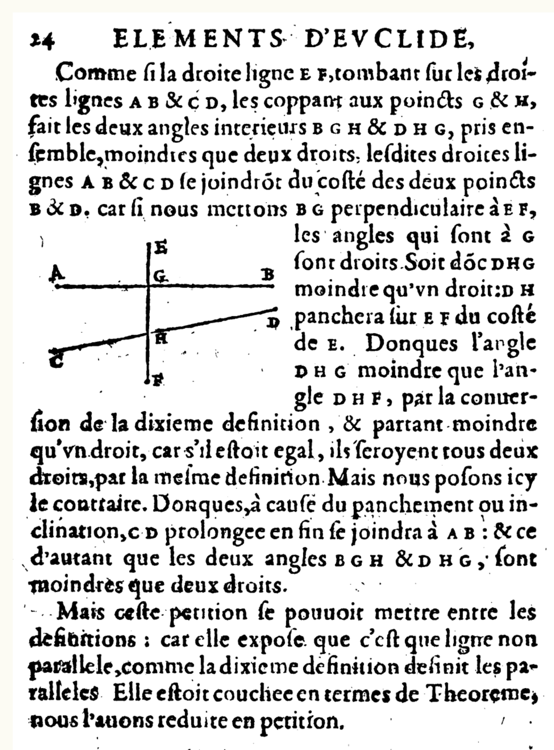
LIVRE III

Étude de la géométrie du cercle

LIVRE IV

Étude des polygones (leurs constructions à la règle et au compas, leur inscription dans un cercle).


Texte et preuve de la prop. I-47. Codex Vaticanus


24 ELEMENTS D'EVCLIDE.

Comme si la droite ligne E F, tombant sus les droites lignes A B & C D, les coppant aux poincts G & H, fait les deux angles interieurs B G H & D H G, pris ensemble, moindres que deux droits: lesdites droites lignes A B & C D se joindrõt du costé des deux poincts B & D. car si nous mettons B G perpendiculaire à E F, les angles qui sont à G sont droits. Soit dõc D H G moindre qu'vn droit: D H panchera sur E F du costé de E. Donques l'angle D H G moindre que l'angle D H F, par la conuersion de la dixieme definition, & partant moindre qu'vn droit, car s'il estoit egal, ils seroyent tous deux droits, par la mesme definition. Mais nous posons icy le contraire. Donques, à cause du panchement ou inclination, C D prolongee en fin se joindra à A B: & ce d'autant que les deux angles B G H & D H G, sont moindres que deux droits.

Mais ceste petition se pouuoit mettre entre les definitions: car elle expose que c'est que ligne non parallele, comme la dixieme definition definit les paralleles. Elle estoit couchee en termes de Theoreme, nous l'auons reduite en petition.

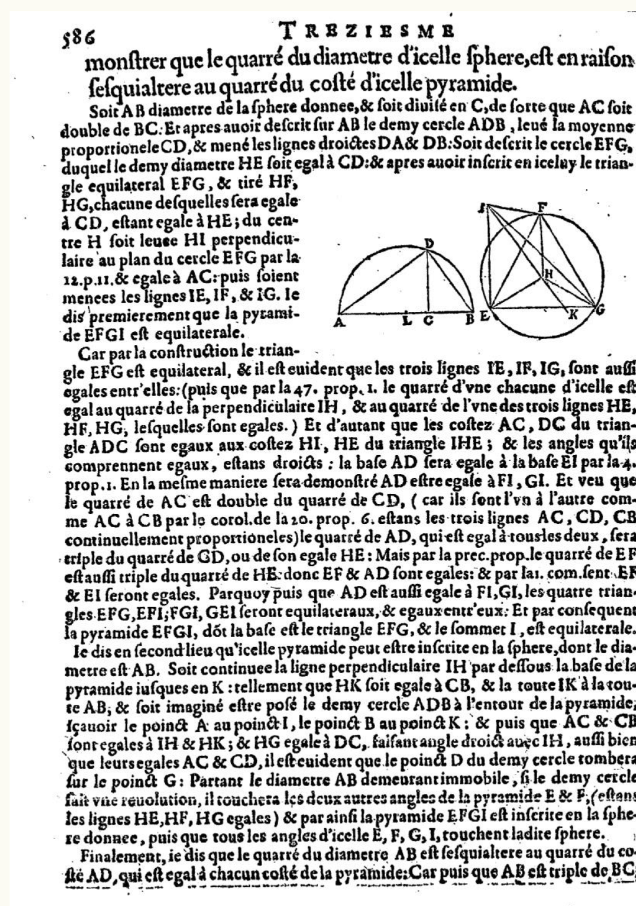
Traduction du cinquième postulat par Peletier du Mans, 1578

LIVRE VI

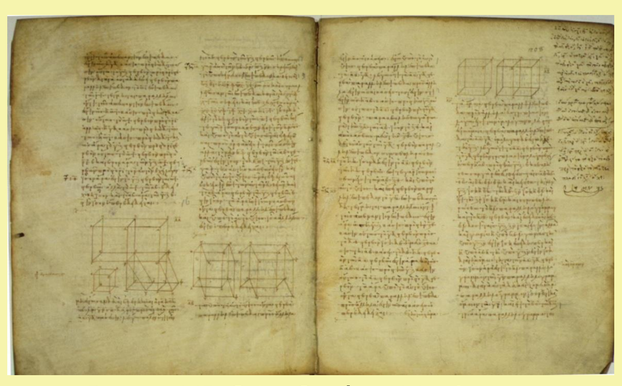
Application de la théorie des proportions du livre V aux grandeurs de la géométrie plane.
On y trouve le célèbre théorème de Thalès (Prop. VI 2)

LIVRE V

Théorie des proportions appliquée aux grandeurs commensurables et incommensurables.


Prop XIII-13, trad. D. Henrion, Paris 1632, Source Gallica.bnf.fr

STÉRÉOMÉTRIE


Prop. XI-31, Codex Vaticanus

LIVRE XI

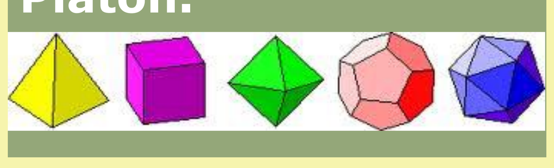
Étude des propriétés des solides élémentaires.

LIVRE XII

Résultats sur la mesure du cercle, de la sphère, du cône et de la pyramide.

LIVRE XIII

Étude et construction des cinq polyèdres réguliers dits de Platon.



LIVRE X

Problèmes de commensurabilité et d'incommensurabilité
Démonstration géométrique de relations telles que :

$$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$$

ARITHMÉTIQUE

LIVRE VII

Un algorithme de calcul du PGCD et son utilisation pour démontrer que deux entiers sont premiers entre eux.

LIVRE VIII

Étude des progressions géométriques.

LIVRE IX

Démonstration par l'absurde de l'existence d' une infinité de nombres premiers. Ébauche de la démonstration de la décomposition unique d'un entier en produit de facteurs premiers.

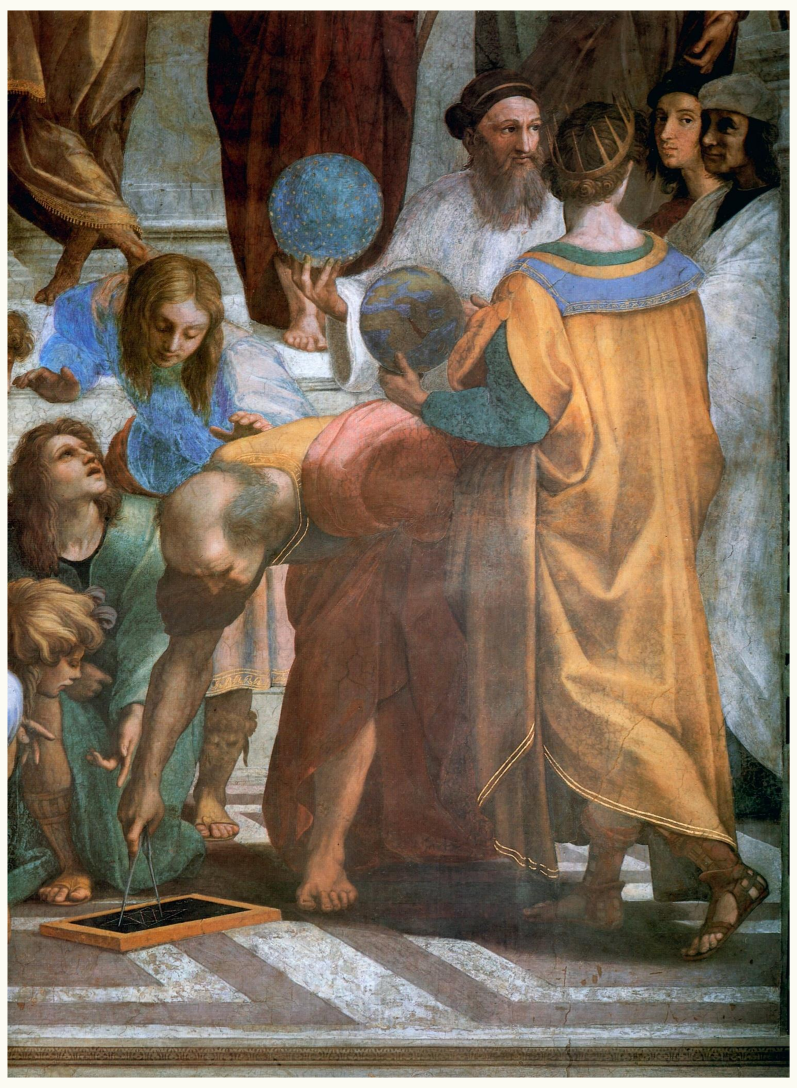
Portrait d'Euclide
Juste de Gand (XVe s.)

IREM Aix-Marseille
http://www.irem.univ-mrs.fr/expo2013

Un voyage de deux millénaires autour de la Méditerranée

EMERGENCE

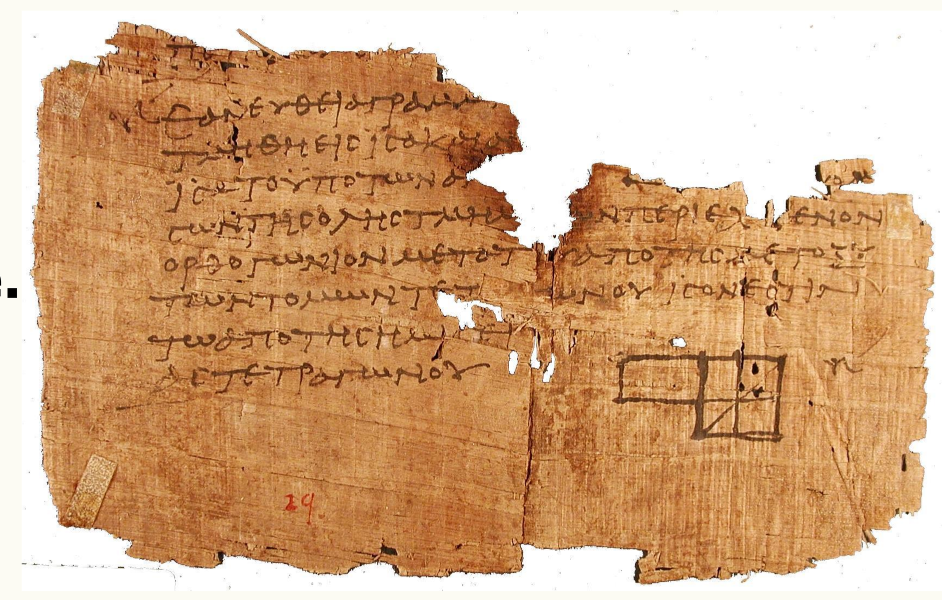
ITINÉRAIRES MÉDITERRANÉENS DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE



Euclide traçant une figure avec un compas " L'école d'Athènes ", Raphaël (Musée du Vatican)

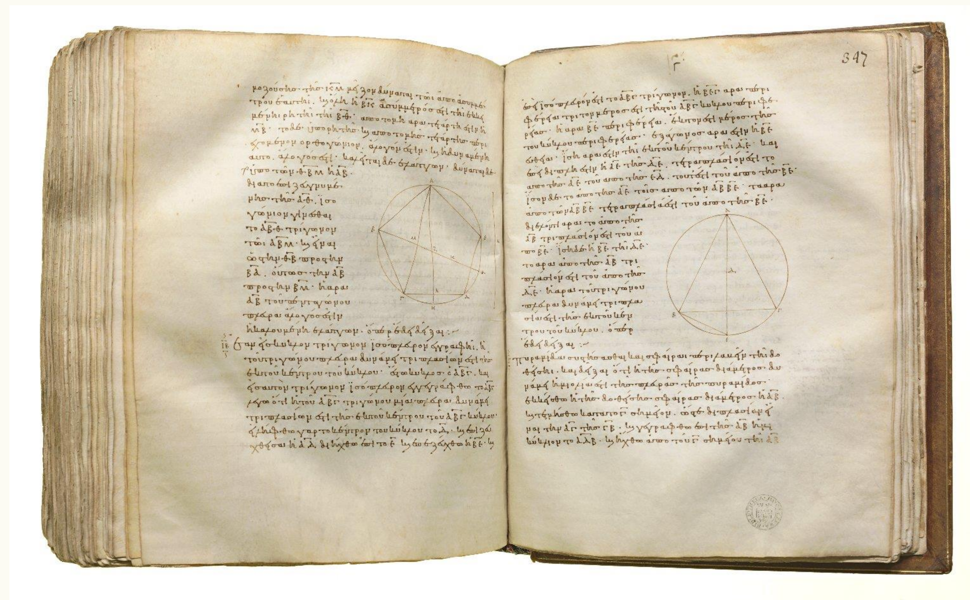
Euclide est un mathématicien grec du III^{e} siècle avant J.C. ayant vécu vraisemblablement à Alexandrie. Son œuvre « *Les Éléments* », est considérée comme l'un des textes fondateurs des mathématiques.
C'est le plus ancien ouvrage de mathématiques connu rédigé dans un souci de rigueur scientifique et logique.
C'est la synthèse des mathématiques connues à son époque.

De nombreux mathématiciens ont traduit « *Les Éléments* » dans leur langue, les ont étudiés, commentés, corrigés avant qu'ils ne parviennent jusqu'à nous. Ils sont restés des manuels scolaires jusqu'au XIX^{e} siècle.



Papyrus d'Oxyrhinque (vers 100) Proposition II-5

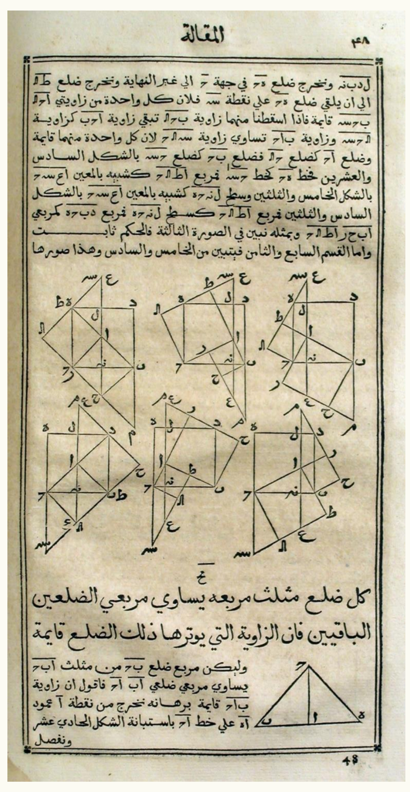
Les éléments : Euclide (III^{e} s. av. J.C.)



Prop. XIII-12, copie du texte de Théon. Université d'Oxford

Copies et commentaires grecs
(du III^{e} s. av. J.C. au IV^{e} s. ap. J.C.)

Les plus anciennes copies sur papyrus dont on dispose datent du I^{er} siècle avant J.C. Il existe de nombreux manuscrits ultérieurs : copies corrigées, commentées, parfois complétées (y compris avec des fautes).



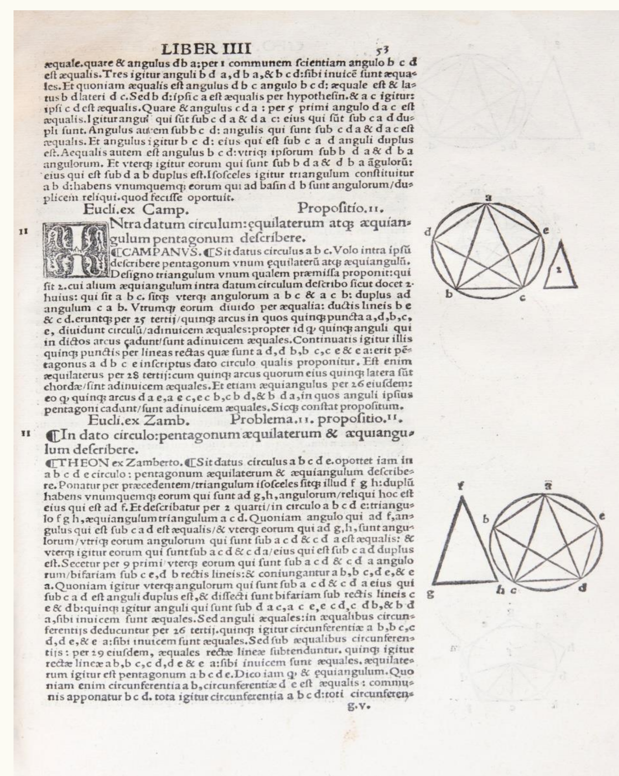
Traduction et commentaires d'Al Tusi

Traductions arabes
(du VII^{e} s. au XII^{e} s.)

A partir de 754, elles circulent dans tout le monde arabe. On compte au moins cinquante traductions.

Traductions latines
(à partir du X^{e} s.)

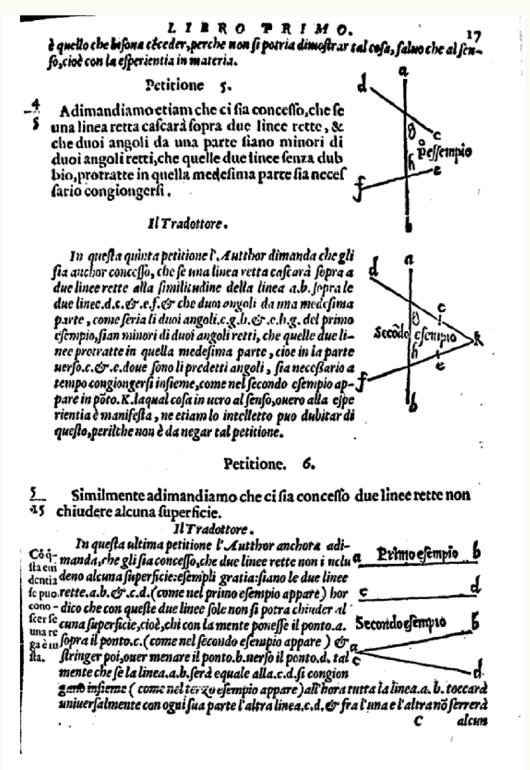
Elles sont établies à partir de manuscrits grecs ou arabes.



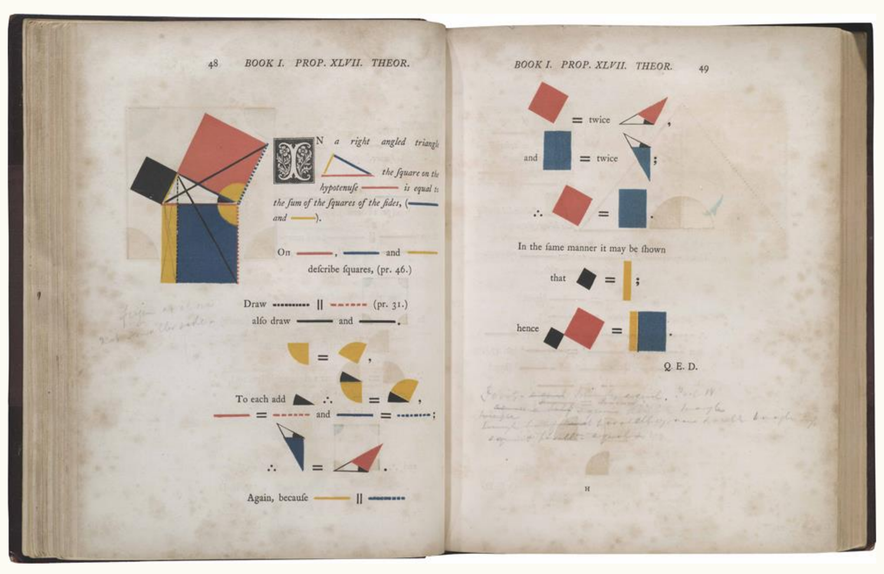
Édition latine comparant les Première édition imprimée en France comparant les commentaires de Théon, Campanus etZamberti

Érudits de toutes origines et confessions se retrouvent à Tolède et en Sicile. Dans ces importants centres de traduction, le latin, le grec, l'arabe et l'hébreu sont pratiqués.

Traductions en italien, français, anglais,...
(à partir du XVI^{e} s.)

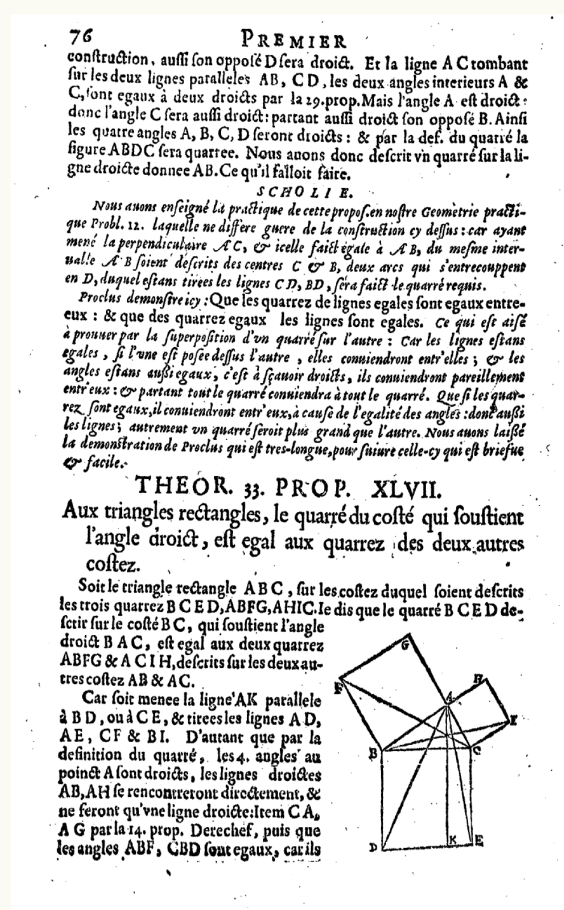


Traduction italienne, due à Niccolò Tartaglia, parue à Venise en 1586. Le traducteur, comme beaucoup d'autres avant lui, insère ses commentaires.



Édition anglaise d'Oliver Byrn (Londres 1847)

Prop I-47, trad. D. Henrion, Paris 1632, Source Gallica.bnf.fr



Les Éléments furent l'une des premières œuvres imprimées (à Venise en 1482). Seule la Bible compte plus d'éditions publiées à ce jour.

IREM Aix-Marseille
http://www.irem.univ-mrs.fr/expo2013

Itinéraires des Eléments d'Euclide

Quelques traducteurs et commentateurs

Bath
Adélard de Bath (1070-1150) se rendit en Sicile pour s'instruire sur la culture grecque. Il aurait aussi voyagé pour étudier les sciences arabes, en particulier à Tolède. A son retour, il établit pour ses étudiants une traduction latine à partir de la traduction en arabe d'**Al-Hajjaj**.

Paris
A la Renaissance, on voit publier beaucoup d'éditions incomplètes limitées seulement aux livres de géométrie plane ou, comme celle de **Pierre de La Ramée** (1515-1572), limitée aux seuls énoncés.
François Peyrard (1760-1822) est chargé du répertoire du butin ramené par Napoléon du Vatican. Il y découvre un manuscrit des Éléments daté du Xe siècle et le traduit en 1809

Tolède
Gérard de Crémone (1114-1187) s'installa à Tolède comme de nombreux savants de l'époque, y apprit l'arabe et se consacra à la traduction en latin des textes scientifiques importants. Sa traduction des Éléments est considérée comme la meilleure des traductions médiévales.

Bâle
Les Éléments se répandent dans toute l'Europe. Une édition en grec est publiée à Bâle en 1533.

Venise
Le mathématicien **Campanus de Novare** (vers 1220-1296) rédige vers 1260 une traduction à partir de traductions arabes et de la traduction latine d'**Adélard de Bath**. Cette version deviendra une référence utilisée en particulier par Fibonacci et Tartaglia. C'est sa traduction qui, après avoir été recopiée pendant deux siècles, fut la première version des Éléments imprimée à Venise en 1482 par Ratdolt.
Bartolomeo Zamberti, bien que non mathématicien, critique le travail de Campanus qu'il juge infidèle au texte original car établi à partir de l'arabe. Il publie en 1505 une édition depuis un manuscrit grec. On assiste dès lors à une controverse entre les partisans des deux origines.

Florence
Au XVe siècle, Côme de Médicis commande une collecte de manuscrits. En 22 mois, 200 exemplaires uniques sont ainsi ramenés à Florence par 24 scribes. La traduction italienne écrite par **Niccolò Tartaglia** en 1543 paraît à Venise en 1586. Le traducteur, comme beaucoup d'autres avant lui, insère des commentaires après le 5e postulat.
La traduction de **Zamberti** sera améliorée par le mathématicien **Federico Commandino** (1509-1575), auteur d'une édition trilingue (grec-latin-italien)

Rome
Boèce (470-525) aurait réalisé une traduction en latin depuis le grec.
La traduction latine de **Clavius** rédigée en 1574 a été utilisée par les mathématiciens de la Renaissance, dont Descartes et Leibniz, et est parvenue jusqu'en Chine.

Athènes
Proclus (412-485), philosophe, recteur de l'école néoplatonicienne d'Athènes. Il s'intéresse aussi à l'astronomie, aux mathématiques et à la didactique. Il nous reste son commentaire du livre I des Éléments.

Bagdad
La première traduction en arabe aurait été réalisée pour **Arun Al-Rachid** vers 754.
Al-Ma'mun, calife de Bagdad (786-833) fonda en 832 la Maison de la Sagesse où il fit venir de nombreux manuscrits grecs et réunit des savants de toute croyance qui traduisirent ces manuscrits en arabe.
Al-Hajjaj ibn Yūsuf ibn Matar (786-833) fit une première traduction arabe des Éléments depuis le grec avant 809 puis la révisa pour le calife Al-Ma'mun en 813.
Abû Ya' qu'b Ishaq ibn Hunayn (vers 830-910) fit la deuxième traduction du grec en arabe.
Thâbit ibn Qurra (826-901) révisa la deuxième traduction.
Nasir al-Din al-Tusi (1201-1274). Astronome et mathématicien écrivait en persan mais écrivit lui-même ses travaux en arabe. Il crut corriger les Éléments en prouvant le 5è postulat qu'il refusait en tant que tel mais en fait, il se basait sur un autre axiome équivalent.

Alexandrie
Théon d'Alexandrie et sa fille **Hypathie** (IVe siècle) étudient la géométrie euclidienne, réécrivent et commentent les Éléments.
Pappus d'Alexandrie (IVe siècle) redonne les principaux résultats d'Euclide en complétant certaines propriétés et simplifiant quelques démonstrations.
De nombreux autres mathématiciens grecs tels **Ammonius, Eutocius, Isidore de Milet** ont également travaillé sur les Eléments.

Oxyrhynque
On y a trouvé l'un des plus anciens papyri connus (vers l'an 100), contenant la proposition 5 du Livre II des Éléments d'Euclide.

EMERGENCE

LA GRÈCE, BERCEAU DE LA DÉMONSTRATION

L'École d'Athènes, Raphaël (détail) : Platon et Aristote , Musée du Vatican

ARISTOTE (-384, -322) : Le père fondateur de la logique.

Il est le premier à chercher et trouver des principes pour la logique (la théorie des syllogismes, le principe de non contradiction, …)

Aristote dit le Starigide, est un élève de Platon à l'Académie d'Athènes, puis précepteur d'Alexandre le grand et fondateur du Lycée d'Athènes ; il s'intéresse aux arts et aux sciences (biologie, physique, …).

Dans l'"Organon", il introduit la notion de démonstration sur la base de "syllogismes", non pas en vue d'une application aux mathématiques, mais comme un instrument de précision de dialogues, de débats philosophiques. Pour lui, une preuve correcte est une preuve qui "gagne" contre toutes les réfutations possibles.

La totalité de son œuvre a été traduite en latin au XIIIe siècle à partir de l'arabe et a été largement commentée.

syllogisme

Tous les sportifs sont des humains
Tous les humains sont mortels.
Donc tous les sportifs sont mortels.

LES STOÏCIENS

(IIIe siècle avant J.C.)
Ils ont proposé des règles de raisonnement sur les connecteurs reliant les propositions.

Et avant ?

THALES de Milet

(-625,-546)
Il renonce aux dieux et aux forces magiques pour expliquer l'ordre du monde. Il privilégie l'observation et la démonstration. Celle de la hauteur d'une pyramide serait la première en géométrie.

PYTHAGORE

(-582,-500)
Pour lui, « Tout est nombre ». Il recherche, pour les entiers des propriétés spécifiques pour fonder la **théorie des nombres.** Il s'est intéressé au concept de nombre, de triangle et d'autres figures mathématiques et à l'idée abstraite de démonstration.

PLATON

(-427,-347)
fait émerger le caractère abstrait des mathématiques. Dans une démonstration, il rejette le recours à l'expérience. Il a insisté sur des définitions précises et des hypothèses claires.

et après ?

EUCLIDE

(-323, -265)
Dans les *Éléments*, synthèse des mathématiques de son temps**,** il pose des **axiomes** et des **postulats**. Puis il **démontre, chaque propriété à partir de celles précédemment démontrées.** Les règles de logique qu'il utilise sont pour la plupart implicites, celles d'Aristote et des stoïciens n'étant pas assez riches.

Qu'est-ce qu'une démonstration ?

Définition d'Aristote (*Topiques Livre I,1, 100a 25-27*)

*« Un **syllogisme** est une forme d'argumentation dans laquelle, certaines choses étant posées, une chose distincte de celles qui ont été posées s'ensuit nécessairement, par la vertu même de ce qui a été posé.*
*C'est une **démonstration** (apodeixis) lorsque les points de départ du syllogisme sont des affirmations vraies et premières, ou du moins des affirmations telles que la connaissance qu'on en a prend naissance par l'intermédiaire de certaines affirmations premières et vraies; (…) »*

Définition actuelle

Une démonstration est une chaîne dont le dernier maillon est la proposition à démontrer ; les premiers maillons sont les données (axiomes et hypothèses) ; on passe d'un maillon à l'autre en appliquant des règles admises au préalable.

Organon, Aristote, parchemin_Paris_fin XIII, BNF

Raisonnements connus et pratiqués par les grecs

Raisonnement par l'absurde

Raisonnement consistant à montrer l'impossibilité que la proposition soit fausse pour en conclure qu'elle est vraie.

***Euclide l'utilisa pour** montrer que, en termes actuels, $\sqrt{2}$ est irrationnel*

La dialectique

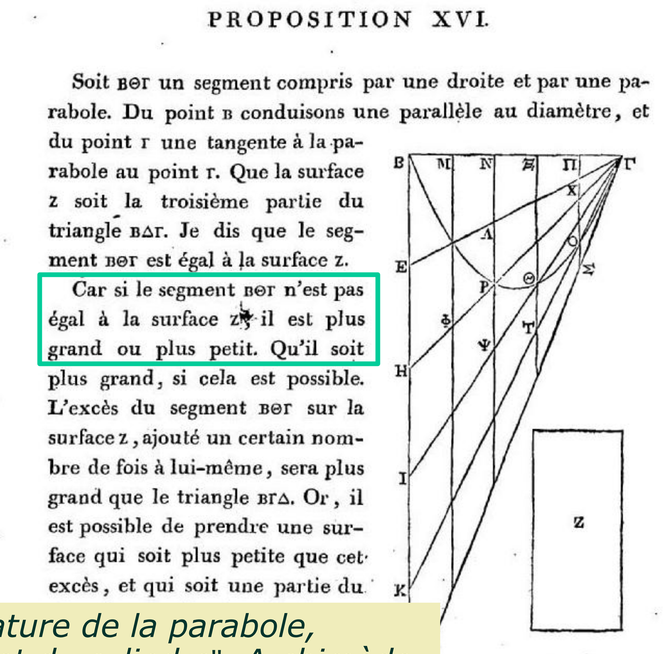
Raisonnement qui met en parallèle une thèse et son antithèse ; ces dernières étant défendues lors d'un dialogue entre deux interlocuteurs.

***Aristote l'utilisa pour** légitimer la loi (le 'principe') de non-contradiction et pour justifier que la Terre est ronde en réfutant qu'elle puisse être carré, triangulaire, ….*

Méthode d'exhaustion

Cette méthode de démonstration a été utilisée pendant plusieurs siècles pour le calcul d'aires, de volumes ... elle consiste à prouver qu'une grandeur cherchée ne peut ni excéder ni être inférieure à une certaine valeur. C'est l'ancêtre de la "méthode des indivisibles" et du "calcul intégral" (XVII^{e} siècle).

***Archimède l'utilisa pour** calculer l'aire sous un arc de parabole, pour approximer π, pour résoudre la quadrature de la parabole.*



PROPOSITION XVI.

Soit ΒΘΓ un segment compris par une droite et par une parabole. Du point Β conduisons une parallèle au diamètre, et du point Γ une tangente à la parabole au point Γ. Que la surface Ζ soit la troisième partie du triangle ΒΔΓ. Je dis que le segment ΒΘΓ est égal à la surface Ζ.

Car si le segment ΒΘΓ n'est pas égal à la surface Ζ, il est plus grand ou plus petit. Qu'il soit plus grand, si cela est possible. L'excès du segment ΒΘΓ sur la surface Ζ, ajouté un certain nombre de fois à lui-même, sera plus grand que le triangle ΒΓΔ. Or, il est possible de prendre une surface qui soit plus petite que cet excès, et qui soit une partie du

Quadrature de la parabole,
"De la sphère et du cylindre", Archimède,
trad. F. Peyrard, Paris 1807,
Source Gallica.bnf.fr

Et si on supprimait quelques règles et axiomes utilisés par Euclide ?

En géométrie : sans le 5ème postulat (dit des parallèles) d'Euclide.

Géométries non euclidiennes

Application : Navigation maritime et aérienne

En se limitant à une et une seule utilisation des hypothèses, dans une démonstration.

Logique linéaire

Application : Gestion de données

Sans la règle du tiers exclu (validité d'une proposition ou de son contraire).

Logique intuitionniste

Application : Informatique

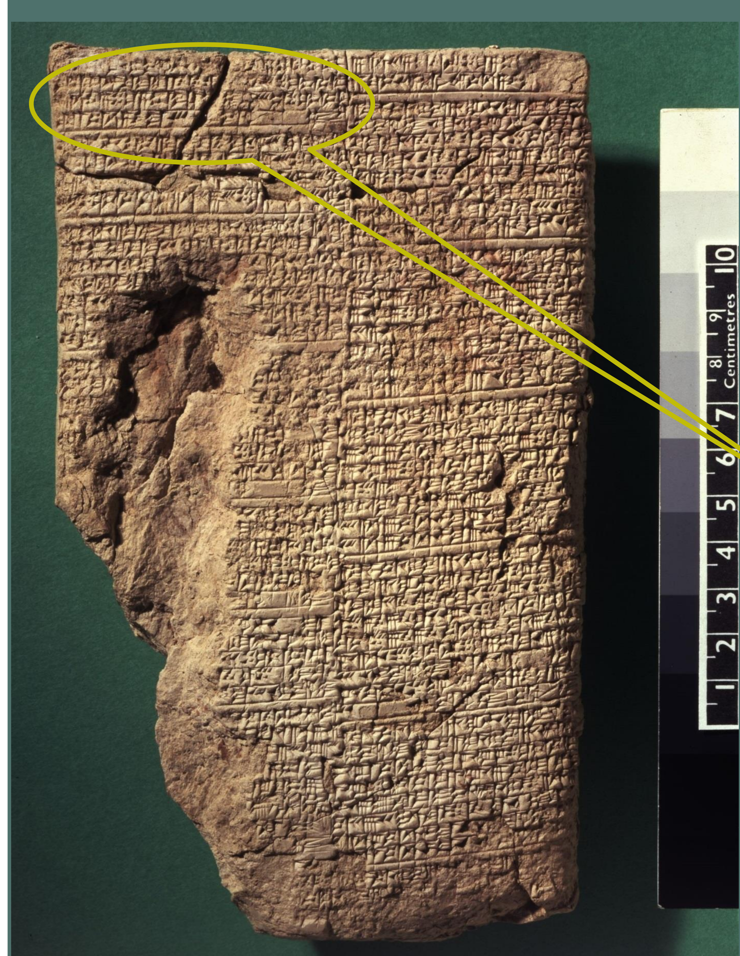
IREM Aix-Marseille
http://www.irem.univ-mrs.fr/expo2013

EMERGENCE

L'ALGÈBRE ....
.... AVANT LA LETTRE

Aujourd'hui, lorsque nous pensons à l'algèbre, nous l'associons immédiatement au symbolisme (recours aux inconnues ou variables nommées par des lettres). Mais l'algèbre, comme ensemble de moyens pour résoudre des problèmes, est bien antérieure. Les textes qui suivent décrivent par exemple des recettes pour résoudre une grande variété de problèmes liés à la vie courante (partages, impôts, topographie, ...)

BABYLONIENS



Tablette 13901 du British Museum (-1850 avant J.C.)

C'est un des plus anciens textes mathématiques connus. Il recense 24 solutions-modèles d'équations constituant un véritable « manuel de calculs du second degré ».

Exemple :

J'ai additionné la surface et (le côté de) mon carré : 45´

Solution-Modèle

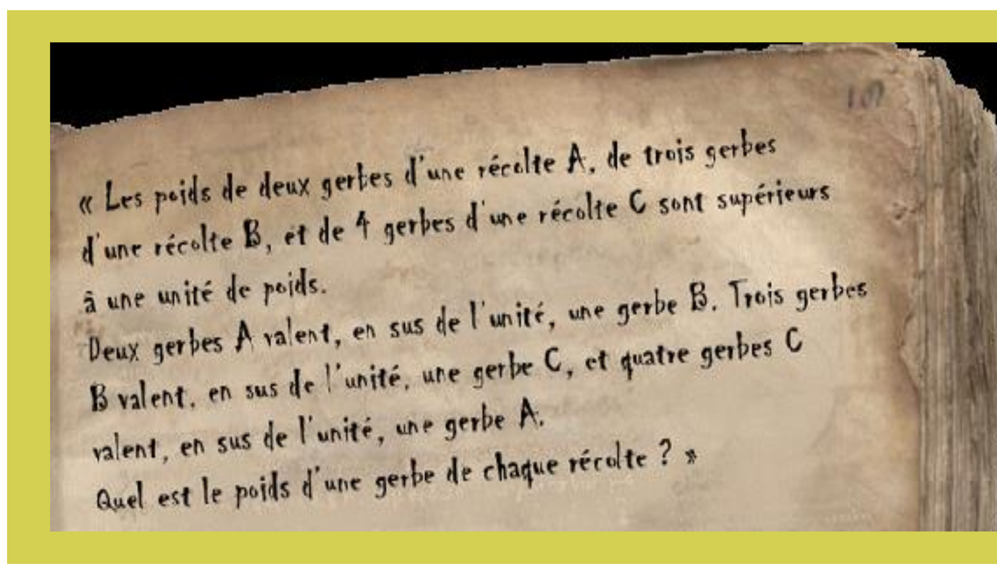
- ✓ **Tu poseras 1, l'unité.**
- ✓ **Tu fractionneras 1 en deux : 30'.**
- ✓ **Tu croiseras 30' et 30' : 15'.**
- ✓ **Tu ajouteras 15' à 45' : 1'.**
- ✓ **C'est le carré de 1.**
- ✓ **Tu soustrairas 30', que tu as croisé, de 1 : 30`**
- ✓ **le côté du carré est 30'**

Aujourd'hui on résoudrait l'équation :

$$x^2 + x = \frac{3}{4}$$

Attention,les babyloniens utilisaient la base 60: 45' est donc 3/4

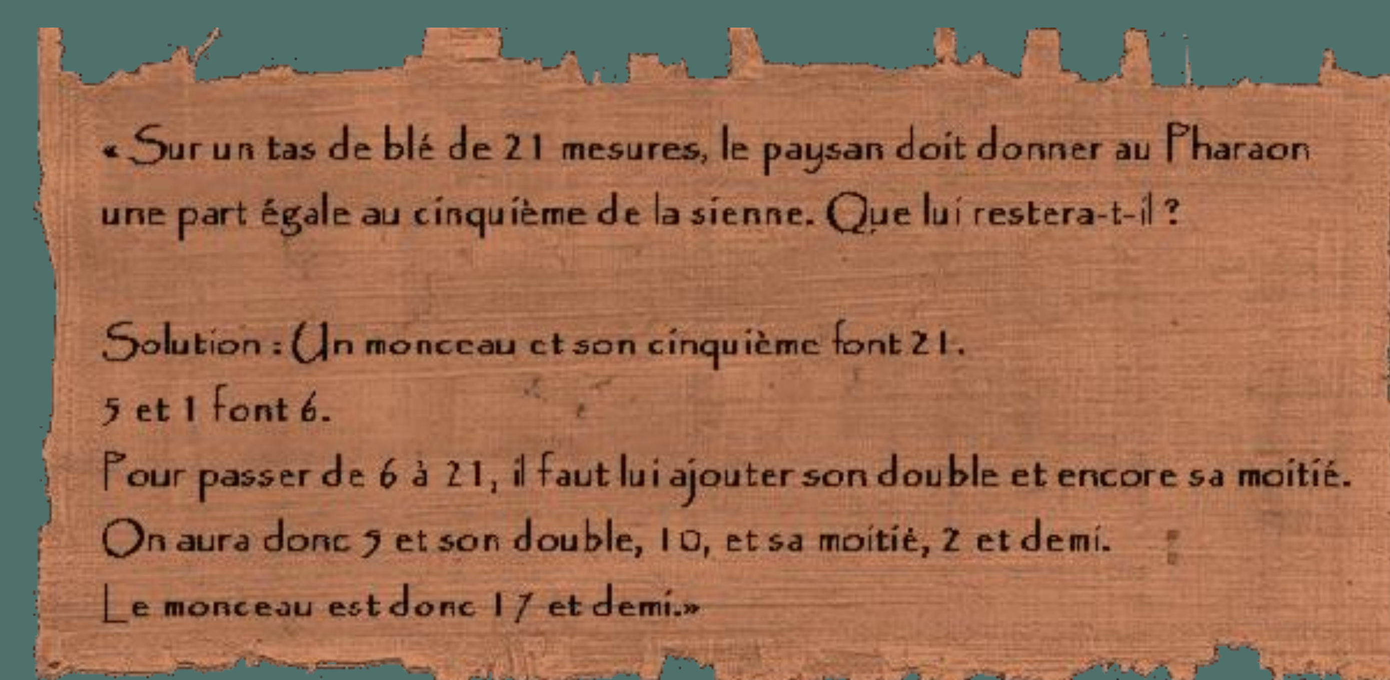
CHINOIS



« Les poids de deux gerbes d'une récolte A, de trois gerbes d'une récolte B, et de 4 gerbes d'une récolte C sont supérieurs à une unité de poids.
Deux gerbes A valent, en sus de l'unité, une gerbe B. Trois gerbes B valent, en sus de l'unité, une gerbe C, et quatre gerbes C valent, en sus de l'unité, une gerbe A.
Quel est le poids d'une gerbe de chaque récolte ? »

Problème tiré du « Jiuzhang suanshu » (Les neuf chapitres sur l'art du calcul) (-200 avant J.C.)

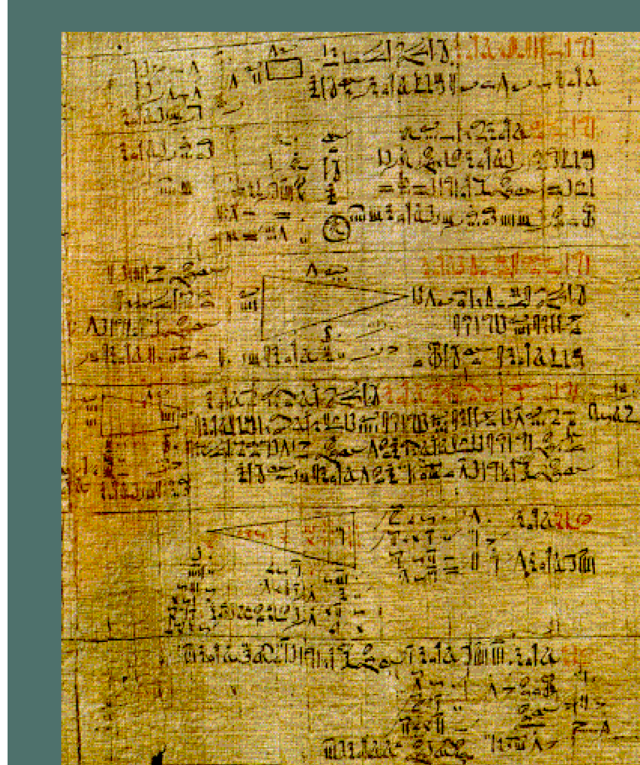
EGYPTIENS



« Sur un tas de blé de 21 mesures, le paysan doit donner au Pharaon une part égale au cinquième de la sienne. Que lui restera-t-il ?

Solution : Un monceau et son cinquième font 21.
5 et 1 font 6.
Pour passer de 6 à 21, il faut lui ajouter son double et encore sa moitié.
On aura donc 5 et son double, 10, et sa moitié, 2 et demi.
Le monceau est donc 17 et demi.»

Extrait d'un papyrus égyptien du 2ème millénaire avant J.C.



Papyrus de Rhind (-1650 avant J.C.)

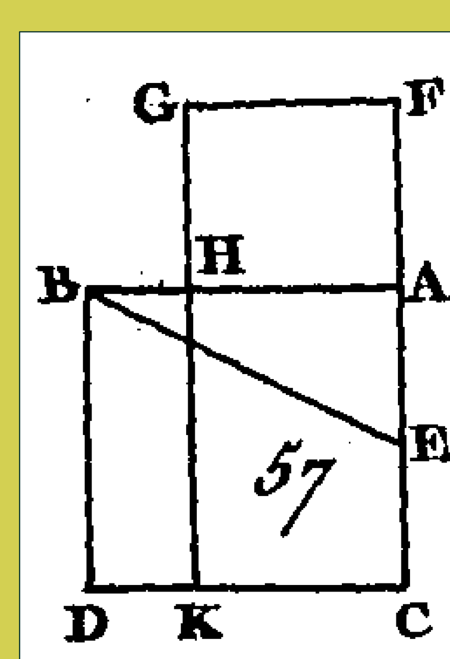
Aujourd'hui on résoudrait l'équation :

$$x + \frac{x}{5} = 21$$

GRECS

« Partager une droite donnée de manière que le rectangle compris sous la droite entière et l'un de ses segments, soit égal au carré de l'autre segment »

Eléments d'Euclide livre II proposition XI



Aujourd'hui on noterait $a = AB$ et $b = HB$ et on résoudrait l'équation :

$$a(a - b) = b^2$$

Voir solution d'Euclide dans « pour en savoir plus »

Cylindre de Cyrus (British Museum) (Ve s avant J.C.)

Une méthode revient très fréquemment dans toutes ces sources et semble avoir été universellement utilisée pour les problèmes linéaires : La méthode de « fausse position »

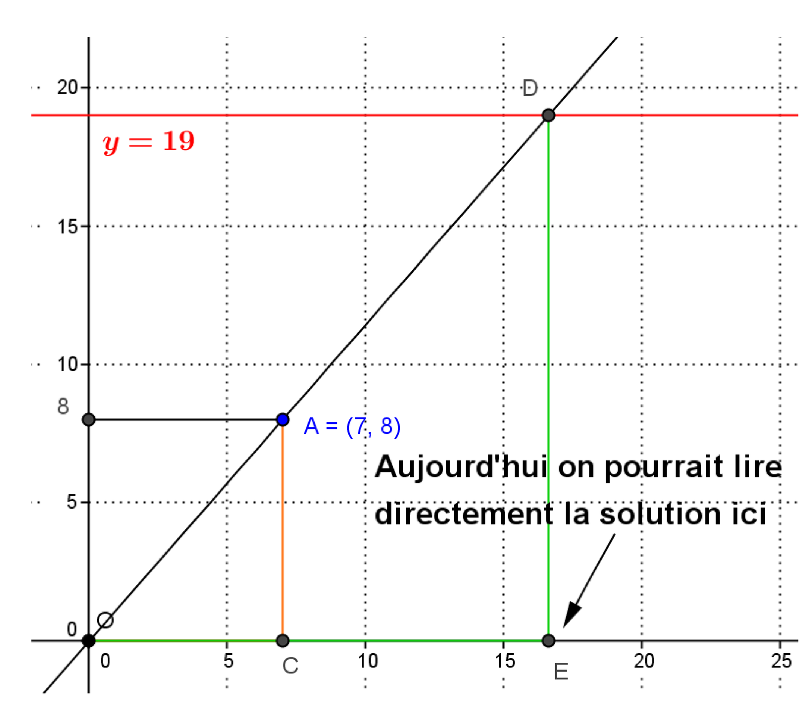
Voici par exemple le problème n°24 du papyrus de Rhind :

« Une quantité ajoutée à son septième devient 19. Quelle est cette quantité ? »

Méthode :

- ✓ **On essaye avec 7 (choisi car facile à diviser par 7) :** $7 + \frac{7}{7}$ **qui donne 8 alors qu'on veut 19.**
- ✓ **Par proportionnalité, 7 est à la valeur cherchée ce que 8 est à 19, autrement dit** $\frac{7}{x} = \frac{8}{19}$
- ✓ **La valeur cherchée est donc** $\frac{133}{8}$

Cette méthode apparaît jusqu'au XIIIe siècle, notamment dans le « Liber abaci » (1202) de Fibonacci et même au XVe siècle. La méthode de double fausse position s'étend aux problèmes affines.

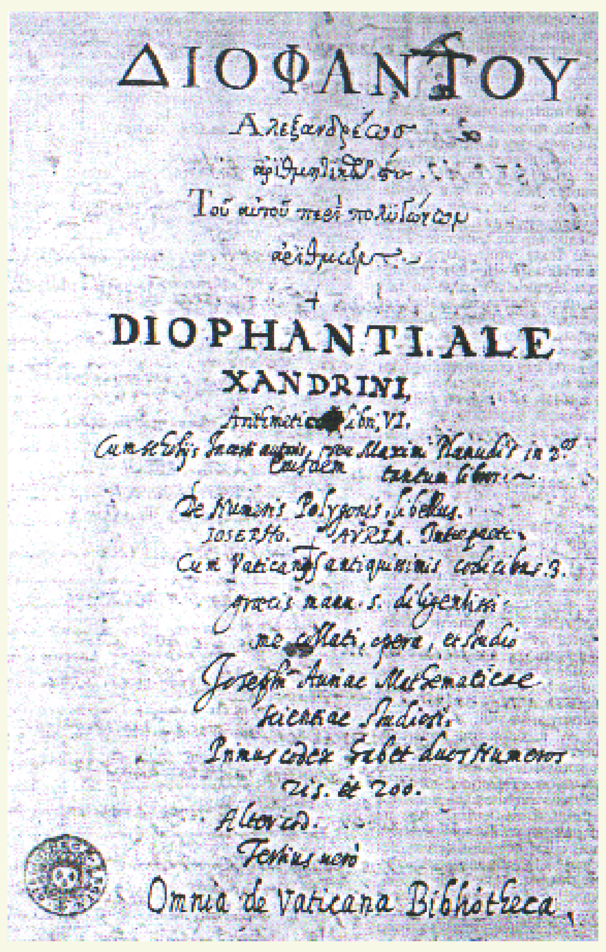


IREM Aix-Marseille
http://www.irem.univ-mrs.fr/expo2013/

DIOPHANTE D'ALEXANDRIE
LE PÈRE DE L'ALGÈBRE ?

EMERGENCE

Mathématicien grec, né en Syrie, ayant probablement vécu vers le **IIIème siècle** à Alexandrie. Il est l'auteur de trois ouvrages dont le plus connu, *Les Arithmétiques*, est consacré à la résolution de problèmes.


ΔΙΟΦΑΝΤΟΥ
DIOPHANTI ALEXANDRINI
Omnia de Vaticana Bibliotheca

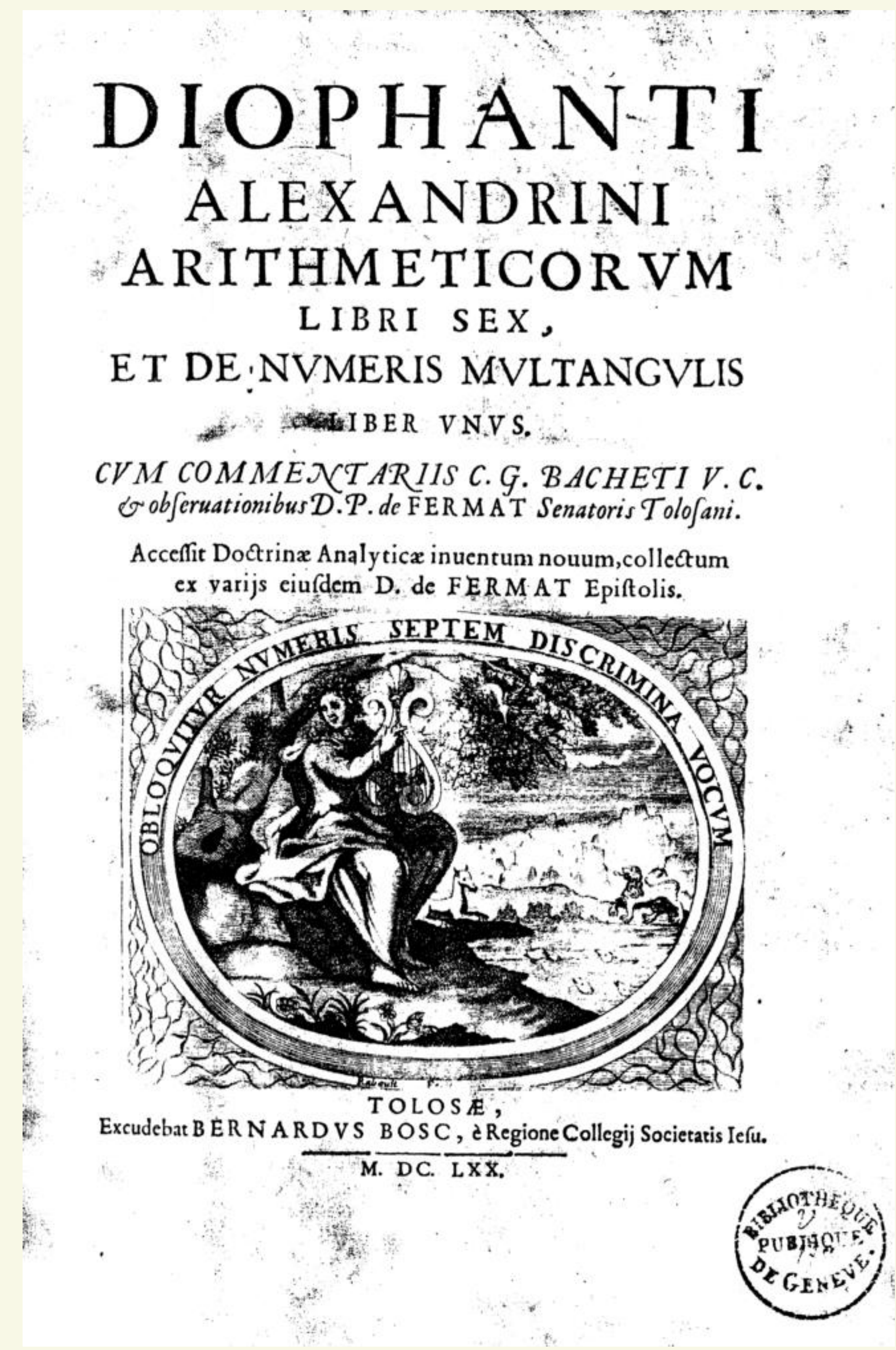
Les Arithmétiques, page 1, Bibliothèque du Vatican

Les Arithmétiques

Ouvrage composé de treize livres (selon Diophante) ; jusqu'à la découverte en 1968 en Iran de quatre nouveaux livres en arabe, seulement six étaient connus ; ils provenaient d'un manuscrit grec découvert en 1464 par Regiomontanus à Venise.

Cet ouvrage mal connu des grecs n'a été **traduit qu'au Xᵉ siècle et diffusé par les savants arabes,** certains le considérant comme un livre d'algèbre. Plus tard les mathématiciens occidentaux des XVIᵉ et XVIIᵉ siècles dont **Pierre de Fermat** s'en emparèrent.

Recueil de 189 problèmes arithmétiques ou géométriques, non rattachés à des situations de la vie courante, réductibles (en langage moderne) à des équations du premier et du second degré dont **il recherche les solutions entières** ou fractionnaires **positives**, contrairement à Archimède de Syracuse (-287 ; -212) ou encore *Héron d'Alexandrie* (Ier siècle) qui admettaient des solutions irrationnelles.


DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX,
ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS
LIBER VNVS.
CVM COMMENTARIIS C. G. BACHETI V. C.
& obseruationibus D. P. de FERMAT Senatoris Tolosani.
Acceßit Doctrinæ Analyticæ inuentum nouum, collectum ex varijs eiusdem D. de FERMAT Epistolis.

TOLOSÆ,
Excudebat BERNARDVS BOSC, è Regione Collegij Societatis Iesu.
M. DC. LXX.

Page couverture de l'édition de 1670 des *Arithmetica*

Où l'on voit pour la première fois l'apparition de symboles

Les *symboles* (« désignations abrégées ») de Diophante :

- Δ^{Y} nommé **carré** (a^2),
- K^{Y} nommé **cube** (a^3),
- $\Delta^{Y}\Delta$ nommé **carré-carré** (a^4),
- ΔK^{Y} nommé **carré-cube** (a^5),
- **$K^{Y}K$ nommé cubo-cube** (a^6).

- L'**arithme**, noté **ζ**, est un « nombre indéterminé » Ancêtre de l'inconnue ?

- Il utilise la notation alphabétique grecque pour les nombres : $\alpha = 1, \beta = 2, \gamma = 3, \ldots$
- Il écrit d'abord les monômes à coefficients positifs, puis un séparateur M suivi de la constante.
- Il place ensuite le séparateur ⋔ et la suite des monômes à coefficients négatifs.


Arithmeticorum Liber II. 61
IN QVAESTIONEM VII.
QVAESTIO VIII.
OBSERVATIO DOMINI PETRI DE FERMAT.
QVAESTIO IX.

Page 61 de l'édition de 1670 des *Arithmetica* de Diophante. Elle contient la note de Fermat sur son grand théorème

Comment s'écrivent les polynômes avec ces symboles ?

$\Delta^{Y}\gamma$	correspond à	$3x^2$
$\Delta K^{Y}\delta M\eta$		$4x^5 + 8$
$\Delta K^{Y}\delta K^{Y}\varepsilon\Delta^{Y}\kappa\zeta\lambda\gamma M\eta$		$4x^5 + 5x^3 + 20x^2 + 33x + 8$
$K^{Y}\beta M\eta$ ⋔ $\Delta^{Y}\alpha\zeta\beta$		$2x^3 - x^2 - 2x + 8$

Et maintenant que reste-t-il ?

- **Equations diophantiennes :**
  Equations à **coefficients entiers** pour lesquelles on cherche des **solutions entières ou rationnelles**.
- **Décomposition d'un nombre en somme de deux carrés :** Il énonce, sans démontrer :
  « Les entiers de la forme 4n + 1 peuvent tous se décomposer en deux carrés ».

Exemples de problèmes

Problème 5 du livre V:
Trouver deux nombres, l'un un cube et l'autre un carré, tel que si on multiplie le cube du cube par deux nombres donnés et on ajoute à chacun de ces produits le carré du carré, le résultat est dans chaque cas un nombre carré.
En notation moderne :
$(x^2)^2 + a(y^3)^3 = u^2$ et $(x^2)^2 + b(y^3)^3 = v^2$

Problème 16 du livre 1,
Trouver trois nombres qui, pris deux à deux, forment des nombres proposés.
En notation moderne *:*
$x+y=a$, $y+z=b$, $z+x=c$

Résolution de Diophante comparée à une traduction algébrique moderne (voir « Pour en savoir plus »)

Devinette
Combien d'années Diophante a-t-il vécu ?

Epitaphe

« Passant, sous ce tombeau repose Diophante.
Ces quelques vers tracés par une main savante
Vont te faire connaître à quel âge il est mort.
Des jours assez nombreux que lui compta le sort,
Le sixième marqua le temps de son enfance ;
Le douzième fut pris par son adolescence.
Des sept parts de sa vie, une encore s'écoula,
Puis s'étant marié, sa femme lui donna
Cinq ans après un fils qui, du destin sévère
Reçut de jours hélas, deux fois moins que son père.
De quatre ans, dans les pleurs, celui-ci survécut.
Dis, tu sais compter, à quel âge il mourut. »

EMERGENCE

L'ALGÈBRE ARABE

L'algèbre

Du VII^e au XII^e siècle, l'algèbre est la branche des mathématiques portant sur des équations du premier ou du deuxième degré en vue de les réduire à une forme canonique et de les résoudre. L'innovation majeure est l'introduction du concept "d'équation".

L'algèbre arabe

L'algèbre arabe est celle des mathématiciens ayant rédigé leur œuvre en **langue arabe** : perses, juifs, berbères,…
On les trouve à Bagdad, au Khwarizm (mer d'Aral), en Egypte, en Perse, en Syrie, au Maghreb, dans la péninsule ibérique, …

800

Muhammad Al-Khwarizmi (780 – 850)

Résolution de problèmes du second degré

Pas de symbolisme, pas de coefficient ni de solution négatifs, la résolution algorithmique est démontrée de manière géométrique.

En utilisant trois termes al-māl (bien), al jidhr (racine) et al-ʿadad (nombre), qui selon la représentation actuelle correspondent à x^2, x et *nombre*, Al-Khwārizmī définit six équations canoniques à coefficients positifs, selon un ordre qui tient compte de la nature et du nombre d'éléments dans les deux membres de l'équation. Il présente la méthode de résolution de ces équations, puis prouve l'existence des seules solutions positives de manière géométrique.

Muhammad Al Khwarīzmī appartient au groupe de mathématiciens et philosophes qui, à la fin du VIII^e siècle, travaillent au sein de la Maison de la Sagesse à Bagdad.
Le mot « **algèbre** » (al-jahr) provient du titre de son œuvre maîtresse « *al-jabr wa'l muqabala* » ('الكتاب المختصر في حساب الجبر والمقابلة) (*réduction et balancement).*
Le mot « **algorithme** » n'est autre qu'une déformation de son nom, signifiant "originaire du Khwarism".

900

Abū Kāmil (850 - 930)

Utilisation de coefficients et racines irrationnels.

Surnommé le calculateur égyptien, son livre le plus important est le Kitāb al-kāmil fī l-jabr (Le livre complet en algèbre). Il étudie des systèmes de plusieurs équations à plusieurs inconnues. Ses travaux ont inspiré Fibonacci.

Abū Bakr-al-Karaji (953 - 1030)

Émergence du calcul formel

Appliquer aux inconnues, les calculs sur les connues, pour établir une théorie du calcul formel.

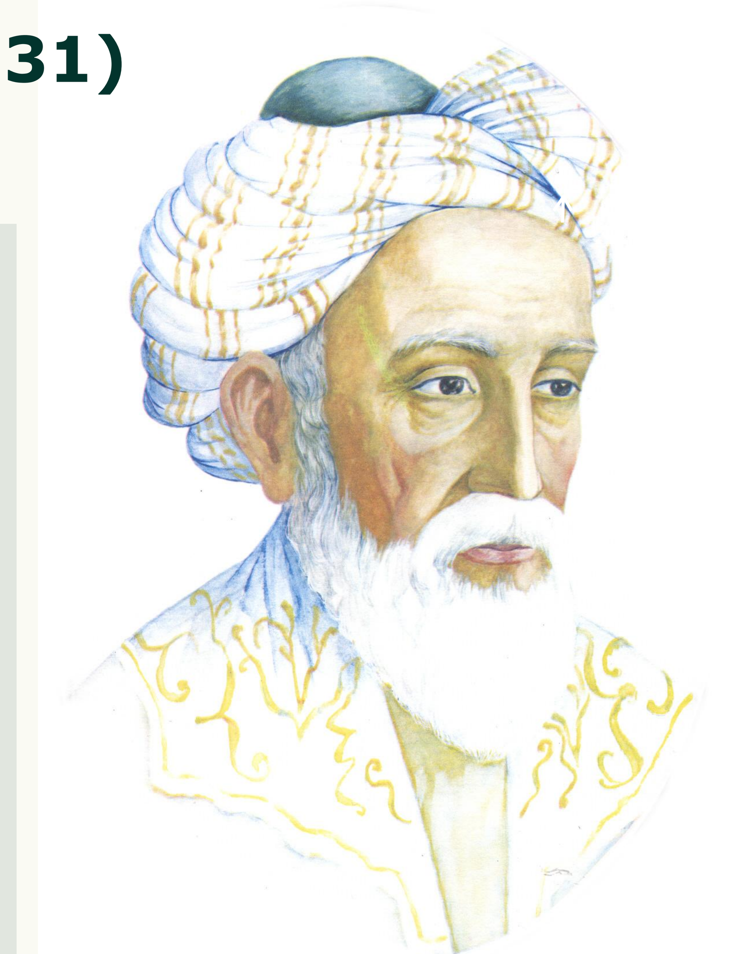
L'algèbre arabe commence à se libérer de la géométrie. Al-Karajī est conscient du fait que cette rupture nécessite de fonder la nouvelle discipline sur un socle permettant de définir les nouveaux objets (variables et opérations abstraites), et de justifier les calculs indépendamment des fondements axiomatiques de la géométrie,

Ses grands traités sont Al Fakhrī fi'l-jabr wa'l muqabala, Al-Badi fi'l hisab et *Al-Kafi fi'l-hisab* ; il y reprend la théorie des équations du second degré d'Al Khwarizmi, l'algèbre dans la tradition de Diophante et celle d'Abū Kāmil. On y trouve le système décimal de position et l'étude de l'algèbre des polynômes : il pose les règles des quatre opérations (+, -, x, :) par analogie avec celles du calcul sur les nombres. Il introduit l'argument de "récurrence" pour démontrer la formule donnant la somme des n premiers cubes.

1000

Omar al-Khayyām (1048 – 1131)

le poète et les équations cubiques



Умари Хайём - Omar Khayam

L'algèbre comme une science à part entière, celle des équations, bien distincte de la science du calcul et de la géométrie.

Toujours sans symbolisme, il opère une classification reposant sur le degré et le nombre de termes. Comme ses prédécesseurs, il n'envisage pas de coefficients négatifs ; il obtient vingt-cinq équations canoniques. Onze de ces équations se réduisent aux formes canoniques du second degré. Il en reste donc quatorze, pour lesquelles Omar Khayyām analyse les conditions d'existence de solutions (c'est-à dire de racines réelles et positives) et en établit l'existence.

As-Samaw'al (1130 - 1180)

Des tableaux objets de calculs.

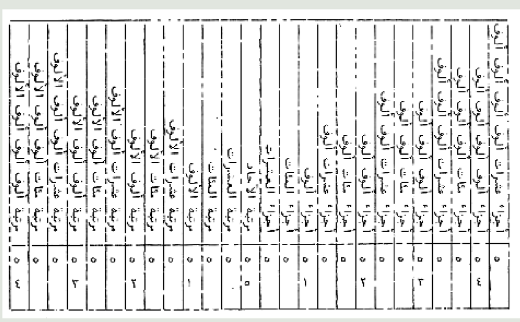


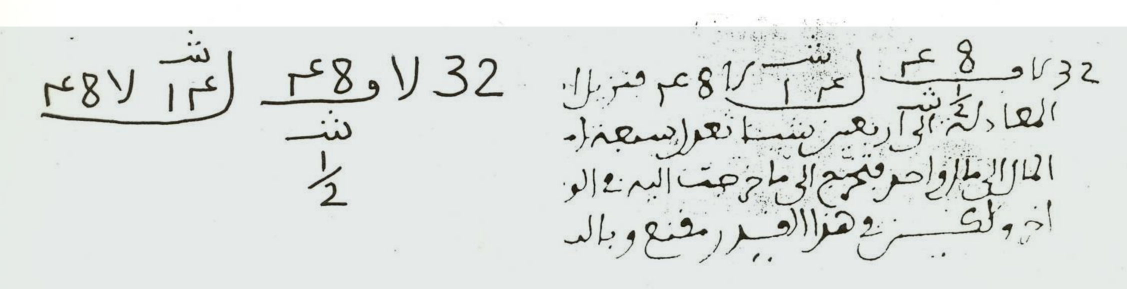
Illustration de *al-Bahir fi'l-jabr* de al-Samaw'all , *provenant du site web Monde arabe*

Dans son traité al-Bahir fi'l-jabr (*livre flamboyant de l'algèbre*) , il poursuit les travaux d'Al Karaji et développe des techniques opératoires sur les polynômes, qu'il présente sous forme de tableaux de coefficients. Il utilise les exposants négatifs. Il pratique aussi des raisonnements par "récurrence".

1100

Écriture symbolique

L'utilisation du symbolisme littéral algébrique date du XII^e siècle ; il a commencé au Mahgreb et en al-Andalus.



Manuscrit anonyme contenant une équation écrite à l'aide des symboles algébriques utilisés au Maghreb entre le XIIe et le XIXe siècle.
Iconographie CNRS

Sharaf al-Dīn al-Tūsī (mort en 1213)

1200

Classification des équations cubiques selon leur nombre de solutions, utilisation d'une équation auxiliaire pour établir l'existence des solutions.

Cette équation auxiliaire correspond exactement à celle que l'on obtiendrait aujourd'hui en dérivant un polynôme du second degré associé à une équation cubique et en annulant cette dérivée. Mais dans l'ouvrage qui nous est parvenu, rien n'est dit des démarches qui ont permis d'aboutir à cette équation auxiliaire.

Pour en savoir plus

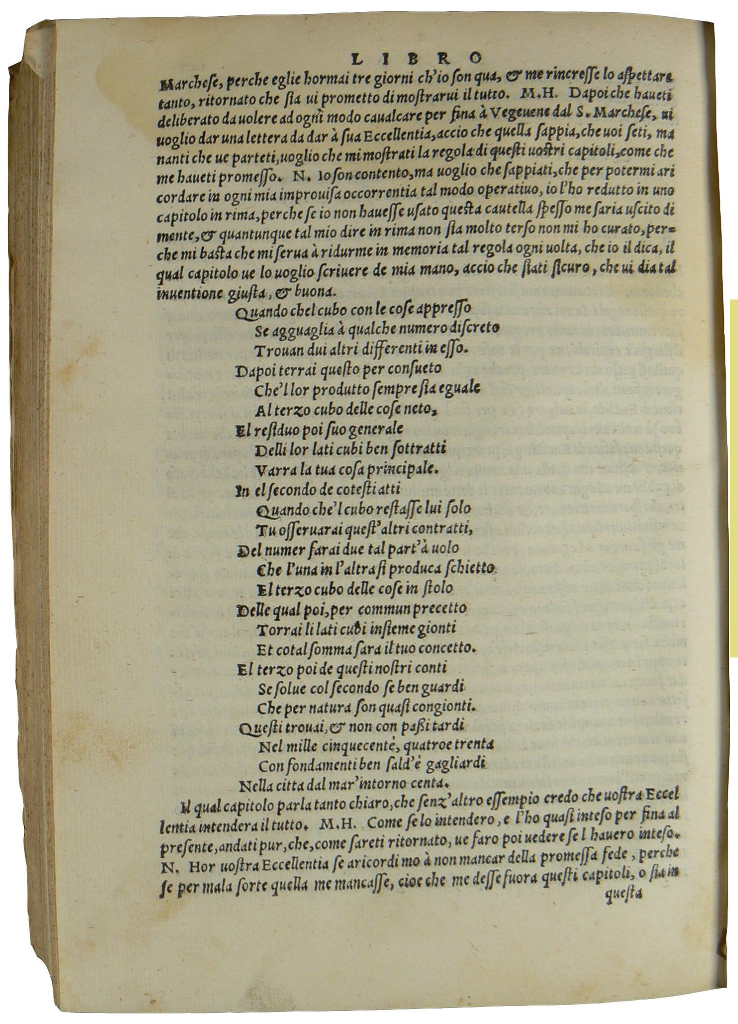
IREM Aix-Marseille
http://www.irem.univ-mrs.fr/expo2013

EMERGENCE

LA RENAISSANCE DES MATHEMATIQUES

TARTAGLIA ET CARDAN

Tartaglia publie sa méthode de résolution des équations du 3ème degré dans les QUESITI sous forme d'un poème.



Extrait de « Quesiti et inventione diverse »
Première édition (Venise, 1554).
Bibliothèque de l'Alcazar, Marseille.

Quand le cube auprès des chose	x^3+px
Est égalé à un quelconque nombre discret	$=q$
Trouve en lui deux nombres différents	$q=u-v$
Alors tu prendras pour habitude	
Que leur produit soit toujours égal	$uv=$
Au tiers cubé des choses exactement	$(p/3)^3$
Ensuite le reste général	
De leurs racines cubiques bien soustraites	$\sqrt[3]{u}-\sqrt[3]{v}$
Sera égale à ta chose principale	
Dans le deuxième de ces actes	
Quand le cube reste seul	$x^3=px+q$
Tu observeras ces autres contrats	$q=u+v$
Tu feras du nombre deux parties	
En sorte que l'une par l'autre produise nettement	$uv=$
Le tiers cubé des choses exactement	$(p/3)^3$
De celles-ci ensuite, par une règle commune	
Tu extrais les racines cubiques jointes ensembles	$\sqrt[3]{u}+\sqrt[3]{v}$
Cette somme deviendra ton principal résultat	$=x$
Ensuite le troisième de nos comptes	$x^3+q=px$
Se résout avec le second si tu regardes bien	
Parce-que par nature ils sont presque liés	
J'ai trouvé ces choses sans lenteurs	
En mille cinq cent trente quatre	
Avec des fondements forts et certains	
Dans la cité entourée par la mer.	

Traduction en français de la méthode de résolution des équations du 3ème degré.

Traduction en langage algébrique moderne

NICCOLO FONTANA dit TARTAGLIA (1499-1557)

Niccolo Fontana est né à Brescia. Lors du sac de cette ville par les Français (1512), il a la mâchoire fendue par un sabre ; il en garde une difficulté d'élocution qui lui vaut le surnom de Tartaglia (bègue).

En 1534, il s'établit à Venise comme professeur de mathématiques.

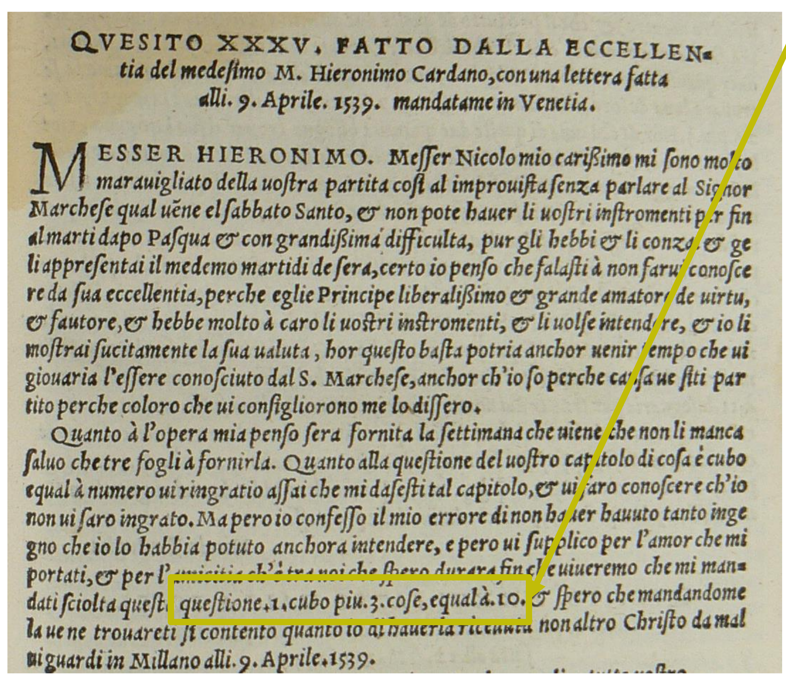
En 1535, lors d'une confrontation avec Antonio Maria Fior(un des élèves du mathématicien Scipione del Ferro), on lui propose de résoudre trente équations du troisième degré du type

$x^3+px=q$

Juste avant la date limite, Tartaglia résout les trente équations en quelques heures. Ce n'est d'ailleurs que pour l'honneur, puisqu'il renonce au prix de trente banquets successifs.

Dans l'espoir de gagner d'autres concours, Tartaglia ne dévoile pas sa formule. Il va alors entretenir une longue correspondance avec Cardan au sujet de sa formule.

Tartaglia publiera les *Quesiti et Inventioni diverse* qu'en 1546 après l'œuvre de Cardan. Son dernier ouvrage, le *General Trattato* ne sera publié qu'après sa mort.



QVESITO XXXV. FATTO DALLA ECCELLENtia del medesimo M. Hieronimo Cardano, con una lettera fatta alli. 9. Aprile. 1539. mandatame in Venetia.

MESSER HIERONIMO. Messer Nicolo mio carissimo mi sono molto marauigliato della uostra partita cosi al improuista senza parlare al Signor Marchese qual uene el sabbato Santo, & non pote hauer li uostri instromenti per fin al marti dapo Pasqua & con grandissima difficulta, pur gli hebbi & li conzai & ge li appresentai il medemo martidi de sera, certo io penso che falasti à non faruí conoscere da sua eccellentia, perche eglie Principe liberalissimo & grande amatore de uirtu, & fautore, & hebbe molto à caro li uostri instromenti, & li uolse intendere, & io li mostrai sucitamente la sua ualuta, hor questo basta potria anchor uenir tempo che ui giouaria l'essere conosciuto dal S. Marchese, anchor ch'io so perche causa ue siti partito perche coloro che ui consigliorono me lo dissero.

Quanto à l'opera mia penso sera fornita la settimana che uiene che non li manca saluo che tre fogli à fornirla. Quanto alla questione del uostro capitolo di cosa è cubo equal à numero ui ringratio assai che mi dasesti tal capitolo, & ui faro conoscere ch'io non ui saro ingrato. Ma pero io confesso il mio errore di non hauer hauuto tanto ingegno che io lo habbia potuto anchora intendere, e pero ui supplico per l'amor che mi portati, & per l'... datì sciolta quest... questione.1.cubo piu.3.cose, equal à.10. & spero che mandandome la ue ne trouareti si contento ... non altro Christo da mal ui guardi in Millano alli.9.Aprile.1539.

Extrait des Quesiti XXXV

1 cube plus 3 choses égaux à 10
Revient à résoudre l'équation
$x^3+3x=10$.

p = 3 et q = 10

soit u − v = 10 et uv $=\left(\frac{3}{3}\right)^3=1$

On a donc u-v = 10 et
v = $\frac{1}{u}$ soit u - $\frac{1}{u}$ = 10
donc u est solution de
$u^2-10u-1=0$

Le discriminant vaut 104
et la solution positive de cette équation est :
u $=\sqrt{26}+5$ et donc v = $\sqrt{26}-5$

Une solution au problème posé est donc

x = $\sqrt[3]{\sqrt{26}+5}-\sqrt[3]{\sqrt{26}-5}$

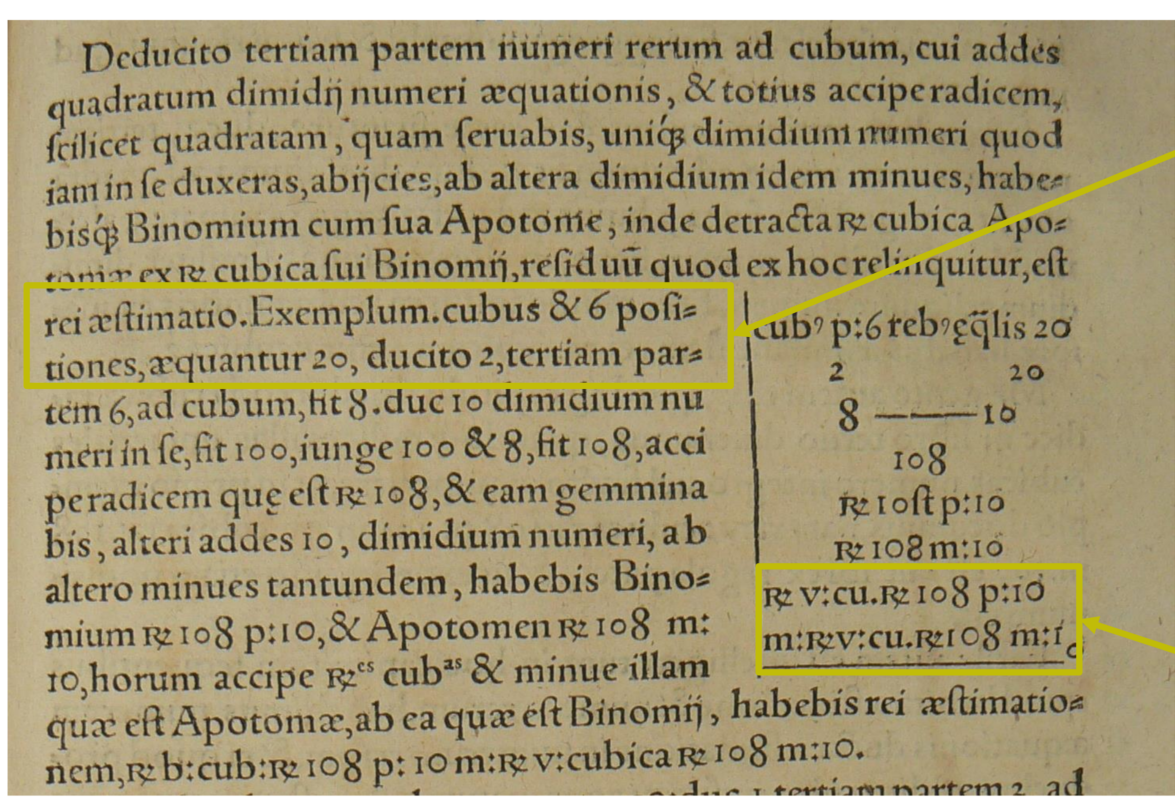
JEROME CARDAN (1501-1576)

Médecin, inventeur et astrologue italien, Jérôme Cardan apprend les mathématiques grâce à son père mathématicien, puis à l'université de Pavie. Il poursuit ensuite des études de médecine à Padoue et enseigne les mathématiques à l'université de Milan à partir de 1534.

Il est le créateur de l'appareil qui porte son nom, à l'origine prévu pour maintenir horizontales les boussoles des navires.

Son œuvre monumentale "*Artis magnae sive de regulis algebraicis*" (« *Du grand Art ou des règles de l'Algèbre*", 1545) plus connu sous le nom de "*Ars magna*" s'inspire du célèbre traité d'algèbre de Al Khwarizmi. La lecture du traité est difficile car privée de symbolisme algébrique.

Il publie le premier la méthode de résolution des équations du 3ème et 4ème degré à partir des travaux de Tartaglia.



Deducito tertiam partem numeri rerum ad cubum, cui addes quadratum dimidij numeri æquationis, & totius accipe radicem, scilicet quadratam, quam seruabis, uniq; dimidium numeri quod iam in se duxeras, abijcies, ab altera dimidium idem minues, habebisq; Binomium cum sua Apotome, inde detracta R cubica Apotomæ ex R cubica sui Binomij, residuũ quod ex hoc relinquitur, est rei æstimatio. Exemplum. cubus & 6 positiones, æquantur 20, ducito 2, tertiam partem 6, ad cubum, fit 8. duc 10 dimidium numeri in se, fit 100, iunge 100 & 8, fit 108, accipe radicem quę est R 108, & eam gemminabis, alteri addes 10, dimidium numeri, ab altero minues tantundem, habebis Binomium R 108 p:10, & Apotomen R 108 m:10, horum accipe Rces cubas & minue illam quæ est Apotomæ, ab ea quæ est Binomij, habebis rei æstimationem, R v: cub: R 108 p: 10 m: R v: cubica R 108 m:10.

cub⁹ p:6 reb⁹ ęq̃lis 20
2 20
8 —— 10
108
R 108 p:10
R 108 m:10
R v:cu. R 108 p:10
m: R v:cu. R 108 m:10

Extrait de Artis magnae sive de regulis algebraicis
Bibliothèque de l'Alcazar, Marseille

1 cube et 6 positions sont égales à 20

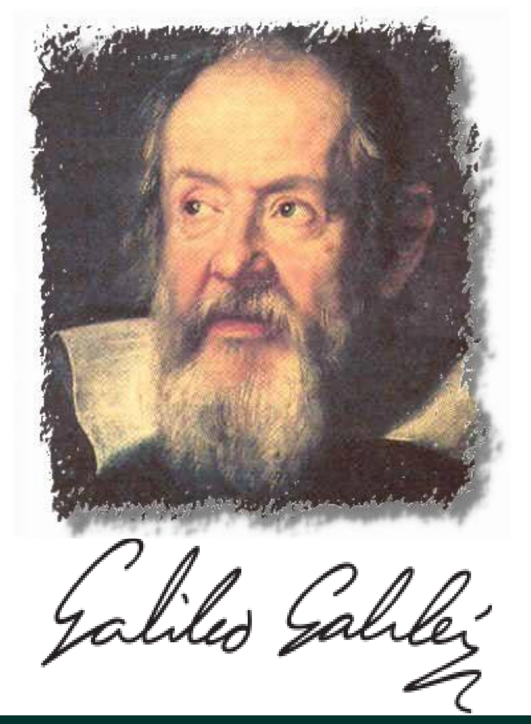
revient à résoudre l'équation
$x^3+6x=20$
Prendre la troisième partie de 6 : 6/3 = 2
Dans le résultat du cube, le résultat est 8 : $2^3=8$
Deux nombres demi comme 10, en 100 :
20/2 = 10 et $10^2=100$
100 et 8 se rejoignent devient 108 : 100+8 = 108
Prendre la racine de ce qui est R108 : $\sqrt{108}$
Vous allez ajouter un autre 10, la moitié du nombre :
$\sqrt{108}+10$
Il faut soustraire la même quantité à l'autre :
$\sqrt{108}-10$
Prendre la racine cubique de ces 2 binômes et les soustraire :
$\sqrt[3]{\sqrt{108}+10}$ - $\sqrt[3]{\sqrt{108}-10}$

Aux sources de la science moderne …

EMERGENCE

GALILÉE

Pise 1564 - Arcetri 1642

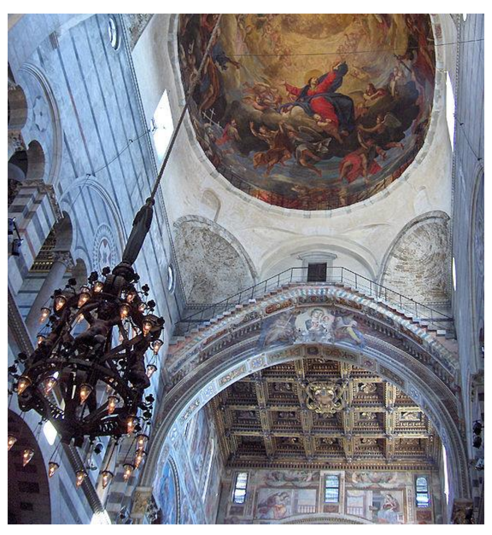


« Père de la méthode expérimentale », « Fondateur de la science moderne », sont des expressions très souvent associées au nom de Galilée. Il a marqué très fortement cette époque charnière de l'histoire des sciences et a été un expérimentateur et un observateur hors-norme.

"il Grande libro della Natura e' scritto nel linguaggio della matematica, e non possiamo capirla se prima non ne capiamo i simboli"

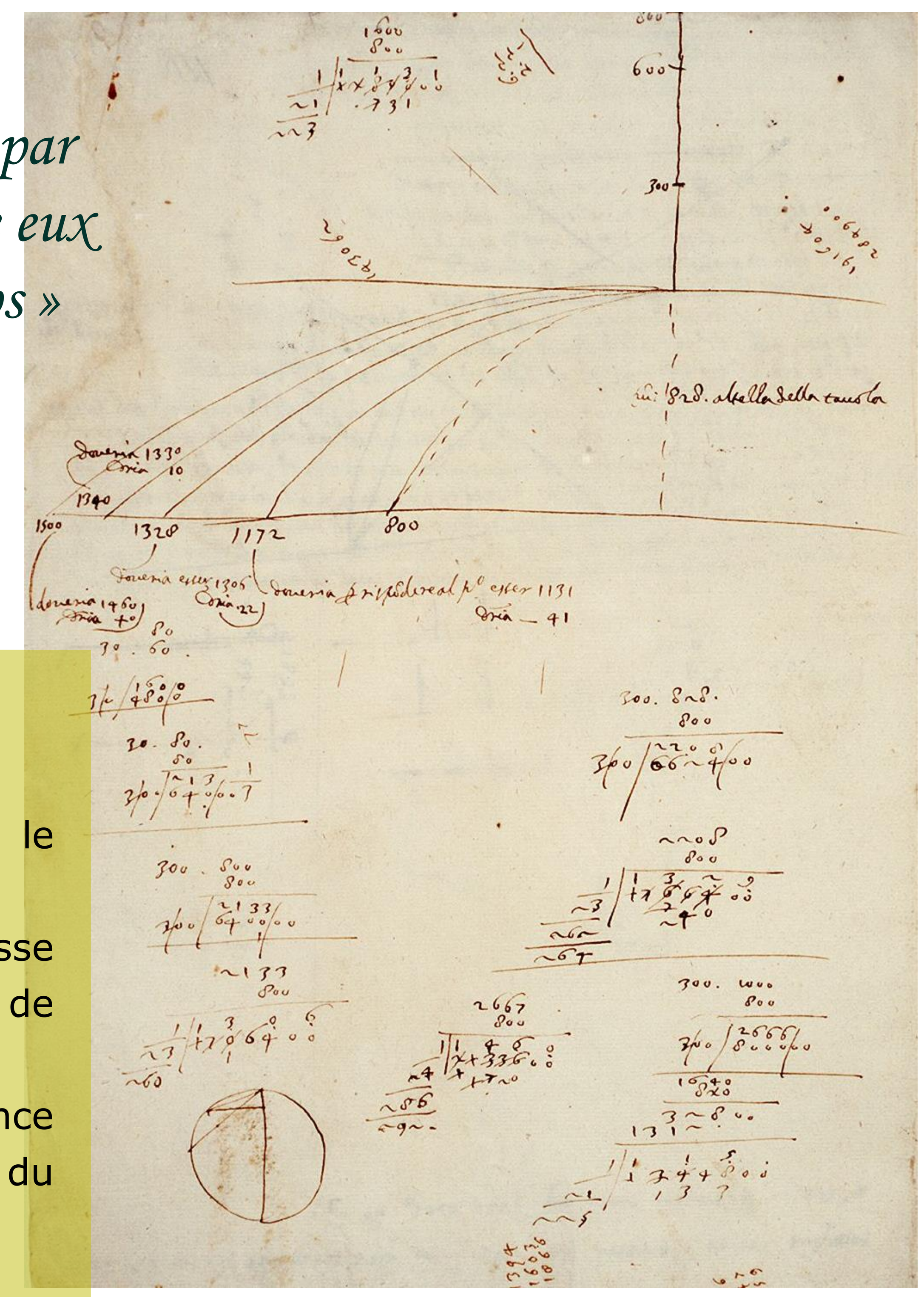
« le Grand livre de la Nature est écrit en langage mathématique, et nous ne pouvons le comprendre sans en comprendre d'abord les symboles »

Galilée nait en 1564 dans une famille assez aisée et cultivée. A 19 ans il rencontre un élève de Tartaglia qui lui transmet son admiration pour Archimède et Euclide. Il abandonne ses études de médecine pour les mathématiques. Dès lors, il se passionnera pour les sciences et techniques.



Son premier résultat significatif est de découvrir en 1583 la formule donnant la période d'oscillation d'un pendule simple, en mesurant avec son pouls les petites oscillations du grand lustre de la cathédrale de Pise (ci-dessus). $T = 2\pi\left(\sqrt{\frac{l}{g}}\right)$ **où *l* est la longueur du pendule et *g* la constante de gravité sur Terre**

« Les espaces parcourus par un corps grave sont entre eux comme le carré des temps »



Ses mesures sont souvent d'une précision limitée et il n'a probablement pas effectué toutes les expériences que lui ont attribuées ses premiers biographes. C'est surtout son exceptionnelle intuition des lois de la nature qui l'a guidé.

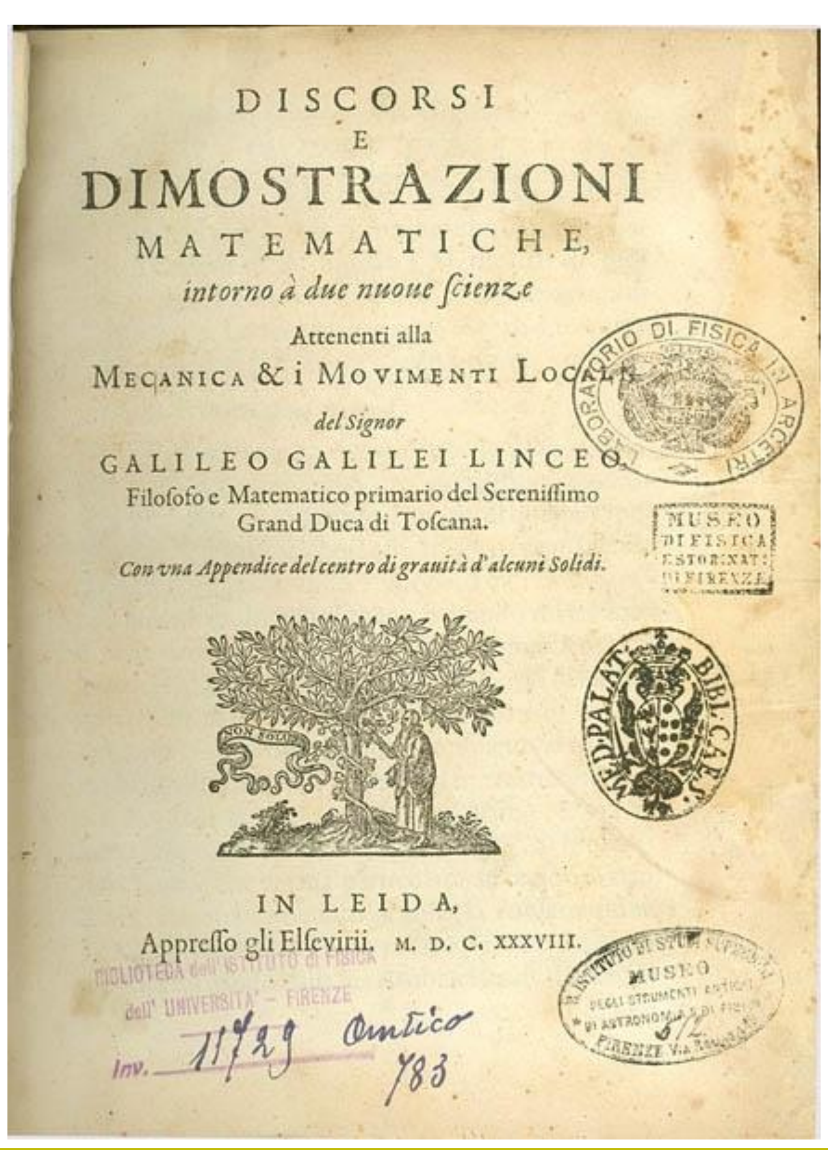
$$y = 0,5\,gt^2$$

Méthode

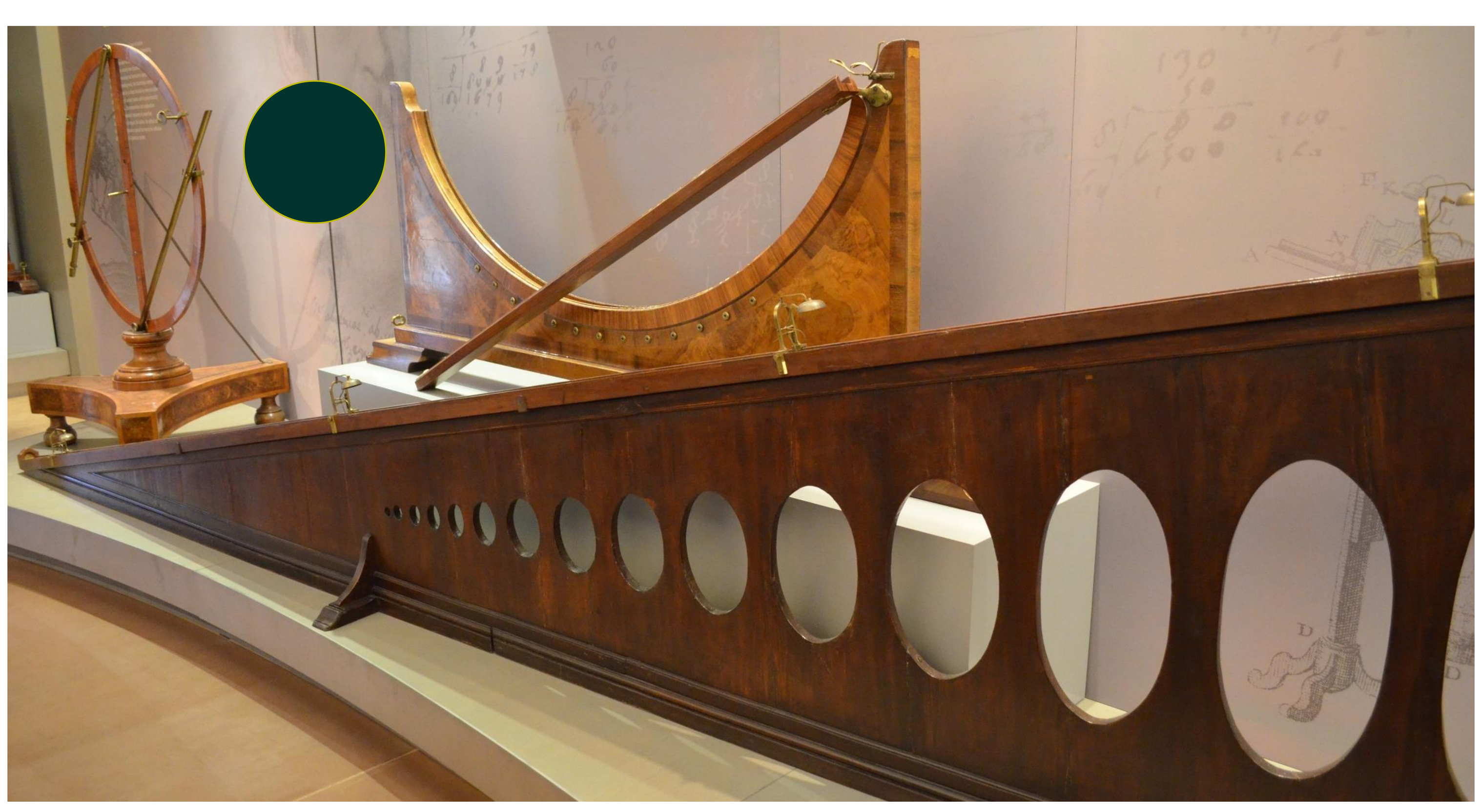
Application à la chute des corps

1. Il distingue les facteurs influant sur le mouvement de chute et les hiérarchise
2. Il dégage une hypothèse : la vitesse augmente proportionnellement au temps de chute.
3. Il en tire une loi mathématique : la distance parcourue est proportionnelle au carré du temps mis pour la parcourir. $D = \frac{1}{2}gT^2$
4. Il met au point une expérience pour confronter cette loi à la réalité.

Compas de proportion de Galilée (musée Galilée à Florence) : une véritable calculatrice portable !



Il publiera peu par crainte des conflits et polémiques qu'il aurait assurément provoqué.
La synthèse de ses travaux mécaniques est son « Discours et démonstrations mathématiques concernant deux sciences nouvelles » de 1638



Rampe inclinée pour étudier la chute d'une bille

"Eppur si muove"

« Et pourtant elle tourne »

Son *« Dialogue sur les deux grands systèmes du monde »* publié en 1632 sera pour l'Eglise la goutte qui fera déborder une coupe remplie depuis de nombreuses années. Il est condamné et doit abjurer ses idées.

Le procès de Galilée

"If I have seen further it is by standing on ye shoulders of Giants»

Sir I.Newton en 1676 se référant à Galilée et Kepler

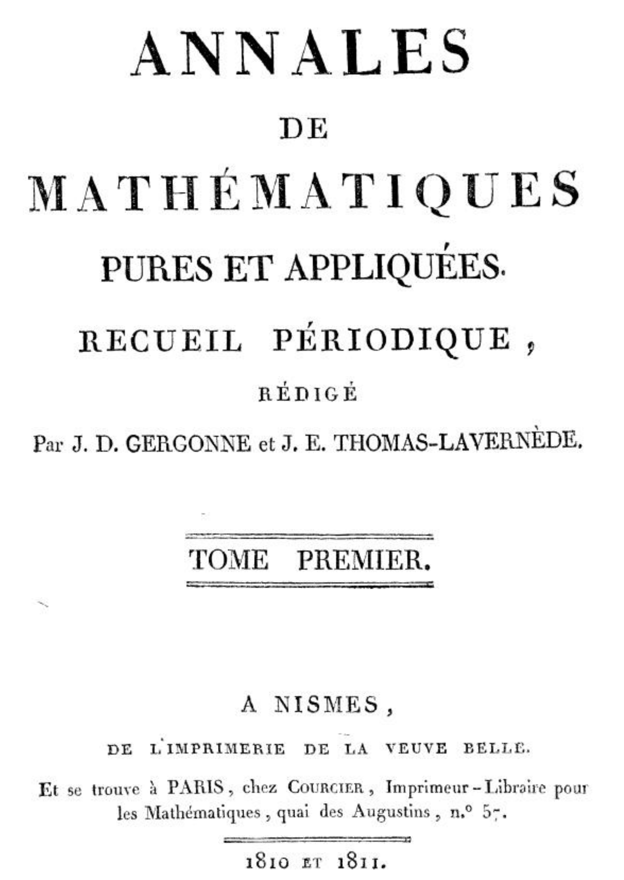
« Si j'ai pu voir plus loin, c'est que j'ai pu monter sur les épaules de géants »

EMERGENCE

LA CIRCULATION MODERNE DES SAVOIRS

LES ANNALES DE GERGONNE

Le premier grand journal de l'histoire des mathématiques a vu le jour à Nimes : les Annales de Gergonne



ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

RECUEIL PÉRIODIQUE,

RÉDIGÉ

Par J. D. GERGONNE et J. E. THOMAS-LAVERNÈDE.

TOME PREMIER.

A NISMES,

DE L'IMPRIMERIE DE LA VEUVE BELLE.

Et se trouve à PARIS, chez COURCIER, Imprimeur-Libraire pour les Mathématiques, quai des Augustins, n.° 57.

1810 ET 1811.

le corédacteur Thomas Lavernède abandonnera l'année suivante, laissant Gergonne gérer seul son journal

Au début du XIXe siècle, le mathématicien Joseph Diaz Gergonne, professeur à Nimes, décida de fonder les Annales de Mathématiques Pures et Appliquées, premier mensuel d'envergure dans l'histoire des mathématiques. Durant 22 ans, de 1810 à 1832, ce journal donna la parole aux mathématiciens méconnus et isolés (professeurs de collèges et de lycées, élèves et étudiants, autodidactes, militaires, anciens élèves de l'Ecole Polytechnique), aussi bien qu'aux célébrités de l'époque. Il s'enrichit de contributions essentielles au nombre desquelles on compte le principe de dualité et la représentation géométrique des nombres complexes.

Gergonne propose :
« un recueil qui permette aux Géomètres d'établir entre eux un commerce ou, pour mieux dire, une sorte de communauté de vues et d'idées ; un recueil qui leur épargne les recherches dans lesquelles ils ne s'engagent que trop souvent en pure perte, faute de savoir que déjà elles ont été entreprises ; un recueil qui garantisse à chacun la priorité des résultats nouveaux auxquels il parvient ; un recueil enfin qui assure aux travaux de tous une publicité non moins honorable pour eux qu'utile au progrès de la science. »
Editorial du premier numéro des Annales, 1810.

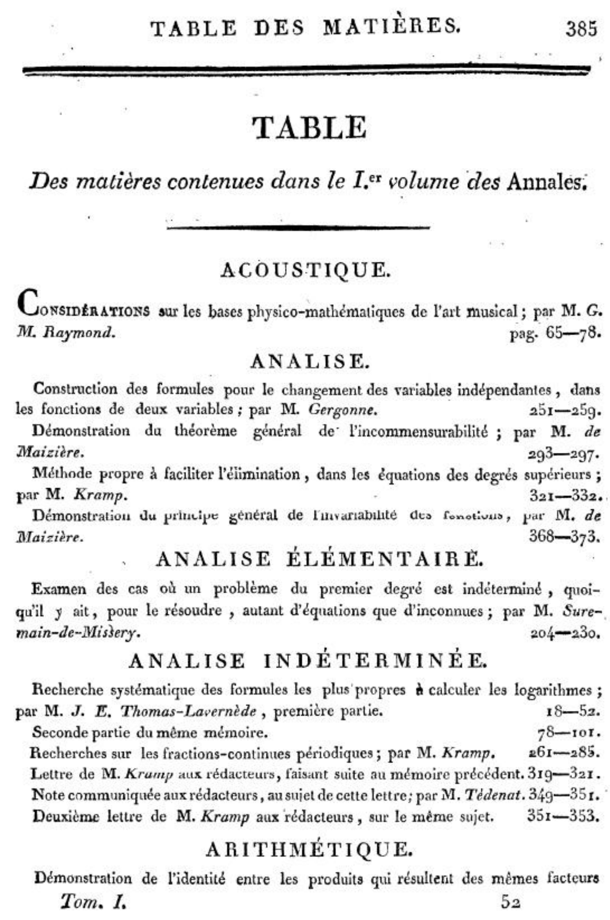


TABLE DES MATIÈRES. 385

TABLE

Des matières contenues dans le I.er volume des Annales.

ACOUSTIQUE.

ANALISE.

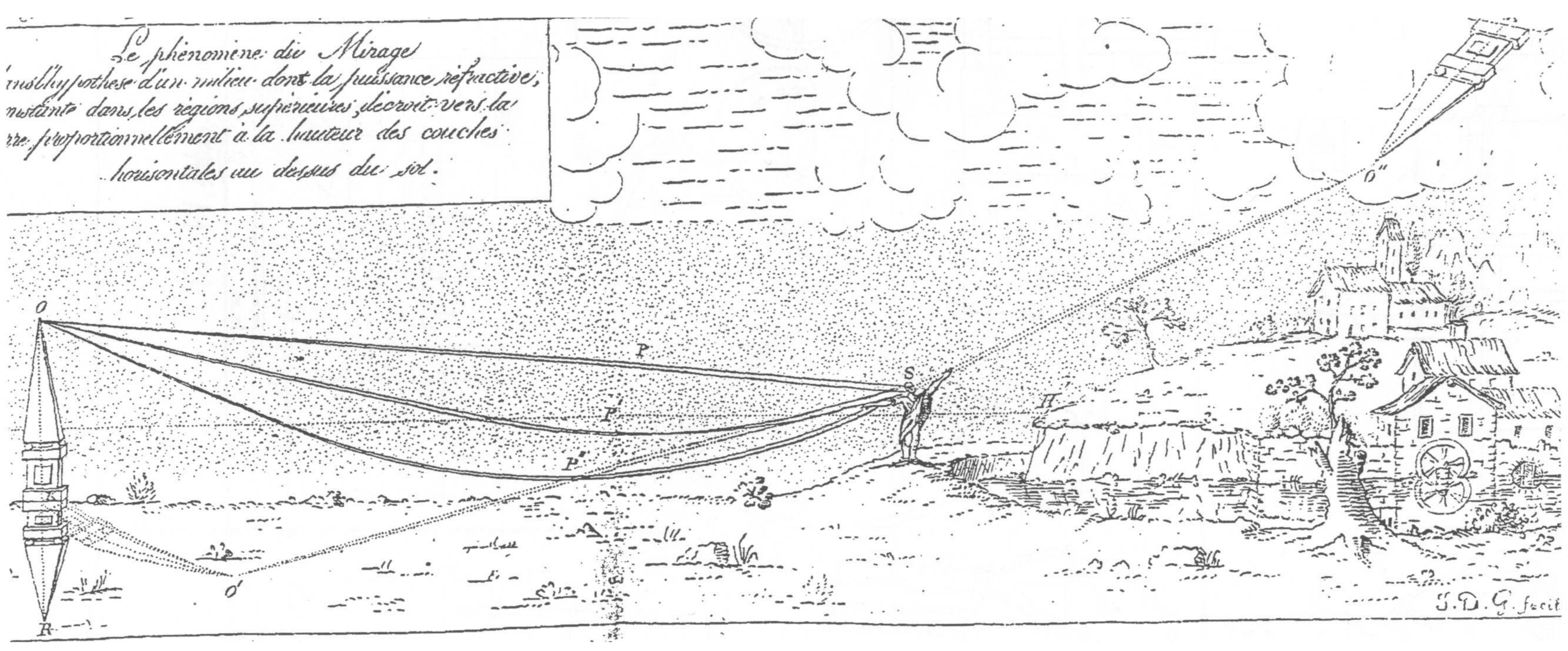
ANALISE ÉLÉMENTAIRE.

ANALISE INDÉTERMINÉE.

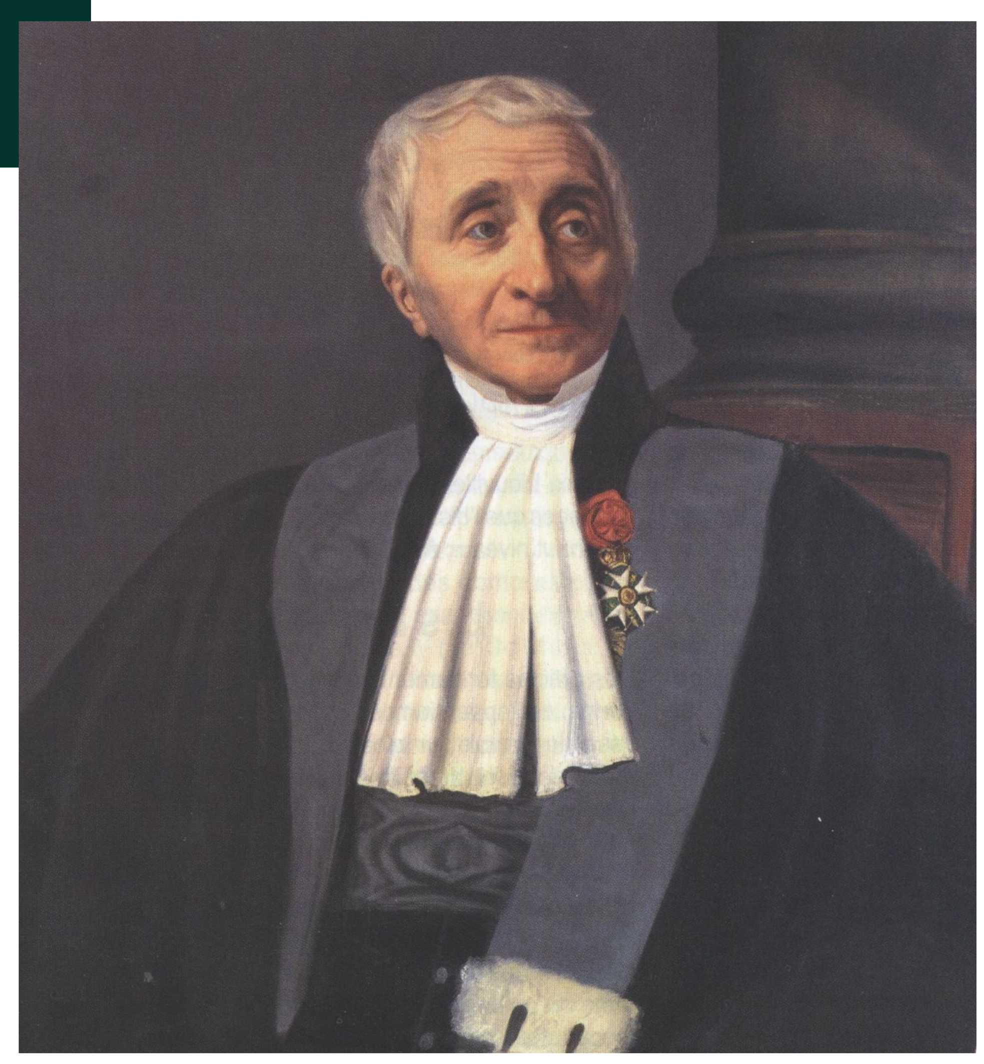
ARITHMÉTIQUE.

Tom. I. 52

Gergonne a contribué à un fait majeur: les Annales ont changé radicalement les moyens de communication entre mathématiciens. Cette forme éditoriale d'un journal international a contribué à la fois aux progrès rapides de la discipline au XIXe siècle, à sa spécialisation : elle a permis la mise en réseau de très nombreux mathématiciens qui avant cela ne se connaissaient pas et n'avaient pas connaissance des travaux effectués ailleurs, et une émulation très forte qui participa à l'accélération des savoirs. Les Annales ont fait entrer les mathématiques dans la modernité en inaugurant une façon nouvelle de communiquer, devenue pérenne et imposant un schéma toujours en vigueur aujourd'hui, y compris dans les autres disciplines scientifiques : la publication dans des journaux spécialisés.

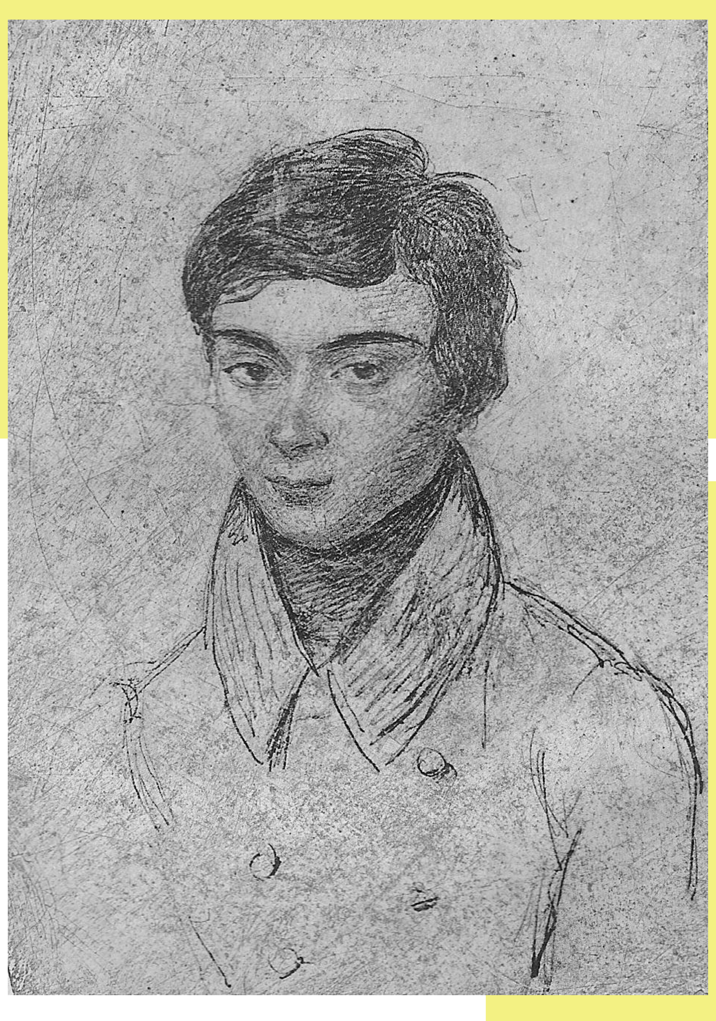


Gravure réalisée par Gergonne pour illustrer un article sur le phénomène du mirage

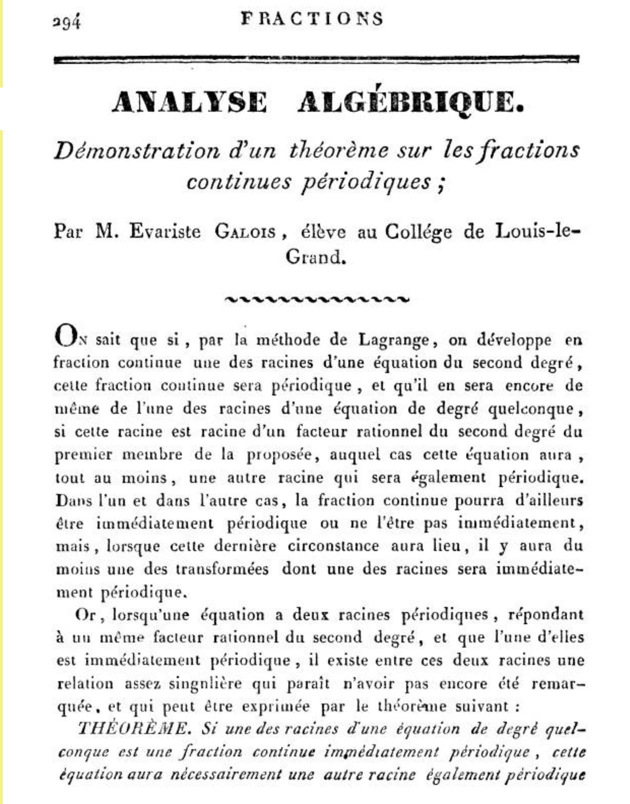


J.D. Gergonne
Recteur de l'Académie de Montpellier de 1830 à 1844.

Des auteurs prestigieux



Evariste Galois



294 FRACTIONS

ANALYSE ALGÉBRIQUE.

Démonstration d'un théorème sur les fractions continues périodiques ;

Par M. Evariste GALOIS, élève au Collége de Louis-le-Grand.

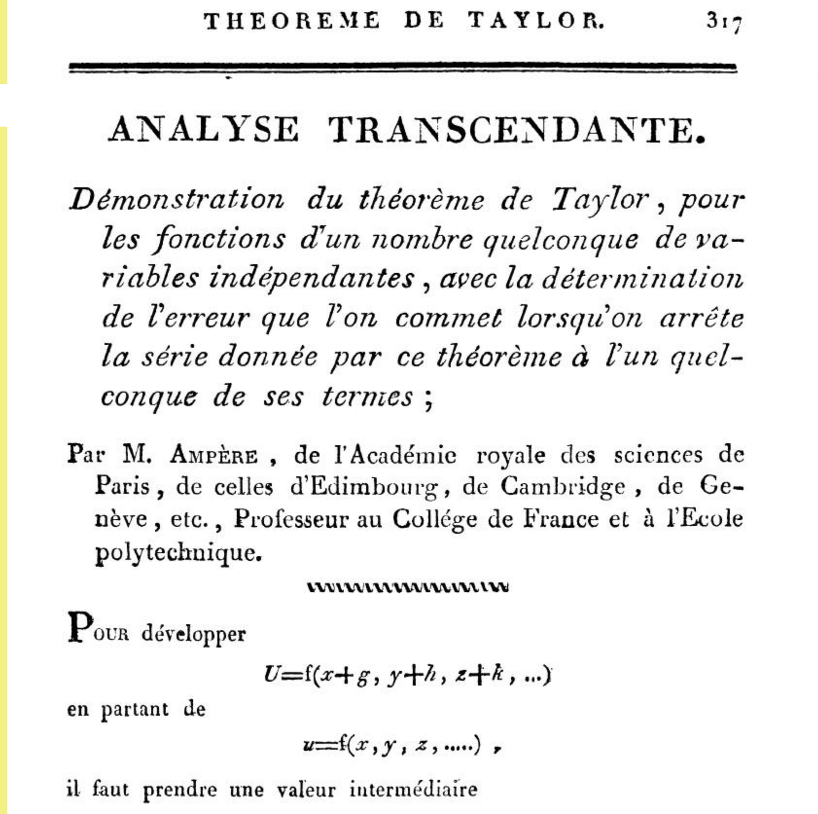
ON sait que si, par la méthode de Lagrange, on développe en fraction continue une des racines d'une équation du second degré, cette fraction continue sera périodique, et qu'il en sera encore de même de l'une des racines d'une équation de degré quelconque, si cette racine est racine d'un facteur rationnel du second degré du premier membre de la proposée, auquel cas cette équation aura, tout au moins, une autre racine qui sera également périodique. Dans l'un et dans l'autre cas, la fraction continue pourra d'ailleurs être immédiatement périodique ou ne l'être pas immédiatement, mais, lorsque cette dernière circonstance aura lieu, il y aura du moins une des transformées dont une des racines sera immédiatement périodique.

Or, lorsqu'une équation a deux racines périodiques, répondant à un même facteur rationnel du second degré, et que l'une d'elles est immédiatement périodique, il existe entre ces deux racines une relation assez singulière qui paraît n'avoir pas encore été remarquée, et qui peut être exprimée par le théorème suivant :

THÉORÈME. Si une des racines d'une équation de degré quelconque est une fraction continue immédiatement périodique, cette équation aura nécessairement une autre racine également périodique

tome 19 (1828-1829), p. 294-301

André-Marie Ampère



THEOREME DE TAYLOR. 317

ANALYSE TRANSCENDANTE.

Démonstration du théorème de Taylor, pour les fonctions d'un nombre quelconque de variables indépendantes, avec la détermination de l'erreur que l'on commet lorsqu'on arrête la série donnée par ce théorème à l'un quelconque de ses termes ;

Par M. AMPÈRE, de l'Académie royale des sciences de Paris, de celles d'Edimbourg, de Cambridge, de Genève, etc., Professeur au Collége de France et à l'Ecole polytechnique.

POUR développer

$$U=f(x+g, y+h, z+k, \ldots)$$

en partant de

$$u=f(x, y, z, \ldots\ldots),$$

il faut prendre une valeur intermédiaire

tome 17 (1826-1827), p.317-329

Pour en savoir plus

IREM Aix-Marseille
http://www.irem.univ-mrs.fr/expo2013