De Sumer à Pythagore : IM55357

Jean-Louis Maltret
IREM Aix-Marseille

30 mars 2010

1 Introduction

Les mathématiques babyloniennes ont fait l'objet de très nombreux travaux [13] [12], portant à la fois sur les aspects numériques, algébriques ou géométriques. Des triplets pythagoriciens à la numération sexagésimale, en passant par la division de l'angle droit en 90 parties, les apports babyloniens sont considérables et encore présents de nos jours. Ces connaissances mathématiques nous sont parvenues principalement par des tablettes d'argile trouvées lors de fouilles effectuées sur le territoire de l'Irak actuel.

L'objet de ce texte est d'expliciter le contenu d'une tablette, peu connue en-dehors des spécialistes assyriologues, étudiée dans quelques textes anglophones [3] [4] [5] et rarement référencée [6] [7] [14] [15], apparemment une seule fois en français [16]. Le texte mathématique qui y est développé est d'une grande importance, à la fois intrinsèquement, et surtout quand on le rapporte à sa date, 1600 avant J-C, soit plus de mille ans avant Pythagore et Euclide.

Mes remerciements à Christine Proust, School of Historical Studies, Institute for Advanced Study, pour les références originales et leur localisation.

Figures d'après les articles originaux de la revue Sumer

Cette tablette a été trouvée lors des fouilles de Shaduppum (site sumérien dans la banlieue Sud de Bagdad, aujourd'hui Tell Harmal, cf. carte) en 1945. Elle a été datée de la Première Dynastie de Babylone et en fait l'un des plus anciens textes de problèmes mathématiques babyloniens. Elle a été conservée au Musée Iraquien de Bagdad et référencée IM55357. Elle y était encore en 2001, origine de la photo. Mais, malheureusement, il n'est pas possible à l'heure actuelle de savoir si elle a disparu dans le pillage du Musée en avril 2003 ou si elle fait partie des 6000 pièces qui ont pu être retrouvées. On recherche encore les objets disparus, cf. par exemple `http://oi.uchicago.edu/OI/IRAQ/iraq.html` et plusieurs initiatives présentent des collections dont on possédait des photos, `http://www.virtualmuseumiraq.cnr.it/` ou `http://www.ezida.com`. Présentes en très grand nombre (un miller de tablettes ont été trouvées lors des fouilles de Nippur), les tablettes babyloniennes ont connu des sorts médiatiques divers. L'une des plus connues, Plimpton322, qui liste des triplets pythagoriciens, a donné lieu à beaucoup d'interprétations pour une erreur qui y a été trouvée [9] et qui peut donner lieu à développements pédagogiques [1]. Classées par thèmes, il s'agissait de textes de lois, de registres de comptes, de prescriptions médicales, d'observations astronomiques ou de textes mathématiques.

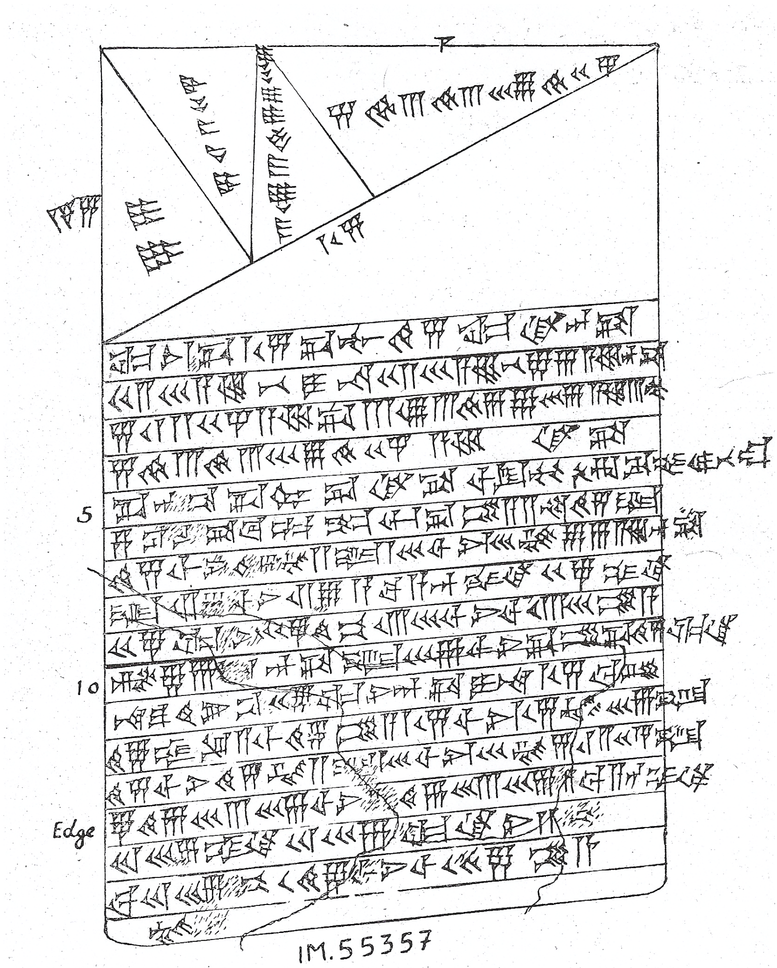
Figure 1 – La tablette plimpton322 (copie d'original)

2 La tablette IM55357

Figure 2 – La tablette IM55357 et les sites de fouilles en Irak

Il s'agit d'une tablette cataloguée "texte de problème" par les assyriologues. En langage moderne c'est un exercice avec correction.

En haut on a une figure d'un triangle rectangle, orienté avec l'angle droit dans le coin gauche. La hauteur issue de l'angle droit est tracée ainsi que 2 hauteurs dans les triangles rectangles formés. On a des indications numériques sur les segments et dans les triangles.



Le texte, en cunéiforme sumérien, peut être explicité comme suit :
- des données numériques
  lignes 1 à 4
- des questions
  ligne 5
- les réponses expliquées avec calculs explicites
  lignes 6 à 16

Voici, en notation sexagésimale, les indications numériques. Dans la suite, lorsque c'est nécessaire, on notera entre [ ] les nombres sexagésimaux, la virgule étant le séparateur entre les digits (notés en décimal pour faciliter la lecture) et le point-virgule étant le séparateur entre la partie entière et la partie fractionnaire. Pour éviter les confusions le séparateur de la partie fractionnaire des nombres décimaux sera noté avec un point.

Sur la tablette les nombres sont notés sans séparateur, comme c'était le cas à l'époque.

On reconnait sur les trois côtés de l'angle droit du triangle principal le triplet [45], [1,], [1,15], soit en décimal 45, 60, 75 (triplet pythagoricien proportionnel à 3, 4, 5).

Les données – AC=[1,]=60, BC=[1,15]=75, AB=[45]=45
- L'aire du triangle principal ABC=[22,30]=1350,
- Les aires des triangles formés avec les hauteurs tracées
  ABD=[8,6]=486 EAD=[5,11 ;2,24]=311.04,
  FDE=[3,19 ;3,59,9,36]=199.0664333 FEC=[5,53 ;53,39,50,24]=653.8944

Les questions littéralement *quelle est la longueur du haut, la longueur du segment, la longueur du bas, la perpendiculaire ?* compte-tenu du texte les inconnues sont en fait BD, AD, AE, ED.

Le problème est résolu en utilisant de façon répétée la similitude des triangles ABC, DAB, EAD, par égalités de rapports de longueurs.

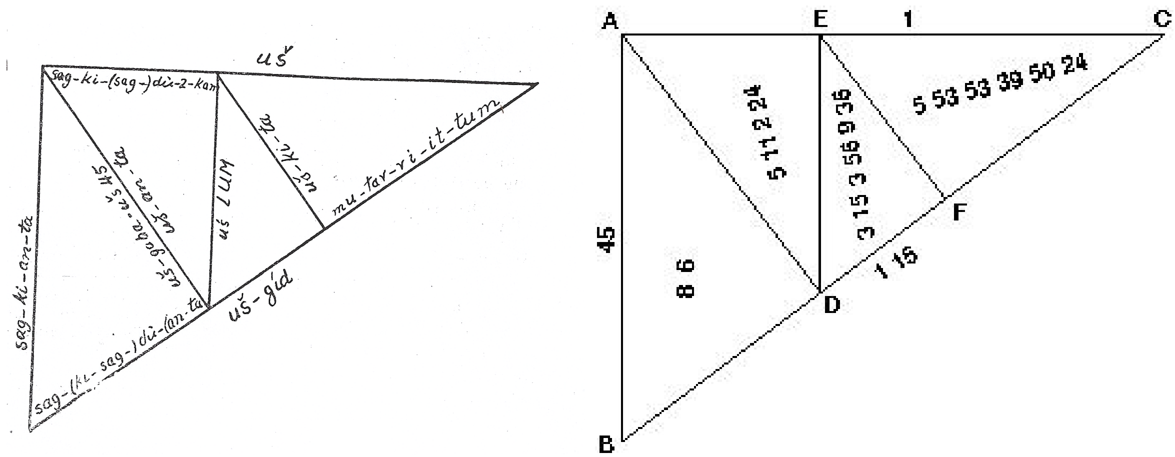


FIGURE 3 – Translittération du sumérien et transcription numérique

La solution

Calcul de BD : le rapport AB/AC est calculé en prenant l'inverse de [1,] et en le multipliant par [45] [1] on a alors de la relation de similitude et l'aire du triangle DBA

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{AD} \quad DBA = \frac{BD \times AD}{2}$$

BD est donné par la formule

$$BD = \sqrt{\frac{AB}{AC} \times 2 \times \text{aire}(DBA)}$$

ce qui donne $BD^2 = [45] \times [;1] \times 2 \times [8,6] = [12,9] = 729$ et $BD = \sqrt{[12,9]} = 27$

Calcul de AD : BD est divisé par 2, ce qui donne [13 ;30], dont l'inverse est multiplié par l'aire [8,6], ce qui donne $AD = 36$

Calcul de DC : par soustraction $DC = BC - BD$, soit [1,15]-[27]=48

Calcul de AE : suivant la même procédure que pour BD

$$\frac{AE}{ED} = \frac{AD}{DC} \quad EAD = \frac{AE \times DE}{2}$$

AD/DC est calculé en multipliant 36 par l'inverse de 48

$$AD^2 = [36] \times \frac{1}{48} \times 2 \times [5,11;2,24] = [7,46;33,36] = 466.56$$

d'où $AE = [21;36] = 21.6$

Calcul de ED : il n'est pas terminé sur la tablette mais suit la même technique AE est divisé par 2, ce qui donne [10 ;48], dont l'inverse est multiplié par l'aire $EAD = [5,11;2,24]$, ce qui donne $ED = [28;48] = 28.8$

1. Les babyloniens réalisaient les divisions en multipliant par l'inverse, appelé réciproque, et ils utilisaient des tables d'inverses cf. [2]

3 Commentaires

Plusieurs questions se posent, pour lesquelles on peut tenter des éléments de réponse :

1. Contrairement à d'autres textes babyloniens, clairement rapportés à des problèmes pratiques (arpentage, calculs de terrassements,...) il semble là qu'il ne s'agit que d'un exercice académique. Cela le rend d'autant plus intéressant, en considérant la démarche pédagogique consistant à faire pratiquer les scribes pour qu'ils soient plus performants dans leurs calculs ultérieurs.
2. On n'a pas d'indication sur la construction de l'exercice mais il est sûr que le concepteur devait largement maîtriser toutes les connaissances de l'époque pour parvenir à un texte qui, même aujourd'hui en écriture décimale, ne nous semblerait pas tout à fait évident.
3. Les calculs préalables pour construire l'énoncé ont été probablement faits suivant la technique, encore utilisée de nos jours par beaucoup d'enseignants, consistant à partir des résultats pour fabriquer les données du problème. La complexité des aires des triangles EAD et FEC incite à le penser. Les babyloniens savaient que la hauteur d'un triangle rectangle de côtés a,b,c le partage en deux triangles semblables dans les rapports a/c et b/c [6]. Il suffisait alors à l'auteur de faire les calculs correspondants dans ABC, DBA, DAC, EAD, FDE et FEC pour avoir les longueurs de tous les segments et en déduire les aires, probablement grâce à leur connaissance du fait que des triangles semblables dans le rapport k ont des aires dans le rapport k^2.
4. On peut assez raisonnablement inférer que l'exercice se prolongeait avec les calculs des autres longueurs, EF, DF de façon analogue.
5. Il semble que les babyloniens n'utilisaient pas le critère d'égalité des angles pour la similitude des triangles, mais uniquement les rapports des longueurs des côtés [10]
6. Le tracé de la hauteur issue de l'angle droit, formant deux triangles semblables au triangle initial, fournit l'une des démonstrations algébriques du théorème de Pythagore :
   Si on note a_1 et a_2 les deux segments découpés par la hauteur sur l'hypoténuse, la similitude des triangles donne les proportionnalités entre les longueurs :
   $$\frac{a_1}{b} = \frac{b}{a} \qquad b^2 = a_1 a$$
   $$\frac{a_2}{c} = \frac{c}{a} \qquad c^2 = a_2 a$$
   d'où par addition :
   $$b^2 + c^2 = (a_1 + a_2)a = a^2$$
   Mais il ne semble pas que les babyloniens aient fait ce calcul-là, bien qu'il n'utilise lui aussi que la similitude.

Références

[1] *http://www.ac-rennes.fr/pedagogie/maths/histoire/histbabyl.htm*

[2] *http://www.dma.ens.fr/culturemath/materiaux/sexa/scribes-a-besancon/Compter.pdf*

[3] Baqir, Taha *An important mathematical problem text from Tell Harmal* Sumer 6 (1950) p.39-54

[4] Baqir, Taha *Another important mathematical text from Tell Harmal* Sumer 6 (1950) p.130-148

[5] Drenckhahn, F. *A geometrical contribution to the study of the mathematical problem-text from Tell Harmal (IM. 55357) in the Iraq Museum, Baghdad.* Sumer 7 (1951) p.22-27

[6] Friberg, Joran *Amazing traces of babylonian mathematics* World Science Publishing

[7] Friberg, Joran *A remarkable collection of babylonian mathematical texts* Springer

[8] Gaspar, Maria Terezinha Jesus *Aspectos do desenvolvimento do pensamento geométrico em algumas civilizacoes e povos e a formaçao de professores* Universidade Estadual Paulista, Rio Claro (2003) p.271-282

[9] Gillings, R.J. *Unexplained error in Babylonian cuneiform tablet, Plimpton 322.* Australian Journal of Science 16, (1953) p.54-56

[10] Høyrup, Jens *Lengths, Widths, Surfaces. A Portrait of Old Babylonian Algebra and its Kin. Studies and Sources in the History of Mathematics and Physical Sciences.* Berlin & Londres : Springer (2002) 231-4.

[11] Joseph, G.G. *The crest of the peacock* Princeton University Press, 2000

[12] Melville, Duncan J. *Bibliography of Mesopotamian Mathematics* http://it.stlawu.edu/˜dmelvill/mesomath/biblio/bigbib.html

[13] Proust, Christine *Brève chronologie de l'histoire des mathématiques en Mésopotamie* http://www.dma.ens.fr/culturemath/

[14] Roy, Rahul *Babylonian Pythagoras´ Theorem, the Early History of Zero and a Polemic on the Study of the History of Science* Resonance,8,1(2003) p.30-40

[15] Roy, Rahul *On Ancient Babylonian Algebra and Geometry* Resonance,8,4(2003) p.27-42

[16] Vidal, Jean *Dans la cité antique de Tell-Harmal, des mathématiques avant la lettre* Science et Vie, 713 (Février 1977) p.70-73