Institut de
Recherche sur
l'enseignement des
Mathématiques
Aix-Marseille

L'APPORT DU NUMERIQUE DANS L'APPRENTISSAGE DU RAISONNEMENT EN COLLEGE

Document produit avec le soutien
du Ministère de l'Education Nationale (DESCO)
et du Rectorat de l'Académie d'Aix-Marseille

Groupe Collège : Marseille, **Annie Blanc, Georges Blanc, Hélène Clément, Rolland Bernard Martini, Anne-Marie Russac**

SOMMAIRE

1. Introduction p. 1

2. Les difficultés de type combinatoire p. 7

3. Les difficultés liées à la structure discursive p. 11

4. Les difficultés de type conceptuel p. 17

5. Les difficultés liées aux effets de contexte p. 23

6. Conclusions sur ces difficultés p. 29

7. Quelques activités analysées p. 33

8. Annexe 1 p. 47

9. Annexe 2 p. 53

10. Bibliographie p. 61

I - INTRODUCTION

Formation au raisonnement et situation spécifique du collège

Le professeur de mathématiques qui enseigne en 1e ou Terminale S, et le professeur de mathématiques qui exerce en collège exercent-ils le même métier ? Si le métier est le même les fonctions du moins diffèrent.

Dans les sections scientifiques du lycée, c'est essentiellement au futur scientifique que s'adresse l'enseignement des mathématiques. Le rôle du professeur consiste à préparer le bagage de l'ingénieur, du professeur de physique ou de mathématiques, du chercheur, ... Le citoyen comme tel n'aura pas grand-chose à faire par exemple des nombres complexes ou de l'intégration.

La tâche en collège est différente. Elle peut paraître plus incertaine. On comprend que le professeur de mathématiques, spécialiste d'une discipline, chargé d'enfants et d'adolescents dont les goûts et le profil intellectuel se dessinent et qui s'approchent du temps des choix d'orientation, puisse se sentir écartelé entre la formation du futur polytechnicien, du futur agent immobilier, du futur notaire, tous se trouvant potentiellement dans sa classe. Certes, quelquefois, pour certains contenus mathématiques notamment (calcul littéral, ...), la perspective de classes scientifiques à venir pointe nécessairement son nez. Mais c'est la formation générale à l'esprit scientifique, formation intellectuelle du futur citoyen, qui demeure l'objectif d'un collège pour tous et les mathématiques du collège sont des mathématiques pour tous. Entre *formation de l'esprit scientifique* et *formation du futur scientifique*, le professeur de mathématiques en collège doit résolument et en permanence situer son enseignement dans le premier des deux cas.

Dans le domaine du raisonnement notamment, on pourrait être tenté de considérer qu'il y a des aspects du raisonnement qui seront utiles à tous et d'autres qui ne s'adresseraient qu'au futur scientifique. Enchaîner des inférences par exemple appartiendrait à la formation du futur citoyen, maîtriser la gestion de locutions quantifiantes (quantificateurs ?) serait propre à celle du futur scientifique. Il conviendrait alors en collège de privilégier les premières et de réserver les secondes pour plus tard. Mais est-il vraiment légitime d'opposer, pour ce qui est du raisonnement, une formation générale à l'esprit scientifique et la formation du futur scientifique ?

Un des propos des pages qui suivent consiste dans l'idée que *toutes* les compétences qui se jouent dans le raisonnement sont utiles à *tous*, qu'il n'y a aucun de ses aspects qui puisse être négligé sous le prétexte qu'il ne s'adresserait qu'au futur élève des sections scientifiques. Chacun des chapitres présentera d'ailleurs un lien entre considération théorique sur les difficultés du raisonnement et pratique quotidienne du raisonnement.

Raisonnement et formation générale

Mais sous quelles formes et à quelles fins l'adulte et le citoyen pratiquent-ils effectivement le raisonnement dans leur vie quotidienne ?

Le terme de raisonnement évoque d'ordinaire l'exigence de rigueur formelle ainsi que les séries déductives et il voisine alors avec celui de démonstration. Ainsi considéré, le raisonnement répond d'abord à un besoin spéculatif de justification de propositions vraies.
Mais le raisonnement quotidien s'exerce rarement dans un tel cadre démonstratif formel et l'enchaînement des inférences y est minime.
On raisonne en effet quand on cherche à convaincre autrui par des arguments rationnels (non sophistiques, non rhétoriques), quand on fait appel à la réflexion partagée plutôt qu'aux arguments d'autorité, aux pseudos évidences ou aux pressions diverses pour faire triompher une opinion.
On raisonne aussi au seuil de l'action, dans la prise de décision volontaire, individuelle ou collective.
" Ce n'est pas seulement dans le domaine de la pure spéculation que le raisonnement intervient pour nous tirer d'embarras, c'est aussi, et c'est même d'abord, pour résoudre les problèmes que nous posent les affaires de la vie. On raisonne quand on délibère pour prendre une décision, soit dans le for intérieur d'une conscience, soit dans un conseil ou une assemblée. " R. Blanché
Ce n'est donc pas tellement la démonstration, le raisonnement déductif stricto sensu, mais c'est plus généralement la communication rationnelle, l'argumentation raisonnablement fondée, la communication raisonnable, qui prendront place au cœur de la vie de l'adulte réfléchi et du citoyen.

Or le terme même de "raisonnement" reste souvent associé à la pratique du raisonnement formel et spéculatif. De ce point de vue, l'expression "formation à l'argumentation rationnelle" convient peut-être mieux à l'esprit d'une formation en collège que celle, plus stricte, de "formation au raisonnement".

Un état des lieux quant à la formation au raisonnement en collège : la place des mathématiques, la prépondérance de la géométrie

Il demeure que, apprentissage du raisonnement ou formation à l'argumentation rationnelle, une telle fonction est dévolue tout particulièrement aux mathématiques.
À tous les niveaux du collège d'ailleurs, les textes officiels désignent, parmi les finalités et objectifs des mathématiques au collège, *le développement des capacités de raisonnement*, *la pratique de l'argumentation*.
Programme de la classe de 6° : la démarche mise en œuvre dans l'enseignement des mathématiques *concourt à la formation intellectuelle de l'élève, à la formation du citoyen, et doit notamment développer les capacités de raisonnement : observation, analyse, pensée déductive*.
Présentation du programme du cycle central puis du programme de la classe de 3° : *La démarche suivie renforce la formation intellectuelle des élèves en développant leur capacité à justifier ou infirmer une affirmation.*
Ajoutons que, au-delà des textes officiels, il est communément reconnu que l'enseignement des mathématiques forme au raisonnement et que, sans qu'il ait pour

autant l'exclusivité de cette fonction, il en est l'un des supports privilégiés (on tendrait même quelquefois à le cantonner abusivement dans cet emploi).

Mais, au sein même des mathématiques du collège, la tradition, le contenu des manuels, les textes mêmes des programmes, semblent faire de la géométrie le domaine privilégié de cet apprentissage.
Ainsi entend-on quelquefois situer les vrais débuts de l'apprentissage du raisonnement à la classe de 4^{e} et ceci parce qu'on commencerait à y faire "des démonstrations" et l'on signifie alors par là : des démonstrations " de géométrie".
Tel manuel d'ailleurs oppose, dans un "recueil de méthodes" les "méthodes de calculs" faites d'algorithmes aux méthodes de la géométrie constituées de démarches démonstratives. Si l'adulte peut comprendre le sens de cette séparation, elle présente pourtant le risque d'établir dans l'esprit de l'élève une dichotomie entre la géométrie où l'on démontre et le numérique où l'on calcule.
Dans les textes officiels enfin, les recommandations d'ordre général précédant chaque partie des programmes ne font essentiellement appel aux termes de *raisonnement*, *justification*, *séquences déductives*, *démonstration* que pour la géométrie. Dans le document d'accompagnement du cycle central, le paragraphe consacré au raisonnement s'intitule *Raisonnement et démonstration en géométrie* (il est vrai que ce même paragraphe suggère en introduction que *la démonstration s'applique à d'autres domaines* et évoque en effet deux exemples dans le domaine numérique. Mais le travail d'analyse porte ensuite exclusivement sur la géométrie).

Si l'importance accordée à la géométrie dans l'apprentissage du raisonnement au collège se justifie sans doute par le rôle prépondérant que joue en géométrie la combinaison de propositions et notamment la manipulation d'inférences, les difficultés du raisonnement ne tiennent pas seulement à cet art de combiner des inférences. Le raisonnement comporte en effet de nombreuses autres difficultés qui, elles, ne se rencontrent pas en priorité, du moins au collège, dans les activités géométriques, et leur maîtrise renvoie alors à des activités proprement numériques.

Réduire le raisonnement, au collège, à la démonstration en géométrie n'est donc pas suffisant pour la formation à l'argumentation rationnelle ; et cette réduction prend de plus le risque de créer chez l'élève une image de l'argumentation comme pur exercice de forme, propre à satisfaire le professeur, tant la géométrie élémentaire se prête bien à des enchaînements rigides.
Des auteurs ont déjà regretté depuis longtemps cette réduction [Bouvier A.,83], [Gaud D, Guichard J.P., 84]. Nous proposons ici de dégager quelques composantes de l'argumentation raisonnée dans le cadre d'activités numériques.

Présentation du document :

On aura compris que l'un des objectifs de ce document consiste à localiser et à sérier les difficultés qui peuvent gêner la bonne compréhension et l'exercice de l'argumentation rationnelle. Pour circonscrire le propos, précisons qu'il ne sera donc pas question de difficultés liées au *sens* de la démonstration ou de l'argumentation mais seulement à leur *mise en œuvre*.

Ces obstacles, une fois repérés, seront considérés conjointement selon un double point de vue : un éclairage théorique d'une part, permettant de les situer dans un contexte général de modèles d'analyse logique, et une observation des comportements des élèves de collège et de lycée d'autre part. Il sera possible alors de constater combien les difficultés que présente l'argumentation sont diverses. On observera par ailleurs, comme on le notait ci-dessus, que nombre de ces difficultés trouvent en collège un meilleur terrain d'exercice dans le domaine numérique (alors même qu'elles s'y trouvent souvent occultées par la séduction de savoir-faire de type algorithmique) que dans celui, considéré pourtant comme privilégié en la matière, de la géométrie.

Nous étudierons donc quelques composantes de l'argumentation (mathématique ou non), qui constituent un obstacle dans l'apprentissage de la construction d'une justification au moins cohérente ; nous les résumerons en :

- la combinatoire d'un enchaînement déductif,
- l'abstraction liée au concept de variable,
- la gestion mentale des quantifications,
- le traitement d'objets d'ordre supérieur,
- le rapport entre notation et dénotation,
- les implicites de la langue naturelle,
- l'abstraction due à l'utilisation inévitable du métalangage,
- les différents sens du symbole " = ",
- l'abandon du Principe d'Information Maximum,
- l'adéquation d'une modélisation,
- le dépassement d'un cadre que l'on croit posé a priori,
- l'initiative d'affaiblir ou renforcer une information,

et nous les regrouperons dans les chapitres II à V.

Comme prolongement de ces analyses, des activités de classe à support numérique seront proposées et analysées après expérimentation au chapitre VII. Elles pourront être utilisées dans les classes aussi bien pour établir des diagnostics du niveau de compétence des élèves dans le domaine du raisonnement que comme exercices de formation pour une meilleure maîtrise de l'argumentation rationnelle.

Enfin l'annexe 1 suggérera d'autres modèles possibles d'activités conduisant à argumenter en numérique au collège.
L'annexe 2 évoquera quelques-unes de ces composantes de l'argumentation dans la communication courante.

II – LES DIFFICULTÉS DE TYPE COMBINATOIRE

"Difficulté combinatoire" doit être entendu ici au sens de difficulté d'assemblage, comme l'est par exemple la difficulté d'assembler les pièces d'un puzzle. Si ce n'est en l'occurrence, que l'objectif correspondrait plutôt à rattacher en un seul tenant la pièce du coin inférieur gauche à la pièce du coin supérieur droit. Cette difficulté est réelle, mais reste tout de même limitée dans l'apprentissage de l'argumentation. Cet aspect est celui qui correspond à ce qu'on entend le plus souvent par "démonstration", dans la bouche du professeur de mathématique, dans celle des élèves, dans les programmes, dans les ouvrages scolaires.
La géométrie au collège est sans aucun doute le cadre idéal pour de tels enchaînements.

Regard théorique sur cette composante.

Il ne s'agit pas ici d'analyser le cadre dans lequel se construisent les démonstrations, ni au sens formel, ni au sens didactique, cela est très bien fait dans beaucoup de travaux [Balacheff N.,82], [Arsac G.,90], [Duval R., M.Egret,93], [Noirfalise R.,93], [Muller J.P.,94], [Barbin E.,96]. Nous souhaitons simplement ici évoquer pourquoi nous parlons d'aspect combinatoire pour cette composante de l'argumentation.
La pratique des raisonnements en géométrie est celle qui va se prêter le mieux aux démonstrations formelles, ou plus précisément, en termes de Théorie de la Démonstration, aux déductions dans un système de séquents intuitionnistes sans quantification ; ou même encore en termes d'Intelligence Artificielle, à la gestion de clauses définies positives. Ce n'est pas par hasard si certains langages de programmation permettent de formaliser facilement spécifications et preuves en géométrie élémentaire.

La difficulté pour structurer l'argumentation va résider dans la prise itérée d'initiatives.
Initiatives qui sont de deux types :

a) Sortir de sa "boite à outils", pour reprendre un vocabulaire cher aux manuels, des règles, théorèmes, résultats et autres acquis bien choisis.
b) Introduire de son propre chef un (des) individu(s) particulier(s) nouveau(x), non explicité(s) a priori par les hypothèses ni la conclusion.

C'est alors l'enchaînement par Modus Ponens (plus précisément par "règle de coupure") qui constitue l'argumentation.

Ainsi pour illustrer simplement ce type de structure argumentative, en représentant par des majuscules en gras des propriétés quelconques :
sur <u>la donnée</u> constituée de deux points A, B et d'un cercle $\mathcal{C}$,
<u>des hypothèses</u> $\mathbf{P}(A,B)$ et $\mathbf{Q}(B,\mathcal{C})$
on pourra par exemple arriver à <u>la conclusion</u> $\mathbf{S}(A,B,\mathcal{C})$ *en,*
a) pensant à utiliser les inférences "bien connues de la boîte à outils"

$\mathbf{P}(M,M')$ et $\mathbf{T}(M',\mathcal{C},d) \Rightarrow \mathbf{L}(M',\mathcal{C})$

$\mathbf{P}(M,M')$ et $\mathbf{L}(M',\mathcal{C}) \Rightarrow \mathbf{S}(M,M',\mathcal{C})$

pour des points M, M', *cercle* $\mathcal{C}$ *et droite d quelconques*

b) pensant alors à introduire la droite particulière D *(diamètre perpendiculaire à* (AB), *médiatrice de* [AB]*, tangente à* ℂ *issue de* A*, etc.…) construite depuis les objets donnés* A, B *et* ℂ *qui permet l'inférence*

Q(B,ℂ) ⇒ **T**(B,ℂ,D), *elle aussi tirée de "la boite à outils".*

C'est dès lors la phase de bons agencements combinatoires de ces informations qui constituera la démonstration.

Presque toutes les argumentations de géométrie élémentaire au collège sont de cette nature.

Une telle argumentation de nature combinatoire pourrait par exemple s'illustrer dans l'exercice ayant pour hypothèses

A' *projection orthogonale de* A *sur* D, : **Pr**(A',A,D)

B' *projection orthogonale de* B *sur* D, : **Pr**(B',B,D)

S *milieu de* [AB] : **Mi**(S,A,B)

et pour conclusion :

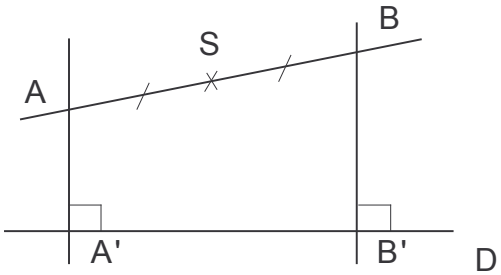
SA' = SB',

introduisant l'individu particulier :

S' : *projection orthogonale de* S *sur* (AB)

et des règles intermédiaires de la boite à outils comme :

1) la projection orthogonale préserve les milieux



2) **Pr**(***S'***,S,(AB)) ⇒ (***S'***,S) perpendiculaire à (AB)

3) ……

Naturellement on peut et on doit longuement se préoccuper de l'aide à apporter aux élèves pour penser à introduire tel(s) élément(s) nouveau(x), ou telle(s) règle(s) non a priori explicitée(s) par les hypothèses ni la conclusion, c'est la partie de l'apprentissage sur laquelle il est certainement le plus difficile d'agir. Le reste relève de l'apprentissage à se déplacer dans un labyrinthe. C'est en ce sens là que nous parlons de difficulté combinatoire pour cette composante de l'argumentation, sans bien entendu vouloir la minimiser.

Sans la minimiser, ne serait ce que parce qu'après tout c'est le cadre formel dans lequel pourrait se développer toute la mathématique (dans le cas de "séquents" plus généraux) une fois unifiée (disons au delà du lycée, lorsque ne sont plus distingués géométrie, numérique, gestion de données, comme il est souhaitable que ce soit le cas dans la formation au collège) ; sans la minimiser, disons le aussi parce qu'après tout c'est cet aspect d'initiatives lumineuses et de combinaisons déductives qui, adolescent, nous a fait aimer à nous, professeurs, les mathématiques.

Remarquons pour terminer que les individus élémentaires dont parle la géométrie élémentaire au collège : points, droites, triangles, cercles… seraient, certes dans une vision qui se voudrait unificatrice des mathématiques, d'ordres différents : premier ordre pour les points du plan ou de l'espace, second ordre pour les parties du plan ou de l'espace. Mais cet aspect n'est pas essentiel dans l'argumentation en géométrie élémentaire qui se contente de quelques relations primitives (car naturellement très imagées) entre ces différents types d'éléments, comme : point appartenant ou non à une droite, droite coupant ou non un cercle ….

III – LES DIFFICULTÉS LIÉES À LA STRUCTURE DISCURSIVE

Disons tout de suite que si la composante de l'argumentation liée à l'enchaînement déductif du paragraphe précédent devait correspondre à un système formel d'inférence, elle procéderait essentiellement du Calcul Propositionnel, ou plus précisément du Calcul des Prédicats limité aux formules de Horn, ou en Intelligence Artificielle à des clauses définies positives ; ici il s'agirait plutôt du Calcul général des Prédicats.
En effet, la différence fondamentale va venir de l'utilisation de variables ayant un véritable statut de variables, alors que l'utilisation de variables évoquées dans le paragraphe précédent est un simple codage permettant le repérage d'objets par un nom, un marqueur, le plus souvent évidemment une lettre, permettant de situer les différentes places qu'occupent les objets évoqués dans le discours.
Cette différence est considérable.
Et c'est pourtant bien au collège qu'elle fait son apparition. Elle suppose la présence implicite, dans l'argumentation, de concepts aussi délicats et généraux qu'"expression", "abstraction", "quantification", "domaine", "dépendance"…

Regard théorique sur cette composante

A la vue du développement du concept de variable à travers l'histoire des mathématiques, on pourrait même aller jusqu'à se demander s'il n'est pas trop tôt pour le voir s'introduire au collège.
La réponse est certainement non, puisque l'usage de transformations précises, concrètes que l'on fait subir à un symbole désignateur d'objet, plutôt qu'à l'objet lui-même parce qu'il est non connu, non identifié, quelconque, général, est certainement un des plus gros acquis de la pensée mathématique pour son efficacité.
Mais il faut bien avoir conscience qu'il a fallu attendre 23 siècles pour la pensée humaine avant de le maîtriser pleinement. Depuis son apparition dans l'utilisation de lettres par Aristote [-384 ;-322] pour désigner des individus généraux (il s'agissait en l'occurrence de prédicats, dans *Les Analytiques* pour décrire des syllogismes), en passant par Viète [1540 ;1603] au 16^{ième} siècle pour faire un usage systématique de "calcul avec des lettres", jusqu'à Weierstrass [1815 ;1897] pour introduire une parfaite maîtrise de l'utilisation de variables intervenant dans le discours "numérique" (l'analyse moderne) ou Frege [1848 ;1925] dans l'utilisation de variables intervenant dans les propriétés (formules du calcul des prédicats).
Le discours argumentatif de l'élève, dans le temps du collège puis du lycée, va devoir franchir ces étapes et se familiariser à gérer avec rigueur l'usage de quantificateurs, l'abstraction liée au passage de l'objet à la propriété ou à l'expression, l'infinie potentialité offerte par la propriété ou l'expression avec variable.

Potentialité infinie

Nous avons tendance, professeurs, à penser que nos élèves ne rencontrent l'infini qu'avec la notion de limite. C'est certes la notion dynamique de l'infini, de la variable qui "tendra vers" et qui ne sera d'ailleurs pas sans poser de nouvelles difficultés dans l'apprentissage. Mais c'est oublier que l'infinité statique des faits vrais ou faux contenus dans une simple propriétés avec variables se rencontre dès le collège, et c'est une difficulté importante d'abstraction que doit franchir l'élève pour accepter que malgré son désir de répondre VRAI ou FAUX face à des propriétés comme $x+17 < 2x-8$ ou $2x \leq x^2+1$ il lui faudra répondre en désignant une infinité de VRAI et (ou) de FAUX.
C'est en ce sens la que nous parlons de l'infinie potentialité des expressions avec variables, ou plus directement la difficulté à concevoir la notion même de contrainte.

Quantifications

Bien entendu il ne s'agit pas ici lorsque nous parlons de quantification d'un usage calligraphique de quelque "A" renversé ou "E" retourné que ce soit, mais bien de la présence permanente dans le discours mathématique de ces quantifications qui dès le collège se trouvent derrière des propos du genre

(1) "*Peut-on écrire* $2x \times 4 = 8x$?",

et qui demande une réponse OUI ou NON (avec justification) sur une quantification universelle.

(2) "*Peut-on avoir* $x+17 < 2x-8$?"

et qui demande une réponse OUI ou NON (avec justification) sur une quantification existentielle.

On voit par exemple combien il sera difficile derrière de telles syntaxes aussi peu différenciées de se construire pour l'élève une structure argumentative pour distinguer dans quel cas la production d'un objet particulier instanciant x peut suffire à justifier un OUI ou un NON à l'une ou à l'autre question. On sait la confusion des élèves face aux exemples/contre-exemples qui suffisent ou ne suffisent pas à justifier une réponse [Duvert R.,96].

Ce n'est certes pas au collège qu'une bonne maîtrise des quantifications s'avère nécessaire, mais elle le sera au lycée où les propriétés couramment employée seront de fait quantifiées,

- "être une fonction paire" (de type quantification universelle)
- "être une fonction périodique" (de type quantification existentielle-universelle)
- discussion d'un trinôme avec paramètre
- discussion d'un système avec paramètre

Il n'est pas lieu d'évoquer ici l'obstacle que créent les quantifications implicites dans le discours mathématique, depuis longtemps, beaucoup de travaux ont étudié cet aspect. On pourra utilement se reporter aux travaux de Viviane Durand-Guerrier [Durand-Guerrier V.,95a,95b,97]. Cette difficulté apparaît dès le collège et par ailleurs n'est pas propre aux mathématiques. Rappelons ici simplement l'origine de la difficulté didactique à l'acquisition d'une bonne maîtrise de ces quantifications indispensables :
Complètement explicitées dans des expressions formalisées leur gestion devient purement algébrique et donc simple (nous n'escamotons pas ici la hiérarchie de complexité liée à l'alternance des quantifications, mais cette complexité ne concerne évidemment en rien le collège ni le lycée). Mais cet aspect ne peut certes pas s'imposer en tant que tel et doit poindre progressivement dans l'apprentissage à travers la langue naturelle courante.

Mais là est la difficulté !
La langue naturelle courante, dans un souci d'élégance rhétorique ou littéraire, ne peut pas se permettre d'expliciter des quantifications, ni même des variables.
L'élégance du vers " *Un sot trouve toujours un plus sot qui l'admire* " n'explicite certes pas le rôle structurant universel du premier article *un* ni celui existentiel du second, c'est le contexte d'aphorisme, et le sens du verbe *trouver* qui induisent l'un et l'autre ; la structure quantifiante devrait être interprétée tout autrement dans un propos comme "*un élève que j'ai eu l'an dernier était capable d'effectuer de tête une multiplication à trois chiffres* ", le contexte narratif relatant un fait exceptionnel, conduit cette fois à un rôle existentiel du premier article "*un*"et universel du second "*une*".
Ces quantifications non explicites de la langue naturelle finissent par créer de véritables défaillances du sens pour peu que l'on soit moins attentif, dès qu'elles deviennent un peu complexes, comme par exemple lorsqu'elles se trouvent mêlées à des tournures négatives:
Il ne saute pas aux yeux par la seule syntaxe que "*nul courage n'est une vertu* " exprime exactement la même information objective que "*nulle vertu n'est un courage* " alors qu'a contrario "*chaque menace est un délit* " n'exprime évidemment pas du tout la même idée que "*chaque délit est une menace* ".
De tels dérapages sur la structure logique auxquels peut nous entraîner la langue naturelle par son élégance et sa concision, ne se limite d'ailleurs pas aux seules quantifications, elle concerne aussi d'autres articulations déductives. On peut citer ici le résultat d'une enquête menée auprès d'étudiants de deuxième année de DEUG à l'université, et que nous reproduisons ci-dessous :

Les deux phrases ci-dessous signifient-elles exactement la même information ?
1) ***Chacune de nos agences qui n'a pas de site internet, a un service Relation Publique***
2) ***Chacune de nos agences qui n'a pas de service Relation Publique, a un site internet***
Les deux phrases ci-dessous signifient-elles exactement la même information ?
1') ***Chacune de nos agences qui a un distributeur de billets, a un service informatique***
2') ***Chacune de nos agences qui a un service informatique, a un distributeur de billets***

Les réponses (anonymes) étaient ramassées après dix minutes de réflexions et fournissaient 73% de réponses NON à la première question et 70% de réponses OUI à la seconde.

C'est une des missions du collège de familiariser progressivement à cette logique rigoureuse du discours en étant très vigilant sur ses articulations.
Les exemples (1) et (2) de la page 12 pourraient avantageusement se formuler en :
"*Est-il vrai que pour chaque nombre x on ait* : $2x \times 4 = 8x$?",
"*Est-il vrai qu'il existe un nombre x tel que* : $x+17 < 2x-8$?"
n'hésitant pas à expliciter la distinction entre "*pour chaque*" et "*il existe un*"
Les tournures comme "*Peut-on écrire…*", bien que peut-être imagée en langage-élève, ne paraissent pas souhaitables tant elles contiennent d'implicites. On pourra voir une fois de plus combien la langue naturelle, bien qu'a priori familière à l'élève, est remplie de nuances structurelles qu'elle escamote, en comparant des questions du genre :
"*Peut-on écrire* $(x - 1)(x + 1) = x^2 + x - 1$?"
"*Est-il possible d' écrire* $(x - 1)(x + 1) = x^2 + x - 1$?"
"*Est-il possible que* $(x - 1)(x + 1) = x^2 + x - 1$?"
On trouve dans ces trois tournures beaucoup de difficultés liées au discours mathématique dès qu'il utilise des variables et que la langue naturelle n'explicite pas toujours : quantification non explicitée, passage de l'objet/nombre à l'objet/propriété (identité remarquable par exemple) qui devient l'objet du discours, passage au métalangage quittant le "*c'est vrai* ", "*c'est faux* " pour le "*on a le droit de dire que c'est vrai* ", "*on a le droit de dire que c'est faux* "
Les usages courants que l'on est conduit à faire dans une argumentation, de tournures comme "*c'est sûr* ", "*c'est vrai* ", "*c'est impossible* ", "*ce n'est jamais vrai* ", "*c'est faux* ", "*ça peut être vrai* ", "*ça peut être faux* ", sont souvent stéréotypées dans la langue courante alors que le discours mathématique doit en faire un usage bien précis, réservant certaines pour des propriétés utilisant des individus généraux, non identifiés, inconnus (des variables) et d'autres pour des propriétés déterminées par des individus entièrement déterminés. Le langage courant utilise par exemple aussi bien "*c'est sûr* " pour exprimer la vérité d'une quantification universelle : "*dans tous les cas c'est vrai* ", que pour communiquer une information du métalangage : "*c'est vrai que c'est vrai* " ou psychologique "*je suis convaincu que c'est vrai*".

La langue naturelle étant suffisamment riche, elle permet l'autoréférence et le changement de niveau (connaissance/métaconnaissance, méthode/métaméthode,…) sans grande distinction syntaxique. C'est une réelle difficulté didactique [Robert A., Robinet J.,96].

La profonde différence qui sépare deux phrases comme :
" *Pour qu'un nombre se termine par* 5 *il faut qu'il soit divisible par* 5 "
" *Pour montrer qu'un nombre se termine par* 5 *il faut montrer qu'il est divisible par* 5 "
n'est pas spontanément perçue correctement par le jeune cerveau en apprentissage de l'argumentation rationnelle. Le " *il faut* " dans la deuxième phrase n'établit plus une causalité entre faits, mais entre méthodologies d'accès à la dénotation de ces faits. Un tel usage de " *il faut* " à ce niveau de langage prend souvent la signification de " *il suffit* " dans une démarche d'aide bienveillante par exemple de l'enseignant conseillant à l'élève :
" *voyons ! pour montrer* **A** *il faut que tu démontres* **B** ",
la nécessité pouvant en l'occurrence se justifier par un effet de contexte (cf. chap. IV), que le professeur a clairement présent à l'esprit (état de connaissances de l'élève, contenu du programme pour cette classe, avancement du cours à ce moment là,…), la

méta-information contenu dans cet " *il faut* " étant : «tu ne peux actuellement rien faire d'autre que …, et cela suffira».

En résumé, l'occasion ne manque pas en numérique au collège de rencontrer ces articulations de la structure argumentative au travers
- des notions d'exemples/contre-exemples
- de sens à donner à " *n'est pas proportionnel à* ", (négation et quantifications mêlées)
- d'identité "vrai" / identité "fausse"
- équation "impossible",
- distinction entre information et méta-information, etc…..

IV – LES DIFFICULTÉS DE TYPE CONCEPTUEL

Indépendamment de la structure déductive, il est clair que la difficulté de construction de tout discours argumentatif va tenir en grande partie aux concepts sur lesquels il porte. C'est certes le cas dans l'argumentation quotidienne qui au-delà du discours sur les objets, les gens, peut porter sur les faits, puis sur les idées, comme en politique ou a fortiori en philosophie. Mais c'est certainement en sciences et particulièrement en mathématiques que cette difficulté à gérer des concepts complexes dans le discours sera le plus immédiatement perceptible à rendre une argumentation fausse ou même incohérente.

Il est certain que très tôt dans l'apprentissage des mathématiques se présentent des concepts difficiles à appréhender, constituant autant d'obstacles à la construction d'une argumentation correcte.

Regard théorique sur cet aspect

On sait qu'en dernière analyse formelle des mathématiques, les difficultés que rencontre le cerveau humain à gérer les situations complexes sont de deux sortes :

1) Concernant les objets

La multiplicité des ordres : *éléments, parties, familles de parties, classes de familles de parties, ...* Il est clair par exemple que l'objet "*vecteur de* $\mathbf{R}^n$" est plus confortable à gérer mentalement que l'objet "*famille de topologies métrisables sur tel espace de fonctions* ", ou plus simplement que notre perception n'apprécie pas outre mesure de raisonner sur les éléments d'un espace quotient.

2) Concernant les propriétés

L'abstraction liée à l'alternance de quantifications : il est remarquable par exemple que malgré le génie d'un très grand nombre de mathématiciens, il a fallu attendre vingt-cinq siècles, depuis la méthode d'exhaustion d'Eudoxe [-408 ;-355] jusqu'à la caractérisation de Weierstrass [1815 ;1897], pour que l'esprit humain maîtrise complètement le processus de passage à la limite. Il s'agit d'un concept naturel et évidemment indispensable (apparu très tôt) ; mais il est le premier aussi primitif, à ne pouvoir se maîtriser que par une structure quantifiante complexe : "*aussi près que…, il y a moyen …, pourvu que...*", ou si l'on préfère en termes plus actuels : "*pour tout ..., il existe..., tel que pour tout….*".

Qu'en est-il des difficultés conceptuelles pour l'élève de collège ou de lycée ?

Les difficultés évoquées ci-dessus ne s'y rencontrent certes pas beaucoup en tant que telles, mais pour peu qu'elles apparaissent, elles constituent de réels obstacles épistémologiques. Au lycée, c'est à travers les classes d'équivalence sous-jacentes à l'usage des " $2k\pi$ *près* ", des " *vecteurs du plan ou de l'espace* ", à travers la notion de fonction, à travers les discussions de systèmes avec paramètre.

Au collège c'est l'objet "fraction" qui aura beaucoup de mal à se mettre en place, obligeant l'élève à unifier la vision initiale de partage (opération physique), à celle d'opération (calcul à effectuer), puis à celle de nombre (classe d'équivalence). C'est

aussi la notion de proportionnalité, qui sera la première rencontre de l'élève avec une notion portant sur un objet d'ordre supérieur. Ce n'est pas en effet sur un *nombre*, une *figure* (objets qu'on peut considérer du premier ordre) que portera la notion, son sujet sera une *correspondance*, une fonction (objet du second ordre). Certes il ne s'agit pas d'une fonction de plusieurs variables (linéaire en telle ou telle composante) mais de sa forme finie, c'est-à-dire d'un tableau, et la notion portera sur le tableau lui-même, pour telle ligne par rapport à telle autre ligne. C'est déjà un objet d'ordre supérieur, pas au sens formel évidemment, puisque fini, mais contenant en germe pour l'élève déjà la difficulté conceptuelle d'un objet d'ordre supérieur.

Mais si ces difficultés (ordre supérieur, alternance de quantification) liés à la complexité de concepts sont incontournables pour l'esprit humain, l'élève de collège ou de lycée va en rencontrer bien d'autres propres à son apprentissage, tant sur les objets du discours que sur les propriétés ou les méthodes.

Sur les objets du discours, c'est au premier chef l'apparition de la notion de variable, déjà évoquée au chapitre I
Outre les implicites inévitables qui font problèmes à la maîtrise de l'élève de lycée et qui se cachent derrière *variable*, *paramètre*, *constante*, c'est l'apparition de l'objet-expression qui va induire les difficultés associées à la distinction Notation-Dénotation.
Cette distinction de perception entre la forme et le sens est toute à fait nouvelle pour l'élève de collège.
A contrario, une fois surmontée (comme c'est le cas pour le professeur), cette difficulté disparaît totalement de la conscience ; et le professeur face à l'élève se trouve tout à fait dans la situation de celui qui a réussi un jour, une bonne fois pour toutes, à rouler à bicyclette et ne mesure plus l'abîme que doit franchir celui qui pour la première fois découvre un vélo et s'assoit sur la selle dans l'espoir de se déplacer.

Un simple exemple suffirait, par sa fréquence dans nos classes, à comprendre l'importance de la difficulté à franchir l'abîme conceptuel de la notation à la dénotation :

> C'est parce que la notation de l'expression « $-x$ » est, on ne peut plus explicitement, négative, que l'élève nous désespère pratiquement toujours en prétendant que sa dénotation est nécessairement un nombre négatif.

De même l'élève aimerait bien que le professeur soit plus clair, car enfin :

$\frac{12}{3}$ c'est une fraction ou un nombre entier ?

et $\frac{x^4-1}{x^2+1}$ c'est un polynôme ou non ?

et $\sin y$, $\sin x_0$, s'agit-il de fonctions, ou de nombres réels ?
et $x^2+\cos^2 x+\sin^2 x$, c'est une valeur, une fonction, un polynôme ?

Et il en est ainsi pour toutes sortes de situations dans lesquelles il n'est pas du tout clair pour l'élève de savoir si l'appellation utilisée porte sur la représentation particulière, à un moment donné de la communication, d'un objet (une de ses représentations) , ou sur l'objet évoqué lui-même, par cette représentation (la dénotation de cette représentation).

Les problèmes liés au rapport Notation-Dénotation n'ont d'ailleurs pas besoin de la présence de variable pour émerger. Dès l'enseignement primaire, le fait que " 3 + 4 = ? " puisse être considéré comme une question alors que " 7 = ? " n'en serait pas une, reflète toute la problématique sous-jacente à la distinction Notation-Dénotation ; de même que le calcul représenté par " 5 × 4 " n'est pas le même que celui représenté par " 4 × 5 ", et que plus généralement deux programmes peuvent être totalement différents bien que "faisant la même chose" et donc "être les mêmes".
Rappelons surtout que ce type d'abstraction consistant à distinguer la notation et la dénotation est tout à fait nouveau pour l'élève de collège.

On comprend la complexité du concept de fraction qui restera un gros obstacle au collège, et la difficulté liée à l'aspect partage/opération/nombre déjà évoquée ci-dessus se reflète dans ce propos d'élève (chapitre VII, activité 4) :

« 3/4 *est compris entre* 1 *et* 2, *puisque* 3/4 *de* 2 *c'est* 1,5 ».
C'est rare en si peu de mots de faire (mauvais) usage des trois aspects différents que constituent l'aspect "3/4 en tant que nombre" trouvant sa place parmi les autres, l'aspect partage de "trois quarts de quelque chose" et enfin l'aspect calcule "(3/4)×2 c'est 1,5".

Cette complexité de concepts ne porte pas que sur les objets, elle porte aussi sur les propriétés primitives. Nous avons déjà évoqué ci-dessus la proportionnalité qui est de toute autre nature qu'une propriété comme "être pair" ou "être isocèle". Une (Des) propriété(s) encore plus primitive(s) et pourtant encore plus complexe(s) se cache(nt) derrière le symbole " = ". Ici aussi beaucoup de travaux didactiques ont étudié cette difficulté ; contentons nous de rappeler quelques usages variés que le discours mathématique fait de ce graphisme :
* Ponctuation d'annonce de résultat d'un calcul
* Affectation d'une valeur à une variable, (personne ne dirait "*peut-on écrire* $x = 7$?")
* Réponse à une recherche de solution, ("*les solutions sont* $x = ...$ *et (ou)* $x = ...$")
* Égalité (fait, propriété, donc de dénotation VRAI ou FAUX, comme $(3+5) \times 2 = 6+10$)
* Équation (contrainte sur un ou des objets d'un type donné)
* Identité.

(Cf. annexe 1)

Ajoutons à ces usages permanents du discours mathématique, conceptuellement très différents, les usages abusifs (mais pourquoi pas au point où nous en sommes) que s'autorise l'élève :

- Comme item, par exemple à la question :

b) résoudre $\frac{2}{3}x = \frac{5}{-6}$

l'élève répond : b = $\frac{2}{3}x = \frac{5}{-6}$, puis b = $\frac{5}{-6} : \frac{2}{3}$, puis enfin b = $\frac{5}{-4}$

* Comme ponctuation, pour exprimer "*voilà ma réponse*"
* Comme calcul intermédiaire, pour effectuer (3+5)×2 : « 3+5 = 8×2 = 16 »

etc.…

Signalons pour terminer l'évocation des difficultés liées au sens de l'égalité dans les écritures littérales, que l'égalité finit toujours par se traiter par automatisme, se coupant donc de toute signification. C'est certes le gain apporté en général par un automatisme mais un automatisme qui, comme tout automatisme, n'est efficace que s'il est contrôlé par le sens. Il est fréquent par exemple que tardivement (à l'université), l'élève/étudiant se demande comment peuvent bien s'appeler les fonctions qui vérifient :
$a = b \Rightarrow f(a) = f(b)$ quels que soient a et b, (puisque "les autres" s'appellent injectives) ou comment s'appellent les éléments c qui vérifient :
$a = b \Rightarrow a \blacklozenge c = b \blacklozenge c$ quels que soient a et b, (puisque "les autres" s'appellent réguliers pour l'opération $\blacklozenge$)
Cela illustre la perte du (bon) sens de l'égalité, et les situations ci-dessus n'évoquent rien d'autre que : si des noms différents désignent le même individu, la même transformation "subie" par cet individu, que ce soit sous un nom ou un autre, fournit le même résultat.

À ces complexités d'objets, ou de propriétés vont s'ajouter, dès le collège, les complexités de nature méthodologique ou dues au métalangage.
C'est par exemple la difficulté liée au sens du verbe "vérifier", qui a au moins quatre usages différents :
* Vérifier pour "reprendre avec attention".
* Vérifier un calcul en changeant de méthode (avec calculatrice par exemple).
* Vérifier comme "test" (d'identité de deux expressions).
* Vérifier lors de la résolution d'équation (ça peut l'être par confort, par zèle, par plaisir, ou par nécessité).
C'est aussi la difficulté pour l'élève de gérer l'exploitation d'information apportée par un individu particulier, que la langue naturelle baptisera
* exemple (pour illustrer, pour conforter)
* exemple (pour justifier une réponse)
* contre-exemple (pour infirmer, et donc aussi justifier une réponse).

D'autres difficultés sont liées au concept d'argumentation lui-même :
C'est le cas du lycéen par exemple qui s'étonne :
« *vous nous avez dit comment montrer qu'une fonction est paire, mais vous ne nous avez pas dit comment montrer quelle n'est pas paire !* »
lorsque le professeur lui reproche de conclure que la fonction n'est pas paire, par la seule raison qu'il n'est pas arrivé à montrer qu'elle l'était.
C'est le cas du collégien qui constatant que telle justification "*a marché*" pour les nombres pairs et "*ne marche pas*" pour les nombres impairs en tirera la conviction que "c'est faux" pour les impairs « *puisque* LA *démonstration ne marche pas !* »
Inutile d'évoquer ici que ces difficultés sont beaucoup plus profondes puisqu'elles mettent en confrontation le sens que l'esprit humain se fait du VRAI, au sens qu'il donne à PREUVES.
C'est toute la gradation abstraite qu'il peut y avoir entre :
"Ceci n'est pas une démonstration de cette propriété".
"Je ne connais aucune démonstration de cette propriété".
"Personne à ce jour ne connaît de démonstration de cette propriété".
"Voilà pourquoi il ne peut pas y avoir de démonstration de cette propriété".
Et ces niveaux d'abstraction n'ont, bien entendu, plus rien à voir avec les difficultés que rencontrent nos élèves.

V – LES DIFFICULTÉS LIÉES AUX EFFETS DE CONTEXTE

Ces difficultés seront un peu plus générales et en un certain sens concernent l'essence même de la démarche mathématique ; démarche conduisant à modéliser dans un cadre intellectuel, donc abstrait, des situations problématiques du monde sensible, précisément pour que leur gestion rationnelle ne souffre pas des effets parasites de contexte.
Naturellement l'aptitude à dégager l'essentiel d'une information sans être influencé dans son jugement par les effets anecdotiques, parasites, plus généralement de contexte (même s'ils peuvent être pris en compte par ailleurs), est un apprentissage fondamental de la formation intellectuelle en général. C'est peut-être dans l'activité mathématique au collège que pourrait être pris le temps de mieux prendre conscience de ces difficultés.
Nous retiendrons quatre illustrations de cette difficulté :

- Réticence à quitter le Principe d'Information Maximum.
- Réticence à sortir du cadre a priori proposé.
- Réticence à la rigueur d'une modélisation.
- Réticence à choisir d'affaiblir ou renforcer une information.

Essentiellement il s'agit de la difficulté à sortir de préjugés que l'on a sur une situation, la croyant naïvement plus simple, plus cohérente, plus claire que le détour que va nécessiter une gestion rigoureuse, qui par nature sera moins sensible, moins émotionnelle.

Regard théorique sur cet aspect.

Le principe psychologique de la communication courante dit Principe d'Information Maximum [Dumont B.,83] est connu depuis longtemps pour constituer un écueil majeur au passage obligé de la langue naturelle quotidienne à la langue appropriée à un discours scientifique, ou plus généralement à tout discours qui doit être neutre et froidement objectif (juridique, notarial par exemple). Rappelons que ce principe, implicite à l'esprit de chacun dans le quotidien, veut que :
Lorsqu'un interlocuteur m'informe sur un fait,
1°) il m'apporte tous les renseignements qu'il a à sa connaissance relativement à ce fait,
2°) il se garde de n'apporter aucune information superflue qu'il saurait n'avoir aucun rapport avec ce fait.
Si ce n'est pas le cas, c'est que l'interlocuteur n'est pas fiable, plaisante, ou se moque de moi. C'est ainsi que dans le discours quotidien un "rectangle" n'est **certainement** pas un "carré", sinon on le dirait.

L'information transmise étant donc supposée maximale, elle induira une (supposée) information négative sur le non-dit. Remarquons par exemple que c'est ce type d'implicite qui conduit l'Intelligence Artificielle, lorsqu'elle veut gérer des décisions sur la base de communications ordinaires, à élaborer toutes sortes de systèmes formels comme logique des défauts, logique non monotone, etc.…

Naturellement un tel principe de nature purement psychologique est totalement exclu du discours mathématique.
Ainsi lorsque l'hôtesse annonce :

« Si votre ticket d'embarquement se termine par 0, présentez vous porte 5 »,

il est clair que, votre ticket ne se terminant pas par 0, vous ne devez pas, à cet instant, vous présenter porte 5.
La même syntaxe sur le propos mathématique :

« Si un nombre se termine par 0, il est divisible par 5 »

n'induira évidemment pas que les nombres qui se terminent par autre chose que 0 ne sont pas divisibles par 5.

Ce principe de la communication courante constitue ainsi dans l'apprentissage du discours mathématique une réelle et profonde difficulté :

1) Dans l'usage de l'implication ou de la causalité, puisque dans le langage courant ces constructions sont toujours supposées transmettre les hypothèses ou causes minimales et donc transmettre, sous une syntaxe conditionnelle, une information de condition non seulement suffisante mais nécessaire aussi. C'est le Principe d'Information Maximum qui conduira l'élève à exploiter la remarque : "*ce n'est pas un losange, puisque les diagonales ne sont pas perpendiculaires*", pour s'en construire la règle : "*lorsque les diagonales d'un quadrilatère seront perpendiculaires, ce sera un losange*".

2) Dans le cas d'utilisation de la disjonction, qui restera troublante lorsque l'on sait que l'une des composantes est vérifiée ou que l'autre ne l'est pas. Combien de fois n'entendons nous pas les élèves nous rappeler qu'il est faux que "3 est inférieur ou égal à 5".

3) L'information communiquée par une assertion quantifiée existentiellement étant là aussi supposée optimale dans la communication courante, induit que la même assertion quantifiée universellement n'est pas vraie. Ainsi lorsque le professeur annonce à la classe :

«*il y a des élèves qui ont eu zéro au dernier devoir*»

cela induit que ce n'est pas toute la classe qui a eu zéro.
Situation tout à fait différente pour l'information de nature mathématique :

«*il y a des nombres pairs qui sont somme de deux nombres premiers*»

information qui n'induit évidemment pas que ce ne sont pas tous les nombres pairs qui sont somme de deux nombres premiers.

4) Sur l'organisation même des concepts. C'est le Principe d'Information Maximum qui conduit, dans une première démarche fruste de la pensée, à s'imaginer qu'un bon rangement s'organise par une classification "bien cloisonnée" : un partitionnement ; un nom et un seul pour chaque type de la classification : les lapins, les baleines, les vaches, ……, les entiers, les décimaux, ……, les carrés, les rectangles, les trapèzes,…….
La Zoologie comme les Mathématiques ne seraient pas allées bien loin avec une telle classification. Et c'est un effort intellectuel important de percevoir que l'organisation sera plus exploitable si la classification se fait par "emboîtement", par inclusion, par propriétés communes, le nom de la classe provenant de la propriété elle-même.
Évidemment le prix à payer pour cette meilleure gestion va heurter la sécurité qu'apportait la première attitude fruste et inefficace puisqu'un rectangle pourra être un

carré, un décimal un entier, etc.…, et heurter notre besoin (surtout celui de l'élève en l'occurrence) du Principe d'Information Maximum.
C'est au collège que cette remise en cause de l'organisation des concepts apparaît clairement pour la première fois, et rendra souvent difficile la construction d'une argumentation correcte.

Pour peu qu'on y soit attentif, on trouve très souvent le Principe d'Information Maximum à l'origine de beaucoup de difficultés d'élèves et ce n'est pas là simple étourderie ni incompréhension. Ce principe imprègne en général toute communication, et n'en sommes-nous pas nous-mêmes victime lorsqu'on demande aux élèves "*que peut-on dire d'un triangle qui a trois angles égaux* ?" et que la réponse "*il est isocèle*" ne nous satisfait pas ?

Une autre difficulté majeure vient aussi de la réticence psychologique à sortir du cadre dans lequel pour l'élève se pose un problème. On sait combien c'est important en mathématique. C'est clair en général à travers toute son histoire : bien que la réponse se trouve dans le même cadre que la question, sa construction passe par un cadre beaucoup plus large. Depuis Bombelli au $16^{\text{ième}}$ siècle osant utiliser l'écriture $\sqrt{-121}$ pour trouver finalement les trois solutions pourtant bien réelles de $x^3 = 15x+4$, jusqu'aux récurrences transfinies qui nécessitent d'introduire des ordres beaucoup plus généraux que celui qu'on avait à utiliser.
Cette difficulté à sortir du cadre de la situation/hypothèse se rencontre évidemment dans nos classes, et c'est toujours un étonnement pour l'élève de voir "sortir du chapeau" des nombres complexes dans une question de géométrie, ou telle translation alors que le problème ne parlait que de droites et de cercles. C'est un étonnement pour l'élève de collège de voir s'introduire une décimale supplémentaire ou une fraction alors que la question ne faisait figurer que des décimaux à un chiffre après la virgule.
Ici aussi il s'agit d'une réticence psychologique de l'esprit humain à sortir du cadre dans lequel il perçoit le problème et auquel il croit que la réponse se limite.

Le choix d'une modélisation est évidemment primordial pour développer une argumentation mathématique. Mais ici aussi le contexte sensible du cadre réel dans lequel se pose une question paraît souvent confortable pour y apporter résolution, et engendre une réticence naturelle à l'entreprise d'une rigoureuse modélisation qui inévitablement paraîtra abstraite et donc plus compliquée que l'idée intuitive que l'on a de la situation. Le plus bel exemple historique en est peut-être la controverse sur les polyèdres qui dura 150 ans (d'Euler [1707 ;1783] à Poincaré [1854 ;1912]), et qui ne prit fin qu'avec la proposition de Poincaré de modélisation des polyèdres (plus précisément d'une définition rigoureuse dans un modèle précis), modélisation qui certes est abstraite et peut paraître sophistiquée par rapport à l'idée naïve de polyèdre que l'on croyait bien partagée par le (bon) sens commun, mais sur laquelle il était impossible de construire une argumentation sans qu'elle ne se trouve aussitôt remise en question [Lakatos I.,84], [Dieudonné J.,87].

C'est certainement au collège qu'apparaît pour la première fois la notion même de modélisation et naturellement sous sa forme la plus primitive ; non pas certes sous la forme de structure/modèle, ni de caractérisation/définition, mais bien sous la forme de contrainte/équation supposées traduire une situation réelle et sur laquelle pourront se construire des argumentations mathématiques. Hélas cette modélisation se limitera le plus souvent à l'exercice de transformations d'écritures vides de sens [Reynaud R.,98],[Gandit M., Masse-Demongeot M.C.,96], alors que l'adéquation entre situation réelle et modélisation mériterait beaucoup de commentaires en classe (de quels x parlons-nous?, entiers?, décimaux?, fractions?, domaines perçus évidemment dans leur inclusion naturelle, tous sont-ils vraiment à considérer?, les négatifs?, ceux plus grands que 100?,…) et permettrait sans doute mieux à l'élève d'appréhender le sens d'une variable dans une écriture, ou mieux gérer "les solutions parasites".

Enfin nous évoquons pour terminer ces illustrations la réticence à affaiblir ou renforcer une information.

La réticence à affaiblir une information est essentiellement due à la réticence à quitter le Principe d'Information Maximum évoqué ci-dessus.

Ainsi un élève/étudiant aura une réticence à utiliser $\varepsilon/2$ lorsqu'il sait que c'est vrai pour chaque ε (affaiblissement apparent de l'écriture) ou à expliciter l'argument "puisque $\cos x \leq 10$". Combien de fois après avoir argumenter "*puisqu'on a… pour tous…, on peut l'utiliser pour*…", n'avons-nous entendu la réaction d'élèves : "*vous n'avez pas le droit de prendre un cas particulier*!".

Dans un cadre un peu plus formel c'est la réserve naturelle qu'on éprouve à gagner quelque chose en utilisant des règles formelles comme "*de* (A et B) *on déduit* A", et "*de* A *on déduit* (A ou B)".

Enfin le choix de renforcer une information relève d'une initiative anticipatrice pour parcelliser une difficulté, disons plus simplement : entreprendre une démonstration par cas. La réticence provient alors essentiellement du préjugé qui porte à croire que l'on complique les choses. Ce sera par exemple l'embarras des élèves face à une équation ou inéquation utilisant des valeurs absolues, pour laquelle il préférerait avoir un moyen mécanique de transformation de l'expression plutôt que "compliquer les choses" par une discussion par cas.

VI – CONCLUSION SUR CES DIFFICULTÉS

Voici donc présentés quelques écueils qui, nous semble-t-il font obstacles à la construction d'une argumentation, au moins cohérente, dans l'apprentissage des mathématiques.
Résumons les en :

- La combinatoire d'un enchaînement déductif.
- L'abstraction liée au concept de variable.
- La gestion mentale des quantifications.
- Le traitement d'objets d'ordre supérieur.
- Le rapport entre notation et dénotation.
- Les implicites de la langue naturelle.
- L'abstraction due à l'utilisation inévitable du métalangage.
- Les différents sens du symbole " = ".
- L'abandon du Principe d'Information Maximum.
- L'adéquation d'une modélisation.
- Le dépassement d'un cadre que l'on croit posé a priori.
- L'initiative d'affaiblir ou renforcer une information.

La liste n'est pas exhaustive, mais elle est déjà suffisante pour nous interroger :

A quel moment de l'apprentissage trouve-t-on l'occasion d'initier à la compréhension, la mise en oeuvre, la pratique de ces composants d'une argumentation ?

Incontestablement, au collège le géométrique est le lieu par excellence pour l'apprentissage du premier point : l'enchaînement déductif des propriétés. C'est par contre essentiellement le numérique qui donne l'occasion dès le collège de rencontrer toutes les autres, et en général cette occasion est sacrifiée.
C'est un peu inévitable, il ne faut pas s'en étonner : toute l'activité mathématique se compose à la fois de réflexion et de transformation d'expressions et, pour des raisons psycho/sociologiques et culturelles, on comprend que le deuxième aspect va être beaucoup plus gratifiant.

Il reflétera en effet :

- un savoir faire ;
- une manière d'agir.

Or l'action est considérée comme préférable à l'interrogation, au doute, à la réflexion et, par ailleurs, un savoir faire est plus facile à évaluer.
Mais il y a aussi des raisons plus profondes, la part dans l'activité mathématique de transformations d'expressions (qui représentent des objets) a un rôle d'économie de réflexion. Il ne faut pas s'étonner dès lors qu'au cours de l'apprentissage, elle risque de n'être plus qu'une finalité, qui éloigne l'apprenti de la compréhension [Deledicq A.,95].
Comme le dit R.Reynaud [Reynaud R.,98]
«*on décrit abondamment ce que l'on fait (et qui se voit), mais on néglige d'expliciter ce que l'on obtient (qui lui ne se voit pas)*» alors que c'est pour ça qu'on l'a fait.
On étiquette des enchaînements de transformations, de toutes sortes de :

alors, d'après, finalement, on obtient, nous avons ainsi, ou encore, il découle, isolons, reportons, résolvons, substituons, qui ne font que commenter la transformation ; alors que l'essentiel se trouve dans la conservation, l'affaiblissement ou le renforcement du sens, et qui a surtout besoin de commentaires du genre :
… qui signifie pareil que …
… qui signifie en particulier …
… qui est vérifié si …
Évidemment un usage intensif de graphismes tels que $\Leftrightarrow$, $\Rightarrow$, $\Leftarrow$, ne résoudrait rien (ce n'est pas un problème de calligraphie), mais on n'échappe pas au rôle essentiel du sens qu'ont les transformations que l'on effectue.

Cette prédominance à valoriser le "savoir faire" au détriment du "savoir ce que l'on fait" en numérique n'est évidemment pas nouvelle dans l'histoire de la transmission des savoirs ; mais elle devient un choix de plus en plus catastrophique dans la formation des compétences du citoyen de demain.
Si l'adolescent du 19^{ième} siècle, n'ayant comme compétence qu'une superbe habileté à calculer des primitives de fonctions usuelles, pouvait trouver une place de choix dans le monde technique, industriel et économique de son temps, on conçoit combien, limité à cette seule habileté, un adolescent actuel n'a aucune chance de présenter quelqu'intérêt que ce soit pour notre société qui dispose d'automates qui excellent dans cette tâche.
Ce paradoxe opposant le rôle de plus en plus sécurisant dans le système éducatif du "savoir faire", à son inutilité lorsqu'il ne se limite qu'à ça, dans la société en train de se construire, et fort justement résumé par Marc Legrand [Legrand M.,95] : « *c'est dans la clarification d'un problème que l'homme est irremplaçable, il l'est de moins en moins dans sa résolution*. »

Il est dommage alors de ne pas préparer plus les élèves de collège à la maîtrise bien comprise des composantes de l'argumentation, alors que le numérique en donne l'occasion permanente. Même à dose infime (5 % des activités ?), une confrontation à ces aspects, permettrait d'aider l'élève à mieux gérer son argumentation, autant dans sa communication et son argumentation courantes de citoyen, que dans son éventuel devenir de scientifique.

Le chapitre suivant propose quelques activités qui peuvent permettre d'aller dans ce sens.

VII – QUELQUES ACTIVITÉS ANALYSÉES

Nous proposons ici quelques types d'activités dans lesquelles il ne s'agit pas de calculer, résoudre ni transformer quoi que ce soit, mais de gérer des informations pour argumenter sa conviction.
Ces activités ont toutes été expérimentées dans des classes de $5^{ième}$ et $4^{ième}$, et plutôt que d'en fixer les objectifs didactiques a priori, nous avons préféré d'après les comportements des élèves, analyser en conclusion les points de compréhension et d'argumentation qu'elles peuvent permettre de débattre et de préciser avec la classe.
Ces activités n'ont rien d'original et ne constituent en rien une référence. Elles suggèrent simplement quelques directions pour conduire l'élève à raisonner en numérique. Elles ne sont pas proposées "clé en main", et demandent à être adaptées, améliorées, développées, transformées par chaque professeur pour sa classe et selon qu'il souhaite animer un débat en classe entière ou dans de petits groupes d'élèves.

ACTIVITES 1 et 2

Voici des nombres entiers à deux chiffres.
Sous chaque tache est caché un chiffre.
Remplis chaque case du tableau par OUI ou par NON.
Justifie tes réponses.

	on en est sûr	c'est possible	c'est impossible
$24 \leq \blacksquare 3$			
$12 \leq \blacksquare 1$			
$19 \leq 2\blacksquare$			
$2\blacksquare \leq \blacksquare 4$			
$98 \leq \blacksquare 2$			

Dans le tableau, sous chaque tache est caché un chiffre.
Dans les cases grises de chaque ligne, entoure ce qui est vrai et barre ce qui est faux

$8 < 5\blacksquare$	c'est sûr	c'est impossible
$2\blacksquare < 17$	c'est sûr	c'est impossible
$19 \leq 2\blacksquare$	c'est sûr	c'est impossible
$24 \leq \blacksquare 3$	c'est sûr	c'est impossible
$12 < \blacksquare 1$	c'est sûr	c'est impossible
$20 \leq \blacksquare 4$	c'est sûr	c'est impossible
$98 < \blacksquare 2$	c'est sûr	c'est impossible
$98 \leq \blacksquare 8$	c'est sûr	c'est impossible

Explique par écrit tes réponses aux lignes 3, 5, 7 et 8

1°) C'est l'occasion d'un débat dans la classe sur une des formes argumentatives qui reste mystérieuse pour la plupart des élèves, et qui laisse longtemps des traces dans le parcours scolaire voire universitaire : quand est-ce que la production d'un cas particulier (**exemple? contre-exemple?)**, **suffit** ou ne **suffit pas** à justifier une réponse ? Cette difficulté n'a rien d'étonnant puisque se mêlent, dans la même tournure linguistique d'exemple et de contre-exemple, de la sémantique et de la syntaxe, la syntaxe consistant dans l'analyse de la *seule* forme de la proposition et de la valeur qu'auraient un exemple ou un contre-exemple pour la justifier. Aspect qu'il est, bien entendu, hors de question de préciser avec les élèves, mais qui restera néanmoins bien embarrassant pour eux s'ils ne sont pas conduits assez tôt à le rencontrer et le maîtriser de façon intuitive.
C'est en effet dans la combinaison de la syntaxe de la question : quantification implicite universelle (comme dans "on en est sûr", "c'est impossible") ou existentielle (comme dans "c'est possible") et de la sémantique : réponse affirmative ou négative, que l'élève doit se familiariser à l'utilisation de la forme argumentative par exemples et contre-exemples.
On peut ainsi remarquer avec les élèves que la justification de l'une des réponses peut être (a priori) beaucoup plus embarrassante que la justification d'une autre précisément par la simple interaction "quantification-réponse" (pour répondre "oui" à un "est-il possible" ou un "existe-t-il", il suffit de…, alors que…etc).

2°) Les trois colonnes du tableau n'étant pas exclusives, on peut débattre de **leurs liaisons.** Les élèves se sont montrés disponibles par exemple pour répondre à des questions plus générales du genre "pourrait-on avoir des OUI sur toute une ligne ?".
Des élèves éprouvent le besoin de justifier le "c'est possible" avec un exemple **et** un contre-exemple (sous entendu d'un "ce n'est que possible", révélant une fois de plus l'omniprésence du Principe d'Information Maximum qui n'a aucune place dans les propos mathématiques). Ce peut être l'occasion d'une fructueuse discussion.

3°) Il peut être utile à cette occasion de distinguer avec les élèves l'importance des différences de **niveaux de langage**, l'interprétation de "c'est impossible" en "c'est

impossible de dire que c'est vrai" comme le font certains élèves, fausse évidemment les réponses et c'est l'occasion de préciser ces nuances-là. Une telle interprétation se retrouve dans la fréquence des "oui" à la troisième colonne de l'activité 1, qui finit par se révéler par les argumentations de certains élèves.
Le sens de ces tournures linguistiques courantes en mathématiques, masquant des quantifications, qu'il sera indispensable de bien maîtriser lorsque les élèves auront à manipuler des inéquations avec inconnues (et paramètres !) mérite d'être mis en place assez tôt. On trouve ici l'occasion de corriger des constructions amphigouriques que la langue naturelle permet, mais qui ne peuvent que compliquer la pensée de l'élève. Ainsi certains utilisent des constructions comme :

« c'est obligatoirement possible ... »
« c'est sûr si on met ... »
« ça peut être sûr ... »
« c'est possible et c'est impossible ... »
« c'est impossible de dire que c'est sûr »

L'abstraction à franchir lors de l'utilisation de variables dans les équations et inéquations et qui devra faire sortir l'élève de la dichotomie VRAI-FAUX (lorsqu'il n'y a pas de variables), trouve ici l'occasion de se préciser. Pour beaucoup «*impossible* » a le même sens que « *faux*» et « *sûr* » a le même sens que « *vrai »*.
Ainsi on trouve des tournures comme dans la ligne 5 de l'activité 2 :

« *si on remplace par…c'est sûr* »
« *si on remplace par…c'est impossible* »

L'élève peut comprendre sur de tels exemples que sa construction linguistique, bien que raisonnable en langue naturelle, n'est pas ici adaptée et qu'il serait préférable d'argumenter :

"*si on remplace par…c'est vrai*"
"*si on remplace par…c'est faux*"

4°) L'inégalité large, qui introduit une disjonction que l'on sait difficile à gérer, complique la tâche de la plupart des élèves et les conduit à répondre sans autre étonnement « c'est sûr » et « c'est impossible » à la ligne 3 de l'activité 2, puisque 19 = 2▮ n'est jamais possible.

5°) On peut distinguer les deux démarches spontanément utilisées par les élèves, et discuter en prolongeant l'exercice de leurs avantages ou de leurs limites :
- approche en **extension** où l'élève énumère tous les cas possibles,
- approche en **compréhension** , le plus souvent dissimulée par un "etc.…" qui revient à une généralisation considérée comme évidente ou un "a fortiori".
On trouve parfois des argumentations complètes et bien construites comme pour la ligne 7 de l'activité 2 : « *comme on peut mettre qu'un chiffre et que le plus grand est 9 ...* », ou comme dans l'utilisation spontanée et assez fréquente de tournures telles que « *même si …* ».

6°) On constate que reste fortement présent le pli selon lequel pour l'élève, en activités numériques « *il faut trouver le nombre* ».
Ainsi certains n'ont en tête comme objectif que de chercher ce qu'il faut mettre sous la tâche pour que ce soit vrai :
«*c'est sûr parce que j'ai pensé mettre sous la tâche …* ».

Même dans le cas de réponses correctes, on trouve la trace de cet objectif à atteindre : "*quoi mettre sous la tâche* ?", ainsi dans la ligne 7 de l'activité 2 : « *c'est impossible car il faudrait mettre 102* ».

Conclusion :
Le travail logique sur des locutions courantes du discours mathématique incluant des quantifications non explicitées n'est pas étranger aux élèves .
Ce travail est entravé par des maladresses d'expression et des imprécisions quant à la compréhension des notions de "c'est sûr", "c'est possible", "c'est impossible".
Ces deux remarques conjointes justifient un travail avec les classes sur des activités de ce type.

****

ACTIVITE 3

Il s'agit de deviner un nombre entier entre 100 et 140.
Pierre dit : *Il est entre* 100 *et* 120.
Paul dit : *Il est entre* 105 *et* 130
Roland dit : *Il est entre* 125 *et* 140

a) Est-il possible qu'ils disent tous les trois la vérité ?
b) Dans le cas où un seul dit la vérité, quels sont les nombres possibles ?

1°) La première observation qui se dégage est le besoin nettement présent chez les élèves **d'expliquer et de convaincre.** Il faut sans aucun doute partir de ce besoin naturel pour leur donner l'occasion de construire une conviction **structurée et critique**.

2°) La formulation présente de réelles difficultés rhétoriques. Ces difficultés sont présentes en permanence dans le discours mathématique et même dans la communication courante. Elles sont pourtant inhabituelles dans les activités proposées en numérique dans la classe de $5^{ième}$:
- "Est-il possible que tous ……" ($\exists\forall$)
- "Dans le cas où ……" (il s'agit d'une mise en situation "réellement" hypothétique, et non "formellement" hypothétique comme le constituent habituellement les "données" pour l'élève).
- "…les nombres possibles…" (il ne s'agit pas de calculer quoi que ce soit, mais de produire un ensemble de nombres caractérisés en compréhension par une propriété).

L'élève va devoir gérer mentalement à la fois des quantifications existentielles, universelles, des disjonctions, des conjonctions.

De fait beaucoup d'élèves ont du mal à bien maîtriser ces situations complexes :
«*on dit qu'un seul dit la vérité, mais on ne dit pas lequel, alors on peut pas trouver* »
«*mais alors, ils ont tous raison* ! »
«*finalement c'est quoi le nombre ?* ».
Ces difficultés sont réelles, mais est-ce une raison suffisante pour en protéger les élèves, et jusqu'à quand ? Ces difficultés ne sont-elles pas à la base même des difficultés en mathématique, voire même en dialectique quotidienne, sociale, politique, citoyenne…

3°) Le besoin de convaincre n'est soutenu par aucune maîtrise de l'argumentation (**de la langue elle même**)
Un exemple de raisonnement que l'on peut considérer comme **excellent** et dont l'absence de maîtrise rhétorique conduit à des tournures qui ne peuvent être considérées comme correctes[1], l'élève **veut dire** :

[Si Paul et Roland disent la vérité, c'est que Pierre ment**]**

ce qui reflète une très bonne compréhension de la situation, mais pour cela il dit :
« *Il est impossible que Pierre dise la vérité car le nombre ne peut se trouver qu'entre 125 et 130, et Pierre dit qu'il est entre 100 et 120* ».
En fait même lorsque l'élève a en tête un raisonnement correct, il n'a pas les moyens rhétoriques d'en produire une argumentation correcte.

- C'est l'occasion de distinguos linguistiques essentiels en mathématique :
[est-il possible que tous disent la vérité ?],
[tous peuvent-il dire la vérité ?],
[est-il possible pour chacun qu'il dise la vérité ?],
[chacun peut-il dire la vérité ?] …
la langue naturelle peut en effet laisser planer beaucoup d'interprétations avec ses nuances multiples, dès qu'une structure informative est un peu complexe.
De fait beaucoup d'élèves répondent « oui » à la première question, puisque tous restent dans l'intervalle 100-140.
On peut dégager avec la classe la nécessité de rigueur dans une communication qui se veut rationnelle et bien comprise par les intervenants.
On pourrait évidemment adopter des variantes de l'activité en jouant sur les positions des quatre intervalles et rendre plus explicites les différentes difficultés de compréhension.
Dans la mesure où de telles activités n'interviennent pas comme évaluation (ce serait irresponsable vu la flexibilité de la rhétorique), les élèves se prêtent volontiers à cette analyse du sens.

4°) Une fois de plus, une difficulté vient du préjugé lié au Principe d'Information Maximum contre lequel il est toujours essentiel de lutter. En l'occurrence, il peut se résumer ici de la façon suivante : si la vérité connue est qu'un nombre est compris entre 10 et 20, lorsque Julien (par exemple) dit (disposant d'une autre information) qu'il est compris entre 8 et 18, il se trompe ! puisque évidemment l'information qu'il transmet ne correspond pas à l'information connue comme étant la vérité.
Quelques types d'arguments visiblement victimes du PIM :
« *Pierre a tort puisque le nombre est compris entre 100 et 140* »

[1] On retrouvera pendant longtemps dans le cursus scolaire et même universitaire des traces de ces formulations qui ne peuvent pas être considérées comme correctes, bien qu'elles reflètent une compréhension correcte de l'élève, alors que la substance mathématique sera devenu l'essentiel de la difficulté, ce qui n'est pas le cas ici.

« *Non car on ne peut partir que de 100, et Paul et Roland disent que le nombre est entre 105 et 130 et 125 et 140* »
Dans une variante avec l'intervalle proposé par Pierre de 80 à 115 on obtiendrait sans doute des réponses avec Pierre menteur.
Il est très important de déceler cette mauvaise gestion d'informations avec variable chez l'élève, elle le conduira sans doute tôt ou tard à répondre « impossible » aux contraintes

$$1 \leq x \leq 2 \text{ et } 3/2 \leq x \leq 3$$

puisque x ne peut pas "être" (au sens occuper l'intervalle, se déplacer "d'un bout à l'autre") à la fois dans les deux.
C'est évidemment l'écueil épistémologique d'abstraction associée à l'usage de variable dans une contrainte qui est ici l'enjeu. Il ne faut pas croire que cette mauvaise gestion mentale soit anecdotique ou artificiellement accentuée pour notre propos, elle est présente dans l'esprit de beaucoup d'élèves et l'on pourrait par exemple aller jusqu'à citer le cas d'étudiants de première année d'université qui, devant la contrainte $-2 \leq \cos x \leq 2$, répondent « impossible », puisqu'ils savent très bien, en bons élèves, que $\cos x$ est compris entre -1 et 1.

5°) On rencontre des approches spontanées déjà bien structurées, et c'est l'occasion de les faire partager au reste de la classe :
« *Pierre dit que le nombre est inférieur à 120 et Roland dit qu'il est supérieur à 125…* »,
l'élève n'embarrassant son raisonnement que des hypothèses qui lui ont paru pertinentes par rapport à la question (affaiblissement des hypothèses).
« *Si Pierre dit la vérité…* », « *Si le nombre est 100…* », « *Si seul Pierre dit la vérité…* » (renforcement des hypothèses).

6°) C'est l'occasion de lutter contre des préjugés **méthodologiques** :

* le besoin de se raccrocher à (calculer ?) une vérité : LA réponse,

- qui dit LA vérité ?
- quel est LE menteur ?
- quel est LE nombre ?

« *Je pense que c'est Paul qui dit la vérité car Roland et Pierre ne sont pas d'accord* »

ou de lutter contre des préjugés **linguistiques** :

* des élèves éprouvent le besoin pour répondre par la négative, d'embarrasser leur pensée et leur argumentation de tournures négatives : « *Pierre dit qu'il ne peut pas être plus grand que 120…* ».
L'usage de formes négatives avec le verbe pouvoir (quantification existentielle) est toujours périlleux.

7°) Ce serait dommage aussi de laisser passer l'occasion d'exploiter un réflexe naturel chez beaucoup d'élèves de décrire des collections ({…;…;…;…}), et se priver d'un **vocabulaire** commode (de la langue française, n'ayant rien à voir avec les interdits des programmes) tel que "contenu dans", "intersection", "union", d'associer par exemple une collection à l'information fournie par chacun.

8°) Terminons avec les comportements extrêmes d'élèves.
- Ceux qui ont déjà une pensée et une expression très bien structurées, comme cet élève qui répond à la première question par cette simple phrase :

« *Ce n'est pas possible parce que le plus grand que dit Pierre est plus petit que le plus petit que dit Roland* ».
- Ceux pour lesquels la question n'a pas pris de véritable sens :
« *C'est Paul qui dit la vérité parce qu'il est plus prés de 140* »
« $\frac{105 \times 130}{100} =$ *136,5 c'est pas un entier alors c'est pas possible* »
« $\frac{105 \times 130}{100} =$ *136 % Paul a raison* »
(il faut dire que l'activité se situait la même semaine qu'une leçon sur les pourcentages).

Conclusion :
Les questions préfigurent, par leurs structures, des questions mathématiques que l'élève rencontrera ultérieurement.
L'observation des difficultés et la conscience des enjeux qu'elles représentent dans la formation intellectuelle de l'élève nous conduisent à poser l'intérêt pédagogique d'un travail autour de situations semblables à celle-ci de manière à mieux cerner leurs ambiguïtés, à affiner les distinguos nécessaires. De telles activités peuvent aider à structurer la pensée et le discours.
Il nous est apparu d'ailleurs que les élèves s'y prêtent volontiers et avec un certain bénéfice.
Il resterait nécessaire d'adapter la difficulté de l'énoncé au niveau de chaque classe pour en tirer efficacité.

****

ACTIVITES 4 et 5

Existe-t-il une fraction comprise entre 1 et 2 ?
Trouver plusieurs fractions (le plus possible) comprises entre 1 et 1,1.

Existe-t-il des fractions comprises entre 1 et 1,01 ?
Existe-t-il des fractions comprises entre 1 et 1,01 et inférieure à 0,5 ?

La partie argumentative de cette activité est évidemment bien faible. À la différence des précédentes, il n'y a ni "inconnue", ni généralisation (au sens de quantifications) qui apparaissaient dans la formulation des questions précédentes, ni disjonctions et l'aspect conjonctif des contraintes à satisfaire n'est a priori pas bien profond ; les tournures "existe-t-il" ou "trouver" n'ayant ici aucun rôle rhétorique structurant de type quantification, il s'agit purement d'une activité de production d'objets, la phase argumentative devant se limiter à justifier le choix proposé par comparaison de fractions et de nombres sous forme d'écriture décimale.

C'est par contre bien sûr les concepts en jeu qui vont révéler les difficultés des élèves face à des questions aussi peu habituelles. Et de fait le plus souvent la partie argumentative n'a pu être abordée tant l'incongruité même de ces questions a pu désorienter les élèves.
L'activité 5 avait été proposée en 97-98 dans des classes de $5^{ième}$ et de $4^{ième}$, et c'est le désarroi des élèves qui nous a poussé à expérimenter l'activité 4 en 98-99.
Notamment la deuxième question de l'activité 5, qui mettait en jeu la gestion de trois contraintes n'a jamais été abordée.

Il ressort majoritairement dans le comportement des élèves :

1°) Parler simultanément de fractions et de nombres exprimés sous forme décimale, comme dans l'activité 5, est plus qu'une difficulté pour les élèves, c'est vide de sens.

2°) Parler simultanément de fractions et de nombres entiers les conduits à essayer de combiner les entiers pour constituer des "assemblages fractions". Ainsi dans la première question de l'activité 4, il se révèle que c'est "l'objet-écriture" qui focalise l'attention des élèves, essayant d'associer 1, 2, des entiers et des décimaux compris entre 1 et 2. On trouve par exemple avec une écrasante majorité des réponses du genre.

«*oui* $\frac{1}{2}$ »

«*oui il y a* $\frac{1}{1},\frac{2}{1},\frac{3}{1},\frac{4}{1},L,\frac{9}{1}$ »

«*oui il y a* $\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{1}{3},L,\frac{1}{9}$ »

«*oui* $\frac{1,5}{1,5}$ »

«*oui il y a* $\frac{1}{2},\frac{1,1}{2},\frac{1,2}{2},L,\frac{1,9}{2}$ »

«*oui parce que* $\frac{1}{1}=1,1$ et $1 < 1,1 < 2$ »

ou des essais de classification

« $1=\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{1}{3},L,\frac{1}{9}$ et $2=\frac{2}{1},\frac{2}{2},\frac{2}{3},L,\frac{2}{9}$ »

3°) Par contre beaucoup gardent l'empreinte d'argument stéréotypé, qui apparemment est vide de sens pour eux

«*oui* $\frac{1}{2}$ *puisque le numérateur est plus petit que le dénominateur*»

«*oui* $\frac{1,5}{2}$ *car le numérateur est plus petit que le dénominateur*»

4°) Le concept de fraction constitue, on le sait, un obstacle épistémologique majeur du collège. C'est en effet la première fois dans l'apprentissage qu'une notion aussi fondamentale (non seulement pour la formation mathématique, mais pour la formation simplement de l'individu dans la société) demande un tel effort d'abstraction. Il va falloir gérer pour la première fois une classe d'équivalence de représentations comme un objet. Le passage de la vision mécanique de partage à celle de facteur multiplicatif (qui déjà heurte le sens commun pour lequel partager c'est réduire et multiplier c'est augmenter), à celle enfin de "nombre comme les autres" qui aura sa place sur une droite graduée, demande beaucoup d'effort d'abstraction.
Ces passages ne seront maîtrisés que tardivement. On peut citer ici le cas d'étudiants de première année d'université (peu nombreux, c'est vrai !) qui ne comprenaient pas pourquoi, l'énoncé d'un exercice parlant d'une probabilité p augmentée de 10 % de sa valeur, la correction utilisait 1,1p dans ses calculs.
On trouve très souvent dans les réactions d'élèves un effort argumentatif pour justifier les fractions proposées par la vision de partage ou de facteur multiplicatif :

«*oui* $\frac{3}{4}$ *car c'est* 1,5»

«*oui* $\frac{3}{4}$ *parce que* 1,5 *c'est* $\frac{3}{4}$ *de* 2 *et que* $1 < 1{,}5 < 2$»

ce "raisonnement" apparaît encore assez souvent et il est à remarquer que lors du débat avec la classe, cet argument emporte l'adhésion de la plupart des élèves. Sans doute parce qu'il semble plus sophistiqué que les autres, "fait plus sérieux", semble astucieux, et donc plus proche des arguments que donne en général le professeur.

5°) Signalons enfin un aspect encourageant dû à la maturité des élèves entre la 5ième et la 4ième.
Si ces exercices constituent des difficultés insurmontables pour la majorité des élèves de 5ième, ils sont relativement bien traités (l'activité 4 tout au moins) par les élèves de 4ième.
On citera volontiers une classe de 4ième qui ayant eu d'énormes difficultés en 5ième (activité 5, en 97-98) a très facilement satisfait à l'activité 4 (en 98-99), allant même avec un réel plaisir dégager des méthodes pour « *faire autant qu'on veut* » de fractions entre 1 et 1,1.

****

ACTIVITE 6

On donne : 3,5 cm < AB < 4 cm
4 cm < BC < 4,2 cm
3,9 cm < CA < 4,5 cm
Le triangle ABC peut-il être isocèle ?
Le triangle ABC peut-il être équilatéral ?

C'est l'occasion
1°) De prendre conscience de l'importance de préciser **le domaine** sur lequel on s'intéresse aux « inconnues» : peut-on prendre CA = 79/20 cm ?

2°) D'aborder dans ce sens l'introduction d'éléments qui ne sont pas dans les données, on gagnerait par exemple à détailler les questions en "isocèle en C ?", "isocèle en B ?", "isocèle en A ?".

3°) De nuancer des expressions argumentatives mal maîtrisées par les élèves :
« *oui il peut être isocèle parce que* BC *mesure* 4,1 cm *et* AC *mesure* 4,1 cm »
« *non car il n'y a pas trois longueurs égales* ».

4°) Peut-être de distinguer la profonde différence de nature entre le couple **vrai-faux** et le couple **bon - pas bon**, (on comprend tout à fait que l'élève les confonde, face à l'objectif du résultat : sa note), l'un relève de l'universel, l'autre du conventionnel. L'élève qui répond « *oui, en prenant* 4, 4 *et* 4 », révèle une mauvaise maîtrise du signe $<$, ou simplement une étourderie, mais n'a certainement pas "faux" au sens du raisonnement.

5°) De cultiver le réflexe naturel chez presque tous les élèves de constituer et de décrire en extension des collections {…;…;…;…} (cf. remarque 7 sur l'activité 3) ; les élèves écrivent en effet volontiers spontanément : AB peut-être {3,6; 3,7; 3,8; 3,9},(ici certes abusivement tant que n'a pas été précisé le domaine, les décimaux à un chiffre après la virgule par exemple).

****

ACTIVITE 7

Le nombre entier x est compris entre 4 et 11.
Le nombre entier y est compris entre 5 et 17.

Quel est le plus grand écart possible entre x et y ?
Quel est le plus petit écart possible entre x et y ?

La valeur absolue a été écartée en tant que telle des programmes du premier cycle (pour éviter sans doute des dérives trop artificielles), c'est dommage pour l'apprentissage, car la **comparaison d'écarts** ($|\ |$ et $\leq$) constitue le fondement même de l'analyse et offre beaucoup de prétextes variés à un bon apprentissage du raisonnement.

1°) Une très nette différence apparaît entre une classe « normale-bonne » et une classe « faible », "écart" est compris sans aucun problème dans l'une, alors qu'il est très mal perçu dans l'autre. Pratiquement tous dans cette dernière y parlent de « *l'écart de x* », « *l'écart de y* ».

2°) C'est l'occasion là aussi,

- d'attendre de la part de l'élève une réponse dans laquelle il n'y a pas **la valeur** d'une inconnue x ou y à calculer.
- de constater que l'argumentation peut se construire sur un cas particulier qui suffit

($x = y$) (presque tous les élèves énumèrent tous les cas pour lesquels $x = y$)

- d'élargir la discussion et de constater les différences de nature de l'argumentation suivant que les intervalles de x et de y sont inclus l'un dans l'autre ou disjoints.

3°) Signalons là aussi des "naufrages" :

- « *le plus petit écart est x* »
- « 6 - 3,5 = 2,5 et 3,5 - 6 = - 2,5 »
- « *le plus petit x donc* 7 »

****

ACTIVITE 8

> **a)** Peux-tu trouver un nombre entier qui additionné à son suivant donne 65 ?
> **b)** Peux-tu trouver un nombre entier qui additionné à son suivant donne 84 ?

Il peut être utile de

1°) Débattre de l'interaction Quantification-Réponse (cf. remarque 1 sur l'activité 1) dans les cas

a) qui n'a pas besoin d'autre argumentation que 32+33 = 65,

b) qui demande beaucoup plus de travail.

2°) D'analyser avec la classe des argumentations

- <u>correctes</u> qui pourraient être améliorées en explicitant des sous entendus :
  - « 41+42 = 83 *est trop petit*
    42+43 = 85 *est trop grand*
    donc c'est impossible »
  - « *non car un nombre impair suit forcément un nombre pair et leur somme est forcément un nombre impair* »
    - ou <u>douteuse</u>

    « *Pour faire* 5 *il faut* 3+2
    et pour faire 60 *il faut* 30+30
    donc j'ai trouvé 32+33 *et c'était juste* »

  en renouvelant ce type de raisonnement avec 75 par exemple.

3°) Étendre l'exercice en

- distinguant **la connaissance** (être convaincu qu'il existe deux entiers qui…) et **la méthode** (comment trouver deux entiers qui[2]…), (Aspect déclaratif / Aspect Procédural).

[2] Quand on sait qu'ils existent !

- dégageant l'intérêt qu'il peut y avoir à introduire une lettre pour traduire la contrainte qu'on cherche à satisfaire [3] pour une généralisation.
- pourquoi pas, suivant le niveau de la classe, avec trois nombres consécutifs ; un élève apporte une telle réponse pour 84 (ça deviendrait néanmoins très difficile pour une classe de 5ième normale).

4°) Revenir sur l'importance du domaine sur lequel sont considérés les individus dont on parle, " *le suivant* " n'aurait par exemple pas de sens sur les décimaux. Quelques élèves sont tentés en effet (et c'est tout à leur honneur) de chercher la possibilité de réponse sur les décimaux.

[3] Cet exercice figure dans beaucoup de manuels au chapitre "équations", on comprend par l'approche spontanée qu'en ont les élèves combien la "brutalité" d'une mise en équation doit leur paraître artificielle, et constituera à leurs yeux "La" solution du professeur.

Annexe 1

Nous proposons ici des activités qui ont été partiellement expérimentées avec des classes de $5^{ième}$ et $4^{ième}$, mais dont les comptes rendus n'ont pas été suffisamment analysés pour justifier un commentaire de notre part. Nous les proposons néanmoins pour prolonger l'esprit de notre étude suivant lequel les occasions de développer la réflexion et les nuances argumentatives ne manquent pas en numérique au-delà des automatismes à acquérir de résolution, transformation, calcul.

Ainsi que nous l'avons évoqué au chapitre IV, les différentes nuances afférentes à l'usage du signe " = " ne s'acquièrent qu'avec beaucoup d'efforts et de pratiques variées pour l'élève. Rappelons entre autres :

1) L'égalité comme "input", comme réponse de l'exécution d'un calcul (d'un programme !) fait à la main ou à la calculatrice.

Ainsi dans l'écriture $a=\frac{2261}{2023}$, le symbole "a" représente aussi bien le nom affecté à ce calcul-programme que le nom affecté à la réponse après exécution de celui-ci.

2) L'égalité comme propriété VRAIE ou FAUSSE, à justifier : $15 - 7 = 2 \times 4$

3) L'égalité comme affectation de valeur à une variable : " pour $x = 7$ ……".

4) L'égalité comme " contrainte " (i.e. utilisant des littéraux, équations)

a) qui ne peut être envisagée comme une propriété VRAIE ou FAUSSE que si elle est assortie de locutions quantifiantes : "*pour tous les nombres* …" ou "*il existe un (ou des) nombre(s).*"Des propos comme "*on peut écrire* $2(x - 1) = 2x - 2$ " ont certes l'avantage de mettre l'accent sur l'aspect dynamique, algorithmique d'une réécriture autorisée, mais éloignent du sens statique universel de " l'égalité vraie pour tous les nombres "

b) pour laquelle on demande d'identifier les éventuels nombres pour lesquels la contrainte est satisfaite. Demande, habituellement signifiée par "*résoudre* " et qui malheureusement finit par associer étroitement dans l'esprit de l'élève "l'expression" de la contrainte et un de ses "algorithmes de résolution", le paralysant par exemple au lycée lorsqu'il devra "résoudre" $|x - 1| + |x - 2| = 2$.

c) naturellement on a les mêmes aspects pour les contraintes utilisant les symboles $<$ et $\leq$.

5) L'égalité comme identité remarquable à graver dans le marbre (ou au moins à inscrire dans un formulaire), avec en général deux littéraux dont on ne sait plus d'ailleurs s'il faut les appeler inconnues, variables, paramètres, constantes, …

Les activités proposées ci-dessous peuvent peut-être permettre de mettre en place pour l'élève ces différences nuances. Rappelons que ces activités ne constituent que des exemples et ne sont pas proposées "clés en main". Elles demandent à être adaptées à chaque classe, ou à la conduite que souhaite mener le professeur pour animer un débat dans la classe ou dans de petits groupes d'élèves.

Activité 1

Étudions à l'aide d'une calculatrice les nombres :

$$a=\frac{2261}{2023},\quad b=\frac{2527}{2261},c=\frac{75025}{46368},d=\frac{121393}{75025}$$

1) Est-il vrai que a = 1,117647058 ?

2) À l'aide de la calculatrice, écrit une valeur approchée de ces nombres.

Pour le calcul de (2261÷2023), *ma calculatrice répond* : ……

Pour le calcul de (2527 ÷ 2261), *ma calculatrice répond* : ……

Pour le calcul de (75025 ÷ 46368), *ma calculatrice répond* : ……

Pour le calcul de (121393 ÷ 75025), *ma calculatrice répond* : ……

3) Est-il vrai que a = b ?

4) Est-il vrai que c = d ?

Activité 2

On veut bien comprendre la signification de phrases comme :

A ***l'équation est toujours satisfaite***

B ***l'équation n'est jamais satisfaite***

C ***l'équation peut être satisfaite***

D ***l'équation ne peut pas être satisfaite***

E ***l'équation est toujours fausse***

F ***l'équation n'est jamais fausse***

1° On considère les deux expressions : $2x + 8$ et $5x - 22$.

a) Calcule l'expression $2x + 8$ pour $x = 10$.

Calcule l'expression $5x - 22$ pour $x = 10$.

b) Quels sont parmi les énoncés A, B, C, D, E, F ceux qui sont corrects pour l'équation

$$2x + 8 = 5x - 22$$

2° On considère les deux expressions : $2x + 3$ et $4x + 1$.
a) Calcule l'expression $2x + 3$ pour $x = 3$.
Calcule l'expression $4x + 1$ pour $x = 3$.
b) Quels sont parmi les énoncés A, B, C, D, E, F ceux qui sont corrects pour l'équation

$$2x + 3 = 4x + 1$$

3° On considère les deux expressions : $2x + 8$ et $2(x + 4)$.
a) Calcule l'expression $2x + 8$ pour $x = 5$.
Calcule l'expression $2(x + 4)$ pour $x = 5$.
b) Quels sont parmi les énoncés A, B, C, D, E, F ceux qui sont corrects pour l'équation

$$2x + 8 = 2(x + 4).$$

4° On considère les deux expressions : $3x + 2$ et $3(x - 2)$.
a) Calcule l'expression $3x + 2$ pour $x = 7$.
Calcule l'expression $3(x - 2)$ pour $x = 7$.
b) Quels sont parmi les énoncés A, B, C, D, E, F ceux qui sont corrects pour l'équation

$$3x + 2 = 3(x - 2).$$

Activité 3

Même activité que la précédente, avec inégalité (inéquation ?) au lieu d'égalité

1° On considère les deux expressions : $2x + 7$ et $3x - 8$.
a) Calcule l'expression $2x + 7$ pour $x = 20$.
Calcule l'expression $3x - 8$ pour $x = 20$.
b) Quels sont parmi les énoncés A, B, C, D, E, F ceux qui sont corrects pour l'inéquation

$$2x + 7 < 3x - 8.$$

2° On considère les deux expressions : $2x + 7$ et $3x - 8$.
a) Calcule l'expression $2x + 7$ pour $x = 15$.
Calcule l'expression $3x - 8$ pour $x = 15$.
b) Quels sont parmi les énoncés A, B, C, D, E, F ceux qui sont corrects pour l'inéquation

$$2x + 7 \leq 3x - 8.$$

3° On considère les deux expressions : $2x + 7$ et $2(x + 5)$.
a) Calcule l'expression $2x + 7$ pour $x = 10$.
Calcule l'expression $2(x + 5)$ pour $x = 10$.
b) Quels sont parmi les énoncés A, B, C, D, E, F ceux qui sont corrects pour l'inéquation

$$2x + 7 \leq 2(x + 5).$$

Activité 4

Relier chacune des égalités suivantes à l'affirmation ou aux affirmations qu'elle satisfait.

Explications

$x + 3 = 7$	C'est toujours vrai C'est toujours faux Cela peut être vrai Cela peut être faux Ce n'est jamais vrai Ce n'est jamais faux

Explications

$2\,x \times 4 = 8\,x$	C'est toujours vrai C'est toujours faux Cela peut être vrai Cela peut être faux Ce n'est jamais vrai Ce n'est jamais faux

Explications

$7x = 11$	C'est toujours vrai C'est toujours faux Cela peut être vrai Cela peut être faux Ce n'est jamais vrai Ce n'est jamais faux

Explications

$7x = 8x$	C'est toujours vrai C'est toujours faux Cela peut être vrai Cela peut être faux Ce n'est jamais vrai Ce n'est jamais faux

Explications

$x = x + 1$	C'est toujours vrai C'est toujours faux Cela peut être vrai Cela peut être faux Ce n'est jamais vrai Ce n'est jamais faux

Activité 5

Relier chacune des inégalités suivantes à l'affirmation ou aux affirmations qu'elle satisfait.

Explications

$x > x$	C'est toujours vrai C'est toujours faux Cela peut être vrai Cela peut être faux Ce n'est jamais vrai Ce n'est jamais faux

Explications

$x \geq x$	C'est toujours vrai C'est toujours faux Cela peut être vrai Cela peut être faux Ce n'est jamais vrai Ce n'est jamais faux

Explications

$x + 1 > x$	C'est toujours vrai C'est toujours faux Cela peut être vrai Cela peut être faux Ce n'est jamais vrai Ce n'est jamais faux

Explications

$x + 1 \geq x$	C'est toujours vrai C'est toujours faux Cela peut être vrai Cela peut être faux Ce n'est jamais vrai Ce n'est jamais faux

Explications

$x + 2 < x$	C'est toujours vrai C'est toujours faux Cela peut être vrai Cela peut être faux Ce n'est jamais vrai Ce n'est jamais faux

Annexe 2

COMMUNICATION INTELLECTUELLE COURANTE ET COMMUNICATION MATHEMATIQUE AU COLLEGE

La communication ordinaire de la vie sociale et collective nécessite une bonne compréhension et une bonne maîtrise de difficultés conceptuelles générales qui se trouvent déjà sous une forme simplifiée, objectivée, et qui risquent donc de paraître abstraites et artificielles dans l'apprentissage des modélisations mathématiques au collège. C'est pourtant un cadre approprié à l'apprentissage de concepts généraux et de formes argumentatives.

Il est inutile même de se référer à des impacts directs de notions mathématiques dans la vie citoyenne nécessitant par exemple de donner du sens à un propos tel que : " *58 % des salariés avaient moins de vingt ans, tandis que 64 % des moins de vingt ans étaient salariés en 1995, alors qu'en 1998……*", beaucoup d'autres messages sans lien direct avec des notions mathématiques sont aussi (sinon plus) complexes, et il serait peut-être heureux de mettre en lumière dans le cadre d'objets mathématiques ces articulations rhétoriques et conceptuelles.
Essayons de localiser quelques aspects de ces « composantes de difficultés à construire une conviction, l'argumenter, la discuter, la communiquer ».

L'enchaînement déductif des propriétés est sans doute le plus spécifique aux mathématiques. Il se réfère surtout à une bonne gestion mentale durant le parcours dans le labyrinthe des inférences
1) des informations (convictions) déjà acquises (ou supposées telles)
2) de la conviction à atteindre.
Les argumentations de la vie courante sont rarement aussi structurellement labyrinthiques dans leurs enchaînements et s'appuient surtout sur des effets rhétoriques, affectifs, d'autorité, de psychologie, de talents oratoires ou littéraires.

Sortir du cadre dans lequel se pose le problème est déjà une situation plus fréquente. L'action même d'innover nécessite toujours le dépassement du cadre dans lequel on croyait (soi-même ou tout le monde) que le problème ou la recherche aurait une réponse, que ce soit en art, en économie, en politique, sur les conflits sociaux, …. Il y a donc toujours un risque, un engagement intellectuel, une mise en responsabilité de ses actes, et dans tous les cas une prise de conscience claire des contraintes qu'on s'impose par préjugés, ou qu'on croit imposées par l'institution et qu'une réponse au moins satisfaisante obligera à transgresser.
C'est pour l'élève de collège par exemple le risque d'oser répondre "*0,85* " à la question "*y a-t-il un nombre compris entre 8/10 et 9/10 ?* " ou "*85/100* " à la question "*y a-t-il une fraction comprise entre 8/10 et 9/10 ?* ". C'est l'occasion pour lui de clarifier les cadres de fractions décimales, fractions, nombres ; plus généralement de s'interroger précisément sur le cadre même d'une difficulté que l'on cherche à résoudre, avant de se précipiter sur une réponse spontanée et affective que l'on aura du mal à justifier rationnellement.

Les difficultés liées à la complexité des concepts, aux hiérarchies prédicatives (individus, classes d'individus, familles de classes d'individus, …) ou au métalangage (fait, jugement du fait, jugement sur le jugement du fait, …) sont par contre particulièrement présentes dans la communication courante. Prenons quelques exemples :

- On évoque souvent la difficulté des élèves à maîtriser la compréhension de certaines phrases complexes. «*C'est en particulier le cas pour celles qui contiennent des groupes nominaux ou des expressions longues qui ne peuvent être découpées sans perdre leur signification. Par exemple : "la perpendiculaire à (D) passant par A", "le symétrique de A par rapport à la droite (BC)», « la probabilité conditionnelle de B sachant A", ou " f(x) tend vers 0 lorsque x tend vers 0 "*» (cité de [Houdebine J.,98]). De fait c'est une réelle difficulté, mais n'est-ce pas là la forme la plus simple de l'apprentissage à la maîtrise de compréhension de la communication ordinaire de la vie citoyenne ?. N'importe quelle information prise au hasard dans la presse du jour ne contient-elle pas des structures de liaisons complexes autant par l'articulation des faits évoqués, que par la hiérarchie des prédicats et jugements utilisés : " …*Ce document d'une centaine de pages propose des principes et un cadre opérationnel « au plan national et pour le long terme », pour conserver l'ensemble des espèces animales, végétales et microbiennes, gérées et exploitées par l'homme, et présentant « un intérêt agricole, industriel, économique, scientifique, social ou culturel ». En ce qui concerne les ressources végétales, celles-ci peuvent être conservées dans leur milieu naturel (in situ, telles les espèces forestières) mais aussi en dehors de leur habitat naturel, de manière statique (conservation ex-situ, sous forme de semence, de plants in vitro ou de plantes), voire dynamique.* "[4]

- Il est étonnant de constater combien des structures rhétoriques tant soit peu complexes échappent à la compréhension courante.
Signalons par exemple tel exercice de Deug dans lequel il est dit par définition

qu'un entier n vérifie la propriété P_1 lorsque…
qu'un entier n vérifie la propriété P_2 lorsque…
qu'un entier n vérifie la propriété P_3 lorsque…
qu'un entier n vérifie la propriété P_4 lorsque…

Chaque année, c'est une forte majorité d'étudiants qui demandent ce que peut bien signifier la première question :
"*1) Donner quatre nombres entiers qui aient respectivement chacune de ces propriétés, mais pas deux des trois autres.*"

La maîtrise de la communication n'a ici rien de mathématique au sens strict et dans une situation d'information ordinaire on peut imaginer un délit financier impliquant quatre associations (de pêcheurs à la ligne, de joueurs de golf, de joueurs de bridge, de joueurs de pétanque), pour lequel « le juge d'instruction convoquera quatre personnes appartenant respectivement à chacune de ces associations, mais pas à deux des trois autres », ou bien « le juge d'instruction convoquera un membre de chaque association, n'appartenant pas à plus de deux de ces associations ». S'interroger sur le fait que ces deux informations signifient ou non les mêmes possibilités ne relèvent pas à strictement parler des mathématiques mais de la maîtrise du sens dans la communication

[4] « L'indispensable gestion des ressources génétiques », Le Monde du 12 mars 1999.

- La hiérarchie des ordres de prédicats se trouve par exemple illustrée à travers les nuances qu'il y a entre les informations telles que :
Monsieur X est un libéral.
Monsieur Y est un défenseur du libéralisme.
Monsieur Z trouve un intérêt à défendre le libéralisme.
Monsieur T milite dans une association qui dénonce l'intérêt que trouvent certains à défendre le libéralisme.

- Le même type de nuances peut aussi se trouver dans la hiérarchie entre le résultat d'une méthode, les résultats de différentes méthodes, les différents systèmes permettant différentes méthodes …. La communication ordinaire n'échappe pas à l'évocation de ces hiérarchies, ainsi de telles nuances se retrouvent dans les propos de tel ministre concernant la lutte contre l'exclusion :
Je ne vois pas comment obtenir mieux !
(qui sous-entend une mesure, ou au moins une évaluation comparative des résultats et implique personnellement le locuteur)
Les méthodes dont je dispose ne me permettent pas d'obtenir mieux !
(qui de plus nécessite un inventaire exhaustif des méthodes envisagées, une pleine conscience de la part du locuteur de cet inventaire)
Il n'y a aucun moyen possible d'obtenir mieux !
(qui de plus nécessite une connaissance de toutes les méthodes imaginables pour atteindre ce but, et cela indépendamment du locuteur)

Les usages métalinguistiques sont fréquents dans la communication courante et n'y sont évidemment pas toujours explicités, le rôle du contexte étant énorme.

1) *Pour aller en train de Lille à Caen, il faut passer par Paris.*
sous-entend une certaine nécessité
2) *Pour lutter contre l'exclusion, il faut réduire le chômage.*
sous-entend plutôt une condition suffisante (ou supposée telle par le locuteur) du genre, " il *n'y a qu'à "*, mais avec une connotation beaucoup plus contextuelle comme : "*certes il y aurait d'autres moyens, mais peu réalistes, réduire le chômage semble la seule condition suffisante qu'on puisse réaliser* ", qui à nouveau conduit à une certaine nécessité du " *il faut* ".

La communication en cours de mathématiques débarrassée de connotations contextuelles, permet de mieux comprendre ces effets du métalangage. Citons pour garder le même canevas la situation déjà évoquée au chapitre III :

1) *Pour que* A *soit vrai, il faut que* B *le soit.*
qui évoque bien la nécessité
2) *Pour montrer* P, *il faut que tu montres* Q.
qui peut évoquer une condition suffisante (un conseil, une indication), ou même une nécessité (par rapport au programme de la classe ou l'avancement du cours).
À un premier niveau de communication : Q est suffisant pour avoir P ; à un deuxième niveau : l'état actuel des méthodes dont tu disposes nécessite que tu montres Q.

Dans les dialogues mêmes, les nuances sur les faits, les jugements, les jugements des jugements, …sont permanents :

le journaliste : - *lutter contre l'exclusion est-ce pour vous lutter contre le racisme ?*
l'invité : - *je ne suis pas sûr qu'il faille poser la question comme ça !*
le journaliste : - *vous ne pouvez néanmoins pas en tant que représentant de l'Etat décider des questions de société qui se posent ou ne se posent pas.*

Dans un premier temps, les faits élémentaires "*lutter contre l'exclusion*" et "*lutter contre le racisme* " vont se trouver objets dans un lien de causalité qui demande une réponse VRAI, FAUX, OUI, NON. Dans un deuxième temps c'est le lien de causalité lui-même qui devient objet du jugement, pour un prédicat de type *bonne* ou *mauvaise question*, et qui n'engage évidemment en rien une réponse VRAI ou FAUX au premier jugement. Enfin dans un troisième temps c'est un jugement sur un prédicat d'ordre à nouveau supérieur, liant "l'objet" *représentant de l'Etat* à l'objet qu'est devenu le prédicat précédent : *bonne* ou *mauvaise question*.

De tels sauts dans la hiérarchie des ordres de jugements sont permanents dans les communications les plus courantes, ainsi :

- " *Vous dites cela parce que vous êtes céréalier !* "

Ce dernier jugement doit-il être pris pour :

- " *Seuls les céréaliers disent cela !* "
- " *Seuls des céréaliers peuvent dire cela !* "
- " *Les céréaliers disent tous cela !* "
- " *Si vous n'étiez pas céréalier, vous ne diriez pas cela !* "

Et une réfutation de ce jugement doit-elle être

- " *Non, des viticulteurs aussi pensent cela !* "
- " *Non, certains céréaliers ne sont pas du tout de cet avis !* " ?

On estimera toutes les nuances qui peuvent se trouver derrière ces interpellations ordinaires. Les différences de sens du jugement sont évidemment importantes.

Le cadre des objets mathématiques et des informations sur ces objets est évidemment un terrain idéal pour développer la compréhension de ces nuances de communication entre l'objet, la méthode, le jugement sur la méthode, le jugement sur le jugement …

L'utilisation d'affaiblissement d'une information dans une argumentation est fréquente dans le discours mathématique. Elle est très mal perçue dans la communication courante qui s'appuie essentiellement sur le **Principe d'Information Maximum**. Il est important dans la formation intellectuelle de distinguer clairement ce qui est contextuel, du contenu strictement objectif de l'information.

Il est clair que l'expert chargé de mission sur l'état des infrastructures de la société X, qui communique au conseil d'administration une phrase comme :

" *Il y a des services dont le matériel est obsolète* "

communique une information objective qui est l'existence de services dans cette situation ; y en a-t-il peu ? beaucoup ? tous ?. Textuellement le message n'en dit rien, exactement comme le ferait l'information mathématique

"*Il y a des nombres pairs qui sont somme de deux nombres premiers*".
C'est une décision de recensement et d'évaluation du budget à prévoir qui concerne le conseil d'administration. Mais néanmoins l'information dans son contexte exclut que tous les services soient dans cette situation. Le travail de l'expert serait jugé peu sérieux si c'était le cas.

Distinguer la partie neutre et objective de l'information de la partie contextuelle est évidemment une nécessité dans la communication mathématique. Une fois de plus cet apprentissage trouve un terrain idéal dans le cours de mathématiques.

Une bonne gestion mentale des articulations structurantes, (conjonction, négation, locution de causalité, quantifications) est indispensable pour maîtriser l'interaction de la syntaxe et du sens. Rappelons l'exemple du test évoqué au chapitre III révélant à quel point il n'est pas spontané de saisir les nuances qu'il y a entre des informations banales comme :

1) "*Chacune de nos agences qui n'a pas de site internet, a un service Relation Publique* "
2) "*Chacune de nos agences qui n'a pas de service Relation Publique, a un site internet* "
3) "*Chacune de nos agences qui a un distributeur de billets, a un service informatique* "
4) "*Chacune de nos agences qui a un service informatique, a un distributeur de billets* "

Le cadre d'un enseignement de mathématique est peut-être des mieux adaptés à l'analyse de ces différences, dans la mesure où il doit gérer en permanence des articulations structurantes de cette nature-là, portant sur des objets complètement décontextualisés, neutres et n'interférant donc pas avec les jugements.

Enfin restent les difficultés d'apprentissage liées à la notation-dénotation.
En termes traditionnels, on pourrait dire : « Quel sens donner à une variable ?», en termes "adaptés à l'entrée dans le troisième millénaire", on pourrait plutôt le présenter par : « Quel sens donner à une adresse ?» [*adresse* : expression numérique ou littérale représentant un emplacement de mémoire permettant d'y retrouver une information (Petit Robert)].

Ainsi par exemple les adresses ($\boldsymbol{cos^2x+sin^2x}$) et ($\boldsymbol{y^6+1)/(y^6+1}$) sont totalement différentes, mais leur contenu sera toujours le même quel que soit le contenu de l'adresse de $\boldsymbol{x}$ et celui de l'adresse $\boldsymbol{y}$.
Cette nécessité d'utilisation d'adresse, avec nécessité de les distinguer de leur contenu n'apparaît pas vraiment dans la vie intellectuelle courante. Elle ne pourrait au mieux apparaître que lorsqu'il s'agit d'établir une propriété, une règle, une loi, entre divers individus ayant certaines relations entre eux. L'adressage devient nécessaire ou simplement commode lorsque les individus en jeu doivent intervenir plusieurs fois dans l'énoncé.

De telles situations se rencontrent par exemple dans le règlement d'une activité sportive collective (que l'on pense par exemple à un énoncé bien précis concernant la règle du hors-jeu au football, ou pire l'énoncé des règles du base-ball, on n'hésite d'ailleurs pas dans ces textes à parler du joueur A, du joueur B etc.).

C'est aussi évidemment dans les codes juridiques qu'on est le plus près de ces situations dans lesquelles plusieurs individus liés les uns aux autres par des relations (intérêts communs, association…) vont apparaître plusieurs fois dans le même énoncé. D'où la fréquence élevée dans ces textes de *ce dernier, celui-ci, l'un d'eux, de la dite, de l'autre, elle même, dudit, les partis, autrui, celui d'entre eux, ….*

Mais ces occurrences variées d'individus dans un même énoncé restent infimes par rapport aux énoncés mathématiques, et si les articles du code civil ou les règlements d'un sport collectif paraissent complexes à énoncer, le nombre des intervenants et leurs interactions restent bien faibles en comparaison des interactions qu'ont les individus dans une propriété mathématique aussi simple que la relation dite de Thalès concernant cinq droites et six points.
Autre exemple, un énoncé général synthétisant le constat de

$3.(2+5) = (3.2)+(3.5)$, $7.(4+1) = (7.4)+(7.1)$…

nous conduira à admettre que toute tentative du genre :
« *Quels que soient les trois nombres entiers choisis, on obtient le même résultat en …le premier…la somme des deux autres, ou…* » complique le concept acquis en alourdissant avec des désignations comme « *le premier…* » « *…chacun des deux autres…* » et restera de toute manière insatisfaisant puisqu'en définitive il ne s'agit pas seulement de « *trois nombres* » mais bien de « *trois choix de nombre* » qui n'exclue évidemment pas la répétition, on en revient à nos adresses, qui bien que distinguables (on va les utiliser différemment dans l'énoncé) n'auront pas de liens privilégiés avec leur contenu (qui évidemment peut être trois fois le même). Imaginons l'amphigouri d'une phrase essayant de renouveler la tentative en parlant cette fois de « trois choix de nombres » au lieu de « trois nombres ».

C'est un progrès énorme de la pensée rationnelle à la recherche d'efficacité de distinguer la communication sur les adresses (les variables) et la dénotation (le contenu, le sens) après opérations sur les adresses, pour arriver à :
« *Quelles que soient les valeurs* x, y, z, *on a toujours* $x.(y+z) = (x.y)+(x.z)$ »

Bien entendu cette économie à un coût conceptuel à payer :
1) abus de parler de valeurs x, y, z, alors qu'en fait il s'agit d'adresses distinctes et non de nombres
2) abus dans l'écriture $x.(y+z)$ puisqu'il s'agit d'opérer sur les contenus de ces adresses, et non sur les adresses elles mêmes.

Ce coût à payer est évidemment très lourd lors de l'apprentissage des élèves.
Mais il mériterait peut-être une attention permanente en débat avec la classe sur la distinction entre

adresse et contenu
variable et valeur
notation et dénotation

L'utilisation de l'outil informatique (de la programmation surtout) forcera (aidera) peut-être les générations à venir à une meilleure conscience de cette distinction fondamentale entre notation et dénotation pour la gestion et la communication d'informations, dès que celles-ci deviennent un peu complexes.

RESUME : Au sein même des mathématiques du collège, la tradition, le contenu des manuels, les textes mêmes des programmes, semblent faire de la géométrie le domaine privilégié de l'apprentissage du raisonnement.

Ainsi entend-on quelquefois situer les vrais débuts de l'apprentissage du raisonnement à la classe de 4è et ceci parce qu'on commencerait à y faire "des démonstrations" et l'on signifie alors par là : des démonstrations "de géométrie". Tel manuel d'ailleurs oppose, dans un "recueil de méthodes" les "méthodes de calculs" faites d'algorithmes aux méthodes de la géométrie constituées de démarches démonstratives. Si l'adulte peut comprendre le sens de cette séparation, elle présente pourtant le risque d'établir dans l'esprit de l'élève une dichotomie entre la géométrie où l'on démontre et le numérique où l'on calcule.

Dans les textes officiels enfin, les recommandations d'ordre général précédant chaque partie des programmes ne font essentiellement appel aux termes de raisonnement, justification, séquences déductives, démonstration que pour la géométrie. Dans le document d'accompagnement du cycle central, le paragraphe consacré au raisonnement s'intitule Raisonnement et démonstration en géométrie. Si l'importance accordée à la géométrie dans l'apprentissage du raisonnement au collège se justifie sans doute par le rôle prépondérant que joue en géométrie la combinaison des propositions et notamment de la manipulation des inférences, les difficultés du raisonnement ne tiennent pas seulement à cet art de combiner des inférences. Le raisonnement comporte en effet de nombreuses autres difficultés qui, elles, ne se rencontrent pas en priorité, du moins au collège, dans les activités géométriques, et leur maîtrise renvoie alors à des activités proprement numériques.

Réduire le raisonnement, au collège, à la démonstration en géométrie n'est pas suffisant pour la formation à l'argumentation rationnelle ; et cette réduction prend de plus le risque de construire pour l'élève une image de l'argumentation comme pur exercice de forme pour satisfaire le professeur, tant la géométrie élémentaire se prête bien à des enchaînements rigides.
Dans ce document, on repérera quelques difficultés liées pour l'élève à la construction d'une justification argumentée. L'apprentissage à les surmonter, trouve dans les activités numériques un cadre privilégié. Des activités expérimentées et analysées sont proposées.

MCL : argumentation en numérique, démontrer ou calculer, les implicites de la langue naturelle, le principe d'information maximum, les variables au collège, notation-dénotation..

BIBLIOGRAPHIE

Arsac G. 90 : Les recherches actuelles sur l'apprentissage de la démonstration et les phénomènes de validation en France ; Recherches en Didactique des Mathématiques vol 9/3 ; La Pensée Sauvage Editions 1990.
Balacheff N. 82 : Preuve et Démonstration en mathématiques au collège ; Recherche en Didactique des Mathématiques vol 3/3; La Pensée Sauvage Editions 1982.
Barbin E. 96 : Quelles conceptions épistémologiques de la démonstration pour quels apprentissages ? ; l'Enseignement des Mathématiques ; Topiques éditions 1996.
Bouvier A. 83 : Les géomètres du premier cycle ; Sans Tambour Ni Trompette, IREM de Lyon 1983.

Deledicq A. 95 : La perte du sens, essence des maths ; Bulletin de l'APMEP n^0 400, 1995.
Dieudonné J. 87 : Pour l'honneur de l'esprit humain ; Hachette 1987.
Dumont B. 83 : L'influence du langage et du contexte dans des épreuves de type «logique» ; IREM de Paris Sud, 1983.
Durand-Guerrier V. 95a : Place et rôle de la logique formelle dans la modélisation du raisonnement mathématique ; Actes de la VII'eme école d'été de didactique des mathématiques.
Durand-Guerrier V. 95b : Place de la logique formelle comme outil d'analyse ... ; in Différents types de savoir et leur articulation ; collection travaux et thèses de didactique ; La Pensée sauvage édition, 1995.
Durand-Guerrier V. 97 : Réorganisation et problématisation ... ; Actes de la IX'eme école d'été de didactique des mathématiques.
Duval R., Egret M.A. 93 : Introduction à la démonstration et apprentissage du raisonnement déductif ; Repères IREM, n°12, 1993.
Ouvert R. 96 : La notion de contre exemple au collège ; Repères IREM, n°22, 1996.
Gandit M., Masse-Demongeot M.C. 96 : Le vrai et le faux en mathématiques au collège et au lycée ; IREM de Grenoble 1996.
Gaud D., Guichard J.P. 84 : Apprentissage de la démonstration ; Petit x, n°4, 1984.
Houdebine J. 98 : La démonstration, écrire des mathématiques au collège et au lycée ; Hachette, Education, 1998.
Lakatos I. 84 : Preuves et Réfutations ; Hermann 1984.
Legrand M. 95 : Les mathématiques, mythe ou réalité ? ; Repères IREM, n°20, 1995.
Muller J.P. 94 : La démonstration en géométrie en 4° et en 3° ; Repères IREM, n°15, 1994.
Noirfalise R. 93 : Contribution à l'étude didactique de la démonstration ; Recherches en Didactique des Mathématiques vol 13/3 ; La Pensée Sauvage Editions 1993.
Reynaud R. 98 : Egalités et équations ; Bulletin de l'APMEP n° 418, 1998.
Robert A., Robinet J. 96 : Prise en compte du méta en didactique des mathématiques ; Recherches en Didactique des Mathématiques vol 16/2 ; La Pensée Sauvage Editions 1996