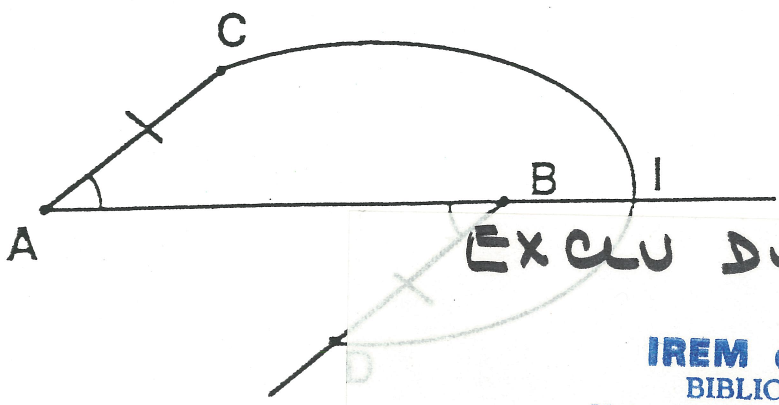
L'axiomatique de Hilbert et L'enseignement de la géométrie au collège et au lycée

Gilbert Arsac



Irem de Lyon

SOMMAIRE

L'AXIOMATIQUE DE HILBERT ET L'ENSEIGNEMENT DE LA GEOMETRIE AU COLLEGE ET AU LYCEE.

Gilbert Arsac

INTRODUCTION

Les problèmes soulevés par l'enseignement de la géométrie au collège et au lycée sont liés en particulier à la volonté de présenter la géométrie comme une théorie déductive, dans laquelle on fait des démonstrations. Ceci impose,par rapport à la scolarité antérieure, un changement du rôle de la figure, de ce que l'on a "le droit" de lire sur le dessin, et soulève le problème de ce qu'est une démonstration rigoureuse, du système d'axiomes auquel on se réfère.

L'étude d'une axiomatique géométrique comme celle proposée par Hilbert a-t-elle quelque utilité pour la compréhension et la résolution de ces problèmes? Je pense que oui, pour les raisons suivantes:

- les problèmes que se posaient les mathématiciens au début du vingtième siècle à propos de l'étude des fondements de la géométrie, des systèmes d'axiomes adéquats, des propriétés évidentes ou non, des relations entre géométrie euclidienne et non euclidienne, sont en gros ceux rappelés ci-dessus. Il est intéressant de voir quelles solutions ils y ont apporté, les limites de ces solutions, les échecs et les succès.
- les programmes actuels du CAPES introduisent une axiomatique affine de la géométrie. A mon avis personnel, un enseignant est aussi bien armé avec cette axiomatique qu'une poule avec un couteau pour résoudre les problèmes de l'enseignement de la géométrie. En effet, les programmes actuels mettent à nouveau l'accent sur le lien entre la géométrie et la connaissance de l'espace. Or cet aspect disparaît dans l'axiomatique affine. Celle-ci a l'intérêt d'apporter un point de vue unificateur sur les mathématiques et des démonstrations parfois plus simples d'un certain nombre de résultats, mais elle a comme inconvénient de ramener l'étude de la géométrie à celle de l'algèbre linéaire. Cette cohérence mathématique se paie d'une incohérence pédagogique car l'étude de l'algèbre linéaire vient après celle de la géométrie dans le cursus et s'appuie en général sur elle: les vecteurs, les plans, les droites de l'espace usuel sont d'un grand secours pour concrétiser les objets de l'algèbre linéaire. L'axiomatique affine permet donc de situer la géométrie dans un développement logique des mathématiques suivant l'ordre: ensemble, nombres entiers, rationnels, réels, complexes, espace vectoriel, espace affine. Mais il semble bien que l'on ait renoncé pour longtemps à calquer l'ordre pédagogique sur cet ordre, et que l'enseignement suive à nouveau une progression plus conforme à l'histoire dans laquelle l'étude de la géométrie précède celle de l'algèbre linéaire.

Au total, l'organisation actuelle de l'enseignement des mathématiques à l'université fait que le futur enseignant de mathématiques sera initié à la géométrie euclidienne au collège, en fera encore un peu au lycée puis n'en entendra plus parler que sous forme de géométrie affine, lors de la préparation au CAPES, de sorte que ses connaissances géométriques utilisables pour son enseignement remonteront pour l'essentiel à ses souvenirs de lycée et de collège.

Ainsi, *la géométrie se constitue en un espèce de monde clos sur l'enseignement secondaire* et sans lien apparent avec les mathématiques universitaires, sans le recul que donne une étude qui se situe au dessus du niveau de ce que l'on a à enseigner.

L'évolution historique a fait aussi que le point de vue euclidien qui faisait des cas d'égalité des triangles l'outil de base du raisonnement géométrique a été abandonné, au profit d'axiomatiques, inspirées d'abord par la géométrie affine au moment de la réforme des mathématiques modernes, puis actuellement, par "rien du tout" pourrait-on dire. Ce "rien du tout" signifiant qu'il n'y a pas de point de vue dominant mais des points de vue juxtaposés où interviennent très tôt des transformations comme la symétrie, mais sans qu'une axiomatique cohérente soit sous-jacente à l'organisation de l'enseignement.

Si ce monde géométrique est clos, il n'est pas mort: diverses initiatives proposent aux enseignants des solutions aux problèmes qu'ils rencontrent, comme par exemple la proposition d'enseignement de la géométrie d'Annie Cousin-Fauconnet (*Enseigner la géométrie au collège*, Armand Colin, 1995). Celle-ci est fondée sur une axiomatique complète qui introduit très tôt les notions de distance et de symétrie. On retrouve dans la préface de Madame Lelong-Ferrand les remarques sur l'absence de cohérence d'ensemble de l'enseignement actuel de la géométrie.

Le but du présent document est autre: *il ne s'agit pas d'une proposition d'enseignement, mais d'une prise de recul par rapport à la géométrie en revenant aux mathématiques elles-mêmes* afin de mieux comprendre les problèmes rencontrés. Pour cela, on étudie comment on peut développer la géométrie élémentaire rigoureusement à partir d'une axiomatique purement géométrique.

Après un chapitre 0 d'introduction qui rappelle brièvement ce qu'est une axiomatique et le rôle qui jouent les mots premiers, les axiomes sont présentés, puis vient un exposé de géométrie fondé sur ces axiomes.

On peut lire ce document de plusieurs manières:

1) Comme un cours de géométrie euclidienne axiomatique à la manière de Hilbert: *les cinq premiers chapitres donnent des démonstrations complètes des propriétés élémentaires de la géométrie déduites des axiomes de base*. Si l'on s'intéresse seulement au style des démonstrations, il n'est pas nécessaire de les regarder toutes en détail, il faut simplement en étudier suffisamment pour être sûr d'en avoir compris l'esprit. De nombreux exemples permettent de comparer le traitement d'une même question dans le style de la géométrie du collège et dans le style plus complètement axiomatisé choisi ici.

Pour ceux qui n'ont pas eu l'occasion d'une étude approfondie de la géométrie durant leurs études, ce cours montre aussi ce qu'est une géométrie dans laquelle, comme chez Euclide, les cas d'égalité des triangles jouent un rôle fondamental.

L'expérience des formations dans lesquelles a été présenté ce cours montre que deux journées de travail suffisent à bien comprendre le contenu mathématique exposé ici.

2) Comme une initiation à la géométrie non euclidienne: les cinq premiers chapitres exposent des résultats de géométrie qui n'utilisent pas l'axiome des parallèles, c'est-à-dire l'unicité de la parallèle à une droite menée par un point extérieur à cette droite, ces résultats sont donc également vrais en géométrie non euclidienne, on dit pour cela que ce sont des résultats de géométrie "neutre". La notion de modèle, introduite dès le premier chapitre permet en cours de route de clarifier les rapports entre géométrie euclidienne et géométrie non euclidienne. Le sixième chapitre est là pour amener le lecteur, cette fois-ci sans fournir le détail des démonstrations, jusqu'au point où la différence entre géométrie euclidienne et géométrie non euclidienne devient excitante, en particulier du fait que en géométrie non euclidienne, l'aire d'un triangle est proportionnelle à la différence (jamais nulle), entre 180° et la somme des mesures en degrés de ses trois angles. La lecture de ce chapitre n'a qu'un intérêt culturel, en ce sens qu'il n'apporte rien de particulier concernant directement l'enseignement de la géométrie.

3) Comme une source de renseignements d'ordre historique, donnés soit explicitement, au fil des remarques contenues dans le texte, soit implicitement en ce sens que ce texte présente des démonstrations rédigées dans le même esprit que celui de Hilbert dans son ouvrage historique.de 1899 "Grundlagen der Geometrie" (*Les fondements de la géométrie*, traduit par Paul Rossier, Dunod, 1971). L'axiomatique choisie ici, reprise de Greenberg (1972, *Euclidean and non-euclidean geometries, development and history*, Freeman, San Francisco), est

légèrement différente de celle de Hilbert, mais ces différences portent sur des détails et l'esprit des démonstrations, la lettre même pour beaucoup, est bien le même. Cependant le lecteur qui veut vraiment travailler le point de vue historique, et en particulier étudier l'évolution des axiomes choisis par Hilbert au cours des éditions successives de son ouvrage, devra se reporter à l'ouvrage original cité ci-dessus. Par contre, celui qui s'intéresse plutôt à l'histoire de la géométrie en général et en particulier à l'apparition des géométries non euclidiennes, devra se reporter à Greenberg.

La conclusion tire les leçons didactiques de cette étude mathématique: elle permet de situer en termes de niveau de rigueur, l'usage actuel de la démonstration au collège en montrant qu'il n'est pas si éloigné que cela de celui d'Euclide et en expliquant pourquoi.

Cependant le lecteur qui s'intéresse surtout à la réflexion sur l'enseignement n'aura pas besoin d'attendre la conclusion pour la voir apparaître: elle est présente un peu tout au long du texte, et la conclusion ne fait que synthétiser des remarques présentées ici ou là.

Mon but est de montrer que réflexion sur les mathématiques et réflexion sur leur enseignement sont indissociables. Au lecteur de juger s'il est atteint.

Je tiens à conclure cette introduction en remerciant Gilles Germain qui a bien voulu tracer les figures qui illustrent ce cours.

CHAPITRE O : PRÉSENTATION DES AXIOMES DE LA GÉOMÉTRIE.

TERMES PRIMITIFS ET AXIOMES : LE PROBLÈME.

Comme l'explique Pascal dans "De l'esprit géométrique", une théorie mathématique commence par le choix de mots premiers, d'axiomes et de définitions.

En effet, la définition du sens d'un mot utilise d'autres mots, donc si l'on veut n'employer que des mots bien définis, il faut aussi définir les mots employés dans les définitions, ce qui amène à une régression à l'infini ou bien à la circularité bien connue des définitions des dictionnaires. Ainsi, il faut nécessairement renoncer à tout définir et disposer d'un stock de mots que l'on ne définira pas, que nous désignerons par *mots premiers* ou *termes primitifs*. De même, on ne peut démontrer la vérité d'un énoncé qu'à partir de celle d'autres énoncés déjà connus pour vrais, et si l'on veut tout démontrer, on sera conduit là aussi à une régression à l'infini, il faut donc admettre sans démonstration certains énoncés, ce seront les *axiomes*.

TERMES PRIMITIFS ET AXIOMES : LA SOLUTION DE PASCAL.

> "la géométrie [...]ne définit aucune de ces choses, espace temps mouvement nombre égalité ni les semblables qui sont en grand nombre, parce que ces termes là désignent si naturellement les choses qu'ils signifient, à ceux qui entendent la langue, que l'éclaircissement qu'on en voudrait faire apporterait plus d'obscurité que d'instruction" (Pascal, de l'esprit géométrique, section I).

Ainsi, pour Pascal, les termes primitifs sont associés à des notions naturelles qui sont communes à tous ceux qui entendent une langue : "il y a des mots incapables d'être définis", mais "la nature a suppléé à ce défaut par une idée pareille qu'elle a donnée à tous les hommes". Et Pascal se moque de la confusion dans laquelle on tombe en voulant définir des mots comme celui de temps. Retenons cette idée essentielle que nous possédons naturellement un certain nombre de mots dont l'usage est commun à tous les hommes. Pascal résumera ce point de vue dans la première de ses trois règles pour les définitions que nous reproduisons ci-après :

> **Règles pour les définitions** -1. N'entreprendre de définir aucune des choses tellement connues d'elles-mêmes, qu'on n'ait point de terme plus clairs pour les expliquer.-2. N'admettre aucun des termes un peu obscurs ou équivoques, sans définition.-3. N'employer dans la définition des termes que des mots parfaitement connus, ou déjà expliqués. (Pascal, de l'esprit géométrique, section II)

Pascal n'ira pas plus loin, il ne donne pas de liste précise de termes primitifs, dont on a vu d'ailleurs dans la citation ci-dessus qu'il souligne qu'ils sont "en grand nombre" : on pourra se permettre d'employer sans autre forme de procès, dans un texte mathématique, tous les mots satisfaisant à la règle 1 sans que le nombre en soit limité a priori.

Ayant ainsi réglé par appel à la lumière naturelle le problème des termes primitifs, Pascal donne une solution analogue au problème des axiomes :

> **Règles pour les axiomes.**- 1. N'admettre aucun des principes nécessaires sans avoir demandé si on l'accorde, quelque clair et évident qu'il puisse être.-2. Ne demander en axiomes que des choses parfaitement évidentes d'elles-mêmes. (Pascal, de l'esprit géométrique, section II)

Ici aussi, l'appel à des connaissances communes à tous les hommes sert de base à la solution, ceci est repris négativement dans la première des règles pour les démonstrations :

> **Règles pour les démonstrations** -1) N'entreprendre de démontrer aucune des choses qui sont tellement évidentes d'elles-mêmes qu'on n'ait rien de plus clair pour les prouver.-2)...(Pascal, de l'esprit géométrique, section II)

Cette règle énonce en somme que toute propriété évidente devra être prise comme axiome.

Notons que dans le bref fragment conservé des éléments de géométrie qu'avait entrepris d'écrire Pascal est amorcée une liste précise d'axiomes, alors qu'on ne trouve pas de liste précise de termes primitifs: la pratique de Pascal est conforme à sa théorie et à la tradition euclidienne puisque les Eléments d'Euclide comportent une liste d'axiomes, mais pas de liste de termes primitifs.

La position de Pascal est en fait assez proche de celle d'Aristote : mots premiers (termes non définis) et axiomes sont considérés comme évidents. C'est cette évidence qui rend non seulement illusoire mais superflue toute définition pour les mots premiers et toute tentative de preuve pour les axiomes. Notons toutefois que chez Pascal, la lumière naturelle qui rend oiseuse la définition des mots premiers conduit seulement à un accord sur le sens ordinaire du discours "ainsi, ce n'est pas la nature de ces choses que je dis qui est connue de tous ; ce n'est simplement que le rapport entre le nom et la chose" (De l'esprit géométrique, section I, cf aussi le commentaire de C. Chevalley, 1995, p. 35). Autrement dit, tout le monde sait de quoi on parle quand on parle de point ou de droite, mais ceci n'implique pas que tout le monde se fasse la même idée du point et de la droite.

TERMES PRIMITIFS ET AXIOMES : LA SOLUTION DE HILBERT.

Pour Pascal, les mots premiers avaient un usage fixé par la lumière naturelle, et, en conséquence, n'avaient pas besoin d'être définis. Hilbert prend en quelque sorte cette conséquence comme caractérisation des mots premiers: ce sont ceux que l'on ne définira pas.

Pour Pascal, nous disposions d'un immense stock de mots premiers.Hilbert, lui, en donne une liste finie et exhaustive qui dans le cas de la géométrie se réduit aux cinq mots : *point, droite, plan, entre, incident*. Notons tout de suite que ce dernier mot admet des équivalents linguistiques. Ces mots premiers n'ont a priori pas d'autres propriétés que celles que vont fixer les axiomes.

La légende raconte d'ailleurs qu'Hilbert s'était aperçu que finalement on pouvait remplacer les mots premiers par n'importe quels mots du langage courant, comme bière ou chaise, pourvu qu'on leur impose les règles opératoires définies par les axiomes. Ainsi, les mots premiers sont *en droit* indépendants de l'intuition, mais Hilbert ne dissimule pas que, *en fait, les axiomes qui les relient sont inspirés par l'intuition*. Voici des extraits de son texte sur "les fondements de la géométrie (Hilbert, 1899):

Introduction : 1 : Comme l'arithmétique, la géométrie n'exige pour son élaboration qu'un petit nombre de propositions fondamentales simples. Ces propositions sont les axiomes de la géométrie. Depuis Euclide, l'établissement de ces axiomes et l'étude de leurs relations ont fait l'objet de travaux nombreux et excellents. Ce problème est celui de l'analyse de notre intuition de l'espace.[...].

Chapitre I : Les cinq groupes d'axiomes.

1) Les notions fondamentales de la géométrie et les cinq groupes d'axiomes.

Définition : "Nous pensons trois systèmes différents de choses ; nous nommons les choses du premier système des points ; nous les désignons par des majuscules A, B, C,...; nous nommons droites les choses du deuxième système et nous les désignons par des minuscules a, b, c,...; nous appelons plans les choses du troisième système et nous les désignons par les caractères grecs , ...Les points constituent les éléments de la géométrie linéaire ; les points et les droites sont les éléments de la géométrie plane ; enfin les points, les droites et les plans sont ceux de la géométrie de l'espace ou de l'espace lui-même.

Entre les points, les droites et les plans, nous imaginons certaines relations que nous exprimons par des expressions telles que "être sur", "entre", "congruent"; la description exacte et appropriée au but des mathématiques de ces relations est donnée par les axiomes de la géométrie.[...]

Ainsi, d'une part, Hilbert ne dissimule pas que son but est bien *d'analyser l'intuition de l'espace*, et d'autre part, sa présentation des axiomes et des mots premiers fait usage non seulement de mots de la langue courante, comme "penser", "majuscules", etc...mais aussi de mots à la frontière entre cette langue et la langue mathématique : "système", "différent", "chose" en opposition à "relation", "espace"...Le statut de ces derniers mots est manifestement celui des mots premiers au sens de Pascal : par exemple, tout le monde doit être d'accord sur le fait qu'un point et une droite sont des "choses" mais que le fait que le point soit sur la droite est une "relation " entre ces choses qui s'exprime par le mot premier *incident* sous la forme : *le point A et la droite a sont incidents* qui admettra pour expression synonyme *le point A est sur la droite a*, ou *la droite a passe par A*. Tout commentaire sur la nature des "choses" et des "relations" serait oiseux. L'usage courant de la langue, qui d'ailleurs ici, en ce qui concerne la notion de relation, présuppose un minimum de culture mathématique antérieure, fournit un réservoir inépuisable de tels mots. Il est vrai qu'au total, le langage mathématique, fort pauvre, n'en utilise pas beaucoup.

Ainsi, la compréhension du travail de Hilbert repose en partie sur l'appréhension du sens courant d'un certain nombre de mots ce qui, pour certains d'entre eux, suppose manifestement une culture mathématique antérieure, autrement dit, son ouvrage ne peut pas servir à l'initiation à la géométrie. Cette nécessité d'un commentaire dans un langage courant pour accompagner un exposé dans un langage plus formalisé est une limitation de la "rigueur" inévitable pour toute science qui s'exprime dans un langage, or il semble difficile d'imaginer une science non exprimée dans un langage, c'est même, d'après Aristote, l'une des conditions pour qu'un savoir mérite le nom de science...(cf Gilles Gaston Granger, 1994, p. 244). Notons qu'il existe des savoir-faire, qui ne sont pas exprimés dans un langage, et qui ne sont donc pas des sciences, ce qui ne les empêche pas d'être efficaces.

SYNTHÈSE :

1) Pour Hilbert, et pour tous les mathématiciens me semble-t-il, l'énoncé des axiomes de la géométrie se fonde sur les propriétés intuitives des points, droites etc... On pourrait dire que c'est la position d'Euclide et on peut interpréter, en partie, l'histoire des débats sur les fondements de la géométrie comme l'histoire d'une défiance de plus en plus grande vis-à-vis

des vérités considérées comme intuitivement évidentes , mais qui aboutit à la constatation qu'on ne peut pas s'en passer totalement.

2) Une fois les axiomes énoncés on doit vérifier que l'emploi des objets de la géométrie qui est fait dans la démonstration finale d'une propriété (mais pas dans la recherche, qui elle fait appel à l'intuition) ne fait usage que des relations exprimées dans les axiomes et les définitions et est en droit indépendant de toute interprétation.des objets de la géométrie Cette idée est clairement exprimée par Pasch (1882) et est déjà présente chez Gergonne, au début du dix-neuvième siècle : les axiomes donnent en quelque sorte une *définition implicite* des objets mathématiques qui y figurent en disant *ce que nous pouvons affirmer d'eux* (cf Kline M. 1980, p. 349, et pour le texte de Pasch, Blanché R., 1955, p. 29-31, cité in Guichard J., 1993, p. 41). On peut dire que cette position est admise depuis par tous les mathématiciens (il faudrait toutefois faire peut-être une exception pour certains intuitionnistes, comme le mathématicien contemporain Apéry, refusant de rédiger sa célèbre démonstration de l'irrationnalité de z(3)).

3) On peut alors formaliser entièrement la rédaction de la démonstration en créant en particulier un symbolisme pour la logique, éliminant ainsi tout recours à langue courante, et étudier les suites de symboles (objets concrets) que constituent alors les démonstrations, c'est le programme connu sous le nom de formalisme de Hilbert. Voici des extraits de la conférence de 1927 où il le précise:

> [...] "Depuis cinq ans, j'étudie les fondements des mathématiques en élaborant une théorie nouvelle de la démonstration. Je voudrais réduire tout énoncé mathématique à la présentation concrète d'une formule obtenue rigoureusement et donner ainsi aux notions et déductions mathématiques une forme irréfutable montrant bien l'ensemble de la science.[...] Comme toute autre science, la mathématique ne peut pas être construite sur la seule logique. Une donnée est indispensable, composée d'objets concrets, résultant d'une expérience antérieure à la pensée.[...] En mathématiques, les objets que nous examinons sont des signes qui pour nous sont clairs et reconnaissables.[...] L'idée fondamentale de ma théorie de la démonstration est la suivante.
>
> Toutes les phrases qui énoncent des propriétés mathématiques seront traduites en formules. Celles-ci se distinguent des formules mathématiques par la présence, en plus des signes habituels, de signes logiques.
>
> (Hilbert, 1899, Paul Rossier éditeur, 1971, appendice IX, p. 261)

Il me semble abusif de déduire de ce texte, qui expose une méthode de travail pour attaquer le problème du fondement des mathématiques, que Hilbert avait oublié ce qu'il écrivait au sujet de l'intuition dans son ouvrage sur les fondements de la géométrie, que nous avons cité plus haut, et qu'il n'a d'ailleurs pas modifié dans l'édition de 1930 (septième édition, la dernière publiée du vivant de Hilbert). Ainsi, il nous semble légitime d'admettre que Hilbert était d'accord avec les points 1 et 2 de la synthèse ci-dessus tout en adoptant un point de vue formaliste quant au problème du fondement des mathématiques. Notons que Hilbert n'a jamais appliqué son programme aux fondements de la géométrie en ce sens qu'il n'a pas formalisé complètement les démonstrations de son ouvrage.

Remarque : les axiomes que nous présentons ici ne sont pas exactement ceux de Hilbert, en particulier en ce qui concerne les axiomes d'ordre. Leur énoncé est emprunté à Greenberg. Ils sont évidemment équivalents à ceux de Hilbert. Ils se limitent à la géométrie plane.

Axiomes de la géométrie plane d'après Greenberg : Euclidean and non euclidean geometry, history and philosophy.

Les mots premiers de cette axiomatique sont: point, droite, incident, entre, congruent. Notons que Hilbert employait "lié" à la place d'incident et que au lieu de dire qu'un point et une droite sont incidents, on dira tout aussi bien que le point est sur la droite, que la droite passe par le point, et tous autres équivalents linguistiques.

Conformément à la convention de Hilbert-Ackermann en logique, on admet que les ensembles d'objets dont on parle ne sont pas vides: il existe au moins un point et une droite.

Axiomes d'incidence.

I1) Etant donné deux points P et Q distincts, il existe une unique droite passant par P et Q.
I2) Etant donné une droite, il existe au moins deux points distincts sur cette droite.
I3) Il existe trois points non alignés (c'est-à-dire tels qu'aucune droite ne soit incidente aux trois).

On note (PQ) l'unique droite passant par les deux points distincts P et Q.

Axiomes d'ordre.

Le but de ces axiomes est de régler l'emploi du terme premier "entre", on note $A*B*C$ le fait que B est entre A et C.

O1) Si $A*B*C$, alors A, B et C sont trois points distincts sur une même droite et $C*B*A$.
O2) Etant donné deux points distincts B et D, il existe des points A, C, E appartenant à la droite BD tels que $A*B*D$, $B*C*D$, $B*D*E$.
O3) Si A, B, C sont trois points distincts appartenant à la même droite, un et un seul est entre les deux autres.
O4) Pour toute droite d, et tout triplet A, B, C de points non situés sur d :
1) Si A et B sont d'un même côté de d et B et C aussi, alors A et C sont du même côté de d.
2) Si A et B sont de part et d'autre de d et B et C aussi, alors A et C sont d'un même côté de d.

Ces axiomes permettent de définir les notions de segment, de demi-droite (ch 2, 2.1) et d'angle (ch 3) employées ci-dessous.

Axiomes de congruence.

C1) Si A et B sont deux points distincts et A' un point quelconque, pour toute demi-droite r d'origine A', il existe un point unique de r tel que $B' \neq A'$ et $[AB] \cong [A'B']$.
C2) Si $[AB] \cong [CD]$ et $[AB] \cong [EF]$, alors $[CD] \cong [EF]$. De plus, tout segment est congru à lui-même.
C3) Si $A*B*C$, $A'*B'*C'$, $[AB] \cong [A'B']$, et $[BC] \cong [B'C']$, alors $[AC] \cong [A'C']$.
C4) Etant donné un angle $B\hat{A}C$ (par définition d'un angle, la demi-droite [AB) n'est pas opposée à [AC)) et une demi-droite [A'B') ayant pour origine un point quelconque A', il existe une unique demi-droite [A'C') qui soit d'un côté donné de (A'B') et telle que
$B'\hat{A}'C' \cong B\hat{A}C$
C5) Si $\hat{A} \cong \hat{B}$, et $\hat{A} \cong \hat{C}$, alors $\hat{B} \cong \hat{C}$. De plus, tout angle est congru à lui-même.

Définition: on dit que deux triangles ABC et A'B'C' sont congruents si leurs éléments homologues sont congruents: $[AB] \cong [A'B']$, $\hat{A} \cong \hat{A}'$, etc...(six congruences).

C6) Si deux triangles sont tels qu'ils aient un angle congruent compris entre deux côtés congruents, ils sont congruents.

Axiomes de continuité.

Axiome d'Archimède: Soit [AB] et[CD] deux segments, alors il existe un entier n tel que si l'on reporte [CD] n fois sur la demi-droite [AB), on atteint un point E tel que $n\,[CD] \cong [AE]$ et B est entre A et E.

Remarque: dans cet énoncé, l'expression "reporter [CD] n fois" s'interprète grâce aux axiomes de congruence.Intuitivement, l'axiome signifie que si on considère [CD] comme segment "unité", alors chaque autre segment a une longueur finie par rapport à cette "unité". Une autre façon de voir les choses est de penser [AB] comme "unité" et dans ce cas l'axiome affirme qu'aucun segment [CD] n'est infiniment petit par rapport à [AB] pris comme "unité".

Axiome de Dedekind: Supposons que l'ensemble des points d'une droite d soit la réunion $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ de deux parties non vides et telles que aucun point de Σ_1 ne soit entre deux points deΣ_2 et vice-versa. Alors, il existe un unique point O sur d tel que pour toute paire de points P_1 et P_2 de d, distincts de O, on ait l'on ait P_1*O*P_2 si et seulement si $P_1 \in \Sigma_1$ et $P_2 \in \Sigma_2$.

Commentaire: Intuitivement l'axiome de Dedekind est une sorte de réciproque de la propriété de séparation de la droite qui dit que si C*A*B on a (BC) = $[AB) \cup [AC)$.

On peut aussi dire que l'axiome de Dedekind assure qu'il n'y a pas de "trou" dans les droites et que chaque droite est topologiquement identique à une droite sur R. Sans cet axiome il n'existe pas nécessairement de segment correspondant à un nombre réel donné pour un segment "unité" choisi. De même, cet axiome est nécessaire pour montrer le "principe de continuité circulaire": pour tout cercle, le segment joignant un point intérieur et un point extérieur au cercle rencontre le cercle

Il est possible de montrer que l'axiome de Dedekind et les autres axiomes impliquent l'axiome d'Archimède. Mais ils sont habituellemnt donnés ensemble pour en montrer l'importance. Il est possible de construire un modèle de géométrie sans l'axiome de Dedekind.

Axiome des parallèles (postulat d'Euclide, sous la forme de Playfair): par un point extérieur à une droite il passe une parallèle au plus à cette droite.

Remarque: l'ensemble des axiomes précédents définit la géométrie euclidienne plane, par suppression du groupe des axiomes de congruence, on définit la géométrie affine plane, par suppression de l'axiome des parallèles, on définit la géométrie neutre (cf ch 4, 4.11, où est également définie la géométrie non euclidienne, ainsi que l'annexe 1 où l'on dit quelques mots de la géométrie projective).

CHAPITRE 1 : ETUDE DES CONSÉQUENCES DES AXIOMES D'INCIDENCE.

Nous allons étudier les conséquences immédiates des seuls axiomes d'incidence I1, I2, I3, ce qui conduira a priori à une géométrie très pauvre. Rappelons que l'expression "un point et une droite sont incidents" peut se remplacer par "le point est sur la droite" ou "la droite passe par le point". Le mot incident a l'intérêt de symétriser au point de vue du langage les rôles du point et de la droite.

On adopte pour le parallélisme la définition traditionnelle d'Euclide : deux droites sont parallèles si et seulement si elles n'ont aucun point commun, ce qui implique en particulier qu'elles ne sont pas confondues.

1.1) Proposition: Deux droites distinctes non parallèles ont un unique point commun.

Démonstration : se déduit par l'absurde de I1.

1.2) Proposition: Pour toute droite, il existe au moins un point ne lui appartenant pas.

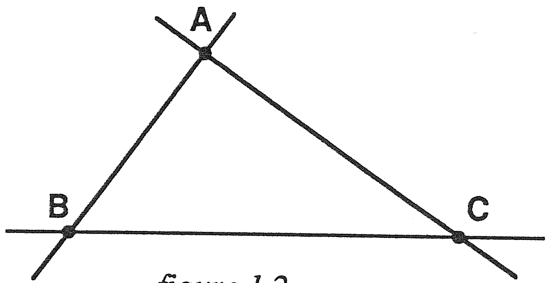


figure 1.2

Démonstration : Soit une droite d donnée. D'après I3, l'un au moins des trois points A, B, C n'appartient pas à d. cqfd.

Très souvent, j'ai pu remarquer chez ceux qui débutent dans ce genre d'exercice la démarche suivante: l'axiome I3 implique qu'il existe trois points A, B, C "formant un vrai triangle". Alors par exemple A n'appartient pas à (BC), sinon la droite (BC) serait incidente aux trois points considérés. Le même raisonnement montre plus généralement qu'un sommet n'appartient pas au côté opposé, *mais cela ne démontre le résultat que pour ces trois droites particulières*, il n'en résulte pas pour autant qu'il en soit de même pour *toute* droite.

1.3) Proposition: pour tout point, il existe au moins une droite qui ne lui soit pas incidente.

Démonstration: Désignons toujours par A, B, C les trois points non alignés dont l'existence est assurée par I3 et soit P un point donné : si P n'est pas incident à (BC), la droite (BC) fait l'affaire. Si P est incident à (BC) et différent de C, la droite (AC) fait l'affaire (étant distincte de (BC), elle n'a pas d'autre point commun avec celle-ci que C). Si P=C, la droite (AB) fait l'affaire.

1.4) Proposition: pour tout point, il existe au moins deux droites distinctes incidentes à ce point.

Démonstration: soit P un point donné, supposons qu'il n'existe qu'une droite d passant par P, et soit M un point quelconque du plan. Si M≠P, la droite (PM) est bien définie et comme elle passe par P, elle devrait être confondue avec d, donc M serait sur d. Ainsi, tous les points du plan seraient sur d, ce qui est contradictoire avec I3.

1.5) Interprétation et Modèle

On dira qu'on a une *interprétation* d'un système d'axiomes dès qu'on fait correspondre aux mots premiers du système des objets précis. On dira qu'une interprétation constitue un *modèle* si les axiomes sont vérifiés. Si on se limite au système des seuls axiomes d'incidence, il suffit d'interpréter les trois mots: point, droite, incident.

- exemple 1 : Soit E un ensemble à trois éléments A, B, C. On appelle points les trois éléments de E, droites les trois parties à deux éléments, la relation d'incidence est évidemment l'appartenance du point à la droite. Il est facile de vérifier que *cette interprétation est bien un modèle*.
- exemple 2 : Soit Σ une sphère, on appelle points les points de la sphère, droites les grands cercles, l'incidence est l'incidence habituelle. Une petite réflexion montre que *cette interprétation n'est pas un modèle.*

1.6) Remarque 1: le lecteur est peut-être étonné de voir intervenir la sphère qui est une connaissance géométrique déjà élaborée par rapport aux axiomes que nous étudions; cela provient du fait que nous nous livrons à une *étude a posteriori* des fondements de la géométrie, à *un retour critique sur un savoir antérieur*. Si nous partons théoriquement de zéro, il est par contre évident que *quelqu'un qui n'aurait jamais fait de géométrie ne pourrait pas comprendre ce que nous présentons ici* : dans le cas du modèle de la sphère, cette connaissance de la géométrie est utilisée explicitement comme outil de compréhension, mais elle est partout présente implicitement. Dans le modèle à trois points, la connaissance utilisée est celle de la théorie des ensembles, limitée même aux ensembles finis, connaissance qu'on peut supposer théoriquement disponible, c'est-à-dire qu'on peut, si on le désire, supposer que notre étude des fondements des mathématiques a commencé par la théorie des ensembles.

1.7) Remarque 2: le lecteur a peut-être remarqué que nous avons déjà utilisé deux fois explicitement un raisonnement par l'absurde. Cette abondance relative du raisonnement par l'absurde se retrouve chez Euclide et chez Hilbert. Ce n'est pas un hasard, dans son étude sur le raisonnement par l'absurde, J. L. Gardies montre de façon convaincante que cette forme de démonstration joue forcément un grand rôle lorsqu'on cherche à reconstruire entièrement une connaissance sur une base axiomatique (Gardies, 1991, ch5, p.85)

1.8) Remarque 3: dans tout modèle d'un système d'axiomes, que ce soit celui de Hilbert ou un autre, tout théorème déduit logiquement des axiomes est vrai (puisque les axiomes sont vrais et que la déduction logique a justement pour propriété de conserver la vérité). En pratique, le plus important est la contraposée de cette remarque :

1.9) Méta-théorème : si un énoncé est faux dans un modèle, c'est qu'il ne peut pas être démontré à partir des axiomes.

Ces réflexions vont nous permettre de tirer quelques conséquences non banales de l'étude de modèles en eux-mêmes parfaitement banals :

- **1.10)** Puisque E={A, B, C}, où A, B, C sont deux à deux distincts, est un modèle des axiomes d'incidence, on voit qu'un tel modèle peut n'avoir qu'un nombre fini de points; on peut préciser qu'il en a au moins trois (d'après l'axiome I3) et qu'il peut effectivement en avoir un nombre entier n quelconque, puisque, en généralisant le procédé de l'exemple 1, on fait de tout ensemble à n éléments un modèle de ces axiomes. Il en résulte ainsi d'après 1.8 que l'existence d'une infinité de points n'est pas démontrable à partir des axiomes d'incidence puisqu'il existe un (et même des) modèle dans lequel l'énoncé "il existe une infinité de points" est faux.

- **1.11)** dans le modèle à trois points, il n'existe pas de droites parallèles, dans le modèle à quatre points, il en existe. Ceci montre que l'énoncé "il existe des droites parallèles" ne peut pas être démontré, ni sa négation, à partir des axiomes d'incidence. On exprime cela en disant que cet énoncé est indépendant du système des axiomes d'incidence.

1.12) Exercice: que peut-on déduire de l'étude du modèle à cinq points ?

Réponse : en examinant les modèles à quatre et cinq points, on déduit que, même si l'on se limite aux modèles dans lesquels par tout point non incident à une droite il passe une parallèle à cette droite, ce qui est le cas des modèles à quatre et cinq points, on ne peut démontrer, à l'aide des seuls axiomes d'incidence, ni l'unicité, ni la non-unicité, de cette parallèle.

1.13) Remarque: Soit toujours E un ensemble à trois points notés maintenant a, b, c. Appelons droites les trois éléments de E et points les trois paires et disons qu'un point A et une droite d sont incidents si d appartient à A. Il est facile de voir que les axiomes d'incidence sont vérifiés,.donc qu'on a encore un modèle. Ceci montre qu'*une droite n'est pas toujours l'ensemble des points qui lui sont incidents* : dans cet exemple, c'est le point qui est l'ensemble des droites qui lui sont incidentes. On voit ici l'avantage de l'utilisation d'un mot -incident- qui symétrise les rôles de la droite et du point contrairement aux expressions synonymes comme "le point est sur la droite". On voit aussi l'avantage d'un refus théorique de l'intuition: si celle-ci reste indispensable pour guider l'édification du système, on peut effectivement trouver des applications des résultats obtenus qui ne correspondent pas au sens intuitif des mots de la géométrie. Ce premier exemple est bien pauvre, mais il en existe de plus riches. Cependant, *dans la suite, dans un souci de simplification, nous supposerons toujours que les points sont des éléments du plan et que chaque droite est une partie du plan qui est l'ensemble des points qui lui sont incidents*. Ceci ne diminue pas la généralité des résultats obtenus et sera vérifié dans toutes les applications que nous en ferons, sauf la dualité droite-point, abordée dans l'annexe 1, que vous pouvez lire ou non dès maintenant, puisqu'elle est entièrement indépendante de la suite du document..

1.14) Système d'axiomes catégorique : On dit qu'un système d'axiomes est catégorique si tous ses modèles sont nécessairement isomorphes.

Le système formé des trois axiomes d'incidence n'est manifestement pas catégorique.puisqu'il admet des modèles qui n'ont pas tous le même cardinal et ne peuvent donc être en bijection. En revanche le système complet des axiomes de la géométrie de Hilbert, qui redonne la géométrie euclidienne classique est catégorique. Ceci résulte simplement du fait que dans le plan euclidien, une fois choisi un repère orthonormé, on a un isomorphisme canonique avec R^2 qui est lui-même un modèle particulier de cette axiomatique.

1.15) QUELQUES REMARQUES SUR L'ENSEIGNEMENT DE LA GÉOMÉTRIE, LES AXIOMES D'INCIDENCE ET LES PROPRIÉTÉ LUES SUR LE DESSIN.

Les axiomes I2 et I3 ne sont explicitement énoncés dans aucun manuel (tout au moins à ma connaissance) et on ne voit pas bien un enseignant commentant ce genre d'énoncé devant des élèves de lycée ou de collège. La représentation habituelle des droites et des points fait de ces axiomes des évidences qui n'ont même pas besoin d'être énoncées. C'est après coup, dans le processus d'axiomatisation où l'on rend explicite tout ce qui était implicite que l'on constate :

1) Que ces deux propriétés sont de fait indispensables pour faire de la géométrie.
2) Que toutes les propriétés analogues (c'est-à-dire d'incidence) dont on a besoin, par exemple les propriétés 1.1 à 1.4 peuvent se déduire des trois axiomes I1, I2, I3.

Bien sûr, du point de vue de Pascal, les démonstrations de ce genre de propriétés sont superflues (cf règles pour les démonstrations, chapitre 0).

L'axiome I1 est plus souvent énoncé dans l'enseignement. Cependant, il apparaît assez rarement dans les démonstrations et est comme "absorbé" dans la notation (AB) qui n'a de sens que si $A \neq B$: en effet, désigner une droite par (AB), c'est sous-entendre qu'elle est parfaitement déterminée, qu'il n'y en a qu'une, ce qui est exprimé par I1.

Ainsi, avant de désigner une droite par (AB), on devrait toujours s'assurer que A et B sont distincts. Dans la pratique il n'en est rien : dans un questionnaire distribué à 40 enseignants on demandait en particulier de rédiger une démonstration. Toutes les démonstrations rédigées font intervenir plusieurs fois la notation (AB), et *il n'y a aucun exemple de justification de cette notation par une démonstration ou une affirmation du fait que A et B sont différents : ceci est donc toujours lu sur la figure et entièrement implicite.*

De manière un peu provocante, on pourrait résumer la situation en ce qui concerne les axiomes d'incidence sous la forme suivante : dans le savoir enseigné (transposé du savoir savant) en géométrie au collège et au lycée, toutes les propriétés d'incidence sont considérées comme évidentes, grâce au dessin, et laissées entièrement implicites, à l'exception de I1. Toutefois les conditions d'application de I1 ne sont jamais vérifiées et toujours laissées à une lecture du dessin qui reste en général implicite elle aussi.

Cette pratique était aussi celle d'Euclide, et sans vouloir donner ici des leçons, disons que les enseignants ont évidemment raison de procéder ainsi, ne serait-ce que parce que les démonstrations ainsi complétées par des références explicites aux axiomes d'incidence logiquement nécessaires. Ces règles de lecture sur le dessin des propriétés d'incidence sont transmises aux élèves par l'intermédiaire du contrat didactique, également de façon implicite : l'enseignant donne l'exemple de ce comportement, qu'il soit chez lui conscient ou inconscient.

Ainsi, ce que nous avons engrangé à la fin de ce chapitre est une analyse d'une partie de ce que nous faisons quand nous faisons de la géométrie, une prise de conscience du rôle important joué par le dessin, même quand nous pensions être rigoureux, et du prix qu'il y aurait à payer pour conquérir une rigueur supérieure.

CHAPITRE 2 : ÉTUDE DES CONSÉQUENCES DU GROUPE DES AXIOMES D'ORDRE

On étudie dans ce chapitre les propriétés géométriques que l'on peut démontrer lorsqu'on ajoute aux axiomes d'incidence les axiomes d'ordre: toutes les démonstration se font donc à l'aide des seuls axiomes I1 à I3 et O1 à O4.

2.1) Définitions du segment et de la demi-droite.

Soit deux points distincts A et B.

- on appelle segment [AB] l'ensemble formé des points A et B et des points M qui sont entre A et B.
- on appelle demi-droite [AB) la réunion du segment [AB] et de l'ensemble des points M tels que B soit entre A et M.

Remarques:

- par définition, [AB]=[BA].
- lorsque A=B, on peut à la rigueur définir le segment [AB] qui est alors un singleton, mais la définition de la demi-droite n'a pas de sens si A et B sont confondus.
- Si A≠B, on se permettra, afin d'abréger le discours, d'employer des notations comme]AB[ou]AB), dont le lecteur reconstituera aisément le sens.

2.2) Proposition : On a : $[AB)\cap[BA)=[AB]$, $[AB)\cup[BA)=(AB)$.

Démonstration : il s'agit d'un simple exercice logique sur les définitions.

Si $B*A*C$, [AB) et [AC) sont dites opposées. Il est facile de vérifier à partir des axiomes que deux demi-droites opposées sont distinctes et que toute demi-droite admet une demi-droite opposée.

Remarque : les propriétés démontrées ci-dessus sont parfaitement évidentes sur un dessin moyennant la représentation habituelle des points, des droites et l'interprétation usuelle du mot "entre". Leur démonstration montre qu'elles sont conséquences logiques des seuls axiomes d'ordre. *En ceci réside "l'analyse de notre intuition de l'espace" du point de vue d'un mathématicien* : trouver des propriétés, en nombre minimal, et d'énoncé aussi "naturel" ou "intuitif" que possible dont les autres apparaissent comme des conséquences. Cette démarche a de plus l'avantage de nous montrer que l'intuition ne nous a pas amenés à admettre comme évidentes des propriétés qui seraient en fait contradictoires (de manière plus fine, la réflexion logique montre que si une contradiction apparaissait dans le développement de la théorie, c'est que les énoncés des seuls axiomes contiendraient déjà en germe cette contradiction).

2.3) Définition : Soit d une droite, A et B deux points non incidents à d. Si A=B ou si le segment [AB] ne contient aucun point incident à d, on dit que A et B sont du même côté de d, sinon, c'est-à-dire si A≠B et [AB] rencontre d, on dit que A et B sont de part et d'autre de d.

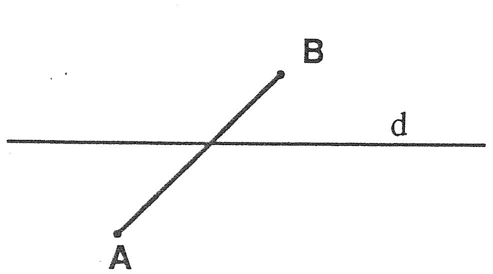


figure 2.3.1

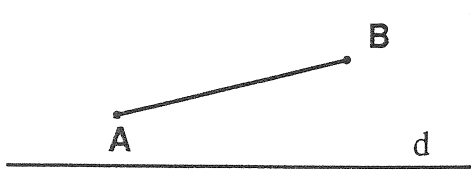


figure 2.3.2

Ainsi, si deux points n'appartiennent pas à d, ils sont soit du même côté, soit de part et d'autre de d (exclusif).

2.4) Définition : on appelle demi-plan déterminé par la droite d et un point A n'appartenant pas à d, l'ensemble des points M du plan qui sont du même côté que A par rapport à d. On le notera P_A.

2.5) Exemple : soit deux points A et B distincts tels que (AB) soit parallèle à d, alors le segment [AB] n'a aucun point commun avec d, donc A et B sont d'un même côté de d.

2.6) Remarque : la relation "être du même côté de d" est une relation d'équivalence (la transitivité provient de O4)1°) dans l'ensemble des points du plan qui n'appartiennent pas à d. Il en résulte que deux demi-plans P_A et P_B sont toujours ou disjoints (ie sans point commun) ou confondus, ou encore que $B \in P_A$ si et seulement si $P_A = P_B$. Tout ceci se redémontre facilement.

2.7) Proposition: Toute droite détermine deux demi-plans qui n'ont aucun point commun et tout point non incident à d est dans un de ces demi-plans.

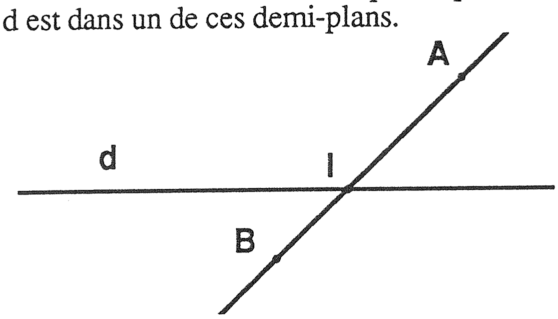


figure 2.7

Démonstration : soit d une droite, d'après la proposition 1.2 il existe un point A n'appartenant pas à d. Il détermine un demi-plan P_A. Soit I un point de d, il est distinct de A puisque A n'est pas sur d, donc la droite (IA) est bien définie, il existe un point B sur (IA) tels que I soit entre A et B (O2). Les points A et B sont de part et d'autre de d, d'après la définition même de cette relation, donc B n'appartient pas à P_A. Autrement dit, P_A et P_B sont distincts. Ainsi, toute droite détermine deux demi-plans distincts *au moins* et on sait que ces deux demi-plans n'ont aucun point commun (2.6).

Il reste à démontrer qu'il n'existe pas de troisième demi-plan...Pour cela on remarque que, pour tout $M \notin d$, ou bien il est du même côté que A et appartient alors à P_A, ou bien comme B, il n'est pas du même côté que A, il est alors du même côté que B d'après O4)2°, (dont l'utilité apparaît ici), donc appartient à P_B. Donc, d'après 2.5, P_M coïncide forcément avec P_A ou P_B.

2.8) Proposition : soit une droite d et soit une demi-droite [AB) ayant son origine A sur d mais non contenue dans d, alors tous les points de]AB) sont dans le même demi-plan P_B, c'est-à-dire d'un même côté de d.(Enoncé équivalent : si A est sur d et B n'est pas sur d, alors même conclusion).

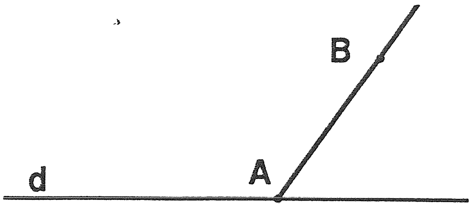


figure 2.8

Démonstration : évident à partir des définitions de la demi-droite et de la relation "être du même côté".

2.9) Proposition: si $B*A*C$, alors $(BC)=[AB)\cup[AC)$.

Démonstration: la difficulté de cette démonstration réside dans le fait qu'on ne peut pas la mener à bien à partir des seuls axiomes O1 O2 et O3 qui définissent l'ordre sur la droite, et qu'il faut faire intervenir le régionnement du plan en deux demi-plans : pour démontrer qu'un point (ici A) partage une droite en deux demi-droites, il faut utiliser le fait qu'une transversale en A à cette droite partage le plan en deux demi-plans!

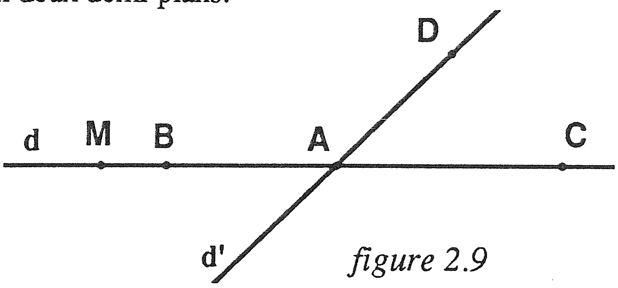


figure 2.9

A cet effet, soit D un point du plan n'appartenant pas à la droite d passant par les trois points A, B, C (la droite d est bien définie d'après O1 et D existe d'après 1.2). La droite (AD), notée d', est bien définie, car $A\neq D$, distincte de d, et A est le seul point commun à ces deux droites (1.1). Par définition, les points B et C sont de part et d'autre de d' qui détermine donc les deux demi-plans P_B et P_C.
Soit M un point de d autre que A, comme M n'est pas sur d' (car A est le seul point commun aux deux droites), M appartient à P_B ou à P_C.

- si $M\in P_B$, M est du même côté que B par rapport à d', considérons les trois points M, B et A sur d, l'un des trois est entre les deux autres (O3). Ce ne peut être A, sinon ceci signifierait que B et M sont de part et d'autre de d'. Donc ou bien M est entre B et A, ou bien B est entre M et A, dans les deux cas, M est sur [AB).
- si $M\in P_C$, on voit de même que M est sur [AC).

Remarques : - d'après 2.7 et 2.8, les deux demi-droites [AB) et [AC) privées de A sont disjointes, autrement dit, d privée de A apparaît comme réunion de deux demi-droites distinctes.

- on peut définir dans d-{A} les deux relations binaires contradictoires "être du même côté par rapport à A" qui signifie que A n'est pas entre les deux points considérés et "être de part et d'autre de A" qui signifie que A est entre les deux points considérés.

2.10) Exercice: Si $B*A*C$, alors $[BC]=[BA]\cup[AC]$

figure 2.10

2.11) Théorème ("Axiome" de Pasch): Soit ABC un triangle (c'est-à-dire trois points n'appartenant pas à une même droite) et d une droite coupant (AB) entre A et B, alors d rencontre aussi l'un des côtés [BC] ou [AC]. Si C n'appartient pas à d, d ne rencontre que l'un des côtés [BC] ou [AC].

Remarque : si d ne passe pas par C elle rencontre le côté [BC] ou [AC] entre ses extrémités.

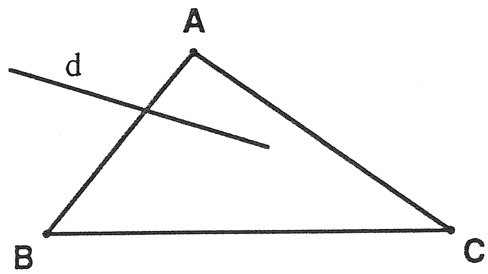


figure 2.11

Démonstration : Par hypothèse, A et B sont de part et d'autre de d. Alors d'après 2.6, si C n'appartient pas à d, C est soit du même côté que A, soit du même côté que B, et ces deux possibilités sont exclusives. Si C est du même côté que A, il n'est donc pas du même côté que B, donc (BC) rencontre d entre B et C. De même, si C est du même côté que B, (AC) rencontre d entre A et C. Si C appartient à d, le résultat est évident. Ceci démontre le théorème et la remarque qui le suit.

2.12) Historique : Pasch est un mathématicien qui a travaillé avant Hilbert sur les axiomes de la géométrie. C'est lui qui en analysant les démonstrations d'Euclide a mis en évidence le fait que ce dernier utilisait implicitement l'énoncé ci-dessus, c'est-à-dire le fait que si une droite "rentre" dans un triangle, elle en "ressort" nécessairement. Dans l'axiomatique originelle de Hilbert, l'axiome O4 est remplacé par l'axiome de Pasch; bien entendu, on obtient ainsi un système strictement équivalent. Le groupe d'axiomes que nous avons choisi, avec un axiome O4 un peu artificiel mène plus rapidement aux résultats. En fait il n'existe pas de critère de choix absolu des énoncés des axiomes. Si l'on suit Pascal (de l'esprit géométrique, cf ch 0) ils doivent être le plus évidents possible, l'évidence en géométrie se rapportant à notre connaissance de l'espace, on peut alors préférer le choix de Hilbert.au nôtre On peut aussi exiger la simplicité des démonstrations des propositions fondamentales, ce qui justifierait le choix de Greenberg, que nous avons suivi, et qui consiste en fait à admettre sous une forme un peu simplifiée que toute droite partage le plan en deux demi-plans (en fait, on pourrait remplacer O4 par un axiome qu'on pourrait estimer plus naturel affirmant que tout demi-plan est convexe et que toute droite détermine au plus deux demi-plans).

CHAPITRE 3 : ETUDE DES ANGLES DU POINT DE VUE DES AXIOMES D'ORDRE.

On se limite toujours à l'usage des seuls axiomes d'incidence et d'ordre.

3.1) Définition : on appelle angle $\widehat{BAC}$ l'ensemble de deux demi-droites de même origine et qui ne sont ni opposées, ni confondues : [AB) et [AC).

Ainsi par définition, les trois points A, B, C ne sont pas alignés. On ne considère donc pas "l'angle plat" ni l'angle nul comme des angles, pour la bonne raison que les définitions et propriétés ci-dessous deviendraient sans signification ou inexactes. Notons aussi que $\widehat{BAC}=\widehat{CAB}$

3.2) Définition : on appelle intérieur de l'angle $\widehat{BAC}$ l'ensemble des points M qui sont du même côté que B par rapport à (AC) et du même côté que C par rapport à (AB).

Cette définition est cohérente, en ce sens qu'elle ne dépend que des demi-droites [AB) et [AC) et non du choix de B et C sur ces demi-droites. Ceci résulte immédiatement de 2.8.

3.3) Proposition : si D est intérieur à $\widehat{BAC}$, toute la demi-droite [AD), sauf le point A, est intérieure à $\widehat{BAC}$.

Démonstration : ceci résulte immédiatement de 2.8.

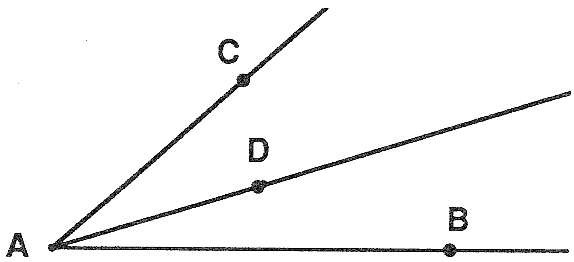


figure 3.3

3.4) Proposition : soit D un point de (BC), alors D est intérieur à $\widehat{BAC}$ si et seulement si D est entre B et C.

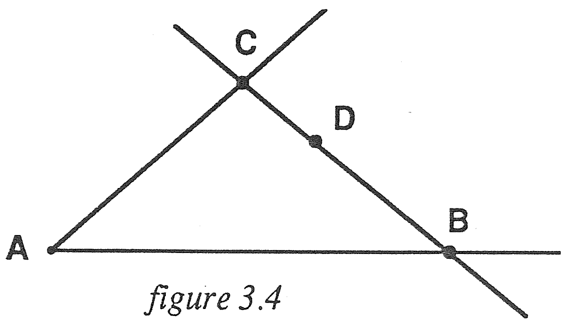


figure 3.4

Démonstration : un et un seul des trois points B, C, D est entre les deux autres. Si c'est le point C, le segment [BD] coupe donc (AC) en C distinct de B et D, donc B et D sont de part et d'autre de (AC), donc D n'est pas intérieur à l'angle; si c'est le point B, de même ; si c'est le point D, C et D sont d'un même côté de (AB) (2.7) et B et D sont d'un même côté de (AC) (2.7), donc D est intérieur à $\widehat{BAC}$.

3.5) Proposition: soit D un point intérieur à $\widehat{BAC}$, alors il existe D_1, B_1, C_1 sur [AD), [AB) et [AC) respectivement, tels que D_1 soit entre B_1 et C_1.

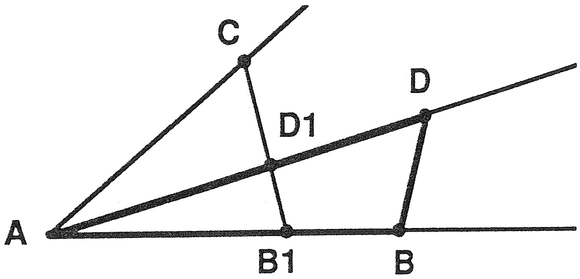


figure 3.5.1

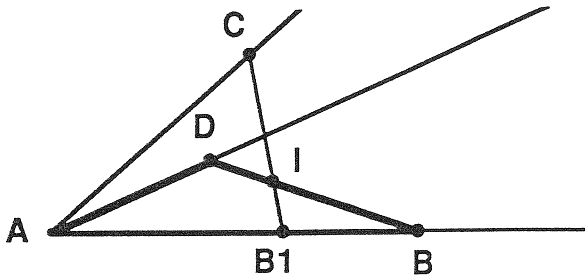


figure 3.5.2

Démonstration : Soit B_1 un point entre A et B. Appliquons le théorème de Pasch au triangle ADB et à la sécante (CB_1) qui "rentre" dans le triangle par le côté [AB], il en résulte que :

- ou bien (CB_1) coupe [AD] en D_1 (figure 3.5.1). Comme D_1 est a fortiori sur [AD) et qu'il est distinct de A (sinon (CB_1)=(CA), donc A=B_1, ce qui est exclu par construction de B_1) il est intérieur à $\widehat{BAC}$ (3.3), donc il est entre B_1 et C d'après 3.4. Il suffit de poser C_1=C
- ou bien (CB_1) coupe [DB] (figure 3.5.2) en I, nécessairement différent de B. Puisque D est intérieur à $\widehat{BAC}$, D est du même côté que C par rapport à (AB), donc il en est de même de tous les points de]BD], et D est du même côté que B par rapport à (AC), il en est donc de même de tous les points de [BD]. On en déduit que I est intérieur à $\widehat{BAC}$, donc que B_1*I*C. On applique alors le théorème de Pasch au triangle AB_1C et à la sécante (DB). Il en résulte que (DB) coupe $[AB_1]$ ou [AC]. Or (DB) ne peut pas couper $[AB_1]$ car elle n'a qu'un point commun B, avec (AB_1)=(AB) (en effet, comme D est intérieur à l'angle, D n'appartient pas à (AB), donc les deux droites (DB) et (AB_1) sont distinctes, elles ont donc au plus un point commun qui est le point B) et B n'appartient pas à $[AB_1]$ puisque c'est B_1 qui est entre A et B. Donc (DB) coupe [AC] en C_1 entre A et C et d'après 3.4, nécessairement D est entre B et C_1. Dans ce cas, on pose B_1=B et D_1=D.

Remarques: 1) On voit ici la lourdeur introduite par la vérification stricte des hypothèses des axiomes ou propriétés intuitivement les plus évidents, comme le fait de vérifier que deux droites sont distinctes avant d'affirmer qu'elles ont au plus un point commun. Si l'énoncé précédent avait été proposé comme exercice, l'indication suivante aurait suffi à guider le lecteur : "considérer un point B_1 entre A et B et appliquer Pasch à la sécante (CB_1) et au triangle ADB; si (CB_1) ne coupe pas [AD], appliquer Pasch à la sécante (BD) et au triangle AB_1C". On peut considérer que ceci regroupe "l'essentiel" de la démonstration.

2) Avec les notations et hypothèses de 3.5, il est graphiquement évident que, du moment que D est intérieur à $\widehat{BAC}$ on peut trouver une droite passant par D et coupant les côtés respectivement en B_1 et C_1. Admettant ceci, en utilisant 3.4, on en déduit immédiatement le résultat. Bien sûr, ceci n'est pas une démonstration, car on s'appuie sur le constat graphique, mais on peut se demander si c'est simplement la maladresse de l'auteur de ces lignes qui l'a amené à renoncer à démontrer la conjecture suivante:

Conjecture: Par tout point intérieur à un angle, il passe au moins une droite rencontrant les deux côtés de l'angle.

Ici encore, la réponse va être apportée par un modèle, qui est en réalité un modèle de la géométrie non euclidienne. On verra que dans ce modèle, les axiomes d'incidence et d'ordre sont satisfaits, mais que l'énoncé qui nous intéresse peut être faux pour certains angles et certains points D intérieurs à ces angles, cette conjecture n'est donc pas démontrable à partir des seuls axiomes d'ordre et d'incidence.

3.6) Modèle de Klein.

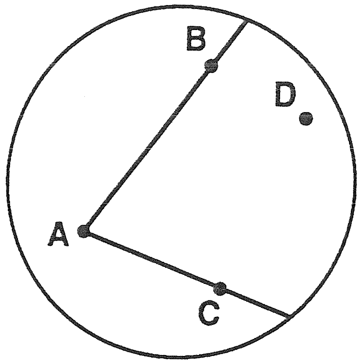


figure 3.6

Considérons, en géométrie euclidienne "habituelle", un disque ouvert, c'est-à-dire l'ensemble Δ des points intérieurs à un cercle Ω (les points de Ω ne font donc pas partie de Δ). Nous allons interpréter dans ce modèle les mots point, droite, incident et entre:

- un point sera un point au sens habituel.
- une droite sera une corde habituelle de Ω, privée de ses extrémités.
- le mot incident aura le même sens qu'en géométrie habituelle.
- le mot entre aura le même sens qu'en géométrie habituelle.

On peut démontrer que cette interprétation est bien un modèle, c'est-à-dire que tous les axiomes qui nous intéressent (incidence et ordre) y sont vérifiés. Dans la suite, nous noterons "droite" une droite du modèle afin de rappeler que ce n'est pas une droite au sens habituel, mais seulement une corde "ouverte". En fait, du point de vue ensembliste, les "droites" sont simplement les intersections avec Δ des droites euclidiennes dont l'intersection avec Δ est non vide. La même définition vaut pour les "demi-droites" : ce sont les intersections avec Δ des demi-droites euclidiennes dont l'origine appartient à Δ.

Pour satisfaire la curiosité du lecteur, nous le laissons vérifier de lui-même que pour toute "droite" d et tout point A du modèle n'appartenant pas à d, il existe plusieurs parallèles à d passant par A, ce qui traduit le fait que l'axiome d'unicité de la parallèle n' est pas vérifié dans ce modèle.

Considérons maintenant un "angle" $B\hat{A}C$. Il est facile d'en dessiner un et de placer un point D à l'intérieur tel qu'il n'existe aucune "droite" passant pas D et rencontrant les deux côtés de l'angle (en revanche, on voit de même que pour d'autres points intérieurs à l'angle, il existe de telles droites : il suffit de placer D "suffisamment près" du sommet A).

Ainsi, la conjecture étant fausse dans ce modèle n'est pas démontrable à partir des seuls axiomes d'incidence et d'ordre.

3.7) Pour répondre à la perplexité éventuelle du lecteur arrivé à ce stade...

Le lecteur peut s'étonner du fait que, partis vaillamment pour reconstruire la géométrie euclidienne élémentaire en contrôlant soigneusement que nous n'utilisons pas dans les démonstrations la lecture de résultats sur le dessin, nous en soyions arrivés à utiliser des notions de géométrie non reconstruites (cercle) et à lire sur le dessin les propriétés qui nous intéressent quand cela nous arrange...Nous allons en donner une explication d'abord, une justification ensuite.

Explication : elle a déjà été exposée en 1.6, ceci illustre à nouveau le fait que l'axiomatisation de la géométrie est le moyen d'une relecture critique et d'une reconstruction de ce que nous connaissons déjà, la géométrie euclidienne. Nous n'avons donc aucune raison de nous priver de jouer sur deux tableaux : nous savons où nous voulons arriver, et rien ne nous interdit de juger notre progression et de voir où nous en sommes en utilisant nos connaissances de géométrie euclidienne.

Cependant, ceci n'explique pas vraiment l'appel au dessin pour constater ce qui nous intéresse, et qui se traduit par l'affirmation suivante en géométrie euclidienne:

Théorème: Etant donné un angle dont le sommet est dans l'intérieur Δ d'un cercle, il existe des points D de Δ, intérieurs à cet angle, tels qu'aucune droite passant par D ne rencontre les deux côtés de l'angle dans Δ.

Cet énoncé, nous l'avons vérifié graphiquement, nous ne l'avons pas démontré...Ceci n'est acceptable que parce que nous supposons un lecteur mathématicien, capable d'admettre que la constatation graphique est dans ce cas suffisamment convaincante pour qu'il partage avec nous la conviction que, avec un peu de temps, il pourrait rédiger la démonstration. Ceci revient à admettre qu'*un dessin peut être un contre-exemple*, à condition que celui à qui l'on propose ce dessin comme un contre-exemple partage avec le proposant suffisamment de connaissances communes (cette condition n'est pas toujours réalisée quand les interlocuteurs sont un enseignant et un élève).

Ainsi notre attitude est cohérente si le lecteur admet que ce que nous sommes en train de faire, c'est l'analyse de l'intuition de l'espace, en tout cas l'analyse de quelque chose qui a un rapport très étroit avec le dessin géométrique et non la mise en place d'un jeu formel se suffisant à lui-même. Ici nous venons de voir que le fait (vrai en géométrie euclidienne) que par tout point intérieur à un angle, il passe une sécante aux deux côtés de l'angle n'est pas une conséquence logique des axiomes d'incidence et d'ordre, en fait admettre cet énoncé est équivalent (nous préciserons mathématiquement le sens de cet adjectif, en 6.3) à admettre le célèbre postulat d'Euclide. Le mathématicien français Legendre avait d'ailleurs cru avoir trouvé une démonstration de ce postulat, malheureusement, sa démonstration utilisait comme une évidence cet énoncé qui est en fait équivalent.

Justification (pour les scrupuleux...). Si notre propos avait été celui d'une rigueur absolue (qui n'existe pas...), nous aurions pu ne pas soulever la question à cet endroit, reconstruire la géométrie euclidienne jusqu'à démontrer l'énoncé ci-dessus et enfin en tirer la conclusion qui nous intéresse à savoir que en un certain sens, on ne peut pas faire mieux que l'énoncé 3.5. Cette démarche imaginaire a en tous cas l'avantage de montrer que notre démarche effective ne comporte pas de cercle vicieux inévitable.

3.8) Corollaire: a) soit D un point intérieur à $\widehat{BAC}$, alors les demi-droites [AB) et [AC), privées de A, sont de part et d'autre de (AD) et aucun point de la demi-droite opposée à [AD) n'est intérieur à $\widehat{BAC}$.

b) soit [AB') la demi-droite opposée à [AB), alors [AC) est entre [AD) et [AB').

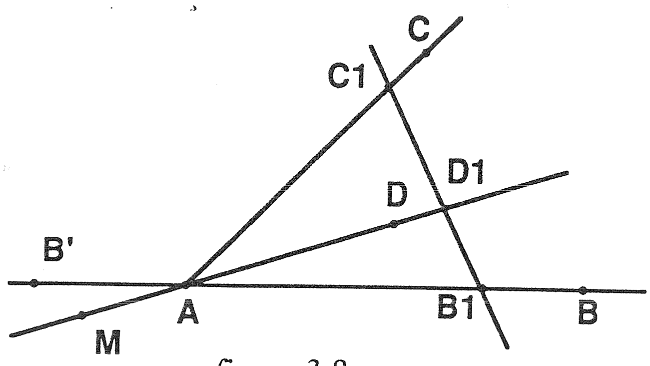


figure 3.8

Démonstration : a) avec les notations de 3.5, puisque D_1 est entre B_1 et C_1, ces deux derniers points sont de part et d'autre de (AD), donc il en est de même des demi-droites [AB) et [AC) privées de A. Si M est sur la demi-droite opposée à [AD), ou bien M=A et M n'est pas intérieur à l'angle, ou bien A est entre M et D donc M n'est pas du même côté que D ni par rapport à (AB), ni par rapport à (AC). Il ne peut donc être intérieur à l'angle puisque D l'est.

b) puisque D_1 est entre B_1 et C_1, D_1 et C_1, donc D et C, sont d'un même côté par rapport à (AB)=(AB'). D'après a), B et C sont de part et d'autre de (AD), comme A est entre B et B', B et B' sont aussi de part et d'autre de (AD), donc B' et C sont d'un même côté de (AD), ce qui achève la démonstration.

3.9) Définition: On dit que [AD) est entre [AB) et [AC) si $B\hat{A}C$ est un angle et si D est intérieur à cet angle.

Dans ce cas, tous les points de [AD), sauf A, sont intérieurs à l'angle.

3.10) Théorème du barreau transversal (Crossbar theorem): Si [AD) est entre [AB) et [AC), la demi-droite [AD) coupe [BC] entre B et C.

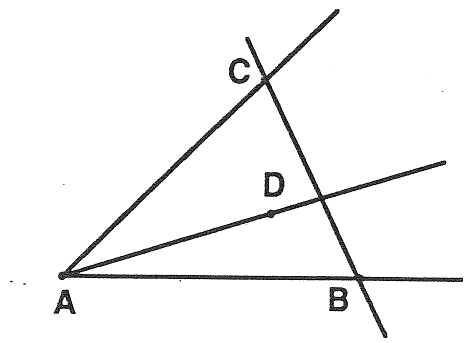


figure 3.10

Démonstration : d'après 3.9, B et C sont de part et d'autre de (AD) donc par définition, le segment [BC] coupe la droite (AD) en un point M qui est entre B et C, donc qui est intérieur à l'angle (3.4). Or les seuls points de (AD) qui sont intérieurs à l'angle sont sur la demi-droite [AD) (3.8 a et 3.9).

3.11) Exemple d'application : notion de polygone convexe.

Rappelons qu'une partie Σ du plan est dite *convexe* si toutes les fois que deux points A et B appartiennent à Σ, il en est de même de tous les points de [AB] (c'est-à-dire que $A \in \Sigma$ et $B \in \Sigma$

implique [AB]$\subset\Sigma$). Par exemple, tout demi-plan est convexe (ceci se voit en utilisant 2.9). Comme toute intersection de convexes est évidemment convexe, toute intersection de demi-plans est convexe.

Nous appelerons *polygone* la donnée d'une suite de n points (n$\geq$3) deux à deux distincts A_1, A_2..., A_n. Ces points sont les *sommets* du polygone. Les sommets A_i et A_{i+1} (i$\leq$n-1) sont dits *consécutifs*, ainsi que A_n et A_1. Les *côtés* sont les segments joignant deux sommets consécutifs, les *diagonales* sont les segments qui joignent deux sommets non consécutifs. Ce qu'on appelle habituellement polygone est le "contour" c'est-à-dire la réunion des côtés.

Bien entendu, la définition précédente est un peu générale en ce sens qu'elle n'exclut pas par exemple le cas d'un polygone "aplati". On trouvera chez certains auteurs des restrictions visant à éliminer cette possibilité. Ces restrictions sont toujours présentes quand n=3 (cas du triangle). Ainsi en fait, la définition d'un polygone peut varier suivant l'usage que l'on veut en faire, même la condition des sommets deux à deux distincts peut être éventuellement abandonnée..

Définitions:

-on dit qu'un polygone est convexe si pour toute paire de sommets consécutifs, l'ensemble des autres sommets du polygone est d'un même côté par rapport à la droite support du côté déterminé par les sommets consécutifs.

- si un polygone est convexe, on appelle intérieur du polygone l'intersection des demi-plans limités par les droites support des côtés et contenant des sommets du polygone.

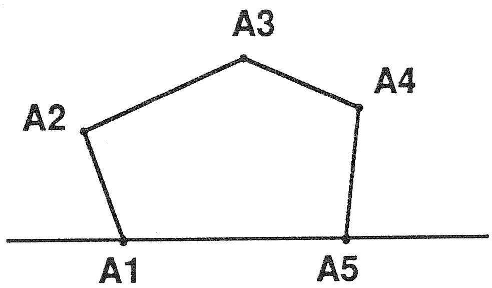


figure 3.11.1

On remarque que si un polygone est convexe, chaque sommet n'appartient qu'à deux droites support d'un côté du polygone: celles qui correspondent aux deux côtés qui ont une extrémité en ce sommet (en particulier, il n'est pas "aplati") et que l'intérieur d'un polygone convexe est un ensemble convexe.

Exemple : pour un quadrilatère, on dit que deux côtés sont opposés s'ils n'ont pas d'extrémité commune; il existe deux paires de côtés opposés. On dit qu'un quadrilatère est un parallélogramme si les paires de côtés opposés sont parallèles. D'après 2.5, tout parallélogramme est convexe.

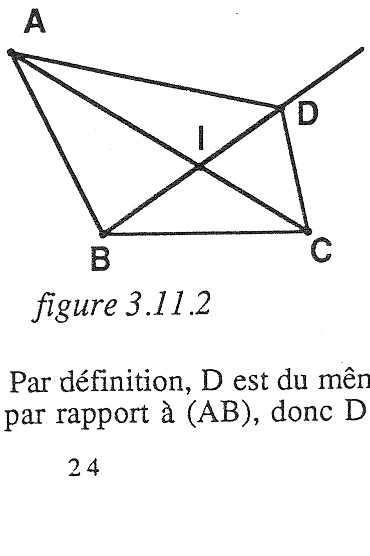


figure 3.11.2

Soit ABCD un quadrilatère convexe. Par définition, D est du même côté que A par rapport à (BC) et D est du même côté que C par rapport à (AB), donc D est intérieur à ABC; ainsi (crossbar theorem) [BD) coupe la diagonale [AC] en I entre A et C. Le point I est donc commun aux droites (BD) et (AC), il est unique car on sait que, du fait que le polygone est convexe, ses sommets ne sont pas alignés, et il appartient plus précisément à la diagonale [AC] mais le même raisonnement montre qu'il appartient aussi à la diagonale [BD]. De plus I est intérieur au polygone car la définition de l'intérieur montre que les points des diagonales, sauf les extrémités, sont tous intérieurs au polygone. Ainsi :

Proposition: les diagonales d'un quadrilatère convexe se coupent à l'intérieur de ce polygone.

Ce résultat est évidemment faux pour un polygone qui a plus de quatre sommets.

Dans le cas d'un quadrilatère, on dispose d'un critère plus simple pour la convexité: disons que deux sommets consécutifs du quadrilatère vérifient la condition CC s'ils sont d'un même côté par rapport à la droite qui porte le côté opposé, alors par définition la convexité équivaut au fait que CC est vérifiée par les quatre paires de sommets consécutifs. En fait:

Proposition: Si dans un quadrilatère ABCD, la condition CC est réalisée pour trois paires de sommets consécutifs, elle l'est pour la quatrième, autrement dit, le quadrilatère est convexe.

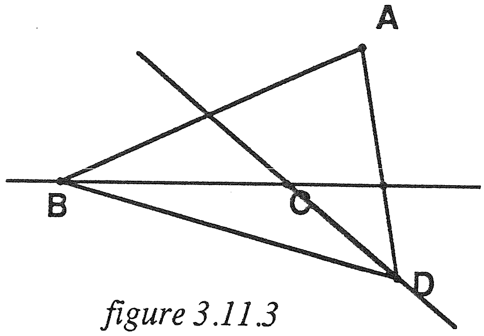


figure 3.11.3

Démonstration: supposons la condition CC réalisée sauf pour A et D, c'est-à-dire que A et D soient de part et d'autre de (BC) qui coupe donc]AD[en E. Les poins B et C sont distincts par définition d'un polygone et du fait qu'ils vérifient CC, les trois points B, C, E sont deux à deux distincts, donc un et un seul est entre les deux autres.

- On ne peut avoir B∗E∗C, sinon B est C seraient de part et d'autre de (AD), ce qui est exclu par hypothèse.

- Supposons que l'on ait B∗C∗E. En appliquant le théorème de Pasch au triangle ABE et à la sécante (CD), on obtient que celle-ci doit couper [AB] ou [AE]. Or (CD) coupe (AE) en un seul point D qui par hypothèse n'appartient pas au segment [AE], donc (CD) coupe [AB] entre A et B (car (CD) ne passe pas par A), ce qui est exclu par hypothèse.

-Si l'on suppose que E∗B∗C, on montre de même que l'on aboutit à une contradiction avec l'hypothèse que C et D sont d'un même côté de (AB).

Il est donc impossible que B, E et C soient trois points distincts d'une même droite, ceci prouve par l'absurde que CC est vérifiée par A et D.

Remarque: si un polygone n'est pas convexe, ce qui se traduit par définition par le fait que la condition CC n'est pas réalisée pour au moins un côté, on en déduit, par contraposition du résultat précédent, qu'il y au moins un autre côté pour lequel la condition n'est pas réalisée. Réciproquement comme, dans la démonstration ci-dessus, on a effectivement utilisé les trois hypothèses faites, on peut soupçonner qu'elles sont indispensables. Ce point va être précisé plus loin.

Exercice: si un segment a ses extrémités sur deux côtés différents d'un polygone convexe, tous ses points autres que ses extrémités sont intérieurs au polygone.

3.12) Formes possibles d'un quadrilatère.

Limitons nous au cas raisonnable de quatre points A, B, C, D tels que trois quelconques ne soient jamais alignés. Alors, les différentes tentatives de dessin nous conduisent expérimentalement à l'existence de trois "cas de figure":

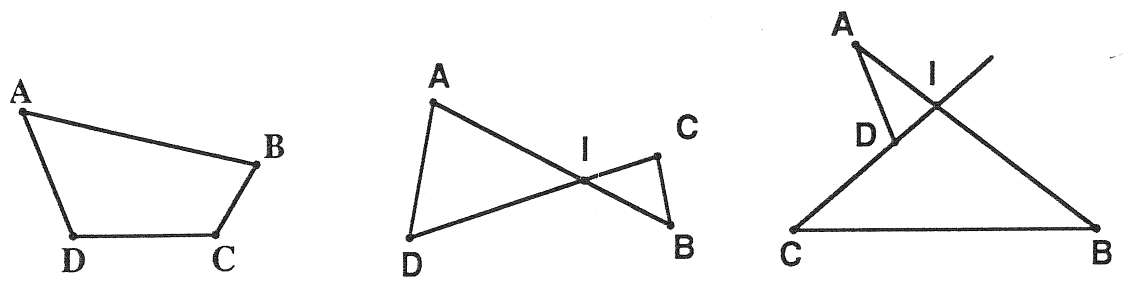


figure 3.12.1

Pour montrer qu'il n'y a que ces trois là et comment on peut précisément les définir, on peut faire le raisonnement suivant dans le but de classer les quadrilatères ABCD:

On peut tout d'abord distinguer deux catégories suivant que les côtés opposés [AB] et [CD] se rencontrent ou pas.

- premier cas: les côtés opposés [AB] et [CD] se rencontrent en un point I qui est, d'après les hypothèses, unique et distinct des sommets du quadrilatère, donc intérieur à chaque segment. Il en résulte que les points C et D sont de part et d'autre de (AB), donc que les demi-droites [AD) et [BC), sauf les points A et B, sont de part et d'autre de (AB), comme A≠B, elles n'ont donc aucun point commun et a fortiori, il en est de même de [AD] et [BC], c'est-à-dire que les deux autres côtés opposés ne se rencontrent pas.

Remarque: ainsi CC n'est remplie ni pour [AB] ni pour [CD], il est facile de montrer qu'elle est remplie par contre par [BC] et [DA], car par exemple, B et C sont tous deux du même côté que I par rapport à (AD).

Conclusion: dans un quadrilatère dont les sommets sont trois à trois non alignés, ou bien un et un seul couple de côtés opposés se rencontrent, ou bien deux côtés opposés n'ont jamais de point commun. C'est ce deuxième cas qui nous reste à étudier.

- deuxième cas: deux côtés opposés n'ont jamais de point commun.

Considérons un tel couple de côtés opposés, [AB] et [CD], ou bien [AB] et (CD) ont un point commun I, ou bien non.

S'ils ont I en commun, comme ce point n'est pas entre C et D, ou bien C est entre I et D, ou bien D est entre I et C.

- Si D est entre I et C (cf troisième figure 3.12.1): par définition, I et C sont de part et d'autre de (AD). D'autre part, I et B sont du même côté de (AD), car I est différent de A et le segment [IB], contenu dans]AB) est entièrement dans le même demi-plan par rapport à (AD). Donc B et C sont de part et d'autre de (AD), donc [BC] rencontre (AD).

- De même, si C est entre I et D, [AD] coupe (BC).

Conclusion: si dans un couple de côtés opposés, l'un rencontre la droite support de l'autre, il en est de même dans l'un des deux autres couples de côtés opposés. Ou encore, si deux sommets consécutifs sont de part et d'autre de la droite support du côté opposé, il en est de même pour deux autres sommets consécutifs pris parmi les paires qui ont un sommet commun avec les deux sommets initiaux. Ainsi, si la condition CC est fausse pour deux sommets consécutifs, disons A et B, elle l'est aussi nécessairement pour deux autres sommets, ce qu'on savait déjà, mais on peut préciser que ces deux autres sommets ne sont pas C et D. Comme on est dans le deuxième cas, il est facile de voir que ces deux paires de sommets sont les seules à ne pas vérifier CC.

Synthèse: considérons un quadrilatère ABCD, en supposant que trois sommets ne soient jamais alignés, les cas suivants sont possibles.

- ou bien CC est remplie au moins trois fois, alors elle l'est quatre fois, et le quadrilatère est convexe.
- ou bien CC est remplie deux fois et fausse deux fois, deux cas sont alors à distinguer:
  - ou bien deux côtés opposés ont un point commun, CC est alors fausse pour les extrémités de ces côtés opposés et vraie pour les deux autres côtés (également opposés).
  - ou bien deux côtés opposés n'ont jamais de point commun, alrs CC est fausse pour les extrémités de deux côtés consécutifs et vraie pour les extrémités des autres côtés consécutifs.

Reste à vérifier que ces trois cas, logiquement possibles, peuvent effectivement se réaliser, ce qui n'est pas difficile:
- on verra, à l'occasion de la démonstration de l'existence du milieu d'un segment, qu'il existe des parallélogrammes, donc des polygones convexes.
- soit A et B deux points distincts, soit C un point qui n'est pas sur (AB) et I un point de (AB) distinct de A et B, soit D tel que $C*I*D$. Si $A*I*B$, on réalise ainsi le deuxième cas, sinon c'est le troisième.

Commentaire: en respectant les règles usuelles du dessin, on voit qu'on obtient bien ainsi les trois formes expérimentalement possibles d'un quadrilatère (fig 3.12.1) et qu'on a ainsi justifié théoriquement le fait qu'il n'existe que ces trois formes là. On peut remarquer également le prix élevé à payer pour arriver à cette conclusion: il y a un énorme contraste entre la simplicité intuitive du résultat et la complexité (plutôt que la difficulté, car il s'agit d'une simple classification) de la démonstration. Enfin on remarquera que l'on peut exprimer le résultat en disant qu'il y a trois cas de figure pour un polygone, et un peu de réflexion montrera que *l'examen des cas de figure en géométrie renvoie toujours à des distinctions qui relèvent du groupe des axiomes d'ordre et qui en conséquence sont dans la pratique toujours lues sur le dessin.* Un peu de trapèze va maintenant nous en convaincre.

3.13) Qu'est-ce qu'un trapèze ?

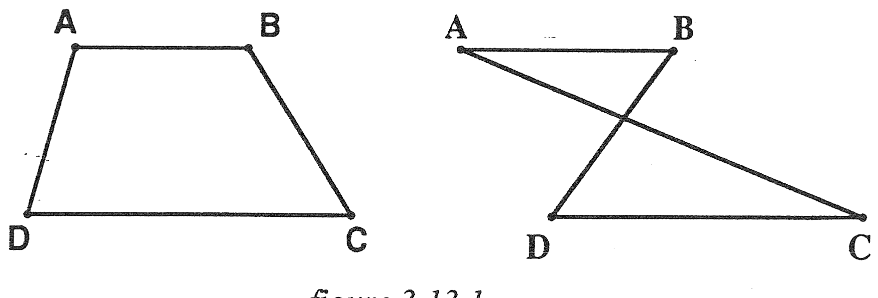


figure 3.13.1

Disons qu'un quadrilatère ABCD est un trapèze si deux côtés opposés (en toute rigueur leurs supports) sont parallèles, par exemple [AB] et [CD] qui sont alors dits "bases" du trapèze. Il en résulte immédiatement que CC est remplie pour ces deux côtés. Mais il est tout à fait possible qu'elle ne le soit pas pour les deux autres côtés, on a alors un trapèze croisé. Si l'on veut éviter ce cas, il faut préciser qu'on appelle trapèze un quadrilatère *convexe* tel que deux côtés opposés soient parallèles. Considérons alors l'exercice suivant, extrait d'un manuel de quatrième: Soit ABCD et CEFD deux trapèzes ayant une base commune [CD], montrer que ABEF est aussi un trapèze.

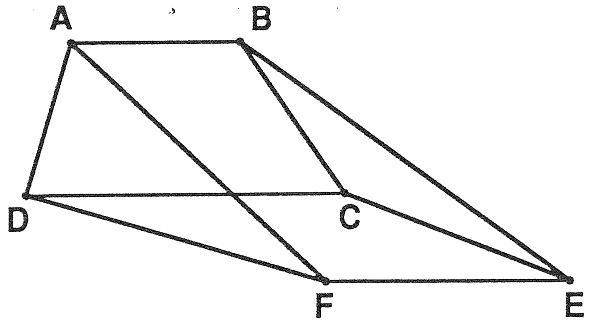


figure 3.13.2

La solution attendue est manifestement celle-ci: par hypothèse, (AB) est parallèle à (CD) et (CD) parallèle à (EF) donc (AB) est parallèle à (EF) d'où le résultat.

Cette solution est aussi celle qu'aurait proposé Euclide, on la complétera éventuellement en remarquant que le trapèze ABEF peut être "aplati".

Le problème est autrement plus complexe si l'on exige des trapèzes d'être convexes: il s'agit alors de montrer en outre que ABEF est convexe, ce qui n'est pas trivial.

Notons que ce problème n'est pas du tout anecdotique: en effet, nous avons vu qu'un polygone est convexe si CC est remplie par trois côtés. Dans le cas d'un trapèze ABCD, CC étant remplie par les bases [AB] et [CD], il suffira qu'elle soit remplie par exemple par [BC], c'est-à-dire que B et C soient d'un même côté de (AD), pour être certain de la convexité. Posons alors l'évidente définition suivante:

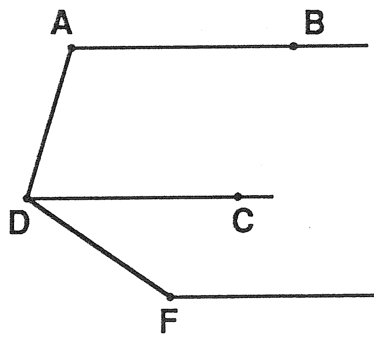


figure 3.13.3

Définition: on dit que deux demi-droites parallèles [AB) et [DC) sont de même sens si B et C sont d'un même côté de (AD).

Alors un quadrilatère ABCD est un trapèze de base [AB] si et seulement si [AB) et [DC) sont parallèles et de même sens, de sorte que démontrer la convexité de ABEF dans l'exercice revient à démontrer la transitivité de la relation "être de même sens" pour les couples de demi-droites parallèles. Notre exercice de quatrième est exactement équivalent à ce problème fondamental dont la solution figure en annexe 2!

Ici aussi, la lecture sur le dessin rend tous ces résultats tellement évidents que la question ne se pose même pas! Voici quelques exercices du même genre (vous pouvez en inventer vous-mêmes pratiquement à volonté):

Exercice: soit un triangle ABC et O un point du plan n'appartenant à aucune des trois droites support des côtés, montrer que l'une au moins des trois demi-droites [OA), [OB), [OC) coupe un côté du triangle entre ses extrémités.

Exercice: soit ABC un triangle, caractériser l'ensemble des points O du plan tels que les trois demi-droites [OA), [OB), [OC) soient deux à deux de support différent et que l'une d'entre elles soit entre les deux autres.

3.14) Définition des angles et de l'intérieur d'un triangle ABC.

On définit comme d'habitude les trois angles d'un triangle. L'intérieur du triangle est alors par définition l'intersection des intérieurs des trois angles, c'est-à-dire l'ensemble des points qui sont, par rapport à chaque côté, du même côté que le sommet opposé. C'est un cas particulier de la notion d'intérieur d'un polygone convexe, en effet, tout triangle est convexe.

3.15) Lemme: si M et N appartiennent à deux côtés différents d'un triangle sans être tous deux des sommets, tous les points de]MN[sont intérieurs au triangle.

La démonstration, dont la rédaction précise est laissée au lecteur, utilise le fait que M et N appartiennent nécessairement aux deux côtés d'un angle du triangle donc que]MN[est intérieur à cet angle. On montre ensuite que]MN[est, par rapport au côté opposé, du même côté que le sommet de cet angle.

3.16) Proposition: 1) Si une demi-droite dont l'origine est à l'extérieur du triangle ABC coupe (AB) entre A et B, elle coupe aussi [AC] ou [BC]

2) Si une demi-droite a son origine à l'intérieur de ABC, elle coupe un des côtés du triangle, et un seul si elle ne passe pas par un sommet.

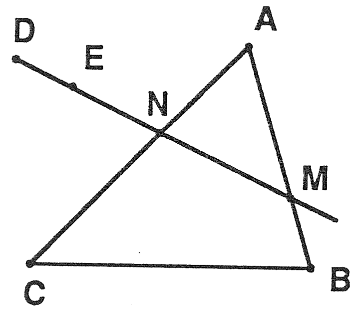


figure 3.16

Démonstration de 1) : soit [DE) une demi-droite coupant (AB) en M entre A et B. D'après le théorème de Pasch, la droite (DE) coupe aussi [AC] ou [BC] en N. Alors, D ne peut pas être entre M et N, sinon il serait intérieur au triangle, d'après 3.15. Ceci prouve que M et N sont sur la même demi-droite issue de D.

La rédaction précise de la démonstration de 2) est laissée au lecteur (aide : soit O un point intérieur à ABC et d une droite passant par O; montrer que [AO) coupe [BC] et appliquer le théorème de Pasch à d et à un triangle dans lequel d "rentre", en déduire le résultat. Il y a un certain nombre de cas particuliers à examiner).

CHAPITRE 4 : PREMIÈRES CONSÉQUENCES DES AXIOMES DE CONGRUENCE.

Des démonstrations assez fastidieuses, mais faciles, souvent par identification, permettent de démontrer les relations entre ordre et congruence qu'on lit habituellement sur la figure :

4.1) Proposition: Si $A*B*C$, $D*E*F$, $[AB]\cong[DE]$ et $[AC]\cong[DF]$, alors $[BC]\cong[EF]$.

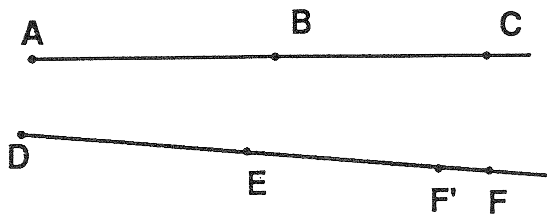


figure 4.1

Démonstration: soit F' tel que $D*E*F'$ et $[EF']\cong[BC]$, alors $[DF']\cong[AC]$ (C3), donc $[DF']\cong[DF]$ (C2). Or F et F' appartiennent tous deux à [DE), donc F=F'(C1).

4.2) Proposition: Soit [AC] et [DF] tels que $[AC]\cong[DF]$. Alors il existe, pour tout point B entre A et C, un unique point E entre D et F tels que $[AB]\cong[DE]$.

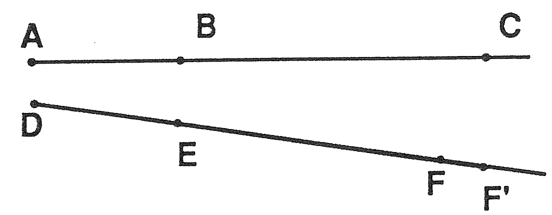


figure 4.2

Démonstration: il existe E sur [DF) tel que $[AB]\cong[DE]$ (C1), il s'agit de démontrer que $D*E*F$. Soit F' tel que $D*E*F'$ et $[EF']\cong[BC]$, alors $[DF']\cong[AC]$ (C3), donc F=F' puisque ces deux points appartiennent à la même demi-droite d'origine D.

4.3) Définition: [AB]<[CD] (aussi noté [CD]>[AB]) signifie qu'il existe un point E entre C et D tel que $[AB]\cong[CE]$.

Les résultats 4.1 et 4.2 permettent de démontrer:

4.4)Théorème: la relation ainsi définie est une relation d'ordre strict totale, compatible avec la congruence.

Nous suggérons au lecteur de ne pas perdre de temps à écrire la démonstration de 4.4, sans grand intérêt. Voici maintenant quelques résultats plus intéressants:

4.5) Théorème: Si dans un triangle ABC, $[AB]\cong[AC]$, alors $\hat{B}\cong\hat{C}$ (autrement dit, dans un triangle isocèle, les angles à la base sont égaux).

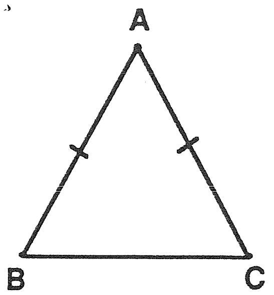


figure 4.5

Démonstration: Comme $B\hat{A}C \cong C\hat{A}B$ (C5), $[AB] \cong [AC]$ et $[AC] \cong [AB$, les triangles ABC et ACB sont congruents d'où le résultat.

Historique: On lit parfois que cette astucieuse démonstration a été trouvée par un ordinateur. Il s'agit sans doute d'une conclusion tirée d'une lecture un peu rapide de l'ouvrage classique de Laurier sur l'intelligence artificielle. En réalité, cette démonstration est due au cerveau tout à fait naturel de Proclus (3ème siècle ap J. C.).

Commentaire: cette définition montre que, du point de vue de la congruence, c'est-à-dire dès qu'on énonce les "cas d'égalité" des triangles, dont le premier est C6, on doit considérer qu'un triangle est défini par un triplet ABC ordonné de trois points deux à deux distincts, ainsi la donnée de trois points deux à deux distincts définit a priori six triangles; ceci est bizarre du point de vue du sens commun, en effet, la notion courante de triangle est celle d'une forme associée à un dessin et pour la définition de laquelle il n'est pas indispensable de donner un nom aux trois sommets. Le concept de triangle fournit même un exemple classique de formation d'un concept par abstraction des propriétés communes (ici faciles à énoncer) à tous les dessins ou réalisations matérielles de triangle. On obtient ainsi un concept de triangle, ou de forme triangulaire, qui suffit certainement pour la vie courante et le début des mathématiques, mais qui doit être précisé comme nous l'avons fait ci-dessus, en un concept mathématique de triangle, différent, exigeant en particulier de donner un nom aux sommets, dès qu'on prétend codifier les "cas d'égalité". Le lecteur notera que si un triangle n'est pas isocèle (ceci a un sens aussi bien au sens courant qu'au sens mathématique car si l'un des six triangles déterminés par trois points est isocèle, tous le sont), les six triangles associés sont deux à deux non congruents.

Il est maintenant conseillé au lecteur de chercher par lui-même, avant de la lire, l'instructive et peut-être déroutante démonstration du théorème suivant. Dans cet théorème intervient la notion d'angles supplémentaires dont la définition est classique: il s'agit de deux angles qui ont un côté commun et les deux autres côtés opposés (au sens des demi-droites).

4.6) Théorème: des angles supplémentaires d'angles congruents sont eux-même congruents.

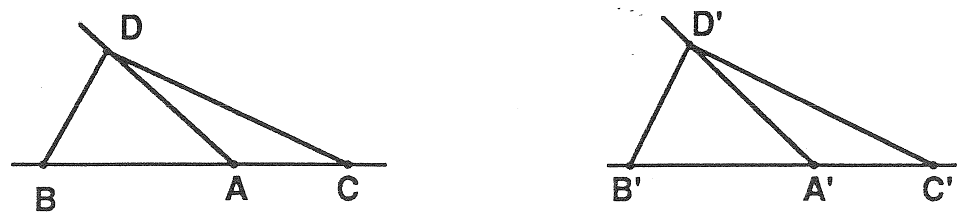


figure 4.6

Démonstration: soit A, B, C, D et A', B', C', D' tels que $B*A*C$ et $B'*A'*C'$, et $B\hat{A}D \cong B'\hat{A}'D'$. D'après C1, il existe B_1 sur [AB) tel que $[AB_1] \cong [A'B']$, quitte à remplacer B par B_1, on se ramène donc au cas où $[AB] \cong [A'B']$ et de même, on peut supposer $[AC] \cong [AC']$

et $[AD] \cong [AD']$. On peut alors appliquer C6 aux triangles BAD et B'A'D' qui sont donc congrus, d'où il résulte en particulier les congruences: $A\hat{B}D \cong A'\hat{B'}D'$ et $[BD] \cong [B'D']$. D'après C3, on en déduit $[BC] \cong [B'C']$, ce qui permet d'obtenir, toujours via C6, la congruence des triangles BCD et B'C'D', d'où l'on déduit en particulier $B\hat{C}D \cong B'\hat{C'}D'$ et $[CD] \cong [[C'D']$. Ceci permet enfin de démontrer la congruence des triangles ACD et A'C'D' d'où résulte l'égalité cherchée:

Commentaire: Cette démonstration a de l'intérêt dans son principe : elle montre le rôle de l'axiome C6: il permet de relier la congruence des segments et celle des angles. Evelyne Barbin (1989, Trois démonstrations pour un théorème élémentaire de géométrie. Sens de la démonstration et objet de la géométrie, in *Actes du 7ème colloque inter-IREM épistémologie et histoire des mathématiques: la démonstration mathématique dans l'histoire*, IREM de Lyon, 496 pages, p. 57-80) fait remarquer qu'Euclide n'envisage d'angle qu'engagé dans un triangle; comme Euclide raisonne comme nous le faisons ici par "triangulation", c'est-à-dire par un recours systématique aux cas d'égalité des triangles, il est naturellement conduit à cette attitude.

4.7) Corollaire: Des angles opposés par le somment sont congruents.

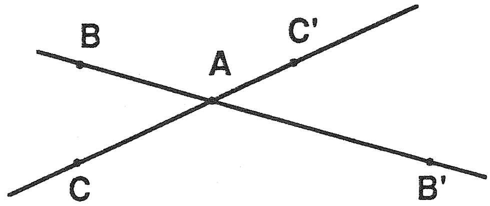


figure 4.7

Démonstration: deux angles $B\hat{A}C$ et $B'\hat{A'}C'$ sont dits opposés par le sommet si B∗A∗B' et C∗A∗C'. Dans ce cas, ces deux angles ont pour supplémentaire commun $B\hat{A}C'$ donc ils sont congruents.

Historique : La tradition grecque attribue la démonstration de ce résultat à Thalès. Il est malheureusement impossible de savoir ce qu'il faut entendre par démonstration dans ce cas, ce que vous pouvez aisément constater par vous-mêmes car tous les textes mentionnant Thalès tiennent en quelques pages (on peut les trouver dans l'ouvrage de Dumont JP, *Les présocratiques*, Gallimard, coll. la Pléiade, 1625 pages, p. 3-23)

4.8) Ordre sur les angles: on peut définir un ordre strict sur les angles de façon tout à fait analogue à l'ordre sur les segments : $A\hat{B}C < D\hat{E}F$ est équivalent par définition au fait qu'il existe une demi-droite [EG) qui est à l'intérieur de l'angle $D\hat{E}F$ et telle que $A\hat{B}C \cong D\hat{E}G$.

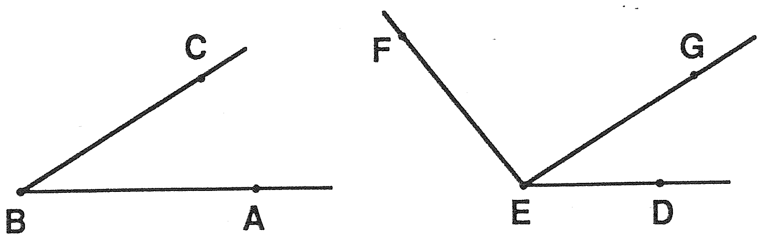


figure 4.8

Par des démonstrations assez longues, mais pas très difficiles à trouver une fois qu'on a intégré l'idée de triangulation systématique, on montre qu'il s'agit là encore d'une relation d'ordre strict totale, compatible avec la congruence.

4.9) Théorème de l'angle alterne-interne.

Définition préalable: Soit une droite t rencontrant deux autres droites d et d' en deux points distincts B et B' respectivement. Soit A et C sur d tels que A∗B∗C. Soit A' et C' sur d' tels que A et A' soient du même côté de t et que A'∗B'∗C'. On définit ainsi quatre angles internes de sommets B et B': $A\hat{B}B'$, $C\hat{B}B'$, $A'\hat{B}'B$, $C'\hat{B}'B$ et parmi les quatre paires d'angles internes de sommets différents, deux paires d'angles alternes internes: $A\hat{B}B'$ et $C'\hat{B}'B$ d'une part et leurs supplémentaires $B'\hat{B}C$ et $B\hat{B}'A'$ d'autre part.

Enoncé du théorème: Si deux droites distinctes d et d' sont coupées par une transversale t en deux points distincts de telle manière que les angles d'une paire d'angles alternes internes soient congruents, elles sont parallèles.

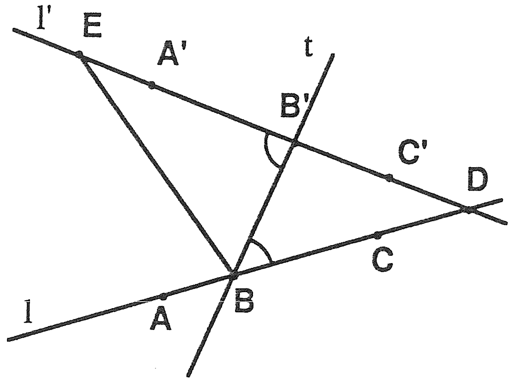


figure 4.9

Supposons par exemple que $B'\hat{B}C \cong B\hat{B}'A'$ et que d et d' aient un point commun D qui soit par exemple du même côté que C et C' par rapport à t. Il existe un point E sur [B'A') tel que $[B'E] \cong [BD]$. Ainsi, les triangles B'BD et BB'E sont congruents. Il en résulte que $B\hat{B}'D \cong B'\hat{B}E$. Comme $B\hat{B}'D$ est supplémentaire de $B\hat{B}'A'$, $B'\hat{B}E$ doit être supplémentaire de $D\hat{B}B' = B'\hat{B}C$ (on utilise ici le fait que des supplémentaires d'angles congruents sont congruents et l'axiome C4). Donc E appartient à la droite d, donc d'=(ED)=d, ce qui est absurde. Donc nécessairement d est parallèle à d'.

4.10) Corollaire: Par tout point P n'appartenant pas à une droite d, il passe une parallèle à d.

Démonstration: ceci se déduit facilement de 4.9: il suffit de construire, en utilisant C4, une droite passant par P à laquelle on puisse appliquer 4.9.

4.11) Géométrie neutre et géométrie non euclidienne.

On désigne par géométrie euclidienne la géométrie obtenue à partir du système complet des axiomes de Hilbert.

On appelle géométrie non euclidienne toute géométrie dans laquelle l'axiome des parallèles est un énoncé faux. Il en existe plusieurs, par exemple la géométrie sphérique définie au chapitre 1, 1.5, ex 2. On désigne souvent abusivement par géométrie non euclidienne une seule de ces géométries, celle où tous les axiomes de Hilbert sont vrais sauf l'axiome des parallèles remplacé par sa négation ; si l'on veut être précis, il faut parler à son propos de géométrie de Lobatchevski ou de géométrie hyperbolique. Nous garderons cependant cet abus de langage jusqu'au bout de ce document.

On désigne par géométrie neutre la géométrie obtenue à partir du système de tous les axiomes de Hilbert, excepté l'axiome des parallèles.

Ainsi, les propriétés de géométrie neutre sont celles qui sont communes à la géométrie euclidienne et à la géométrie non euclidienne, ou encore, ces deux dernières géométries constituent chacune un modèle de la géométrie neutre. Toutes les propriétés que nous avons démontrées jusqu'à présent appartiennent à cette géométrie que nous continuons maintenant à explorer.

Exercices: montrer que la réciproque du théorème 4.9 est vraie si et seulement si on est en géométrie euclidienne, c'est-à-dire que cette réciproque peut se démontrer à partir des axiomes d'ordre, d'incidence et de congruence, et de l'axiome des parallèles, et que réciproquement on peut démontrer l'axiome des parallèles si l'on ajoute aux axiomes d'incidence, d'ordre et de congruence, l'énoncé réciproque de 4.9. Euclide utilise la réciproque pour démontrer la transitivité de la relation "être parallèle à". Montrer que effectivement cette relation est transitive si et seulement si on est en géométrie euclidienne.

4.12) Théorème de l'angle extérieur (Euclide): L'angle extérieur à un triangle est plus grand que chacun des angles intérieurs non adjacents.

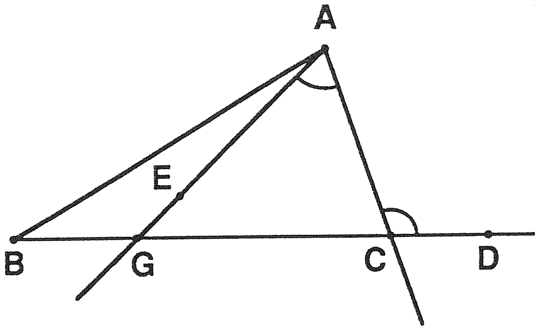


figure 4.12

Soit un triangle ABC, précisons d'abord ce qu'est un angle extérieur à ce triangle, par exemple de sommet C : il est obtenu à partir de $\hat{C}$ en remplaçant une et une seule des demi-droites définissant $\hat{C}$ par la demi-droite opposée, ce qui fournit deux angles extérieurs opposés par le sommet. Ici, nous considérerons un point D tel que B∗C∗D et l'angle extérieur $A\hat{C}D$.
Considérons $B\hat{A}C$, si $B\hat{A}C \cong A\hat{C}D$, (AB) est parallèle à (CD), ce qui est absurde. Supposons $B\hat{A}C$ plus grand que $A\hat{C}D$. Ceci signifie par définition qu'il existe [AE) entre [AB) et [AC) telle que $A\hat{C}D= C\hat{A}E$ donc que (AE) est parallèle à (CD)=(BC). Or [AE) coupe [BC] en G (crossbar th), donc on tombe encore sur une contradiction. La seule possibilité restante est bien $B\hat{A}C < A\hat{C}D$.

Le même argument s'applique quand on remplace $B\hat{A}C$ par $A\hat{B}C$: il suffit de remplacer $A\hat{C}D$ par l'angle extérieur opposé par le sommet.

Historique: On a là l'exemple d'un théorème inconnu de la géométrie du collège et du lycée, d'ailleurs conséquence immédiate en géométrie euclidienne du fait que la somme des mesures des angles d'un triangle est égale à celle d'un angle plat, et qui joue un rôle fondamental dans l'enchaînement des théorèmes de géométrie neutre, aussi bien chez Euclide que chez Hilbert. Mais Euclide faisait-il de la géométrie neutre ? Il serait anachronique de l'affirmer puisqu'il n'y fait aucune allusion. Cependant on doit constater que les vingt six premières propositions du livre I des ses "Eléments" ne font aucun usage du postulat des parallèles. Il est difficile d'y voir une simple coïncidence, d'autant plus qu'on sait par ailleurs que dès l'antiquité, la théorie des parallèles posait problème. Il semble donc raisonnable de penser que Euclide a d'abord essayé de démontrer le maximum de résultats, sans faire appel à son célèbre postulat, donc qu'il a bien fait, effectivement, de la géométrie neutre, et sans doute pas sans le savoir (sur ces questions cf Euclide, p. 300 et la suite).

Existence et unicité du milieu d'un segment.

On définit le milieu d'un segment [AB] comme un point de la droite (AB) tel que [IA] et [IB] soient congrus. Il n'est pas trop difficile de montrer, à partir des propriétés de la relation d'ordre entre segments qu'un tel point, s'il existe, est entre A et B (si $A \neq B$) et est unique. Reste à prouver l'existence. Pour cela nous avons besoin d'un cas d'égalité ad hoc:

4.13) Proposition: soit deux triangles ABC et A'B'C'. Si $[AC] \cong [A'C']$, $\hat{A} \cong \hat{A}'$ et $\hat{B} \cong \hat{B}'$, alors les triangles sont congruents.

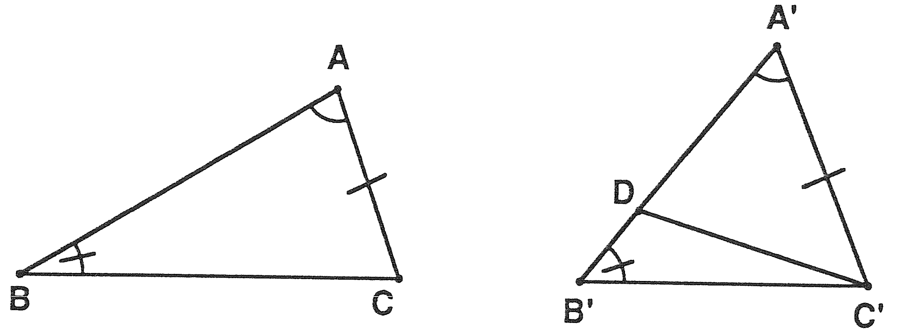


figure 4.13

Démonstration: Soit D sur [A'B') tel que $[A'D] \cong [AB]$ de sorte que d'après C6 le triangle ABC est congru au triangle A'DC'. Donc $A'\hat{D}C' \cong \hat{B} \cong A'\hat{B}'C'$, si $D \neq B'$, il en résulte d'après une extension classique de 4.9 où l'on remplace les angles alternes-internes par les angles "correspondants", que les droites (B'C') et (DC') sont parallèles, ce qui est absurde puisqu'elles ont C' en commun.

4.14) Théorème: tout segment admet un milieu unique.

Démonstration: nous n'avons à prouver que l'existence. L'idée revient en quelque sorte à construire un parallélogramme dont [AB] soit une des diagonales.

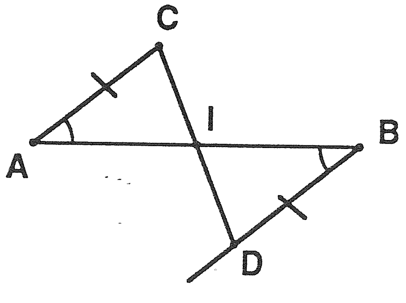


figure 4.14.1

Pour cela, soit [AB] un segment, C un point en dehors de (AB). Considérons la demi-droite d'origine B, située dans le demi-plan limité par (AB) et ne contenant pas C et qui fasse avec [BA) un angle congruent à $B\hat{A}C$. Soit D un point de cette demi-droite tel que $[BD] \cong [AC]$. Comme C et D sont de part et d'autre de (AB), (CD) coupe (AB) en un point I qui est entre C et D.

Il est tentant d'achever la démonstration sous la forme suivante: les angles en I des deux triangles AIC et BID sont égaux comme opposés par le sommet, on peut alors appliquer, vu les définitions de C et D, la proposition 4.13 à ces deux triangles qui sont donc congruents, d'où l'on tire en particulier que [IB] ≅ [IA].

Malheureusement, cette démonstration utilise le fait, non démontré et lu sur le dessin que I est entre A et B, lorqu'on affirme que les angles en I sont opposés par le sommet. Reste donc à démontrer que I est entre A et B. Pour cela on raisonne par l'absurde en supposant par exemple A∗B∗I.(figure 4.14.2)

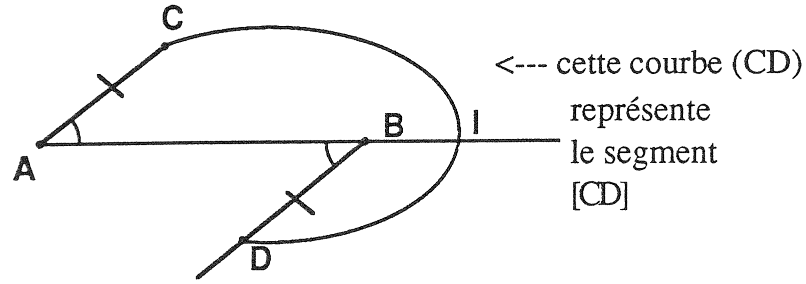


figure 4.14.2

On applique le théorème de Pasch au triangle AIC et à la sécante (BD) qui coupe donc nécessairement [AC] ou [IC]. Comme par construction, (BD) est parallèle à (AC), elle devrait rencontrer [IC]. Or (BD) et (IC) ont déjà en commun le point D qui n'est ni I, ni C et qui n'est pas entre I et C et , sinon B et C seraient dans le même demi-plan par rapport à (AB). Il y a donc contradiction. On élimine de même l'hypothèse I∗A∗B.

Commentaires: 1) On peut vérifier facilement que ADBC est effectivement un parallélogramme dont les diagonales se coupent en leur milieu. Ainsi, il existe en géométrie neutre des parallélogrammes dont les diagonales se coupent en leur milieu. Comme un peu de réflexion montre qu'en géométrie non euclidienne, qui est un modèle de la géométrie neutre, il existe des parallélogrammes dont les diagonales ne se coupent pas en leur milieu, on ne peut pas démontrer en géométrie neutre que les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu.

2) Il est intéressant d'observer comment on dessine une figure pour appuyer le raisonnement par l'absurde permettant de montrer que I est entre A et B. Dans tous les groupes affrontés à ce problème que j'ai eu l'occasion d'observer, deux figures apparaissent: la première (4.14.2) porte comme informations évidentes graphiquement les congruences d'angles et de segments, mais le fait que (CD) est une droite est peu visible...La deuxième est (4.14.3) ci-dessous :

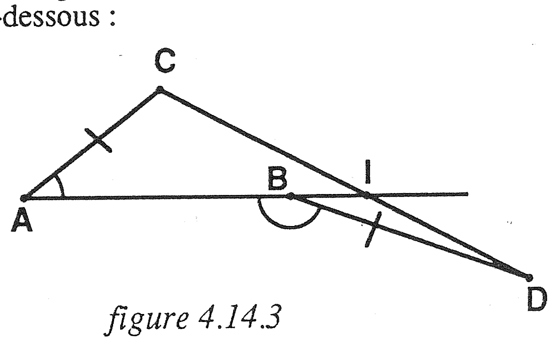


figure 4.14.3

Cette figure montre bien que (CD) est une droite, mais au prix de la perte graphique de la congruence des angles. Lorsqu'on pratique couramment la géométrie neutre, on prend peu à peu l'habitude de ne pas hésiter à représentèr graphiquement les droites sous forme "courbe" en cas de besoin, c'est-à-dire pour éviter de rendre certaines conclusions trop évidentes ou au contraire pour pouvoir mettre en évidence certaines hypothèses.

4.15) Retour sur la démonstration élémentaire relative à la somme des angles d'un triangle.

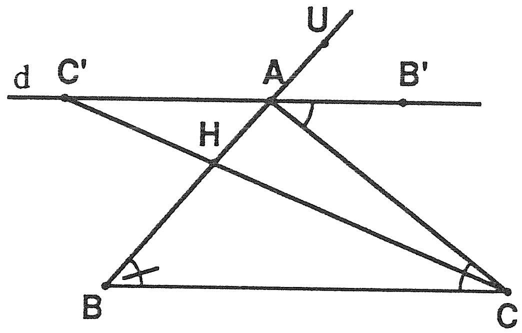


figure 4.15

Voici rapidement rappelée cette démonstration: soit un triangle ABC, on mène par A la parallèle d à (BC), puis on applique la réciproque du théorème 4.9, qui est vraie en géométrie euclidienne, ainsi l'angle $\hat{C}$ du triangle se retrouve en $C\hat{A}B'$ et l'angle $\hat{B}$ en $B\hat{A}C'$, d'où l'on déduit facilement le résultat.

En fait l'analyse de cette démonstration montre qu'on lit sur le dessin une propriété essentielle qui est la clef du résultat.

En effet, comment s'y prend-on pour faire apparaître des angles alternes-internes: on considère par définition la demi-droite [AB') parallèle en A à (BC), donc portée par d, et telle que B et B' soient de part et d'autre de (AC) afin que les angles $A\hat{C}B$ et $C\hat{A}B'$ soient effectivement alternes-internes; de même, C' est un point de d qui est de l'autre côté de C par rapport à (AB). Toute la démonstration repose sur le fait que les demi-droites [AB') et [AC') sont opposées, et non pas confondues, donc sur le lemme suivant:

lemme: Si B' et C' ont été construits comme il a été dit, ils sont de part et d'autre de A.

Démonstration du lemme: montrons que [CC') est, sauf C, dans le demi-plan limité par (AC) et contenant B, ce qui entraînera que B' et C' sont dans deux demi-plans différents par rapport à (AC) donc que [B'C'] coupe (AC) en un point qui est entre B' et C', comme ce point ne peut être que A, c'est terminé.

Or on sait par hypothèse que]CC'[coupe (AB) en un point H différent de A. Montrons que ce point H est sur [AB).

Sinon, H serait sur la demi-droite opposée, soit [AU). Ainsi B et H seraient de part et d'autre de d; or C et B sont d'un même côté de d puisque (BC) et d sont parallèles. Donc C et H seraient de part et d'autre de d, donc]CH[couperait d. Or (CH) coupe d en C', ainsi C' serait entre C et H, ce qui est faux car c'est H qui est entre C et C'. Le point H ne peut donc pas être sur [AU).

Ainsi H est bien sur [AB), donc H est dans le demi-plan limité par (AC) et contenant B, il en est de même de [CH) sauf C, c'est-à-dire de [CC').

Commentaire: ici aussi, on voit que la lecture sur le dessin d'une propriété d'ordre, pratiquement inconsciente (il faut de l'attention pour la mettre en évidence), évite la partie la plus difficile de la démonstration.

CHAPITRE 5 : LES AXIOMES DE CONGRUENCE ET L'ANGLE DROIT.

5.1) Définition: on dit qu'un angle est droit s'il est congru à un de ses supplémentaires.

Cette définition est stable par congruence, c'est-à-dire que tout angle congru à un angle droite est droit, ceci résulte immédiatement du théorème 4.6. Reste à examiner s'il existe des angles droits et si tous les angles droits sont congrus entre eux, ce qui était un axiome pour Euclide.

5.2) Définition: Soit deux droites sécantes en A, elles déterminent quatre demi-droites d'extrémité A, et quatre angles de sommmet A. Si l'un de ces angles est droit, les deux angles supplémentaires le sont aussi, par définition, ainsi que l'angle opposé par le sommet, donc les quatre angles sont droits. *On dit dans ce cas que les deux droites sont perpendiculaires.* Le théorème suivant montre en particulier qu'il existe des droites perpendiculaires et des angles droits

5.3) Théorème: Par tout point P extérieur à une droite d, il passe une perpendiculaire à cette droite.

Démonstration: soit A et B deux points distincts de d, il existe unique demi-droite d'origine A faisant en A un angle congruent à $\widehat{BAP}$ et située, sauf A, dans le demi-plan ne contenant pas P. Soit P' le point de cette demi-droite tel que $[AP'] \cong [AP]$. Comme P et P' sont de part et d'autre de d, la droite (PP') coupe d en I entre P et P'.

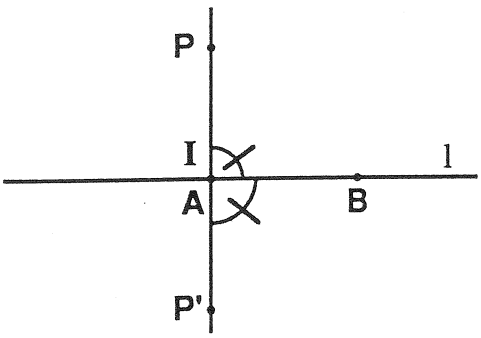


figure 5.3.1

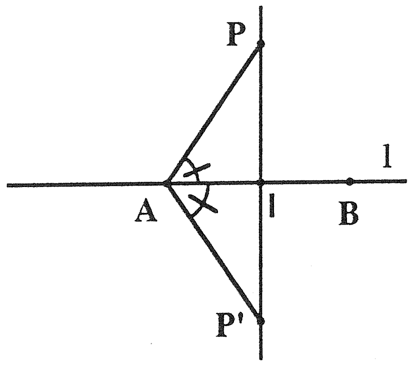


figure 5.3.2

Si I=A, les angles $\widehat{BAP}$ et $\widehat{BAP'}$ qui sont égaux par construction sont supplémentaires donc droits.

Si I≠A, les triangles API et AP'I sont congruents d'après C6, il en résulte que les angles en I sont congruents, donc droits car ils sont supplémentaires.

Dans les deux cas, (PP') est donc perpendiculaire en I à d.

5.4) Théorème: en tout point P d'une droite d, il existe une perpendiculaire unique à d.

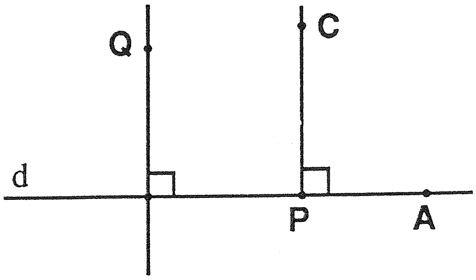


figure 5.4.1

Existence: on se donne d'abord un angle droit, par exemple en menant une perpendiculaire à d par un point Q qui ne lui appartient pas, puis on considère grâce à C4 un angle congru et ayant un côté porté par d et qui sera droit par congruence. Plus précisément, soit A un point de d différent de P et soit C tel que $\widehat{APC}$ soit congruent à l'angle droit donné, alors $\widehat{APC}$ est droit, car la définition d'un angle droit est conservée par congruence.

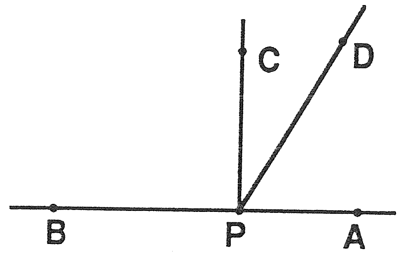


figure 5.4.2

Soit maintenant [PD) une autre demi-droite d'origine P, distincte de [PC) et telle que D soit par rapport à d dans le même demi-plan que C, et soit B tel que A$*$P$*$B. Comme l'ordre sur les angles est total, ou bien $\widehat{APD} < \widehat{APC}$, ou bien $\widehat{APC} < \widehat{APD}$. Dans le premier cas, par définition, [PD) est entre [PA) et [PC), donc [PC) est entre [PB) et [PD) (3.9b)) ce qui signifie par définition que $\widehat{BPC} < \widehat{BPD}$. Comme $\widehat{BPC}$ est par hypothèse congru à $\widehat{APC}$, il en résulte que $\widehat{APD} < \widehat{BPD}$, donc que $\widehat{APD}$ n'est pas un angle droit. On raisonne de même si $\widehat{APC} < \widehat{APD}$. Il en résulte que [PC) est dans son demi-plan la seule demi-droite déterminant deux angles droits en P avec d. Il n'existe donc qu'une perpendiculaire en P à d.

Remarque: il est tentant d'utiliser l'affirmation d'unicité figurant dans l'axiome C4 pour prouver l'unicité de la perpendiculaire. Mais cette preuve supposerait implicitement que tous les angles droits sont congruents (à ne pas confondre avec le fait que nous avons utilisé, que tout angle congruent à un angle droit est droit!), ce qui est en fait une conséquence de l'unicité de la perpendiculaire:

5.5) Corollaire: tous les angles droits sont congruents entre eux.

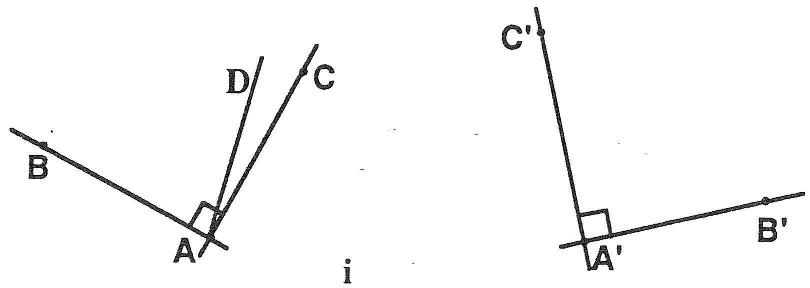


figure 5.5

Démonstration: Soit deux angles droits $\widehat{BAC}$ et $B'\widehat{A'}C'$. Soit D situé du même côté que C par rapport à (AB) et tel que $\widehat{BAD} \cong B'\widehat{A'}C'$. Alors $\widehat{BAD}$ est droit, comme congru à un angle droit, donc par unicité de la perpendiculaire en A à (AB), [AC)=[AD) et donc $\widehat{BAC} \cong B'\widehat{A'}C'$.

Historique: Euclide prenait comme axiome l'énoncé 5.5), ce qui est curieux, car les démonstrations précédentes lui étaient accessibles, étant donné qu'il utilisait toutes les notions relatives à l'ordre sans autre justification que le dessin.

5.6) Proposition: par un point extérieur à une droite on ne peut mener qu'une seule perpendiculaire à cette droite.

Démonstration: soit P, A et A' tels que A soit différent de A' et que P ne soit pas sur (AA'). Supposons que (PA) et (PA') soient perpendiculaires à (AA'), alors, le triangle PAA' a ses angles extérieurs en A droits et donc égaux à l'angle intérieur en A', ce qui est absurde.

5.7) Proposition: Tout segment a une unique médiatrice.

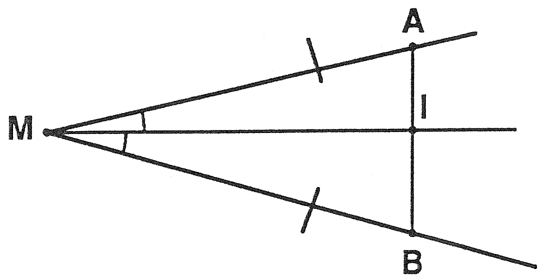


figure 5.7.1

On définit évidemment la médiatrice d'un segment [AB] comme l'ensemble des points M tels que [MA] soit congruent à [MB]. Soit M un tel point, non situé sur (AB) et soit I le milieu de [AB], dont on sait qu'il est l'unique point de (AB) répondant à la question. Le triangle AMB est isocèle donc les angles en A et B sont égaux, ce qui entraîne d'après C6 la congruence des triangles AIM et BIM, d'où l'on déduit que $\widehat{AIM}$ et $\widehat{BIM}$ sont congruents donc droits, ainsi M appartient à la droite passant par le milieu de [AB] et perpendiculaire en ce point à (AB).

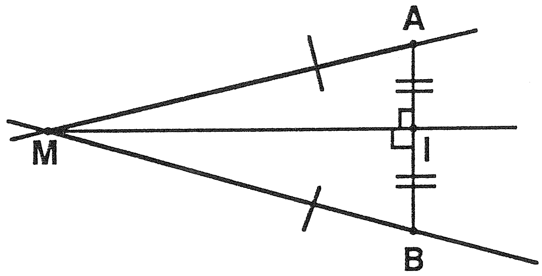


figure 5.7.2

Réciproquement, soit M un point de cette droite. Les triangles AIM et BIM sont congruents d'après C6 (mais ici ce sont les angles en I des deux triangles qui sont congruents car droits), d'où l'on déduit que [MA] est congruent à [MB].

5.8) Théorème: tout angle a une unique bissectrice.

Soit $\widehat{AMB}$ un angle, quitte à modifier l'un des points A ou B, on peut supposer que [MA] est congru à [MB]. Bien entendu, on appellera bissectrice de cet angle toute droite d partageant l'angle en deux angles congruents c'est-à-dire telle que l'une des deux demi droites d'origine M portée par d, soit [MI) soit telle que les angles $\widehat{IMA}$ et $\widehat{IMB}$ soient congruents (c'est alors également vrai pour la demi-droite opposée, d'après le théorème de congruence des angles opposés par le sommet).

Supposons qu'une telle droite d existe, d'après C4, si [MA) et [MB) étaient du même côté de d, les points A et B seraient confondus, ce qui est impossible puisque $\widehat{AMB}$ est un angle. Ainsi, la bissectrice d coupe (AB) en I entre A et B, ce qui implique que I est intérieur à $\widehat{AMB}$ donc que [MI) est entre [MA) et [MB). L'axiome C6 montre alors que les triangles AIM et BIM sont congruents, donc que (IM) est médiatrice de [AB]. On en conclut l'unicité de la bissectrice.

Considérons réciproquement la médiatrice de [AB], elle passe par le milieu I de [AB] et par M puique [MA] est congru à [MB]. La congruence des triangles AIM et BIM, démontrée à l'occasion de 5.6, montre que (IM) est bissectrice de $\widehat{AMB}$, d'où l'existence.

5.9) Conclusion: les propriétés usuelles relatives à l'angle droit et aux perpendiculaires sont vérifiées en géométrie neutre, en particulier, d'après 4.9 et 5.4, deux droites perpendiculaires à une même troisième sont parallèles ou confondues. Le lecteur pourra vérifier à titre d'exercice que les propriétés de la symétrie orthogonale par rapport à une droite, définie de la manière usuelle, relatives aux angles et aux segments, sont toutes vraies en géométrie neutre, donc communes aux deux modèles que constituent la géométrie euclidienne et la géométrie non euclidienne.

CHAPITRE 6 : SOMME DES ANGLES, DÉFAUT ET AIRE D'UN TRIANGLE

Mesure des angles et des segments.

On peut maintenant, ayant choisi une unité de longueur et une unité d'angle montrer qu'à tout segment est associé un nombre réel, qu'on appelera sa longueur dans l'unité choisie, et de même pour les angles. Réciproquement, à tout nombre réel, une fois choisie une unité de longueur et d'angle, on peut associer une classe de segments congrus entre eux et une classe d'angles congrus entre eux ayant pour longueur ou mesure le nombre réel donné. Il faut pour faire ces démonstrations utiliser les axiomes de continuité, par contre on reste en géométrie neutre, c'est-à-dire qu'on n'a pas besoin de l'axiome des parallèles, on est donc encore dans les propriétés communes à la géométrie euclidienne et à la géométrie non euclidienne. Dans la suite nous mesurerons les angles en degrés. Historiquement, on peut dire que l'unité d'angle utilisée par Euclide est l'angle droit, car par exemple il énonce que la somme des angles d'un triangle est égale à deux droits.

Le théorème de l'angle extérieur a pour corollaire immédiat :

6.1) Proposition: La somme des mesures de deux angles d'un triangle est toujours au plus égale à 180°.

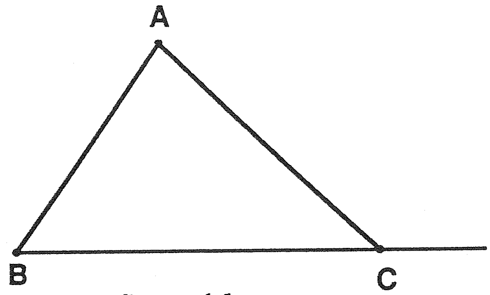


figure 6.1

En effet, la somme des mesures d'un angle d'un triangle et de son supplémentaire est égale à 180°. Or ce supplémentaire qui est l'angle extérieur au triangle associé a une mesure supérieure à chacun des deux autres angles du triangle.

L'inégalité triangulaire résulte assez facilement de cette proposition.

6.2) Théorème (Saccheri-Legendre): La somme des mesures des angles d'un triangle est au plus de 180°.

Ce théorème se démontre en deux temps : on démontre tout d'abord un lemme:

lemme: étant donné un triangle ABC, il existe un triangle $A_1B_1C_1$ tel que :

- la somme des mesures des angles de $A_1B_1C_1$ est égale à celle des mesures des angles de ABC.
- la mesure de l'angle A_1 est au plus la moitié de la mesure de celle de l'angle A.

La construction de $A_1B_1C_1$ est indiquée sur la figure ci-dessous: on considère le milieu D de [BC] puis E tel que D soit milieu de [AE]. On montre alors que le triangle ACE a même somme des mesures de ses angles que ABC et que soit son angle en A, soit son angle en E, est de mesure au plus égale à la moitié de la mesure de $\hat{A}$. Il suffit alors de rebaptiser convenablement les sommets de ce triangle pour obtenir le résultat.

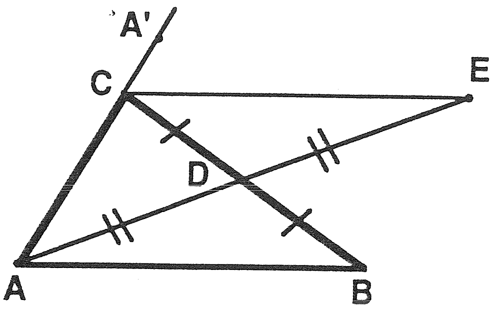


figure 6.2

Remarque: la figure utilisée dans cette démonstration est celle d'Euclide lorsqu'il démontre le théorème de l'angle extérieur (il considère l'angle extérieur en C à ABC). Euclide utilise sans le démontrer le fait suivant: si A' est tel que A∗C∗A', alors E est intérieur à BCA', ce qui n'est pas très difficile à vérifier.

Démonstration du théorème: En itérant la construction, on définit, en partant de $ABC = A_0B_0C_0$ une suite de triangles $A_nB_nC_n$ dont la somme des angles est constante et telle que la mesure de l'angle A_n tend vers zéro (elle est au plus égale à $2^{-n}\text{mes}(\hat{A})$). Alors, si la somme des angles de ABC, et donc de tout $A_nB_nC_n$, était supérieure (strictement) à 180°, à partir d'un certain rang n, on aurait $\text{mes}(\hat{B}_n)+\text{mes}(\hat{C}_n)>180°$, ce qui est absurde.

Historique: Saccheri (1667-1733) et Legendre (1752-1833) font partie de la foule des mathématiciens qui ont essayé de démontrer le postulat d'Euclide, avant que les recherches de Gauss, Lobatchevski et Bolay conduisent à la découverte de la géométrie non euclidienne, puis, quelque trente ans après au fait que le postulat était indémontrable car indépendant des autres axiomes. Cette indépendance est encore une conséquence de la notion de modèle : on peut construire des modèles euclidiens de la géométrie non euclidienne, comme le modèle de Klein (3.6) c'est-à-dire des interprétations euclidiennes des termes premiers (qui dans tous les modèles coïncident avec le sens euclidien usuel pour "point", "entre" et "incident", mais qui en diffèrent pour "droite, congru") dans lesquelles tous les axiomes non euclidiens deviennent des énoncés euclidiens vrais. Alors, tous les théorèmes non euclidiens, étant déduits logiquement des axiomes se traduisent dans l'interprétation en énoncés euclidiens vrais, puisque déductibles des traductions des axiomes non euclidiens. Ainsi, si on pouvait prouver deux énoncés contradictoires en géométrie non euclidienne, on en déduirait aussitôt qu'il existe également deux énoncés contradictoires en géométrie euclidienne. Comme on peut inverser les rôles, c'est-à-dire trouver des modèles de la géométrie euclidienne au sein de modèles de la géométrie non-euclidienne , les deux géométries sont donc équivalentes sur le plan de la non-contradiction.

Mais Saccheri ignorait ceci, il est cependant un précurseur fondamental car il est le premier à avoir pensé à essayer de démontrer le postulat d'Euclide par l'absurde : il prenait donc les hypothèses de la géométrie euclidienne, en y remplaçant le postulat des parallèles par sa négation, et espérait dériver des conséquences absurdes, il faisait ainsi sans le savoir de la géométrie non euclidienne et les théorèmes qu'il démontrait étaient en fait des théorèmes non euclidiens; Legendre suivit la même voie.

6.3) Corollaires: - La somme des mesures de deux angles d'un triangle est au plus égale à celle de l'angle extérieur correspondant au troisième sommet.

- La somme des mesures des angles d'un quadrilatère convexe est au plus égale à 360°.

Historique: on déduit aussi de cette propriété l'équivalence entre l'axiome d'unicité de la parallèle, tel que nous l'avons énoncé sous la forme dite de Playfair, ce qui fait qu'on l'appelle parfois axiome de Playfair, et l'énoncé originel du cinquième postulat d'Euclide qui est le suivant :

"Si une droite tombant sur deux droites fait les angles intérieurs et du même côté plus petits que deux droits, les deux droites, indéfiniment prolongées, se rencontrent du côté où sont les angles plus petits que deux droits."

Commentaire: dans cet énoncé, il faut comprendre "les angles plus petits que deux droits" comme des angles dont la somme des mesures est inférieure à 180°. En fait Euclide utilise en permanence, sans jamais la définir, une addition des angles facile à décrire : elle produit de façon tout à fait intuitive, à partir de deux angles donnés dont la somme des mesures est inférieure à 180°, en les mettant "côte à côte", un angle ayant pour mesure la somme des mesures de ces angles lorsque celle-ci est inférieure à180°. Ainsi cette opération n'est pas toujours définie, c'est pour cela que nous ne l'avons pas introduite.

Remarque sur l'équivalence d'énoncés : nous avons déjà rencontré plusieurs énoncés équivalents à l'axiome des parallèles : Réciproque du théorème des angles alternes-internes, énoncé d'Euclide et de façon assez évidente le fait que la somme des angles d'un triangle est égale à 180°. Que signifie exactement équivalent ? On veut dire par là que :

a) l'énoncé considéré est un théorème (c'est-à-dire est démontrable) quand on part de l'ensemble des axiomes de la géométrie euclidienne tel que nous l'avons énoncé, ou, ce qui est équivalent, tel que Hilbert l'a énoncé.

b) Réciproquement, l'énoncé de l'axiome des parallèles devient un théorème quand on part du système d'axiomes obtenu en remplaçant l'axiome des parallèles par l'énoncé considéré.

Il en résulte alors qu'on peut remplacer l'axiome des parallèles par cet énoncé sans changer l'ensemble des énoncés vrais, c'est-à-dire qui sont des axiomes ou qui sont démontrables à partir des axiomes. C'est pour cela qu'on dit que cet énoncé est équivalent au postulat des parallèles.

Historiquement, la plupart des "démonstrations" du postulat des parallèles reposent sur l'utilisation explicite ou implicite d'énoncés considérés comme évidents et qui apparaissent a posteriori comme équivalents à l'axiome des parallèles. Il faut noter que tant qu'on reste à un niveau de raisonnement en partie intuitif, où certaines propriétés sont considérées comme évidentes sans être identifiées formellement comme axiomes, il est impossible de donner une définition précise et générale de l'équivalence de deux énoncés. Pour préciser cette définition, il faut vider méthodologiquement les mots de la géométrie de leur sens intuitif, se défier des évidences lues sur le dessin, en un mot, travailler au niveau formel de Hilbert qui apparaît donc comme l'outil indispensable pour résoudre ce genre de problème. Bien sûr, on peut aussi se poser la question de savoir si les énoncés en question apparaissent comme "plus intuitifs" que les énoncés classiques. Vous pouvez en juger par vous-mêmes en consultant une liste de tels énoncés en annexe 3.

On a déjà vu en 3.5-3.7 un exemple d'énoncé équivalent à l'axiome des parallèles utilisé explicitement par Legendre dans une tentative de démonstration du postulat des parallèles : "étant donné un point P à l'intérieur d'un angle, il existe au moins une droite passant par P qui coupe les deux côtés de l'angle."

Défaut et aire d'un triangle

6.4) Définition: le *défaut* d'un triangle ABC est la différence entre 180° et la somme des mesures des trois angles du triangle. C'est donc un nombre réel positif ou nul dont la valeur dépend du choix d'une unité d'angle, et que l'on notera def(ABC):

$$\mathrm{def}(ABC) = 180° - \mathrm{mes}(\hat{A}) - \mathrm{mes}(\hat{B}) - \mathrm{mes}(\hat{C}).$$

On sait qu'en géométrie euclidienne, tout triangle a un défaut nul.

6.5) Théorème: Soit un triangle ABC et D un point entre B et C. Alors def(ABC)=def(ACD)+def(BCD).

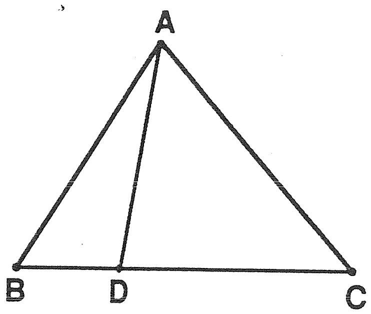


figure 6.5

La démonstration est laissée au lecteur.

6.6) Corollaire: def(ABC)=0 si et seulement si def(ACD)=def(BCD)=0. Autrement dit, la somme des angles de ABC vaut 180° si et seulement si c'est le cas pour ACD et pour BCD.

Commentaire: ces deux résultats très simples à démontrer laissent espérer les résultats suivants qui sont effectivement vrais mais beaucoup plus difficiles à démontrer et dont nous laissons les énoncés en partie sous forme intuitive :

- le défaut est une fonction additive, en ce sens que si l'on décompose de manière quelconque un triangle ABC en sous-triangles qui ne se chevauchent pas (c'est-à-dire qui ont en commun au plus un nombre fini de segments), le défaut de ABC est la somme des défauts des sous-triangles.
- ou bien un triangle a un défaut non nul et il en est alors de même pour tout triangle, ou bien tous les triangles ont un défaut nul.

Ce deuxième énoncé se précise en fait sous la forme du théorème suivant:

6.7) Théorème: S'il existe un triangle dont la somme des angles vaut 180°, il existe un rectangle. S'il existe un rectangle, alors la somme des angles de tout triangle vaut 180°. Ces deux énoncés sont vrais si et seulement si on est en géométrie euclidienne.

Ainsi, la notion de défaut n'a d'intérêt qu'en géométrie non euclidienne. Dans ce cas, le défaut définit l'aire du triangle, cette affirmation peut paraître surprenante. En fait, elle résulte des remarques suivantes :

- a priori, l'aire d'un triangle est une fonction qui doit être additive. Or c'est le cas du défaut.
- on démontre ensuite que si une telle fonction existe, elle est unique à une constante multiplicative près. Une première solution est la fonction identiquement nulle (le défaut en géométrie euclidienne). S'il existe une solution non nulle, toutes les autres solutions non nulles lui sont proportionnelles, ce qui correspond au fait qu'il y aunicité moyennant le choix d'une unité d'aire. Ainsi, au choix de l'unité près, le défaut est la seule fonction répondant à la question donc définissant l'aire en géométrie non euclidienne. En géométrie euclidienne, le défaut définit la solution identiquement nulle, il en existe heureusement une autre non nulle comme chacun sait...

En résumé, en géométrie euclidienne, on définit l'aire à partir d'une unité d'aire qui est un carré. En géométrie non euclidienne, il n'existe pas de carré, on définit une unité d'aire qui est un triangle.

BIBLIOGRAPHIE

Arnauld A, Nicole P., 1674, *La logique ou l'art de penser*, Ed PUF, Paris 1965.

Arsac, 1996, Cours sur l'axiomatique de la géométrie, *Actes de l'université d'été de formation de formateurs en didactique des mathématiques*, IREM de Clermont-Ferrand.

Arsac-Mante, Situations d'initiation au raisonnement déductif, à paraître à *Educational Studies in Mathematics*)

Barbarin P., 1928, *La géométrie non euclidienne*, p. 18, Gauthier Villars, rééd J. Gabay, 1990.

Blanché R., 1955, *L'axiomatique*, 5ème édition, 1970, PUF.

Chevalley, C., 1995, *Pascal, contingence et probabilité*, PUF, 1995, p. 35

Euclide, *Les éléments*, tome 1, B. Vitrac éditeur, PUF, 1990, Paris, 531 pages.

Gardies J-L., 1991, Le raisonnement par l'absurde, PUF, 1990, Paris, 206 pages.

Gispert H., 1995 : la théorie des ensembles en France avant la crise de 1905: Baire, Borel, Lebesgue... et tous les autres, *Revue d'Histoire des mathématiques*, tome 1, fascicule 1, p. 39-82, Société mathématique de France, Paris.

Granger, G. G., *Formes opérations objets*, Vrin 1994, 402 pages.

Guichard J., 1993, *Statut et fonction de la démonstration en mathématiques, quelques repères*, IREM de Poitiers.

Hadamard, 1898, *Leçons de géométrie*, tome I: géométrie plane, p.1, 13ème édition, 1947, réimpression J. Gabay, 1988, 316 pages

Kline M., 1980, *Mathématiques, la fin de la certitude*, trad française, 1989, Ch. Bourgois éd, Paris, 664 pages.

Pascal, 1985, *De l'esprit géométrique*, édité par A Clair, Flammarion.

Pont, J. C., 1995, Aux sources du conventionnalisme, in Panza M. et Pont *Les savants et l'épistémologie vers la fin du dixneuvième siècle*, Albert Blanchard, Paris, 282 pages.

CONCLUSION.

L'étude axiomatique de la géométrie nous donne une sorte d'étalon pour analyser la nature du savoir enseigné en géométrie au collège et au lycée et les modalités de sa transmission, ceci de plusieurs points de vue:

1) Premier point de vue: les propriétés admises comme évidentes en référence au dessin.

Nous avons vu que *dans l'enseignement, les axiomes d'incidence ne sont pas énoncés explicitement, sauf I3,* mais que ce dernier, s'il est énoncé, n'est utilisé qu'à travers la notation (AB). En effet, l'usage d'une telle notation n'est possible que parce que l'on admet que deux points distincts déterminent une droite unique, ce qui est l'énoncé de I3. Toutefois nous avons vu que la condition d'application, c'est-à-dire le fait que A et B sont distincts n'est vérifiée que par lecture sur le dessin. De même, les propriétés qui découlent immédiatement des axiomes d'incidence, comme 1.2, 1.3, 1.4, sont utilisées de façon implicite,"en acte", c'est-à-dire que l'on dira par exemple: "soit une droite d et A un point n'appartenant pas à d" sans faire allusion à aucune justification pour l'existence d'un tel point.

Le groupe des axiomes d'ordre est lui aussi massivement passé sous silence dans l'enseignement secondaire. Il intervient pourtant dans la plupart des démonstrations, que ce soit quand on examine "divers cas de figure", ce qui relève presque toujours de la géométrie de l'ordre, ou quand on utilise le fait qu'une demi-droite est entre deux autres demi-droites pour affirmer que la mesure d'un angle est la somme de celles de deux autres angles, ou quand on démontre de la manière classique que la somme des mesures des angles d'un triangle vaut 180°, ce qui repose là aussi sur le constat d'un certain ordre entre des demi-droites.

On peut ainsi avancer qu'une caractéristique de la géométrie enseignée est le fait qu'elle utilise comme évidentes les propriétés qui relèvent des axiomes d'incidence et d'ordre et de leurs conséquences immédiates.

L'étude que nous avons faite montre que le "prix" à payer pour remplacer dans les démonstrations cet appel à l'évidence par une déduction appuyée sur les axiomes serait élevé, et implique une lourdeur de rédaction conduisant à la limite à noyer les idées qu'on peut considérer comme fondamentales dans une démonstration. De toutes façons, ce style de démonstration est évidemment inaccessible aux élèves.

Le niveau de rigueur, que nous avons essayé de caractériser, du savoir enseigné en géométrie est aussi en fait à peu près celui d'Euclide. Cette similitude que nous avons constatée en examinant principalement les propriétés d'incidence et d'ordre, aurait pu être prolongée aux propriétés de continuité. Par exemple, la construction classique des tangentes à un cercle C de centre O menées d'un point A extérieur au cercle consiste à tracer le cercle C' de diamètre [OA] et à obtenir les points de contact des tangentes comme intersections des deux cercles. Ce qui est lu sur le dessin ici, c'est que ces deux cercles de coupent effectivement, ce qui résulte du fait que si un cercle C' a un point extérieur (ici A) et un point intérieur (ici O) à un cercle C, il coupe C. La démonstration de cette propriété fait intervenir le groupe des axiomes de continuité. Elle est bien entendue complètement évidente sur le dessin et il est bien connu qu'Euclide lui-même l'admet implicitement dès sa première démonstration qui consiste à donner une construction d'un triangle équilatéral de côté donné.

L'exposé de la géométrie fait dans les chapitres qui précèdent montre que ce niveau de rigueur est inadéquat pour traiter le type de problèmes soulevé par la géométrie non euclidienne: qu'est-ce qui est évident en géométrie? L'axiome des parallèles est-il démontrable? Quels sont les énoncés équivalents? etc...C'est pour traiter ce genre de questions qu'un cadre axiomatique plus strict est indispensable.

Cependant ce niveau de rigueur a permis de développer la géométrie pendant des siècles, il a donc prouvé une certaine efficacité, et a longtemps été considéré comme un modèle. Ceci nous permet de tirer deux conclusions:

Le niveau de rigueur de l'enseignement de la géométrie ne relève pas seulement d'un choix arbitraire du système d'enseignement, d'une transposition purement scolaire.

Il n'y a pas de rigueur absolue, c'est le type de problème que l'on veut résoudre qui commande un certain niveau de rigueur, et ceci m'amène à tempérer ce que j'ai dit ci-dessus sur la stabilité du niveau de rigueur d'Euclide; il a été critiqué dans les deux sens: comme excessif ou comme insuffisant.

2) Deuxième point de vue: le choix d'une axiomatique.

Si le niveau de rigueur du savoir enseigné en géométrie reste voisin actuellement de celui d'Euclide, ce qui manifeste donc un certain retour à une tradition d'enseignement, en revanche, ce que nous avons appelé dans l'introduction "l'absence de point de vue" marque une rupture avec Euclide: *aucune axiomatique cohérente sous-jacente ne guide le développement des contenus des programmes actuels.* Ceci suscite certaines réactions:

- des prises de position en faveur d'un retour à l'emploi systématique des cas d'égalité des triangles, lesquels constituent, comme on le sait depuis Euclide, un bon outil de démonstration si l'on admet de lire sur le dessin un certain nombre de propriétés. *L'exposé de la géométrie que j'ai présenté ci-dessus ne vise pas à faire de la propagande pour ou contre les cas d'égalité, mais permet à ceux qui ne les connaissent pas de comprendre le rôle qu'ils peuvent jouer dans un exposé systématique.*

- la parution d'un ouvrage comme celui d'Annie Cousin-Fauconnet met à la disposition de tous une proposition d'axiomatique qui se veut utilisable dans l'enseignement au collège. Elle est fondée sur l'introduction rapide des notions de distance et de symétrie. Une proposition du même type avait été faite par G. Choquet, mais sans expérimentation véritable dans l'enseignement. Celle d'A Cousin-Fauconnet a été expérimentée; il convient toutefois de se souvenir que le fait qu'une innovation ait été expérimentée avec succès n'implique pas qu'elle soit généralisable. Ce dernier point a été analysé par Y Chevallard dans son ouvrage classique sur la transposition didactique (La pensée sauvage, Grenoble, réed 1991).

3) Troisième point de vue: le contrat didactique.

L'analyse menée ci-dessus à l'aide d'une axiomatique de la géométrie situe bien le niveau de rigueur du savoir enseigné, et relève donc de la transposition didactique, elle met en évidence toute une série de règles, qu'il ne serait d'ailleurs pas facile, et sans doute même impossible d'expliciter totalement, qui précisent *ce qu'on a ou non le droit de lire sur le dessin ou d'admettre dans une démonstration de géométrie au collège ou au lycée. Dans la classe, ces règles sont donc des règles du contrat didactique* puisque ce dernier fixe par définition ce qu'a à faire l'élève et ce qu'a à faire l'enseignant par rapport aux mathématiques. Examinons d'un peu plus près cette question:

A partir d'un certain niveau, l'élève doit démontrer, cette règle est explicite, et l'enseignant s'efforce de préciser ce qu'est une démonstration, ce que sont ses exigences, de façon également explicite. *Par exemple, à un moment ou à un autre, il précise que démontrer, ce n'est pas lire le résultat sur le dessin. Or nous avons vu que pratiquement toute démonstration dans l'enseignement comporte une part de lecture sur le dessin.* On voit difficilement comment l'enseignant préciserait ce qui est permis et ce qui est interdit, il lui faudrait pour cela parler d'ordre, de convexité, expliquer en somme les difficultés de ce qu'il ne peut pas aborder. Ainsi ce genre de règle du contrat ne pourra être transmis que de façon implicite, par l'exemple: c'est en voyant la pratique de l'enseignant que l'élève pourra assimiler ce qu'on lui demande exactement comme niveau de rigueur. *Le caractère en grande partie implicite du contrat* *didactique apparaît ainsi comme lié non pas à une volonté de l'enseignant mais à des caractéristiques du savoir enseigné.*

Rappelons ici, pour éviter toute équivoque qu'il faut bien distinguer la fonction du dessin comme outil de recherche et de compréhension, laquelle est tout à fait indispensable, comme on l'a vu dans ce cours, même en géométrie non euclidienne, et sa fonction comme moyen de validation dans la démonstration, c'est uniquement de cette dernière qu'il est question ci-dessus.

Bien entendu, il y a d'autres raisons, qui ne sont pas aussi directement liées au contenu pour lesquelles le contrat ne peut être qu'en grande partie implicite: un enseignant de collège sait bien que ses exigences en matière de rédaction de démonstration vont évoluer entre le début de la quatrième et la fin de la troisième. *Cette évolution implique que les règles du contrat se modifient sans cesse, parce que les élèves progressent dans le savoir; ces modifications ne peuvent pas être toutes explicitées, elles seront en partie montrées, en partie installées par l'évaluation, mais en restant souvent implicites.*

Rappelons enfin que les règles de lecture du dessin, dans la mesure où elles se rattachent à une longue tradition mathématique, ne sont pas totalement arbitraires. Toutefois, dans la mesure où elles ont été contestées, on peut se poser la question: pourquoi ces règles, ce niveau de rigueur et pas un autre? C'est pour moi une question ouverte.

4) Quatrième point de vue : l'épistémologie de l'enseignant.

Le projet de ce cours est fondé sur le pari que la connaissance approfondie de ce que l'on enseigne est toujours un avantage pour l'enseigner. Ici, il s'agit de permettre au lecteur enseignant de savoir plus exactement ce qu'il admet et ce qu'il démontre, de prendre du recul par rapport à la notion de rigueur, de travailler sur son rapport au dessin, à travers des démonstrations comme celle de l'existence du milieu d'un segment (4.14), de se ressourcer au contact d'un travail mathématique différent, pour échapper à l'idée d'une géométrie cantonnée dans les manuels d'enseignement secondaire.

Comme on l'a dit, *ce cours n'est évidemment pas une proposition de méthode d'enseignement au collège ou au lycée.* Cela relève d'abord du simple bon sens: on ne voit guère un élève assimiler un pareil discours (je peux toutefois témoigner que l'étude d'une telle axiomatique est possible avec des élèves de première année de DEUG, volontaires il est vrai pour étudier l'épistémologie et l'histoire des mathématiques). Plus profondément, je pense que celui qui se sera donné la peine d'étudier ce cours suffisamment en profondeur sera bien persuadé que *la démarche axiomatique est une démarche de retour, d'approfondissement, de critique sur une connaissance antérieure de la géométrie. Ce n'est pas une démarche d'initiation à la géométrie, même pour un adulte.*

Et pourtant, les réflexions de Pascal rappelées au chapitre 0 montrent bien que tout enseignement de la géométrie, s'il est déductif, suppose une axiomatique. Tel est le dilemne dans lequel se trouve l'enseignant. Il est vrai que depuis le temps que l'on enseigne la géométrie, les enseignants ont bien trouvé dans les faits, des solutions à ce problème. Cependant, l'absence totale actuelle d'une axiomatique sous-jacente, fut-elle insuffisante ou surabondante, est peut-être un vrai problème, que le cours ci-dessus met certainement en valeur.

5) Démonstration et informatique.

Le déroulement du cours a montré que toute rédaction de démonstration suppose le choix d'un niveau d'explicitation des énoncés intermédiaires employés: il est en fait impossible de tout expliciter et une trop grande explicitation rend la démonstration illisible. Ce qui n'est pas explicité est en général lu sur le dessin. *Dans une classe, le choix du niveau d'explicitation est fait par l'enseignant, l'expérience montre qu'il varie d'un enseignant à l'autre et pour un même enseignant qu'il varie suivant l'époque de l'année, voire suivant le problème à résoudre.* Autrement dit, il existe tout un ensemble de règles qui rentrent dans le cadre du contrat didactique, qui sont en partie explicites, en partie implicites et sujettes à évolution rapide. Il y a là un obstacle a priori à la conception de logiciels d'aide ou d'apprentissage de la démonstration en géométrie, car il faudrait:

- concevoir la possibilité d'une variation presque continue du niveau d'explicitation et surtout de la commander en fonction de certains critères pouvant dépendre de l'élève, du contenu et éventuellement de l'enseignant.
- et en particulier introduire dans le logiciel la possibilité d'une lecture de propriétés sur le dessin.

Ces difficultés ont été effectivement rencontrées (cf Bazin, J. M., 1994, Géométrie: le rôle de la figure mis en évidence par les difficultés de conception d'un résolveur de problèmes en EIAO, in *vingt ans de didactique des mathématiques en France*, Artigue et al. éd, La Pensée Sauvage, Grenoble p.371-378).

Les logiciels de tracé géométrique, comme CABRI-géomètre soulèvent un autre type de questions:

- suivant la conception de l'interface, les évidences lues sur le dessin à l'écran peuvent être différentes de celles lues sur un dessin "papier-crayon". Ceci aura nécessairement une influence sur le niveau d'explicitation des démonstrations.
- les contraintes de l'informatique peuvent obliger à préciser ou peut-être même à changer les concepts.

ET POUR CONCLURE VRAIMENT.

Le pari de ce cours était qu'une réflexion sur l'enseignement de la géométrie comporte nécessairement un retour sur l'étude de la géométrie elle-même. Est-il gagné et les lecteurs seront-ils convaincus? La réponse leur appartient.

ANNEXE 1: la dualité droite-point.

Réécrivons les axiomes d'incidence et un certain nombre de propositions qui en découlent (chapitre 1) en utilisant systématiquement le mot "incident" et ses dérivés qui ont l'avantage de symétriser les rôles des points et des droites:

I1) Etant donné deux points P et Q distincts, il existe une unique droite incidente à P et Q.
I2) Etant donné une droite, il existe au moins deux points distincts incidents à cette droite.
I3) Il existe trois points tels qu'aucune droite ne soit incidente aux trois.

1.1) Proposition: Etant donné deux droites distinctes non parallèles p et q, il existe un unique point incident à p et q.

1.2) Proposition: Pour toute droite, il existe au moins un point qui ne lui est pas incident.

1.3) Proposition: pour tout point, il existe au moins une droite qui ne lui soit pas incidente.

1.4) Proposition: étant donné un point, il existe au moins deux droites distinctes incidentes à ce point.

Nous remarquons immédiatement qu'il existe deux paires d'énoncés "duaux", c'est-à-dire tels que l'on passe de l'un à l'autre en échangeant les deux mots "droite" et "point": ce sont I2 et 1.4 d'une part, 1.2 et 1.3 d'autre part. Si un énoncé est noté P, nous noterons dorénavant par P' l'énoncé dual. Voici la liste complète des énoncés duaux de ceux de la liste précédente:

I1': étant donné deux droites distinctes p et q, il existe un unique point incident à p et q.
I2'=1.4.
I3': il existe trois droites telles qu'aucun point ne soit incident aux trois.
1.1 ne se prête pas à cette opération: l'énoncé dual n'a pas de sens à cause de la condition "droites non parallèles" qui n'a pas de sens quand on remplace droite par points.
1.2'=1.3.
1.3'=1.2 ce qui nous rappelle, ce qui était évident sur la définition, que pour tout énoncé P, (P')'=P. De même, 1.4'=I2

Commentaire: Parmi ces énoncés, il n'est pas difficile de vérifier que I3' se démontre aisément, alors qu'il existe des modèles dans lesquels I1' est vrai et d'autres dans lesquels il est faux: en fait I1' est vrai dans un modèle si et seulement si il n'existe pas de droites parallèles dans ce modèle. Ainsi, I1' n'est pas démontrable, ni sa négation à partir des seuls axiomes d'incidence. Il en résulte que la transformation par dualité peut faire passer d'un énoncé démontrable à un énoncé non démontrable et ceci pour une raison très simple, c'est que déjà parmi les énoncés duaux des trois axiomes d'incidence eux-mêmes il en existe un (et un seul d'ailleurs) qui n'est pas démontrable. Au contraire, si tous les énoncés duaux des axiomes d'incidence étaient démontrables, il en résulterait que tout transformé d'un énoncé démontrable serait encore démontrable puisque l'échange des deux mots "droite" et "point", étant valable pour les axiomes, pourrait se propager dans toutes les démonstrations.

Pour le moment, parmi les modèles que nous avons introduits, il en existe un seul où les énoncés duaux des axiomes sont vrais et où par conséquent la transformation par dualité transforme tout énoncé vrai en énoncé vrai: c'est le modèle à trois points, ce qui est un peu maigre. Mais nous allons voir maintenant qu'il est possible de trouver un modèle beaucoup plus intéressant dans le cadre de la géométrie traditionnelle: celui du plan projectif.

Pour cela, utilisant à nouveau nos connaissances en géométrie, considérons le plan de la géométrie usuelle et ajoutons lui des points à l'infini, c'est-à-dire convenons de dire que deux droites parallèles ont un point commun à l'infini. L'introduction de ces nouveaux points peut se comprendre de manière intuitive ou rigoureuse:

- de manière intuitive, en imaginant effectivement ces points (au gré de chacun), par exemple en s'appuyant sur le fait que quand le point commun à deux droites s'éloigne indéfiniment sur l'une de ces droites, les droites "tendent" à devenir parallèles.

- de manière rigoureuse, en décrétant que l'ensemble des points à l'infini est l'ensemble des classes d'équivalence des droites du plan pour la relation "être parallèles ou confondues".

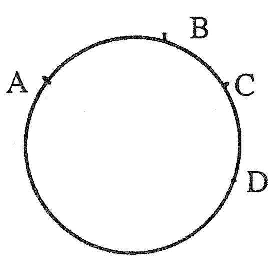
On pourrait également adopter un point de vue purement langagier en considérant que les axiomes et les théorèmes énoncent simplement des règles d'emploi des mots premiers et de leurs dérivés et décréter comme règle d'emploi supplémentaire que "d est parallèle à d'" pourra être remplacé par "d et d' sont incidentes à l'infini" (ce n'est pas une si mauvaise manière d'introduire les points à l'infini pour les débutants).

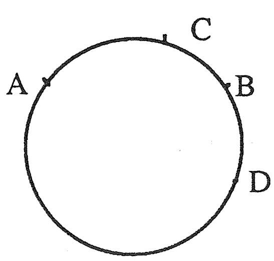
Dans tous les cas, les points à l'infini sont de nouveaux points du plan, et il n'y a qu'un point à l'infini sur une droite, et non pas un "à chaque extrémité" comme l'intuition pourrait nous conduire à le penser. En effet, deux droites parallèles auraient alors deux points communs distincts à l'infini et devraient donc être confondues si l'on s'impose de garder l'axiome I1. D'autre part, les points à l'infini situés sur deux droites non parallèles sont distincts.

Dans un tel plan dit projectif, complété des points à l'infini, les axiomes d'incidence restent vrais à condition de considérer l'ensemble des points à l'infini comme une droite, la "droite de l'infini". Mais dans un tel plan projectif, il n'existe plus de droites parallèles (c'est-à-dire sans point commun), donc d'après le commentaire ci-dessus, nous obtenons un modèle dans lequel la transformation par dualité transforme tout énoncé démontrable à partir des axiomes d'incidence en un autre énoncé démontrable.

Il n'est pas question d'exposer ici, fût-ce brièvement, la théorie du plan projectif; en effet, alors que l'on peut, en modifiant un seul axiome de la géométrie euclidienne passer à la géométrie non euclidienne, il faut pour passer à la géométrie projective abandonner les axiomes de congruence, de plus les axiomes d'ordre doivent être profondément modifiés. Ce dernier point peut se comprendre intuitivement assez facilement:

en effet, en géométrie projective, le fait qu'il n'existe qu'un point à l'infini sur une droite fait que en quelque sorte, la droite est repliée sur elle-même à la manière d'un cercle. Or il est évident que le type d'ordre entre points sur un cercle est complètement différent de ce qu'il est sur une droite en ce sens qu'étant donné trois points distincts, chacun d'entre eux est intuitivement "entre" les deux autres. Inutile de vouloir traduire en axiome une telle propriété toujours vraie...Desargues, le fondateur de la géométrie projective au dix-septième siècle, avait déjà compris que dans ce nouveau cadre, il y avait bien des propriétés d'ordre, mais relatives à quatre points, ou plus précisément à deux paires de points (A,B) et (C,D). En effet, prenons quatre points sur un cercle, si ces quatre points sont deux à deux distincts, il existe deux configurations possibles suivant que les segments [AB] et [CD] sont ou non "enchevêtrés" pour reprendre l'expression de Desargues, le lecteur pourra vérifier que cette expression a graphiquement un sens malgré l'ambigüité de la notion de segment sur un cercle.

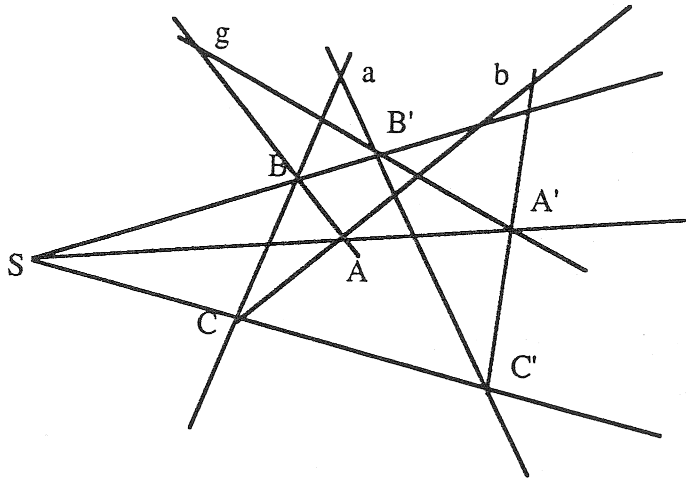




Remarquons que, puisque droites et points jouent le même rôle, on pourra de même, à partir de la donnée duale de deux paires de points alignés, c'est-à-dire celle de deux paires de droites concourantes (a,b) et (c,d) définir un ordre qui est intuitivement le fait que ces deux paires sont enchevêtrées ou non. Le lecteur pourra vérifier de lui-même en faisant le dessin que, si étant donné trois droites concourantes, cela n'a pas grand sens de dire que l'une est entre les deux autres, en revanche, cela a un sens de dire que deux paires sont ou non enchevêtrées (ces deux définitions son cohérentes en ce sens que les deux paires de points sur le cercle sont enchevêtrées si et seulement si les diamètres correspondants le sont).

Ceci étant, la propriété fondamentale que l'on démontre en géométrie projective est le **théorème de Desargues:**

Théorème: soit dans un plan deux triangles ABC et A'B'C' tels que les droites (AA'), (BB'), (CC') soient concourantes en un même point S, alors les trois points communs respectivement à (AB) et (A'B'), (BC) et (B'C'), (CA) et (C'A') sont alignés.



(le théorème affirme que a, b, g, sont alignés)

Ce théorème est vrai dans le plan projectif, c'est-à-dire sous l'hypothèse que deux droites distinctes ont toujours un point commun. Vous pouvez le vérifier graphiquement, à condition de vous rappeler que deux droites graphiquement parallèles sont un cas particulier de deux droites concourantes. Vous pouvez remarquer à cette occasion l'économie de pensée qu'apporte le langage projectif: si l'on tient à exprimer le théorème de Desargues en géométrie ordinaire, dans un plan auquel on ne rajoute pas de points à l'infini, il faut énoncer plusieurs théorèmes ou un grand nombre de cas particuliers qui correspondent à autant de dessins différents et de démonstrations particulières: S peut être à l'infini (c'est-àdire que les trois droites (AA'), (BB'), (CC') sont parallèles), ou bien les points communs à deux ou plusieurs côtés, ou même un ou plusieurs sommets du triangle. Vous remarquerez que si vous tenez à faire un dessin précis, vous n'aurez besoin pour cela que d'une règle non graduée, effectivement, intuitivement, la géométrie projective plane peut être caractérisée comme celle de la règle non graduée

On peut traduire l'énoncé du théorème en termes d'incidence:

Soit dans un plan deux triangles ABC et A'B'C' tels que les droites (AA'), (BB'), (CC') soient incidentes à un même point S, alors les trois points incidents respectivement à (AB) et (A'B'), (BC) et (B'C'), (CA) et (C'A') sont incidents à une même droite.

D'après ce que nous avons expliqué, le théorème dual est également vrai, nous laissons au lecteur le plaisir de l'énoncer et de le vérifier graphiquement (aide: ne pas oublier que (AB) désigne la droite incidente à deux points distincts, donc doit se transformer par dualité en point incident à deux droites distinctes!).

Remarques sur l'axiomatique du plan projectif:

1) Les axiomes d'incidence de la géométrie projective dans le plan sont I1, I3, IP2, IP4 où IP4 désigne l'énoncé de Desargues et où IP2, qui remplace I2, est l'énoncé suivant:

IP2: étant donné une droite, il existe toujours trois points distincts incidents à cette droite.

Le fait d'être obligé de rajouter l'énoncé de Desargues vient du fait que cet énoncé n'est pas démontrable à partir des trois premiers axiomes d'incidence projectifs.

En revanche, on peut énoncer des axiomes d'incidence dans l'espace (cf Efimov N., 1981, géométrie supérieure, MIR, Moscou, 605 pages, ch 5, §2, p. 249) qui ont un caractère de "naturalité" comme I1, I2, I3, et à partir desquels on peut démontrer le théorème de Desargues dans l'espace, dont l'énoncé est obtenu à partir du théorème plan, en supprimant la condition "dans un plan". Ce théorème contient le théorème plan comme cas particulier.

2) Le théorème de Desargues est très facile à démontrer dans le cadre de la géométrie traditionnelle lorsque les deux triangles sont dans deux plans distincts en se plaçant dans le cas générique où aucun point n'est à l'infini, afin d'éviter l'étude d'un trop grand nombre de cas particuliers, ou en admettant une fois pour toutes que les points à l'infini jouent le même rôle que les autres: la droite sur laquelle sont alignés les points communs aux côtés homologues des deux triangles est la droite d'intersection des deux plans. Cette démonstration présente un "caractère projectif" évident en ce sens qu'elle n'utilise que des propriétés d'alignement et d'intersection, et se vérifie une fois de plus à l'aide de la règle non graduée seule avec un peu d'imagination en ce qui concerne le maniement de la règle dans l'espace, ou un bricolage aisé. Lorsqu'on s'impose de rester dans le cadre de la géométrie plane classique, la démonstration est plus délicate. Le plus simple est sans doute de se ramener au cas de l'espace: étant donné la figure constituée de deux triangles en perspective dans un plan, il s'agit de construire deux triangles en perspective dans deux plans différents auxquels s'applique le théorème spatial et tels que la projection de cette deuxième figure donne la figure initiale..

ANNEXE 2: l'axiomatique d'Euclide.

Nous donnons ci-dessous la liste des axiomes d'Euclide, d'après la traduction de Vitrac (1990). Quelques remarques préliminaires s'imposent:

- contrairement à Hilbert et à Pascal, Euclide ne pose pas le problème des mots premiers, pourtant clairement identifié à l'époque par Aristote, autrement dit, il définit le point, la ligne, la ligne droite, l'angle etc...Bien sûr, ces définitions tombent sous le coup de la critique de Pascal car elles font appel à des mots qui eux ne sont pas définis. La lecture du texte d'Euclide montre d'autre part qu'il emploie de nombreux autres mots sans les définir, ainsi Euclide pratique la position de Pascal, mais sans la théoriser; quels étaient ses motifs pour choisir cette position, on en est réduit aux conjectures; tout cela est discuté en détail dans Vitrac (loc. cit.).
- Euclide présente comme des "demandes", terme souvent traduit par "postulat", des énoncés que nous appelons maintenant axiomes. Cette appellation renvoie au caractère hypothético-déductif de la mathématique: ce qui va être démontré sera vrai sous condition que ce qui a été postulé soit admis comme vrai, que le lecteur ait accepté les "demandes".
- en plus des demandes, Euclide introduit des "notions communes", souvent traduites par axiomes, il s'agit en quelque sorte de règles de raisonnement universelles, tout au moins dans les sciences mathématiques, alors que les demandes sont propres à la géométrie. L'exemple le plus célèbre est la notion commune 8: le tout est plus grand que la partie.
- la lecture de ces énoncés soulève évidemment pour un lecteur contemporain d'innombrables questions pour lesquelles on se reportera aux auteurs spécialisés, et tout d'abord à Vitrac (loc. cit.); assez curieusement, il est finalement plus facile de lire le texte d'Euclide lui-même: les démonstrations sont facilement compréhensibles pour un contemporain familier des mathématiques. Rappelons qu'elles sont restées un modèle de rigueur jusqu'au dix-neuvième siècle.

DEMANDES D'EUCLIDE

1) Qu'il soit demandé de mener une ligne droite de tout point à tout point.
2) Et de prolonger continûment une ligne droite limitée.
3) Et de décrire un cercle à partir de tout centre et au moyen de tout intervalle.
4) Et que tous les angles droits soient égaux entre eux.
5) Et que, si une droite tombant sur deux droites fait les angles intérieurs et du même côté plus petits que deux droits, les deux droites, indéfiniment prolongées, se rencontrent du côté où sont les angles plus petits que deux droits.

NOTIONS COMMUNES

1) Les choses égales à une même troisième sont aussi égales entre elles.
2) Et si, à des choses égales, des choses égales sont ajoutées, les touts sont égaux.
3) Et si, à partir de choses égales, des choses égales sont retranchées, les restes sont égaux.
4) Et si, à des choses inégales, des choses égales sont ajoutées, les touts sont inégaux.
5) Et les doubles du même sont égaux entre eux.
6) Et les moitiés du même sont égales entre elles.
7) Et les choses qui s'ajustent les unes sur les autres sont égales entre elles.
8) Et le tout est plus grand que la partie.
9) Et deux droites ne contiennent pas une aire.

Remarque: la notion commune 9 est un énoncé manifestement relatif au domaine géométrique, les historiens en déduisent qu'il a certainement été interpolé. Le but de cette interpolation était sans doute de fonder l'unicité de la droite joignant deux points, laquelle n'est pas clairement postulée par Euclide dans ses demandes. Plus généralement, il est difficile de savoir exactement combien de notions communes, et lesquelles, figuraient dans l'œuvre originelle d'Euclide: ce point était déjà en discussion dans l'antiquité; nous renvoyons là-dessus à Vitrac (loc. cit.) qui est la référence obligée en français pour ce genre de question.

ANNEXE 3: quelques énoncés équivalents à l'axiome des parallèles.

1) Le cinquième postulat d'Euclide: Et que, si une droite tombant sur deux droites fait les angles intérieurs et du même côté plus petits que deux droits, les deux droites, indéfiniment prolongées, se rencontrent du côté où sont les angles plus petits que deux droits.

2) La forme classique de Playfair: Par tout point non situé sur une droite, il passe une parallèle au plus à cette droite.

3) Si deux droites sont parallèles, toute droite qui coupe l'une coupe l'autre.

4) Si deux droites sont parallèles à une même troisième, alors elles sont parallèles entre elles ou confondues.

5) Si deux droites sont parallèles, alors toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.

6) Si les droites l et m sont parallèles, si la droite k est perpendiculaire à l et la droite n est perpendiculaire à m alors les droites n et k sont parallèles ou confondues.

7) Tous les triangles ont une somme des angles égale à 180°.

8) Si deux droites sont parallèles, alors les couples d'angles alternes internes déterminés par toute sécante à ces deux parallèles sont constitués d'angles congruents.

9) Etant donné un triangle ABC et un segment [DE], il existe un point F tel que le triangle DEF soit semblable au triangle ABC.

10) Il existe un rectangle.

Remarque sur la négation de l'axiome des parallèles: la forme classique de Playfair est énoncée, comme il est usuel en géométrie, avec des quantificateurs sous-entendus; l'énoncé quantifié est le suivant: quelle que soit la droite d, quel que soit le point A non situé sur d, il existe au plus une parallèle à d passant par A. Sa négation est donc:

il existe une droite d et un point extérieur à cette droite d par lequel il passe au moins deux parallèles à d.

C'est l'axiome par lequel il faut remplacer l'axiome des parallèles pour faire de la géométrie non euclidienne. En utilisant les autres axiomes de la géométrie, on montre qu'on peut alors démontrer que le même résultat vaut pour toute droite d et tout point non situé sur d, ce qui fait qu'on prend souvent comme axiome directement l'énoncé correspondant, qui est plus fort que la simple négation de l'axiome des parallèles:

Par tout point non situé sur une droite, il passe au moins deux parallèles à cette droite.

ANNEXE 4: transitivité de la relation "être parallèle et de même sens".

Nous nous plaçons en géométrie euclidienne plane. Plus précisément, nous utiliserons, outre les propriétés relatives au groupe des axiomes d'ordre, vraies dans les cadres euclidien et non-euclidien, les résultats suivants, propres au cas euclidien, faux en général dans le cas non euclidien:

Rappelons que par définition, les deux demi-droites [AX) et [BY) sont dites "parallèles et de même sens" si leurs supports (AX) et (BY) sont parallèles et si X et Y sont d'un même côté par rapport à (AB).

Il s'agit dans ce qui suit de démontrer le théorème suivant en géométrie euclidienne:

Théorème: si [AX) et [BY) d'une part, [AX) et [CZ) d'autre part, sont "parallèles et de même sens" alors, si [BY) et [CZ) n'ont pas même support, elles sont parallèles et de même sens.

Remarques: 1) en géométrie non euclidienne, le problème ne se pose pas puisque la relation de parallélisme n'est pas transitive, donc on ne peut pas affirmer que (BY) et (CZ), si elles sont distinctes, sont parallèles; de plus, en utilisant le modèle de Klein, on voit que, même si elles sont parallèles, il n'en résulte pas pour autant que [BY) et [CZ) soient parallèles et de même sens.

2) Les figures 1 et 2 ci-dessous montrent que les cas de figure (il y en a d'autres) peuvent a priori être fort variés; le premier cas semble plus sympathique que le deuxième, et c'est en général celui qu'on dessine en premier; la démonstration du théorème va consister à traiter le premier cas, après avoir précisé les hypothèses qui le caractérisent (proposition 1), puis à montrer que les autres cas peuvent s'y ramener.

3) En géométrie euclidienne au collège, on admet en général que deux droites parallèles sont deux droites qui, soit n'ont aucun point commun, soit sont confondues, ce qui permet de faire de la relation de parallélisme une relation d'équivalence. Nous montrerons que la relation "être parallèles et de même sens", convenablement définie quand les deux demi-droites sont de même support reste dans ce cas transitive. Elle devient alors une relation d'équivalence, sous-jacente à la définition de l'équipollence qui demanderait donc, si on voulait l'introduire en toute rigueur, l'ensemble des démonstrations qui suivent.

4) Si A, B et C sont alignés sur une droite d (figure 3) , le fait que les demi-droites soient distinctes implique que aucun des points X, Y et Z n'appartient à d. Dans ce cas particulier, le théorème est évident: il exprime simplement la transitivité de la relation "être d'un même côté de d". On se limitera donc dans la suite au cas où ABC est un vrai triangle.

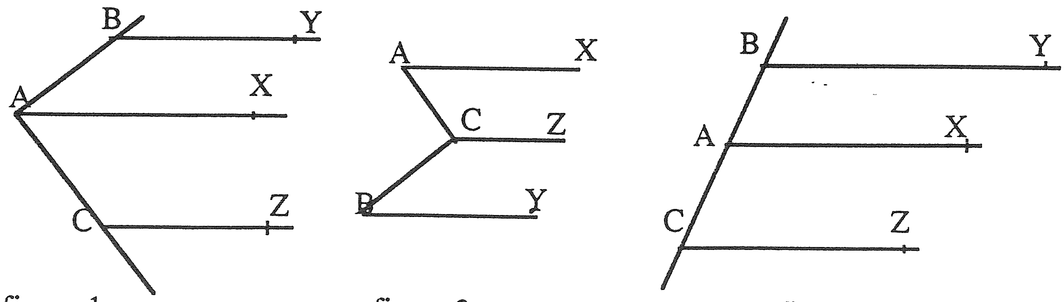


figure 1 figure 2 figure 3

Proposition 1) Soit un angle $\widehat{BAC}$; soit [AX) une demi-droite intérieure à l'angle et [BY) et [CZ) les demi-droites d'origines B et C, parallèles à [AX) et de même sens. Alors:

a) [BY) et [CZ) sont intérieures à l'angle (c"est-à-dire que tous les points de [BY), par exemple, sauf B, sont intérieurs à l'angle)..

b) [BY) et [CZ) sont parallèles et de même sens, c'est-à-dire que Y et Z sont d'un même côté de (BC).

Démonstration (figure 1): l'hypothèse se traduit par les quatre énoncés suivants:
H1) X et B sont d'un même côté de (AC).
H2) X et C sont d'un même côté de (AB).
H3) X et Y sont d'un même côté de (AB).
H4) X et Z sont d'un même côté de (AC).

La conclusion a), en ce qui concerne [BY) se traduit par les énoncés:
C1) Y et B sont d'un même côté de (AC).
C2) Y et C sont d'un même côté de (AB).

(en effet, ce qui aura été démontré pour Y, vaudra pour tout point Y' de [BY) autre que B puiqu'on a toujours [BY)=[BY')).

Les hypothèses H2 et H3 impliquent C2. Démontrons C1 par l'absurde, supposons donc que Y et B soient de part et d'autre de (AC), donc que [BY] coupe (A) en C' nécessairement distinct de A et C puisque ces deux derniers points appartiennent à des parallèles à (BY). Le point C' appartient à [AC) ou à la demi-droite opposée.

- si C' appartient à [AC), puisqu'il est distinct de A, [AX) coupe [BC'] (théorème du segment transversal), donc (AX) coupe (BY), ce qui est impossible puisque ces deux droites sont parallèles.

- si C' appartient à la demi-droite opposée à [AC), C' est de l'autre côté de C par rapport à (AB) donc, d'après C2, C' et Y sont de part et d'autre de (AB), ce qui est impossible puisque C' appartient à [BY].

Le cas de [CZ) se traite de même, ce qui achève la démonstration de a).
Reste à établir b), c'est-à-dire:
C3) Y et Z sont d'un même côté de (BC).

Pour cela, on va montrer par l'absurde que Y et A sont de part et d'autre de (BC), alors de même, Z et A seront de part et d'autre de (BC), d'où C3.

Supposons donc que Y et A soient d'un même côté de (BC), cette hypothèse combinée avec C2 que l'on vient de démontrer montre que Y est intérieur à $\widehat{ABC}$, donc, grâce au crossbar theorem, implique que [BY) couperait [AC], ce qui est impossible car B n'appartient pas à [AC] (définition d'un angle) et les autres points de [BY) étant intérieurs à $\widehat{BAC}$ ne peuvent non plus être sur [AC].

Corollaire: soit un angle $\widehat{BAC}$. Soit [AX), [BY) et [CZ) trois demi-droites d'origines A, B et C; si [AX) et [BY) d'une part, [AX), et [CZ) d'autre part, sont parallèles et de même sens, alors [BY) et [CZ) sont parallèles et de même sens.

Rappelons que nous ne traitons pas le cas de deux demi-droites de même support, ce qui fait que (AX) est distincte à la fois de (AB) et (AC). Nous décomposons la démonstration en l'étude de trois cas:

- premier cas: [AX) est intérieure à $\widehat{BAC}$.
- deuxième cas: [AX) est intérieure à l'angle opposé par le sommet à $\widehat{BAC}$ (figure 4).
- troisième cas: aucune de ces deux hypothèses n'est réalisée.

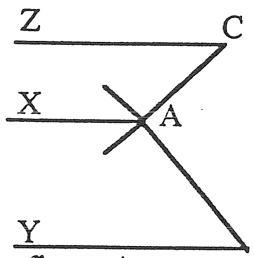


figure 4

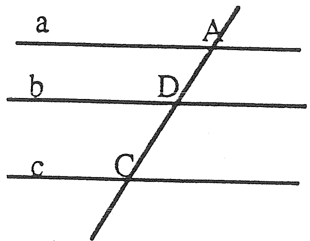


figure 5

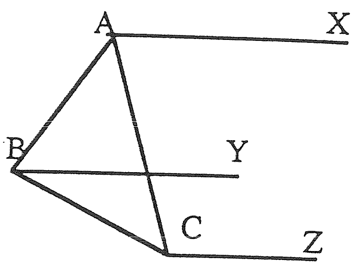


figure 6

Dans le premier cas, la proposition 1 s'applique et fournit le résultat, dans le deuxième cas, la proposition 1 s'applique aux trois demi-droites opposées à [AX), [BY) et [CZ) et fournit encore le résultat. Reste le troisième cas. On peut remarquer d'ailleurs que les deux premiers se rassemblent sous l'hypothèse : (AX) coupe [BC]. Le troisième cas correspond donc au cas où (AX) ne coupe pas [BC]. L'idée est alors de se ramener aux deux premiers cas en utilisant le fait qu'une des trois demi-droites données doit couper l'un des côtés du triangle ABC. Ceci va résulter du lemme suivant:

lemme: - a) soit trois droites parallèles a, b, c, alors l'une des trois droites est entre les deux autres, c'est-à-dire qu'il existe une droite parmi les trois telle que les deux autres soient par rapport à cette droite dans deux demi-plans différents.

- b) soit trois droites parallèles passant par les trois sommets d'un triangle ABC, alors celle de ces droites qui est entre les deux autres coupe un côté du triangle.

Démonstration du lemme:

a) (figure 5) Soit A et C deux points appartenant respectivement à a, et c. La droite (AC) coupe a et b, donc coupe toute parallèle. En particulier, elle coupe b en D. Les trois points alignés A, D, C sont deux à deux distincts puisque situés sur trois droites parallèles, donc l'un d'entre eux est entre les deux autres. Si par exemple c'est D, alors par définition A et C sont de part et d'autre de b, ce qui entraîne le résultat car on sait que toute parallèle à b est entièrement dans un même demi-plan par rapport à b.
b) Soit trois droites parallèles a, b, c passant respectivement par les trois sommets A, B et C du triangle (figure 6). L'une des trois est entre les deux autres, si par exemple c'est b, alors on vient de voir que A et C sont de part et d'autre de b, donc que [AC] coupe b.

Fin de la démonstration du corollaire: l'une des droites (AX), (BY), (CZ) coupe donc l'un des côtés du triangle ABC. Quitte à remplacer les trois demi-droites par leurs opposées, on peut supposer que c'est précisément l'une des trois demi-droites données qui rencontre un côté du triangle.

Si par exemple, [BY) coupe [AC], elle est intérieure à $\widehat{ABC}$, donc [AX) aussi d'après la proposition 1. Soit alors [CZ') la demi-droite d'origine C, parallèle à [BY) et de même sens. D'après la proposition 1, [AX) et [CZ') sont parallèles et de même sens, donc [CZ')=[CZ); c. q. f. d.

Extension de la transitivité au cas où les demi-droites ont même support.

Considérons deux demi-droites de même support. En examinant un dessin (figure 7), on voit qu'une définition raisonnable du fait qu'elles sont de même sens est la suivante:

Définition: Deux demi-droites [AX) et [BY) de même support d sont dites de même sens si l'une est incluse dans l'autre.

Exercice: étant donné une demi-droite [AX) et un point $B \in (AX)$, il existe une unique demi-droite d'origine B de même sens que [AX)

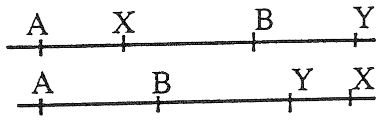


figure 7

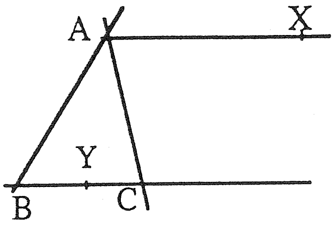


figure 8

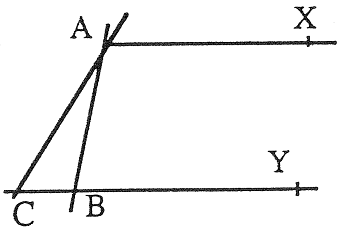


figure 9

Proposition 2) Soit trois demi-droites [AX), [BY) et [CZ) telles que [AX) et [BY) d'une part, [AX) et [CZ) d'autre part, soient parallèles et de même sens (et en particulier de supports distincts); supposons d'autre part que [BY) et [CZ) aient même support, alors elles sont de même sens (c'est-à-dire que l'une est incluse dans l'autre).

Les hypothèses se traduisent par:
- H1: X et Y sont du même côté par rapport à (AB).
- H2: X et Z sont du même côté par rapport à (AC).

La conclusion se traduit par la disjonction de:
- C1: $[BY) \subset [CZ)$, c'est-à-dire $B \in [CZ)$ et $Y \in [CZ)$
- C2: $[CZ) \subset [BY)$, c'est-à-dire $C \in [BY)$ et $Z \in [BY)$

La démarche de démonstration consiste à montrer que si $C \in [BY)$ alors C2 est vraie, tandis que sinon, c'est C1 qui est vraie.

premier cas (figure 8): $C \in [BY)$, autrement dit, on ajoute l'hypothèse:
- H3: C et Y sont du même côté par rapport à (AB).

Et on a simplement à démontrer que H1, H2 et H3 impliquent:
- C'2: $Z \in [BY)$

Si C=B, le résultat provient directement du fait que par hypothèse, X, Y, Z sont tous trois du même côté de (AB)=(AC).

Si $C \neq B$, on remarque que AXCB est un quadrilatère convexe: en effet, il a deux côtés opposés parallèles donc situés chacun dans un même demi-plan par rapport à l'autre, et H1 et H3 impliquent que X et C sont d'un même côté par rapport à (AB). La condition de convexité CC (cf ch,) est donc remplie trois fois sur quatre, ce qui suffit () (en fait, AXCB est un trapèze).

Les diagonales de AXCB se rencontrent donc: [XB] rencontre [AC]. Or ni X ni B ne sont sur (AC) car les deux parallèles (AX) et (BY) rencontrent (AC) respectivement en A et C et par hypothèse, X est distinct de A et B distinct de C. Ainsi, X et B sont de part et d'autre de (AC), donc d'après H2, Z et B sont de part et d'autre de (AC), c'est-à-dire que C est entre B et Z, donc $Z \in [BC)$. Or [BC)=[BY) puisque $C \in [BY)$ et $C \neq B$.

deuxième cas (figure 9): $C \notin [BY)$, autrement dit, on ajoute à H1 et H2:
H4: B est entre C et Y.

Il s'agit alors de démontrer:
- C1: $[BY) \subset [CZ)$, c'est-à-dire $B \in [CZ)$ et $Y \in [CZ)$

Pour cela, montrons d'abord que X et Y sont d'un même côté par rapport à (AC) en montrant que [XY] ne rencontre pas (AC).

En effet, puisque (CY)=(BY) est parallèle à (AX), C et Y sont d'un même côté par rapport à (AX), donc le segment [XY], sauf X et la demi-droite [AC), sauf A, sont dans un même demi-plan par rapport à (AX), donc [XY] ne rencontre pas la demi-droite opposée à [AC) sauf peut-être en A, ce qui est exclu, puisque $X \neq A$. D'autre part [XY] ne rencontre pas non plus [AC) car, d'après H1, X et Y sont dans un même demi-plan par rapport à (AB), et d'après H4, C est dans l'autre demi-plan, donc aussi [AC), sauf A.

Ainsi X et Y sont d'un même côté de (AC), donc, d'après H2, Y et Z aussi. Il en résulte que [CZ)=[CY) ou $Y \in$ [CZ), or dans ce deuxième cas on a supposé que $B \in$ [CY), donc C1 est démontré.

Corollaire: Soit trois demi-droites [AX), [BY) et [CZ) telles que [AX) et [BY) aient même support et même sens (c'est-à-dire que l'une est incluse dans l'autre) d'une part, et que [AX) et [CZ) d'autre part, soient parallèles et de même sens (et en particulier de supports distincts); alors [BY) et [CZ) sont parallèles et de même sens

Démonstration: soit [BY') la demi-droite d'origine B parallèle à [CZ) et de même sens; alors, d'après la proposition 2, [AX) et [BY') sont de même sens donc l'une est incluse dans l'autre. Comme (exercice) il existe une unique demi-droite d'origine B de même sens que [AX), c'est que [BY')=[BY). c. q. f. d.

Proposition 3) La relation "être de même sens" est transitive dans l'ensemble des demi-droites ayant pour support une même droite d.

Soit donc trois demi-droites [AX), [BY) et [CZ) de même support et telles que [AX) et [BY) d'une part, [BY) et [CZ) d'autre part, soient de même sens, alors [AX) et [CZ) sont de même sens.

En effet, soit $A' \notin d$ et soit X' tel que la demi-droite [A'X') soit parallèle à [AX) et de même sens. Puisque [AX) et [BY) sont de même sens, d'après le corollaire, [A'X') et [BY) sont de même sens, comme [BY) et [CZ) sont de même sens, toujours d'après le corollaire, [A'X') et [CZ) sont de même sens. Comme [A'X') et [AX) d'une part, [A'X') et [CZ) d'autre part sont parallèles et de même sens, d'après la proposition 2, [AX et [CZ) sont de même sens.