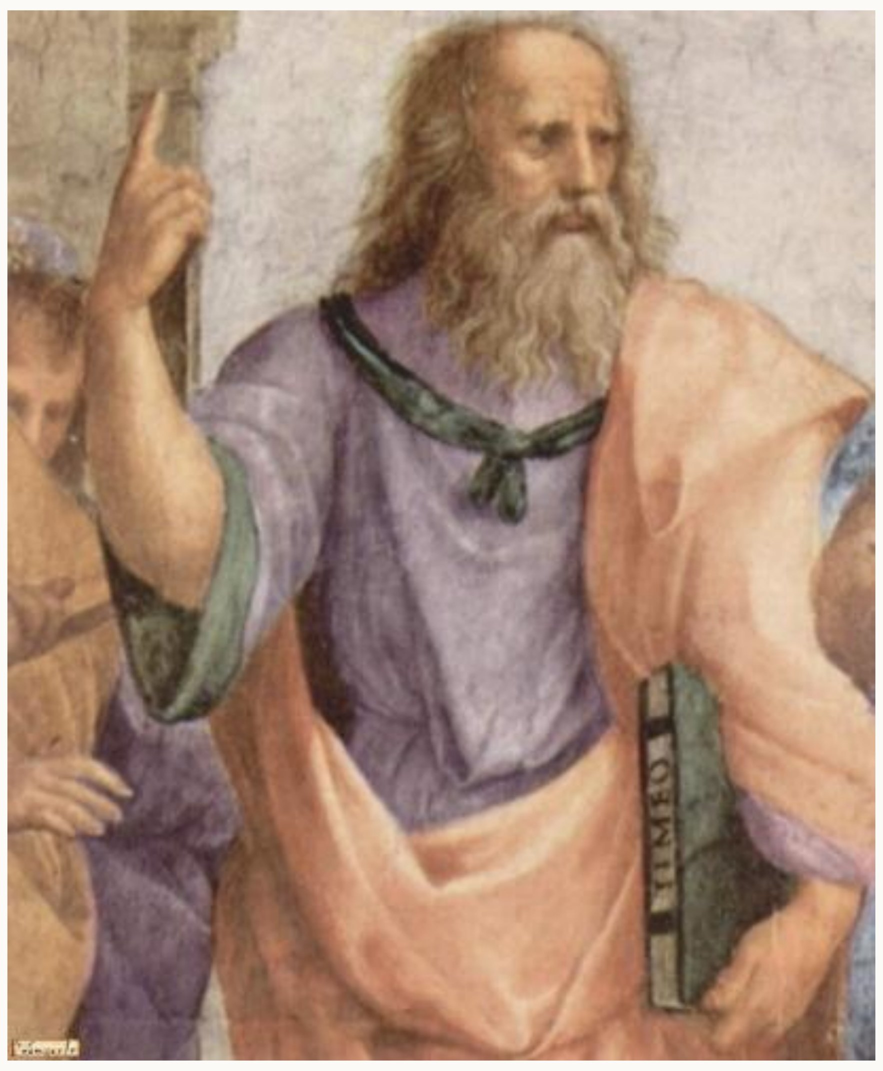
REPRESENTER

LES CINQ SOLIDES DE PLATON

« Dieu s'en est servi pour le Tout, quand il en a dessiné l'arrangement final. »
(Platon, Timée 55a)

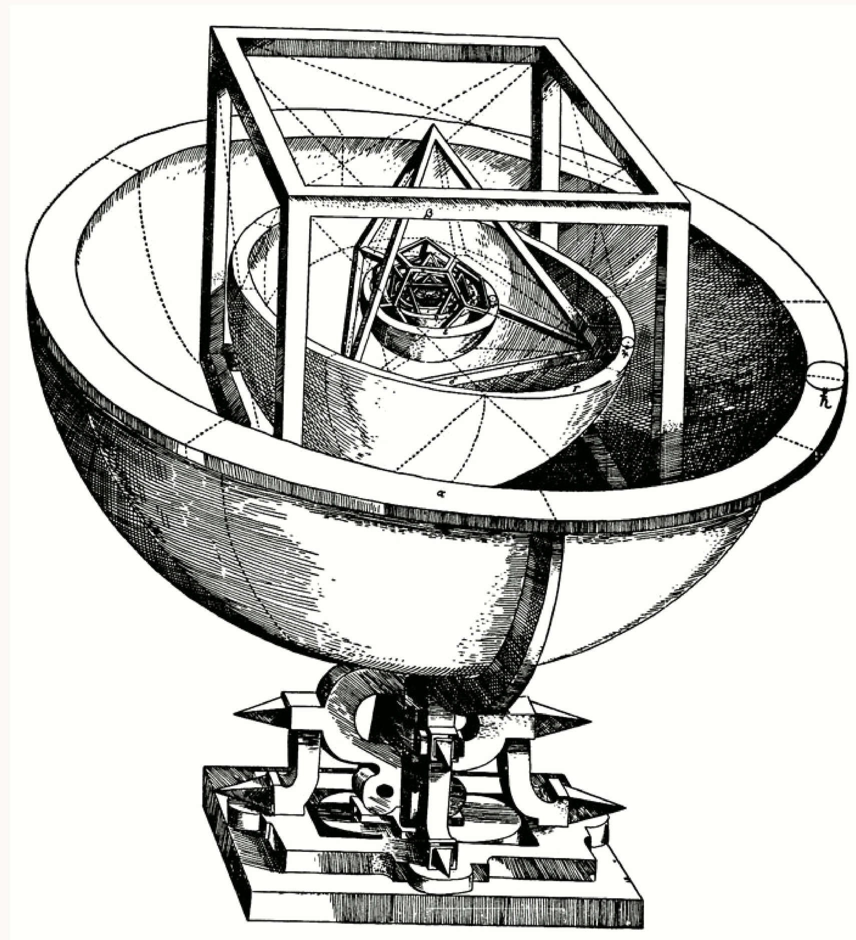
À la recherche de la régularité et de l'harmonie

Dès l'Antiquité les mathématiciens grecs recherchent des figures géométriques répondant à des critères de symétrie.

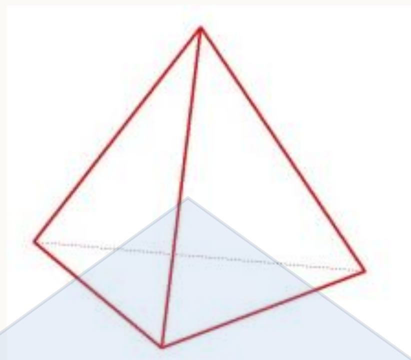


Platon : Détail de l'Ecole d'Athènes de Raphaël

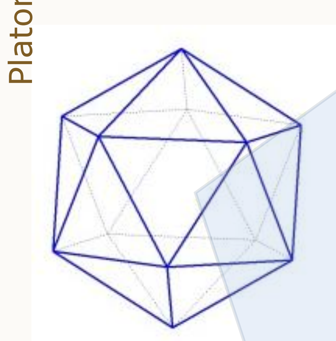
Théétète (-415, -395) semble être le premier théoricien des **solides de Platon** appelés **polyèdres réguliers convexes** de nos jours.



Modèle du système solaire par des modèles de solides de Platon vu par Kepler issu du *Mysterium Cosmographicum* (1596)

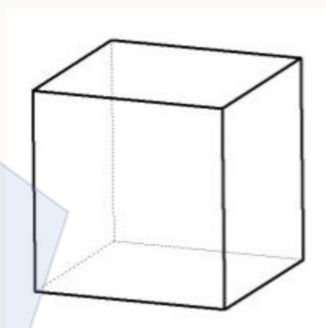


Tétraèdre
Le feu / Jupiter
4 faces qui sont des triangles équilatéraux



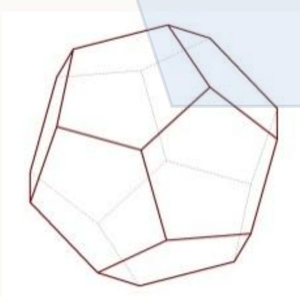
L'icosaèdre
L'eau
20 faces qui sont des triangles équilatéraux

Un polyèdre est dit régulier si ses faces sont des polygones réguliers tous identiques, et s'il y a un même nombre d'arêtes qui convergent à chaque sommet.

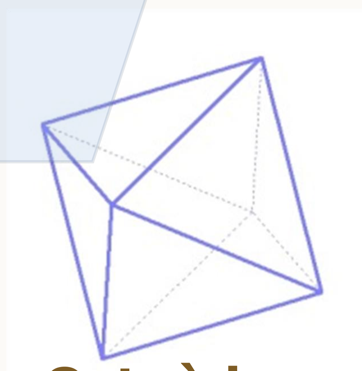


Le cube
La terre / Saturne
6 faces qui sont des carrés

PLATON (428-347 av. J.-C)
en faisait des objets mystiques



Le Dodécaèdre
Le Tout / Mars
12 faces qui sont des pentagones réguliers

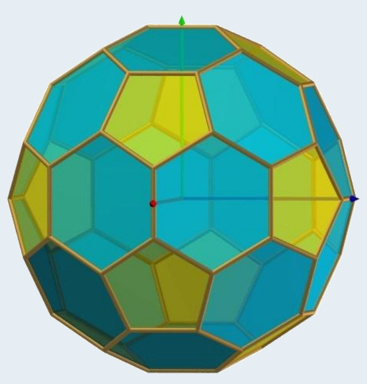


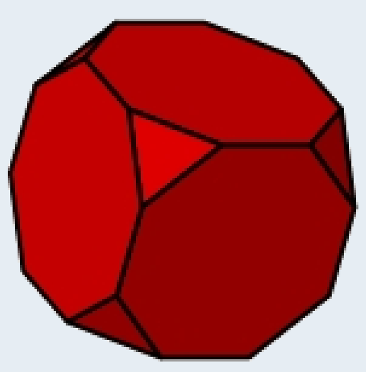
Octaèdre
L'air / Venus
8 faces qui sont des triangles équilatéraux

Euclide (-325, -265) en donne, dans *Les Eléments* (Livre XIII), une description mathématique complète. Les propositions 13–17 y décrivent la construction : **du tétraèdre, de l'octaèdre, du cube, de l'icosaèdre et du dodécaèdre**.
Il y donne aussi la démonstration qu'il y en a seulement cinq.

Kepler (1571, 1630) conjectura **dans le « *Mysterium Cosmographicum* »** que ces cinq solides réguliers et les espaces entre les 6 planètes connues à cette époque étaient en relation. Il pensait que ces solides réguliers étaient la clef de compréhension de l'architecture de l'univers.

Et si on relâche quelques contraintes ?



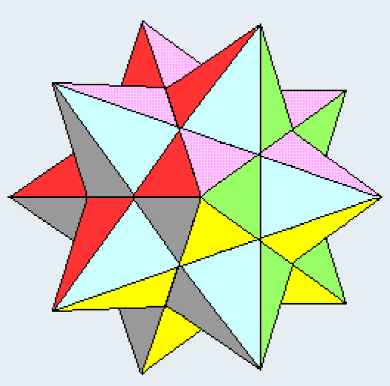


Les solides archimédiens ou polyèdres semi-réguliers.

Icosaèdre tronqué
32 faces

Cube tronqué
14 faces

Polyèdre uniforme : Petit Dodécahemidodecaèdre
18 faces

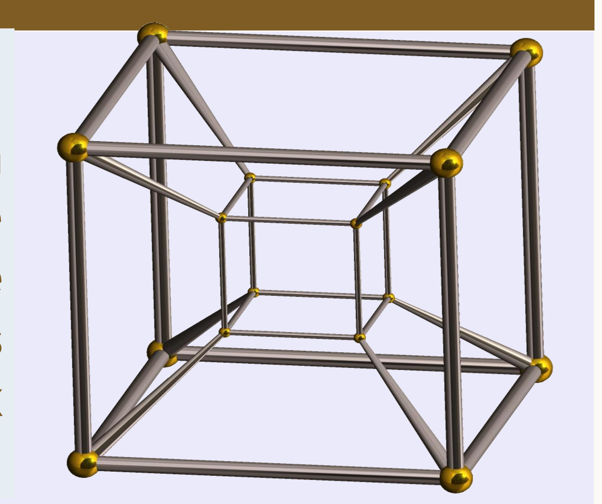


Polyèdre de Kepler-Poinsot
Dodécaèdre étoilé.
12 faces

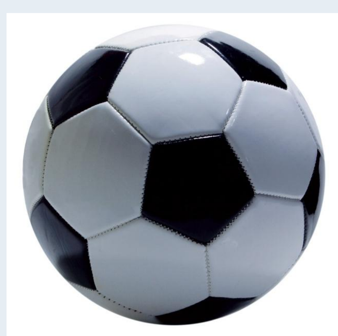
Et si on se place en dimension 4 ou plus ?

Un exemple : l'hypercube

Un **hypercube** est, en géométrie un analogue en dimension n d'un carré (n = 2) et d'un cube (n = 3). C'est une figure fermée, compacte, convexe constituée de groupes de segments parallèles opposés alignés dans chacune des dimensions de l'espace, à angle droit les uns par rapport aux autres.

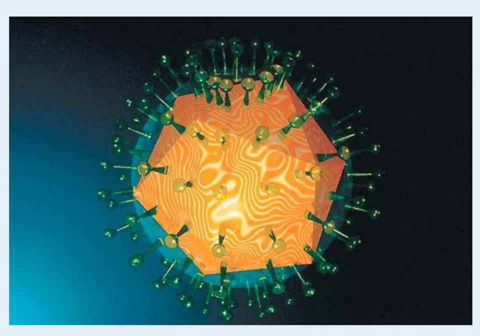


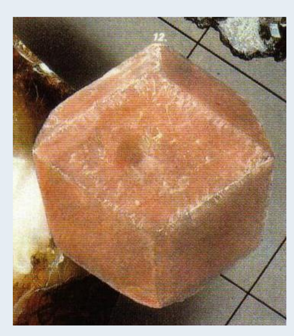
Les polyèdres autour de nous



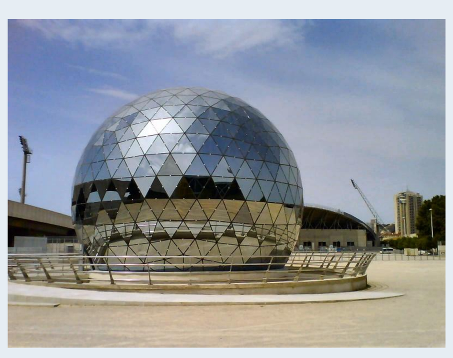
Ballon de foot
Icosaèdre tronqué

Virus de l'Herpes
Icosaèdre régulier





Cristal de grenat
Dodécaèdre rhombique



La géode de l'esplanade Ganay

IREM Aix-Marseille
`http://www.irem.univ-mrs.fr/expo2013`

CONSTRUCTIONS À LA RÈGLE ET AU COMPAS

REPRESENTER

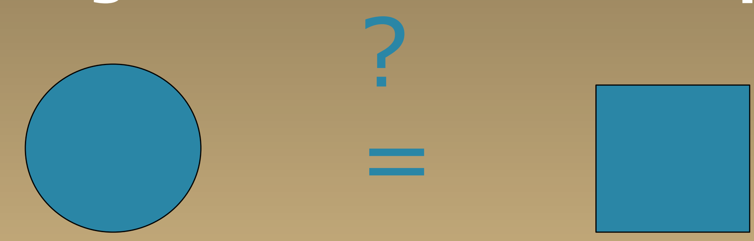
LES TROIS GRANDS PROBLÈMES DE L'ANTIQUITÉ GRECQUE

De l'antiquité grecque au XIXe siècle, ces problèmes ont passionné les mathématiciens

Codex Vindobonensis 2554 (vers 1250), Österreichische Nationalbibliothek.

Quadrature du cercle :

construire, à la règle et au compas, un carré de surface égale à celle d'un disque donné.



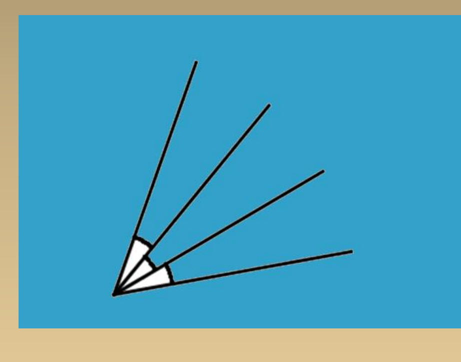
Le problème revient à calculer : π

Tant que les grecs chercheront une fraction égale au rapport de la circonférence au diamètre du cercle, la quadrature leur semblera possible. Leurs résultats n'étaient que de bonnes approximations de π.

C'est l'un des problèmes qui conduira à l'émergence de la notion de nombre irrationnel.

Trisection d'un angle :

diviser, à la règle et au compas, un angle donné en trois parties égales



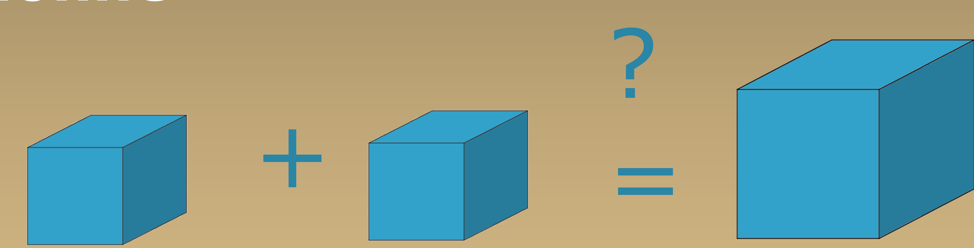
Pourquoi la règle et le compas seuls ?

Les géomètres grecs choisissent les objets les plus simples en vue de la formalisation de la géométrie : la droite et le cercle (*la figure la plus parfaite selon Proclus*).
Ils recherchent les constructions géométriques obtenues par intersections de droites et de cercles, sans utiliser la notion de mesure.
Dans *Les Éléments* (fondement des mathématiques), les deux premières assertions qu'Euclide posent dans le livre I sont la possibilité de tracer une ligne droite d'un point à un autre, et celle de tracer un cercle de centre et de rayon donnés.

La géométrie peut-elle sauver les habitants de Delos de la peste ?
Pour éradiquer l'épidémie de peste, l'oracle de Delphes demande de doubler l'autel consacré à Apollon, autel en forme de cube parfait.

Duplication du cube :

construire, à la règle et au compas, un cube de volume double d'un cube donné



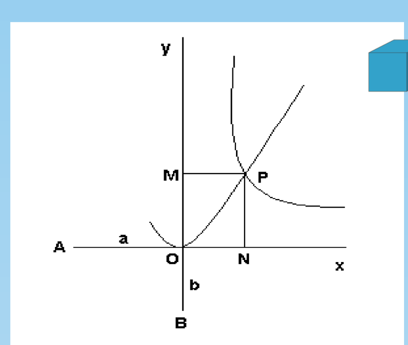
Le problème revient à construire : $\sqrt[3]{2}$

Ce problème conduira à la résolution des équations de degré 3 par J. Cardan début XVIe.

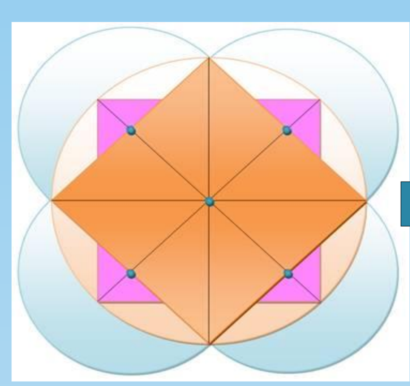
Et si on essayait avec d'autres outils ?

DES COURBES

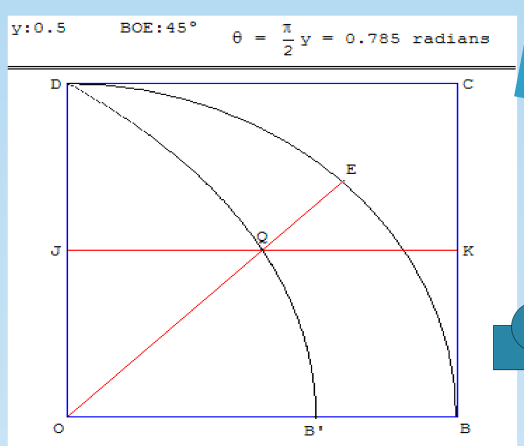
MENECHME
Les Coniques



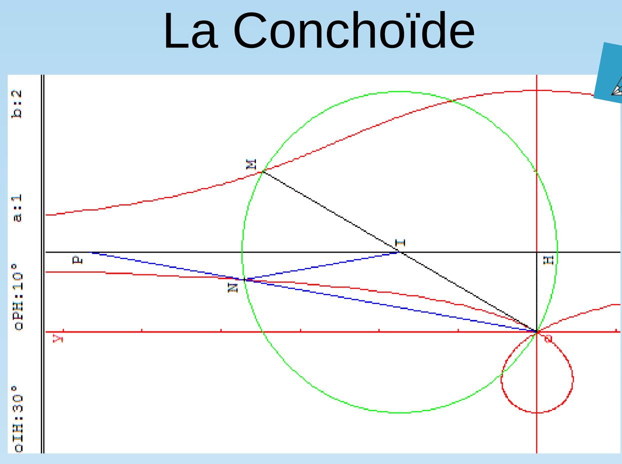
HIPPOCRATE DE CHIOS
Les lunules



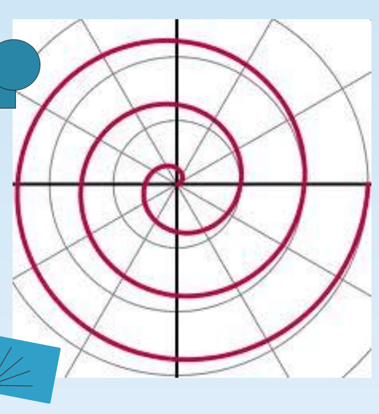
HIPPIAS d'ELIS
La Quadratrice dite de Dinostrate



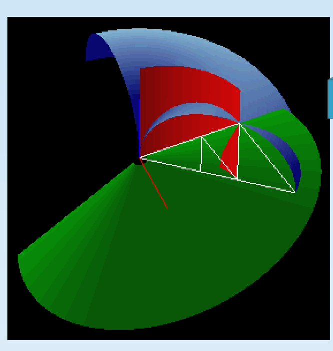
NICOMEDE
La Conchoïde



ARCHIMEDE et d'Eutocios d'Ascalon
La Spirale

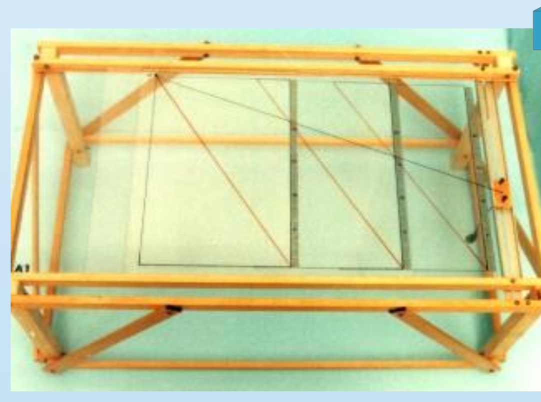


ARCHYTAS de TARENTE
Une solution en 3D

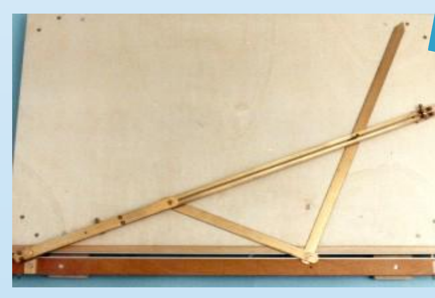


DES INSTRUMENTS

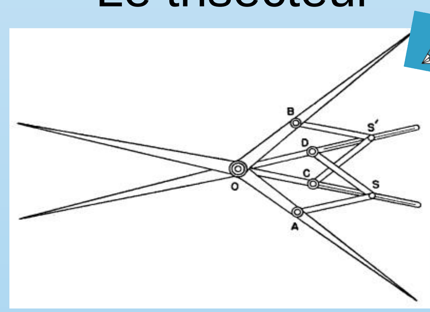
ERATHOSTENE
Le mésolabe



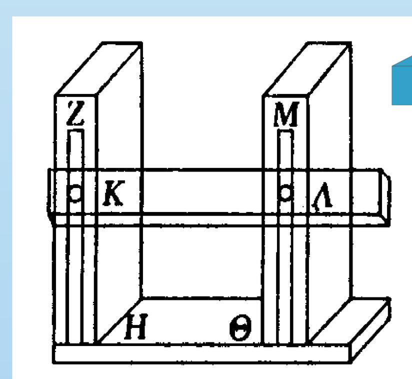
ARCHIMEDE
La règle avec deux graduations



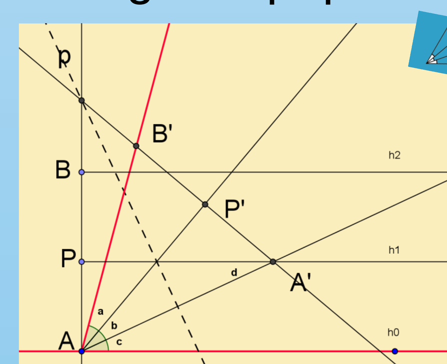
LAISANT
Le trisecteur

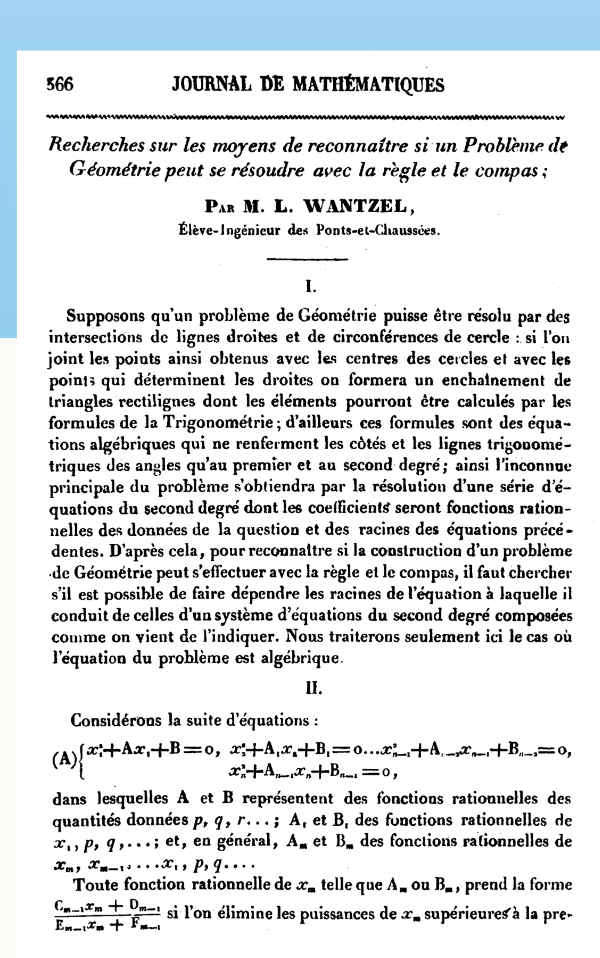


La machine de **PLATON**



ABE, 1980
Pliage de papier





366 JOURNAL DE MATHÉMATIQUES

Recherches sur les moyens de reconnaître si un Problème de Géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas ;

PAR M. L. WANTZEL,
Élève-Ingénieur des Ponts-et-Chaussées.

I.

Supposons qu'un problème de Géométrie puisse être résolu par des intersections de lignes droites et de circonférences de cercle : si l'on joint les points ainsi obtenus avec les centres des cercles et avec les points qui déterminent les droites on formera un enchaînement de triangles rectilignes dont les éléments pourront être calculés par les formules de la Trigonométrie ; d'ailleurs ces formules sont des équations algébriques qui ne renferment les côtés et les lignes trigonométriques des angles qu'au premier et au second degré ; ainsi l'inconnue principale du problème s'obtiendra par la résolution d'une série d'équations du second degré dont les coefficients seront fonctions rationnelles des données de la question et des racines des équations précédentes. D'après cela, pour reconnaître si la construction d'un problème de Géométrie peut s'effectuer avec la règle et le compas, il faut chercher s'il est possible de faire dépendre les racines de l'équation à laquelle il conduit de celles d'un système d'équations du second degré composées comme on vient de l'indiquer. Nous traiterons seulement ici le cas où l'équation du problème est algébrique.

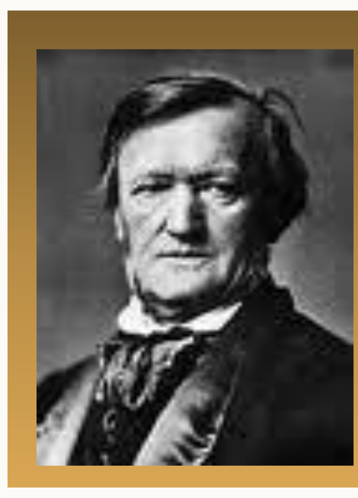
II.

Considérons la suite d'équations :

$$(A)\begin{cases} x_1^2+Ax_1+B=0,\quad x_2^2+A_1x_2+B_1=0\ldots x_{n-1}^2+A_{n-2}x_{n-1}+B_{n-2}=0, \\ x_n^2+A_{n-1}x_n+B_{n-1}=0, \end{cases}$$

dans lesquelles A et B représentent des fonctions rationnelles des quantités données $p, q, r\ldots$; A_1 et B_1 des fonctions rationnelles de $x_1, p, q,\ldots$; et, en général, A_m et B_m des fonctions rationnelles de $x_m, x_{m-1},\ldots x_1, p, q\ldots$

Toute fonction rationnelle de x_m telle que A_m ou B_m, prend la forme $\frac{C_{m-1}x_m+D_{m-1}}{E_{m-1}x_m+F_{m-1}}$ si l'on élimine les puissances de x_m supérieures à la pre-



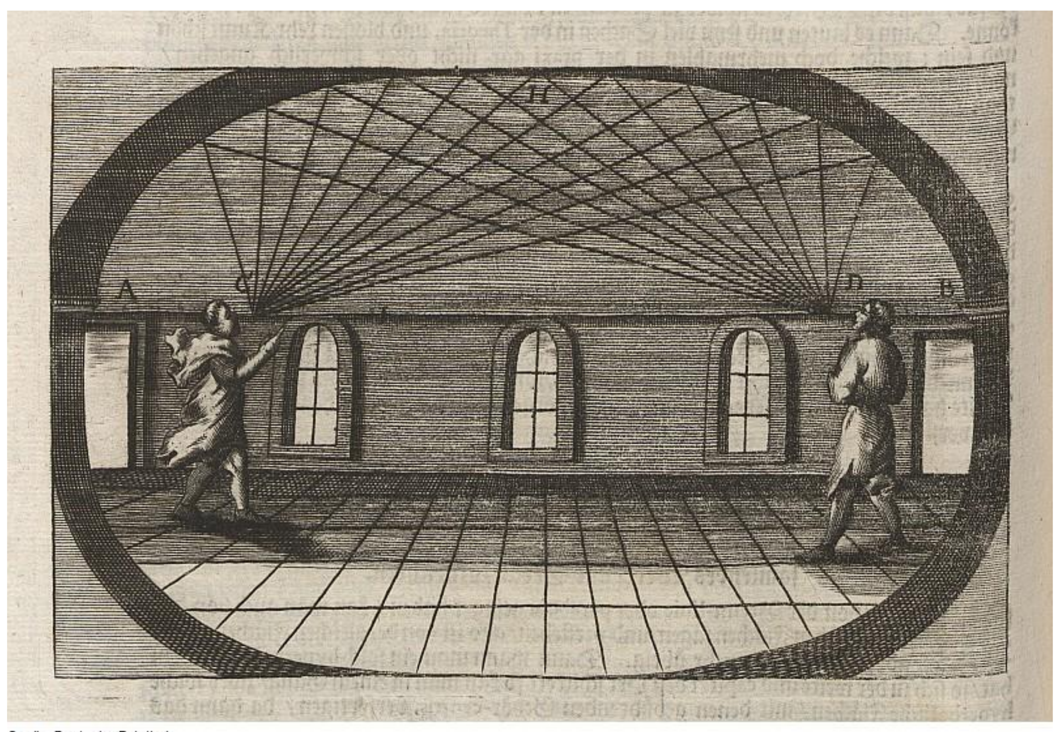
Pierre-Laurent WANTZEL démontre en 1837 que ces trois problèmes ne sont pas constructibles avec la règle et le compas seuls. De plus Ferdinand von LINDEMANN montra la transcendance de π en 1882.

IREM Aix-Marseille
http://www.irem.univ-mrs.fr/expo2013

REPRESENTER

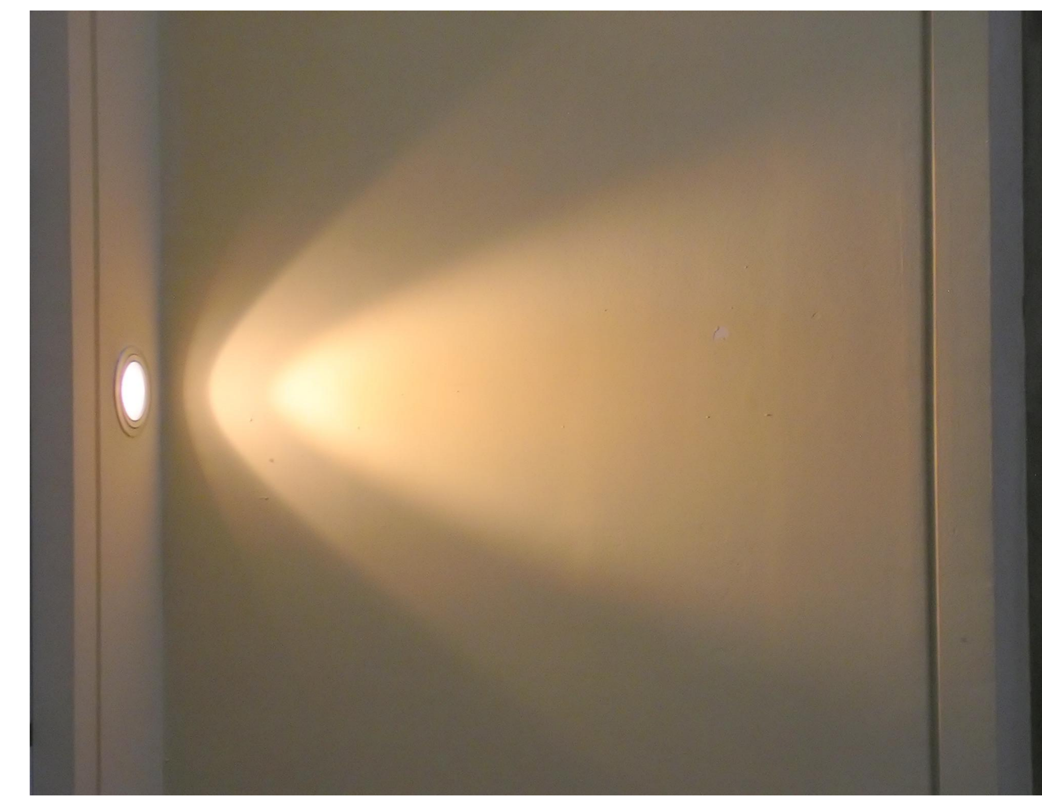
DE L'ANTIQUITE A NOS JOURS

L'AVENTURE DES CONIQUES



Quelle: Deutsche Fotothek

Chambre d'écho utilisant une propriété géométrique de l'ellipse



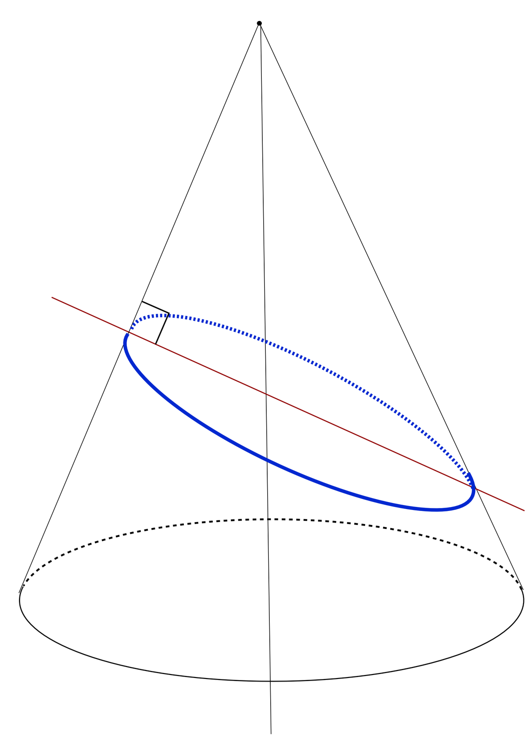
Miroir parabolique du four solaire de Mont-Louis

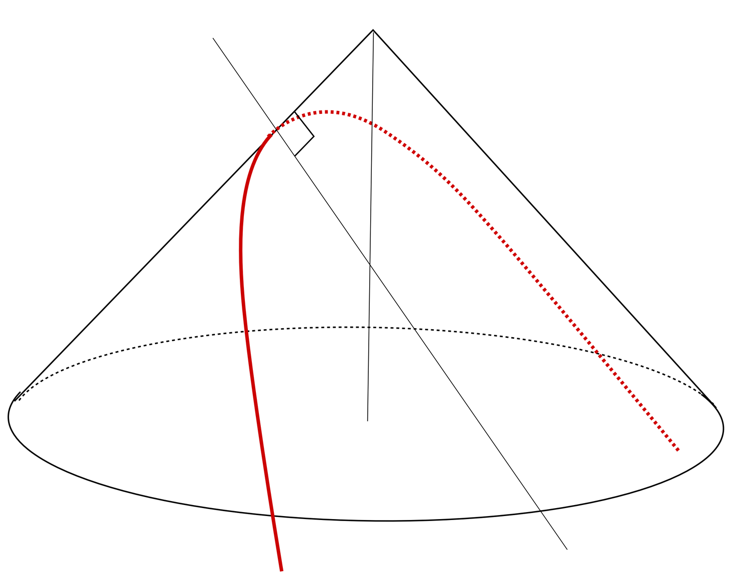
Trace hyperbolique sur un plan du cône de lumière d'une lampe

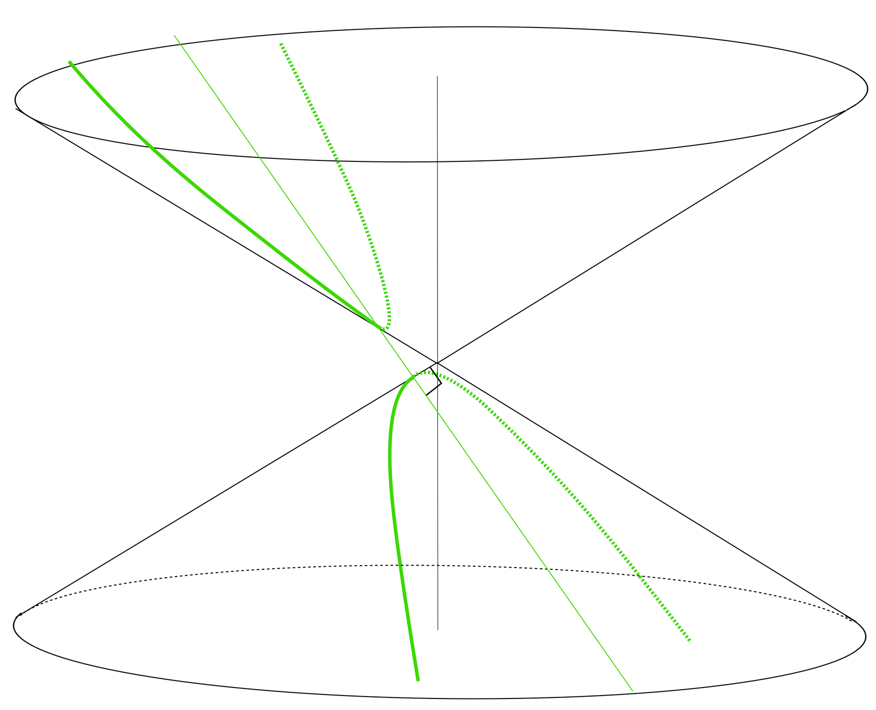
La première trace écrite sur les intersections de cônes et de plans se trouve dans un document de **Ménechme** (-380 ; -320). Il propose une résolution du problème de la duplication du cube, encore appelé problème de Délos. N'ayant pu en obtenir la résolution, à la règle et au compas, il propose d'utiliser l'intersection de deux coniques pour obtenir la résolution d'un problème plus général : l'insertion de deux moyennes géométriques entre deux grandeurs données.

Cône coupé par un plan perpendiculaire à une génératrice

Pour **Menechme** une conique est définie comme l'intersection d'un cône de révolution et d'un plan perpendiculaire à l'une de ses génératrices.
La **parabole** correspond au cas particulier d'un cône d'angle au sommet droit (le plan de section est parallèle à une génératrice).
Les **hyperboles** correspondent à des cônes d'angles obtus
Les **ellipses** correspondent à des cônes d'angles aigus.
Pour Ménechme les équations qui caractérisent les coniques étaient remplacées par des égalités d'aires.

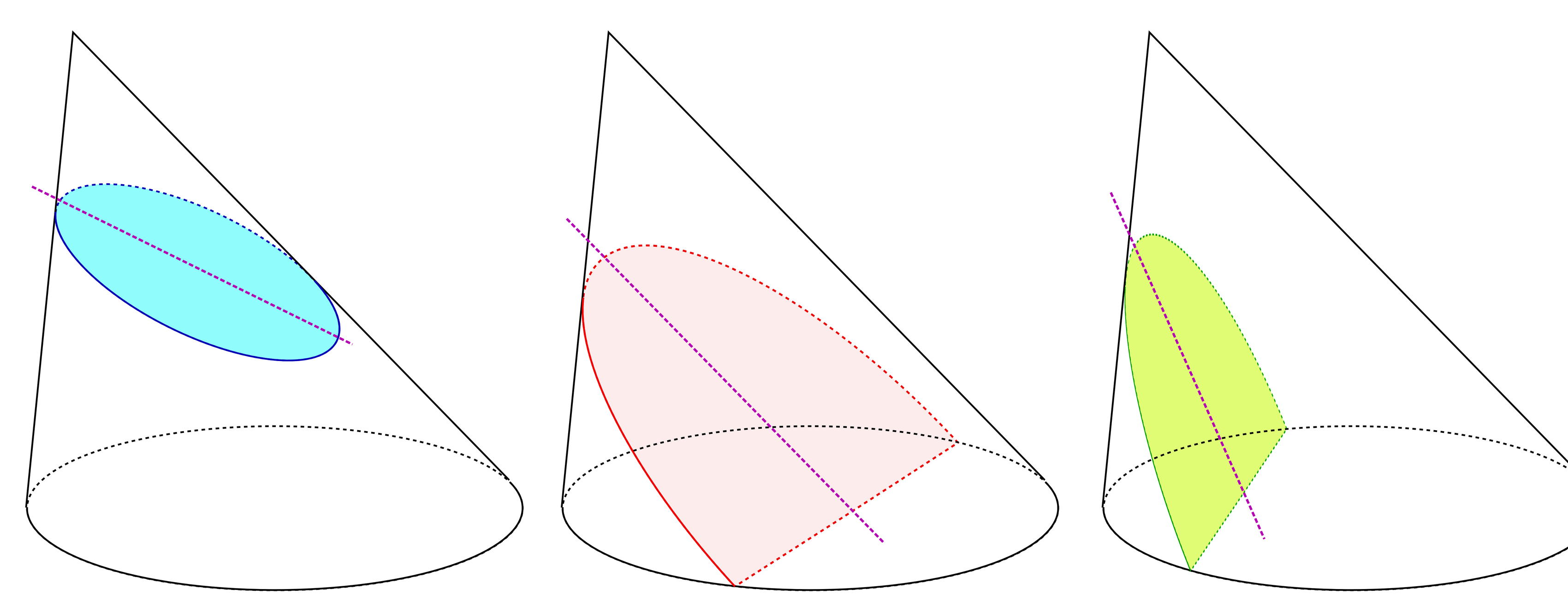






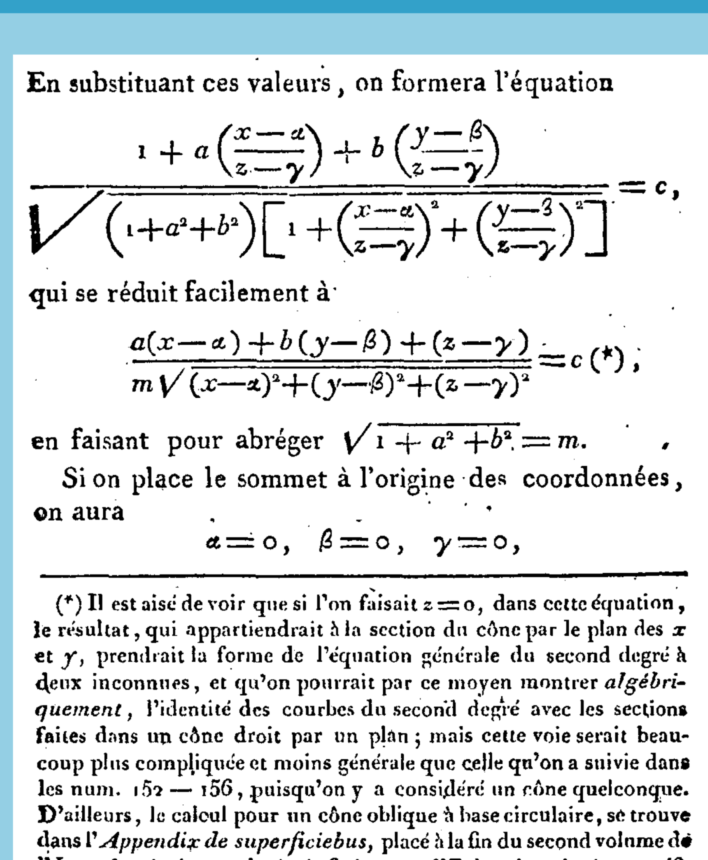
Cône quelconque coupé par un plan

Pour **Ménechme**, comme pour **Apollonius**, une parabole est une section d'un cône (droit) par un plan perpendiculaire à une génératrice du cône. La différence entre les deux conceptions provient de l'angle au sommet du cône ; celui-ci est droit pour Ménechme et quelconque pour Apollonius. Dans la conception de Ménechme, les paraboles correspondent à des cônes d'angle droit, les ellipses aux angles aigües, les hyperboles aux angles obtus. Pour Apollonius, le cône est fixe et c'est l'angle d'inclinaison du plan de section par rapport à l'axe du cône qui différentie les sections. La **parabole** est obtenue pour un angle égal au demi-angle du cône, l'**ellipse** pour un angle plus grand et l'**hyperbole** pour un angle plus petit.



ellipse | parabole | hyperbole

Equation d'un cône
Les coniques sont obtenues pour z=0



En substituant ces valeurs, on formera l'équation

$$\frac{1+a\left(\frac{x-\alpha}{z-\gamma}\right)+b\left(\frac{y-\beta}{z-\gamma}\right)}{\sqrt{(1+a^2+b^2)\left[1+\left(\frac{x-\alpha}{z-\gamma}\right)^2+\left(\frac{y-\beta}{z-\gamma}\right)^2\right]}}=c,$$

qui se réduit facilement à

$$\frac{a(x-\alpha)+b(y-\beta)+(z-\gamma)}{m\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2}}=c\ (*),$$

en faisant pour abréger $\sqrt{1+a^2+b^2}=m$.

Si on place le sommet à l'origine des coordonnées, on aura

$$\alpha=0,\quad \beta=0,\quad \gamma=0,$$

(*) Il est aisé de voir que si l'on faisait $z=0$, dans cette équation, le résultat, qui appartiendrait à la section du cône par le plan des x et y, prendrait la forme de l'équation générale du second degré à deux inconnues, et qu'on pourrait par ce moyen montrer *algébriquement*, l'identité des courbes du second degré avec les sections faites dans un cône droit par un plan ; mais cette voie serait beaucoup plus compliquée et moins générale que celle qu'on a suivie dans les num. 152 — 156, puisqu'on y a considéré un cône quelconque. D'ailleurs, le calcul pour un cône oblique à base circulaire, se trouve dans l'*Appendix de superficiebus*, placé à la fin du second volume de l'*Introductio in analysin infinitorum* d'Euler, imprimée en 1748.

Traité de trigonométrie rectiligne et sphérique
S.Lacroix, 1807.

Solution graphique de Menechme pour la duplication du cube

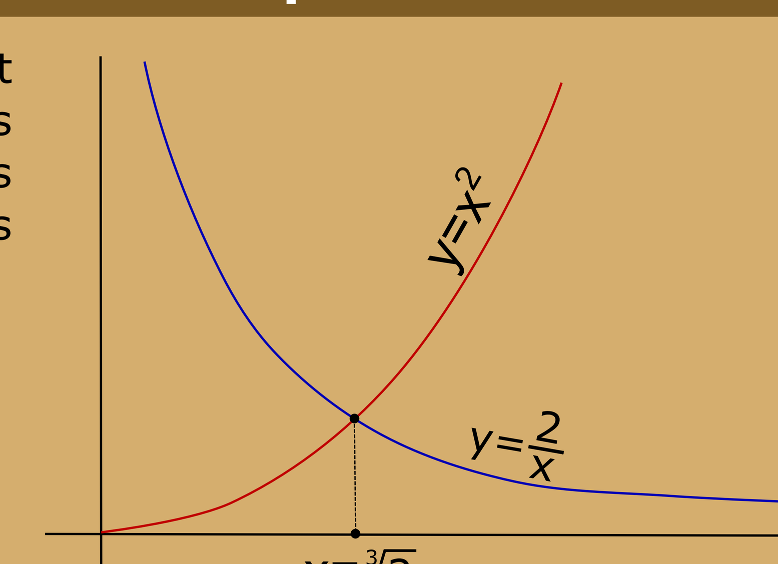
Deux grandeurs a et b de même nature étant données il s'agit de trouver deux autres grandeurs x et y, de même nature que les précédentes, telles que x et y soient deux moyennes proportionnelles entre a et b.
Ces conditions se traduisent en langage moderne par

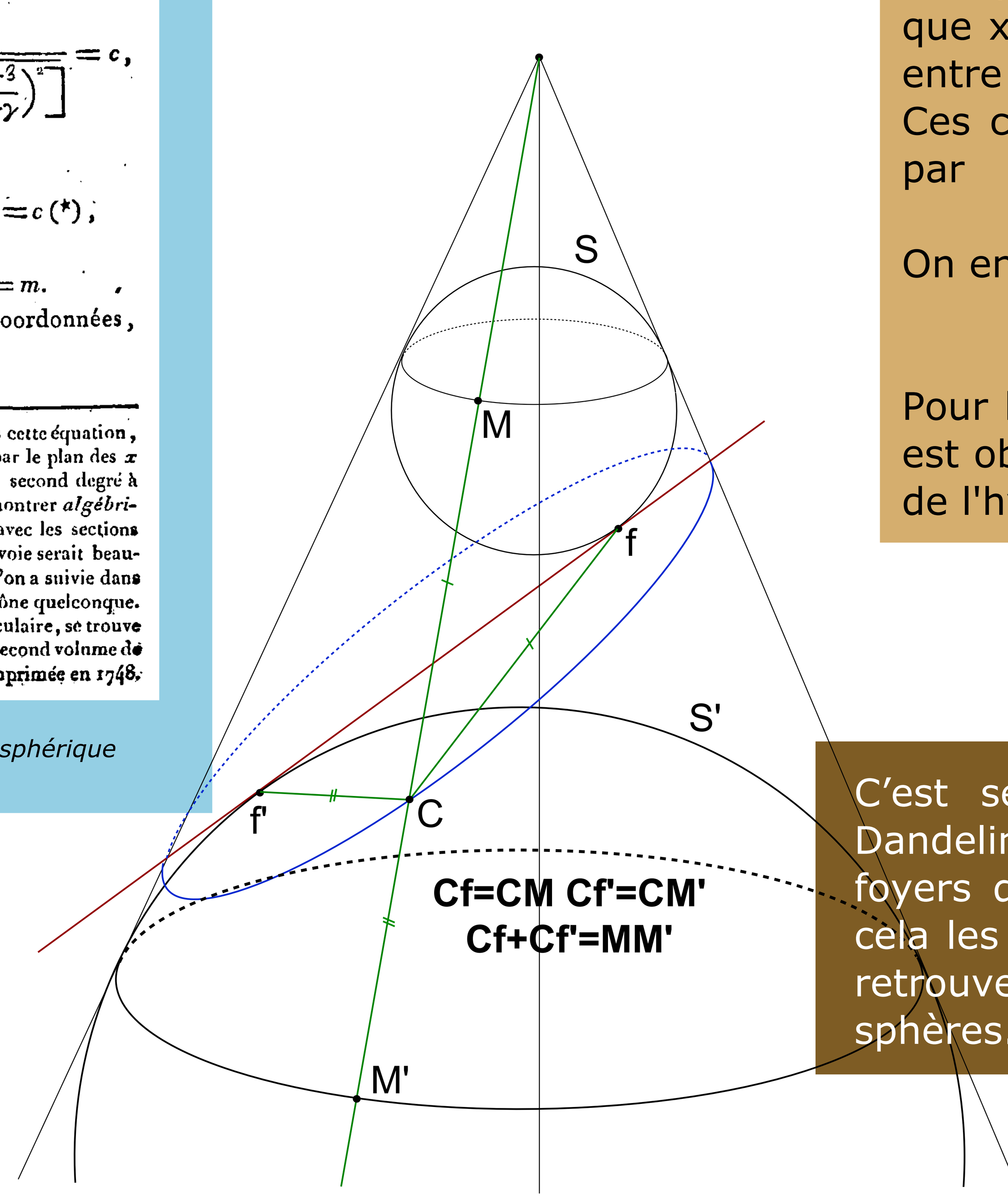
$$a/x=x/y=y/b$$

On en déduit que

$$x^3=a^2b \quad y=x^2/a \quad xy=ab$$

Pour le problème de Delos a=1 et b=2. La solution est obtenue par intersection de la parabole $y=x^2$ et de l'hyperbole équilatère $y=2/x$.





C'est seulement au XIXe siècle, que deux mathématiciens belges, Dandelin et Quetelet, montrèrent l'équivalence entre la définition par foyers d'une conique et les sections planes d'un cône. On utilise pour cela les sphères tangentes à la fois au cône et au plan. Pour l'ellipse on retrouve la définition dite "du jardinier" en tracant les tangentes aux sphères.

IREM Aix-Marseille
http://www.irem.univ-mrs.fr/expo2013

LA GEOMETRIE
DE LA PERSPECTIVE

A LA RENAISSANCE ITALIENNE, LES ARTISTES S'EMPARENT DES MATHEMATIQUES

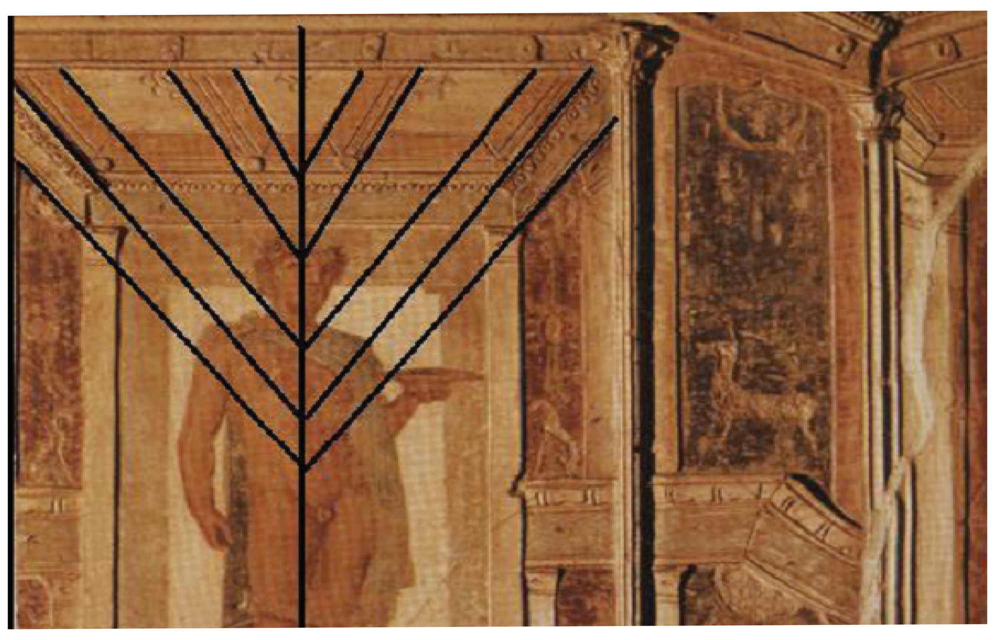
AVANT LA RENAISSANCE,LES ARTISTES ONT TENTE DE DONNER UNE IMPRESSION DE PROFONDEUR EN UTILISANT DIFFERENTES TECHNIQUES

Tombe de Neb-amon (- 1370)

En Égypte, tout est plat, sans aucun effet de perspective et le corps est « cassé » en parties vues sous des angles différents

Da Fabriano, Adoration des mages

Une perspective «au senti»: les objets plus éloignés sont plus petits. Les personnages du premier plan sont plus grands que les chevaux qui sont plus grands que le chateau.



Fresque de Pompéi

Dès l'antiquité, une représentation intuitive en «arètes de poisson» donne une impression de profondeur.

À LA RENAISSANCE, DES ARTISTES SONT A LA FOIS PEINTRES, SCULPTEURS, INGENIEURS, ARCHITECTES, ET VERITABLES HOMMES DE SCIENCE
De nombreux traités font apparaître la perspective comme relevant de règles purement géométriques..

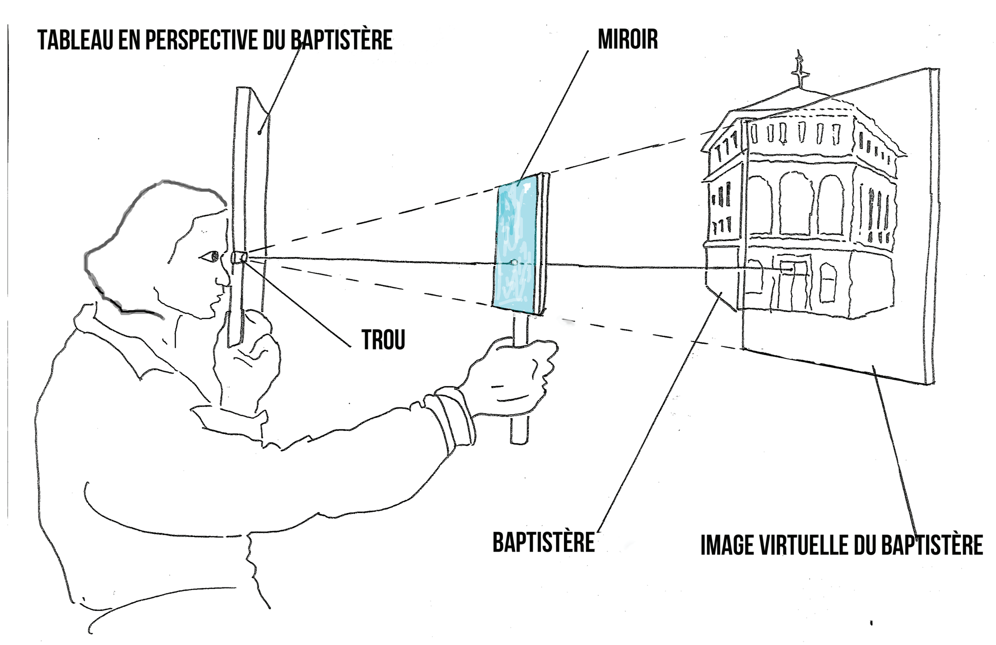
Le premier grand artiste à réfléchir à l'aspect mathématique de la perspective est l'architecte

FILIPPO BRUNELLESCHI (1377-1446)

En 1415, Filippo Brunelleschi réalise une expérience : la tavoletta
Il peint un baptistère florentin et met au point un dispositif montrant la coïncidence parfaite de l'édifice et du tableau conçu selon sa méthode:

LA COSTRUZIONE LEGITIMA

Le tableau est peint sur une face de la tavoletta qui est percée d'un œilleton.
Il tient la tavoletta face à lui du côté non peint et regarde l'édifice par l'œilleton.
Il intercale un miroir tendu à bout de bras entre la tavoletta et l'édifice.
En plaçant correctement le dispositif, il constate que l'image de la peinture reflétée par le miroir coïncide avec l'édifice.



LA TAVOLETTA

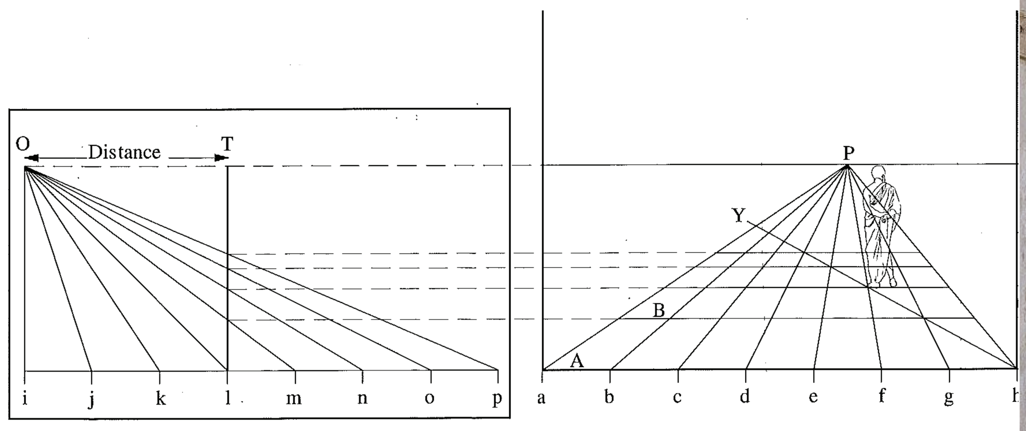
UN LIVRE QUI FAIT ÉCOLE : « DE PICTURA »

LEON BATTISTA ALBERTI (1435)

« Je souhaiterais qu'un peintre soit instruit, autant que possible, dans tous les arts libéraux, mais je désire surtout qu'il possède bien la géométrie. Je suis même de l'avis du très ancien et très fameux peintre Pamphile qui enseignait les premiers éléments de peinture [...]:
Nul ne peut devenir un bon peintre s'il ignore la géométrie. »

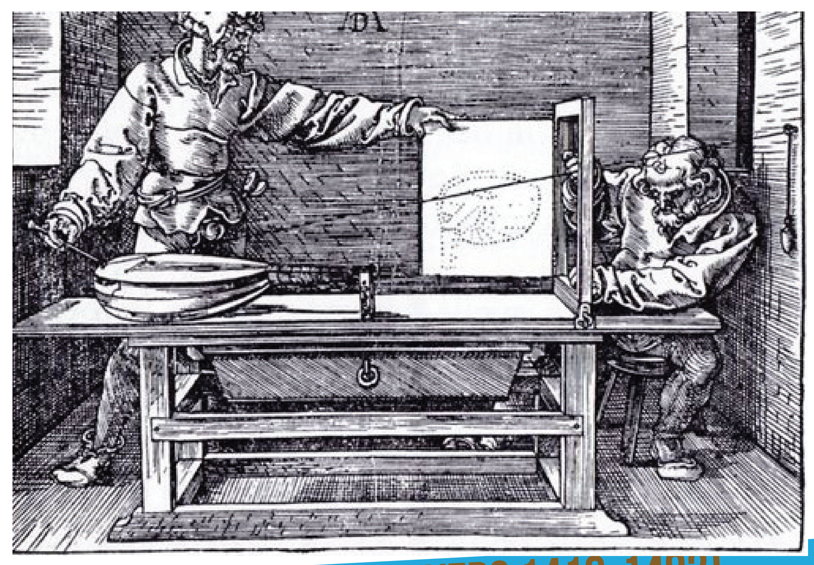
LA PERSPECTIVE À UN POINT DE FUITE D'ALBERTI: LA COSTRUZIONE ABBREVIATA

1. «*Je trace d'abord un quadrilatère et je détermine la taille que je veux donner aux hommes de ma peinture. Je divise la hauteur de cet homme en trois parties... A l'aide de cette mesure, je divise la ligne de base du tracé en autant de parties qu'elle peut en contenir (a,b,c...h)*
Je place ensuite un seul point en un lieu où il soit visible à l'intérieur du rectangle, pas plus haut que l'homme qu'on veut peindre (P)
Je trace ensuite des lignes droites de ce point à chacune des divisions de la ligne de base...»
2. Alberti utilise alors une figure auxilliaire, sur laquelle il divise la droite (ip) comme la droite (ah). Puis il pose le point O à la hauteur de P, et à la verticale de i. Il tire de ce point des droites Oi,Oj...Op. La distance OT est égale à la distance séparant l'oeil du spectateur du tableau. La verticale passant par T permet de reporter les horizontales sur le tableau



LA COSTRUZIONE ABBREVIATA

L'INTERSECTEUR:
Une technique inventée par Alberti pour tracer des contours qui préfigure la célèbre fenêtre de Dürer
Il dispose verticalement un voile de fils très fin, divisé en carrés au moyen de fils plus épais entre l'œil du peintre et l'objet à dessiner. Les contours de l'objet sont repérés sur le quadrillage du voile.



PIERO DELLA FRANCESCA (VERS 1416-1492)

Il transforme les solutions de d'Alberti en techniques utilisables par les artistes dans « De prospectiva pingendi » paru en 1435.

La cité idéale
souvent attribuée à Piero Della Francesca

LEONARDO DA VINCI (1452-1519) UTILISE LA MÉTHODE D'ALBERTI

La dernière restauration de « La cène» a mis en évidence l'emplacement du clou qui a permis à l'artiste de construire sa perspective (juste au dessus de la tête du christ)

La formalisation mathématique des règles de la perspective centrale a permis le développement de théories géométriques ultérieures telles que la géométrie projective, les géométries non euclidiennes...

Irem d'Aix-Marseille
http://www.irem.univ-mrs.fr/expo2013

PAVAGES AVEC DES ENVELOPPES

REPRESENTER

Qu'est-ce qu'un pavé ?

Il s'agit de fabriquer des motifs qui s'emboîtent parfaitement comme un puzzle pour remplir le plan. Et à l'ère de la découpe numérique, ce motif n'est pas obligatoirement un polygone...
Un résultat historique: Avec des polygones réguliers, il n'y a que 3 pavages possibles: par des carrés, des hexagones et des triangles
Il y a de multiples généralisations : pavages périodiques, a-périodiques, quasipériodique, pavages de l'espace...

Fabriquer sa figure pavante : la methode de l'enveloppe

Cette méthode, découverte depuis peu au regard de l'histoire, montre que dans un domaine aussi connu (et utile) que celui des pavages, il reste encore beaucoup à découvrir...et à s'émerveiller

La méthode de l'enveloppe en 4 étapes

1

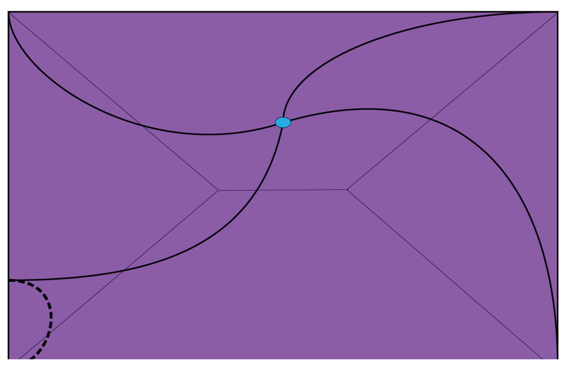
Choisir deux morceaux de papier superposables ayant une forme spécifique: triangle équilatéral, carré ou rectangulaire, triangle rectangle isocèle ou demi-carré, demi-triangle équilatéral.

2

Scotcher ces deux morceaux pour former une enveloppe fermée.

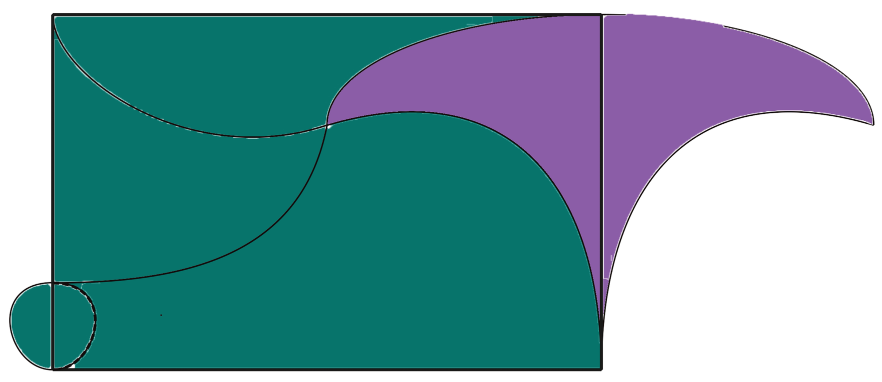
3

Choisir un (ou deux) point(s) quelconque sur l'une des faces et tracer des courbes le reliant à chacun des angles de l'enveloppe en passant devant ou derrière l'enveloppe.
Attention: les lignes ne doivent pas se couper.
Découper ensuite selon les courbes tracées sur une seule épaisseur de papier.

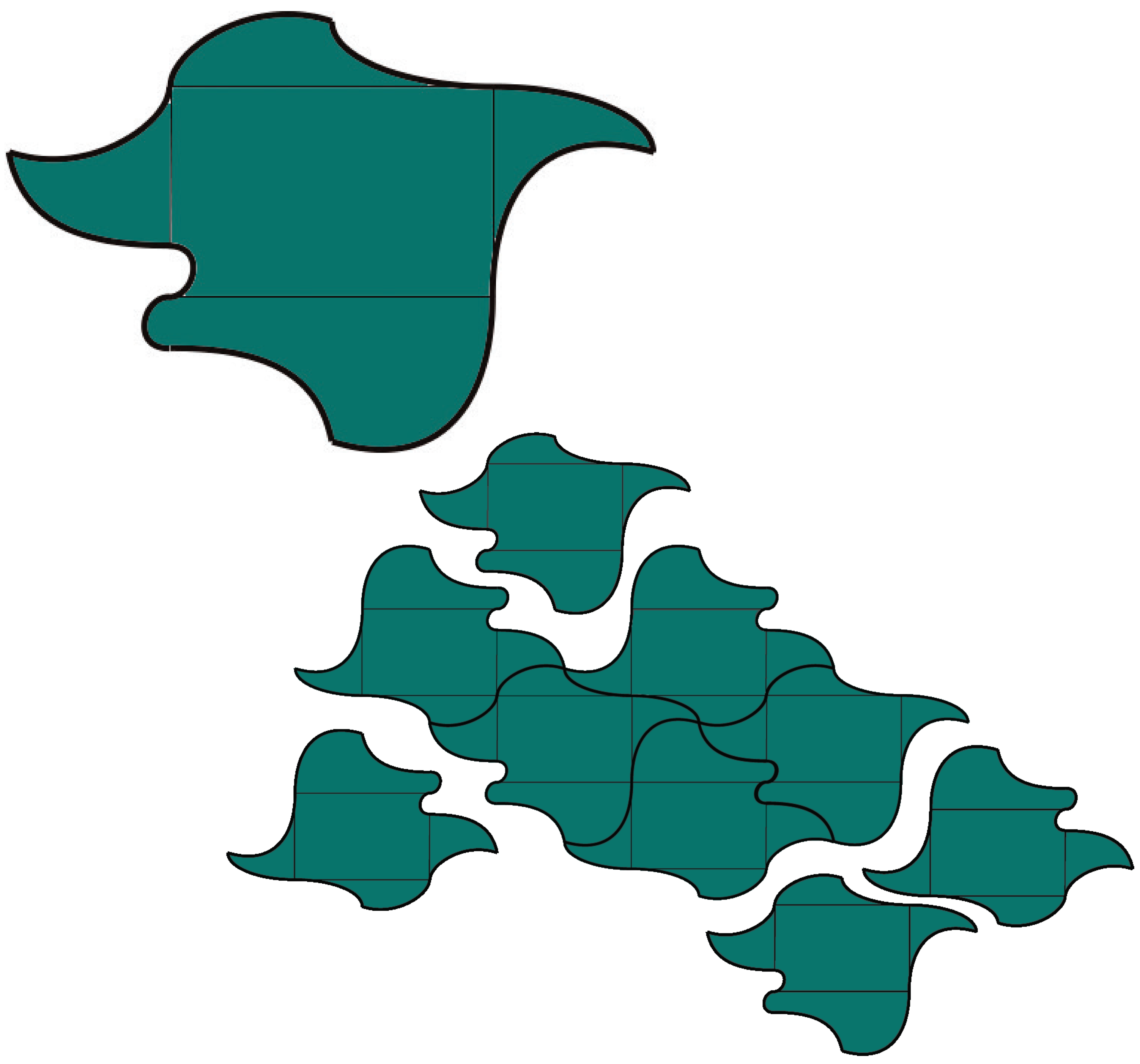


4

En dépliant...

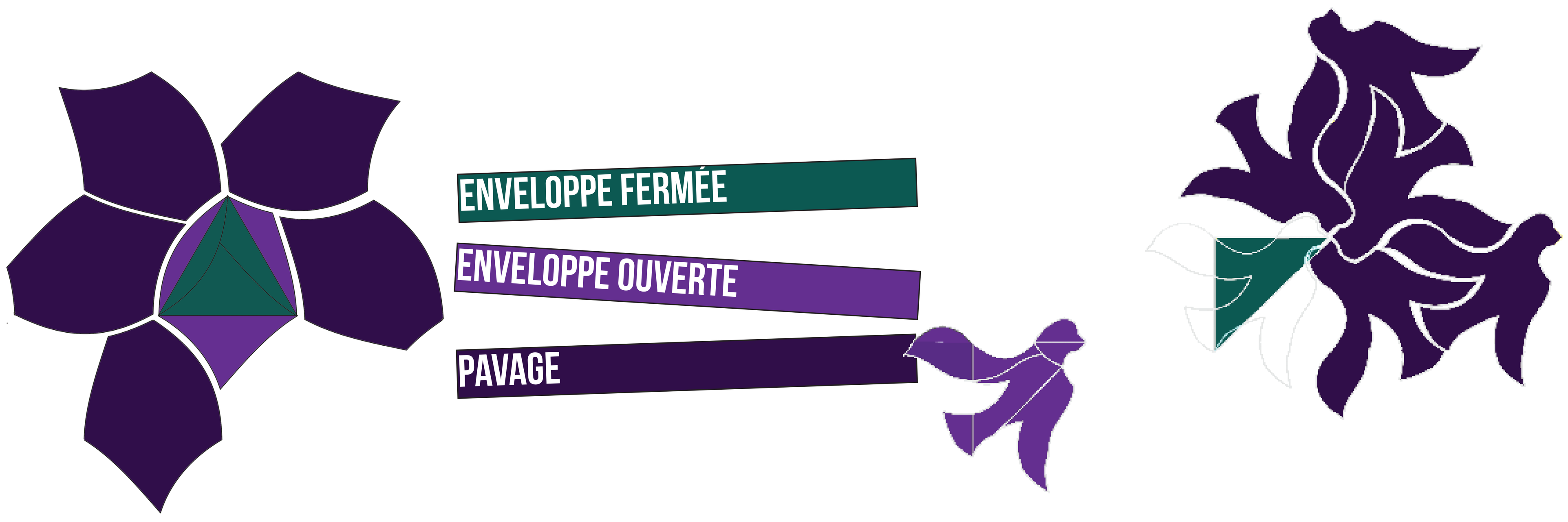


on obtient un pavé, puis un pavage



Et si on imaginait...

Une enveloppe triangulaire, quel triangle choisir?



Trouver toutes les formes possibles d'enveloppes?

On remarque que les rotations qui laissent le pavage inchangé ont pour centres les sommets de l'enveloppe.
On voit aussi qu'au cours du pavage, la rotation du motif autour d'un sommet A de l'enveloppe sera d'un angle égal au double de l'angle au sommet A de l'enveloppe. Si on appelle a l'angle à ce sommet de l'enveloppe, l'angle de la rotation sera donc 2a.
Maintenant, il faut qu'après un certain nombre de rotations d'angle 2a, on revienne exactement au point de départ, donc que l'on ait effectué un tour complet de 360°.
Ainsi (2a) doit diviser 360° donc être de la forme 360 /n avec n entier, ce qui signifie que a est de la forme 180/n.
Si l'enveloppe est triangulaire, alors il faudra que la somme des 3 angles soit de 180°.
Si l'on cherche une enveloppe quadrilatère, alors il faudra que la somme des 4 angles aux quatre sommets de l'enveloppe soit de 360°.
Si l'on cherchait une enveloppe de forme pentagonale il faudrait que la somme des 5 angles soit de 540°, etc...

Toutes les enveloppes triangulaires?

Ainsi pour un triangle,
on est amené à chercher 3 entiers n, m et p vérifiant la relation:

$$180/n + 180/m + 180/p = 180$$

soit $1/n + 1/m + 1/p = 1$
Il y a peu de solutions
avec la solution:
$1/3 + 1/3 + 1/3 = 1$, les trois angles du triangle sont de 180/3=60 degrés, donc le triangle est équilatéral
la solution $1/4 + 1/4 + 1/2 = 1$ correspond aux angles 45,45 et 90 degrés, donc un triangle rectangle isocèle
et enfin la solution $1/2 + 1/6 + 1/3 = 1$ correspond aux angles 90, 30 et 60 degrés, triangle demi-équilatéral

il y a donc seulement trois triangles solutions!

Irem d'Aix-Marseille
http://www.irem.univ-mrs.fr/expo2013