ACTES DE L'UNIVERSITÉ D'ÉTÉ

"DEVELOPPER LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE À TRAVERS L'ÉTUDE DE SITUATIONS MATHÉMATIQUES"

7 - 11 JUILLET 96

IREM DE LYON

43 Boulevard du 11 novembre 1918
69 622 Villeurbanne Cedex

Sommaire

IREM de Lyon
Université d'été

Les Hautannes
7 - 11 juillet 96

Développer la recherche scientifique à travers l'étude de situations mathématiques

La finalité de l'université d'été est de favoriser l'approfondissement par les participants du rôle de l'utilisation de situations de recherche de problèmes dans l'apprentissage des mathématiques, des conditions de leur intégration et de mise en oeuvre dans les pratiques de classe.

En effet, pour répondre aux évolutions du système éducatif, de nombreux enseignants proches des IREM étudient diverses situations de recherche de problèmes originales destinées à permettre simultanément l'approfondissement par les élèves du sens des concepts et l'élaboration de méthodes de recherche de type "démarche scientifique": étude de situations complexes de type ouvert, gérées sur le long terme, utilisation d'outils de calcul symbolique permettant une approche différente des notions d'analyse au lycée, débats scientifiques...

Le thème de l'U.E. sera de présenter et d'analyser des travaux de recherche autour de telles innovations afin d'approfondir leurs modalités de fonctionnement et leurs conditions d'efficacité pour en favoriser le transfert et le développement.

Les objectifs de cette université d'été sont les suivants :

⇨ favoriser les échanges autour de ces pratiques et la confrontation d'expériences diverses.

⇨ permettre aux participants d'étudier et d'analyser diverses modalités pour réaliser des objectifs d'apprentissage d'une démarche scientifique en classe de lycée, à travers des activités de recherche de problèmes.

⇨ analyser les conditions facilitant la mise en place de telles activités, afin de permettre aux participants d'envisager l'expérimentation de dispositifs du même ordre.

⇨ réfléchir aux modalités d'évaluation à mettre en place avec des élèves en ce qui concerne le processus d'acquisition d'une démarche scientifique, dans un contexte où les enjeux par rapport à l'institution sont importants.

Les idées essentielles qui ont guidé la mise en place de cette université d'été :

Depuis quelques années déjà, l'un des centres d'intérêt, à l'IREM de Lyon, a été l'étude de l'utilisation en classe de problèmes de mathématiques comme un levier essentiel de l'apprentissage de notre discipline. Un effort de définition des différents types de problèmes, de leurs utilisations et de leurs effets a été entrepris, cf notamment les travaux concernant le problème ouvert.

Par ailleurs, les instructions officielles insistent, depuis longtemps déjà, sur l'importance de l'apprentissage d'une démarche scientifique dans le cadre de l'enseignement des mathématiques. Mais les modalités d'un tel apprentissage restent à définir, compte tenu des contraintes propres au système éducatif actuel (programmes, hétérogénéité des élèves, exigences sociales de réussite pour un maximum d'élèves ...)
La prise en compte simultanée de ces objectifs et des contraintes actuelles amène l'enseignant à s'interroger : les deux pôles "faire comprendre" et "faire réussir" sont-ils conciliables ? et comment ?
Car c'est un projet réellement ambitieux que de vouloir s'intéresser en même temps aux contenus des programmes, aux concepts mathématiques sous jacents, et à l'acquisition d'une démarche scientifique, qui met en jeu des compétences non strictement scolaires, qui ne sont d'ailleurs pas du seul domaine des mathématiques.

La compréhension des concepts, la construction de compétences qui rélèvent d'une démarche scientifique exigent un temps d'apprentissage qui n'est pas identique au temps d'enseignement. Le temps, qui seul permet le mûrissement des concepts et l'évolution du questionnement personnel de l'élève, apparaît comme un élément central à prendre tout particulièrement en compte pour mener à bien un tel projet d'enseignement.

Des tentatives diverses ont lieu, dont les objectifs déclarés coïncident avec ceux qui nous préoccupent, dans des cadres différents : débat scientifique dans l'enseignement de mathématiques du premier cycle de l'Université (Marc Legrand, Grenoble) ; Ateliers Maths en jeans (Pierre Duchet, Charles Payan, Grenoble), dont un groupe IREM a suivi, observé et analysé le déroulement à Lyon, dans deux lycées.
Un autre groupe IREM a suivi et analysé une innovation concernant l'utilisation de "problèmes longs", ainsi nommés parce qu'ils vivent pendant plusieurs mois dans la classe, et évoluent suivant les outils mathématiques disponibles à un moment donné pour les élèves. Cette pratique, initialisée par Gilles Aldon, Lycée J. Brel, Vénissieux, est portée par l'utilisation par tous les élèves de logiciels de calcul formel, et prend explicitement le temps comme variable didactique de l'apprentissage.

Nous avons donc eu envie d'approfondir et de faire partager les analyses menées lors de ces travaux, de les confronter à d'autres, d'en dégager des points de convergence, qui permettent aux collègues désireux de travailler dans ce sens d'approfondir les modalités de fonctionnement de telles innovations, et les conditions de leur transfert.

Les personnes à l'origine :

Gilles Aldon Lycée Jacques Brel, Vénissieux, IREM de Lyon
Josette Feurly-Reynaud, Lycée St Exupéry, Lyon, IREM de Lyon
Claude Tisseron, Université Lyon I, IREM de Lyon

Autres intervenants :

Pierre Duchet et Charles Payan, Laboratoire Leibniz, Université J. Fourier, Grenoble
Marc Legrand, Université J. Fourier, Grenoble, IREM de Grenoble
Michel Mizony, Université Lyon I

Attente des stagiaires et présentation du planning

Qu'est ce qui dans la présentation de l'U.E. a fait écho à vos préoccupations ?

Qu'est ce qui vous ferait dire en fin de stage que cette U.E. est, pour vous, réussie ?

Avez-vous une expérience de classe à faire partager ?
Pouvez-vous la décrire brièvement ?

Quelle finalité assignez-vous à l'enseignement des mathématiques ?

Attentes des stagiaires en début d'université d'été :

Elles ont été recueillies après un travail individuel écrit, qui reste privé (voir annexe 1), et ont été exprimées lors d'un tour de table.
Voici un résumé de ces attentes :

- Prendre de l'énergie, travailler sur son propre doute par rapport au métier d'enseignant
- Permettre la mise en commun de pratiques, sortir de l'isolement, se situer par rapport aux objectifs d'enseignement d'autres collègues
- Trouver d'autres pratiques, qui permettent de donner du sens aux concepts enseignés, et qui participent de la formation de l'individu.
- Chercher des entrées, même pour des élèves moyens, dans un processus d'acquisition d'une démarche scientifique, qui a à voir avec l'apprentissage de la démocratie.
- Réfléchir ensemble à des modalités de gestion de la classe, qui favorisent l'entrée des élèves dans une démarche scientifique.
- Permettre de comprendre des phénomènes d'enseignement, leurs mécanismes, trouver des points d'équilibre.
- Trouver un mode de travail en terminale scientifique, qui prenne en compte les contraintes de temps, qui décline la problématique proposée "Faire comprendre, faire réussir", avec deux préoccupations principales : le "comment ? " et le problème de l'évaluation, aigü à ce niveau.
- Faire le point sur ce qu'est la démarche scientifique en mathématiques : Sommes nous tous d'accord là dessus ?

Ce qui, dans la présentation, a fait écho aux préoccupations des stagiaires :

Il y a accord des participants sur l'un des postulalts de l'UE, à savoir que les enseignants de mathématiques sont en charge non seulement d'objectifs de contenus, mais aussi d'objectifs plus large qui relèvent de l'apprentissage d'une démarche scientifique, et qui sont considérés comme très importants pour la société.
La recherche d'un équilibre entre faire comprendre et faire réussir les élèves semble un point sensible partagé par une majorité des participants.

Planning

Premier jour

9h00	Accueil, Café
9h30	Ouverture de l'Université d'Ete par Marc Fort, chef de la MAFPEN de Lyon
10h00	Présentation de l'U.E.
10h30	Présentation et attentes des stagiaires
11h00	Présentation du planning
	Démarche scientifique, première approche
11h30	Pour vous (Atelier, mise en commun)
12h30	Repas
14h00	Dans l'activité des élèves (Atelier d'analyse de documents-élèves)
16h00	Mise en commun
17h00	Pause
17h30	Exposé : "Recherche de problèmes : représentations, contrôles" (Claude Tisseron)
	Apéritif, Repas
20h00	Le problème de l'U.E. : présentation et premières recherches Atelier de présentation de logiciels de calcul formel (DERIVE, TI92, ...)

Deuxième jour

	Un procédé d'entrée dans une démarche scientifique : le débat scientifique en cours de mathématiques
9h00	Mise en situation de débat scientifique Explicitation de quelques éléments clefs de ce fonctionnement didactique (Marc Legrand)
12h00	
12h30	Repas
14h00	Le problème de l'U.E.
16h00	Situation fondamentale d'introduction à la "démarche mathématique" (Marc Legrand)
	Repas
20h00	Echanges entre participants sur des expériences de classe

Troisième jour

	Démarche mathématique et situations-recherche
9h00	Une situation particulière (Atelier de recherche) (Pierre Duchet, Charles Payan)
10h30	Pause
11h00	Exposé-discussion Situations-recherche et mise en oeuvre d'une démarche scientifique (Pierre Duchet, Charles Payan)
12h30	Repas
14h00	Le problème de l'U.E. : communication intermédiaire
16h00	Pause
16h30	Quelles connaissances sont en jeu dans une situation-recherche ? Exposé : Connaissances, savoirs, preuve Atelier : travail sur protocoles Débat : quelle connaissance sur la preuve pour une démarche scientifique ? (Pierre Duchet, Charles Payan)
	Repas
20h00	Echanges entre participants sur des expériences de classe

Quatrième jour

	Démarche scientifique et choix d'enseignement
9h00	Exposé-débat : Problèmes longs et conditions facilitantes (Gilles Aldon, Josette Feurly-Reynaud)
11h00	Pause
	Comment évaluer l'acquisition d'une démarche scientifique ?
11h30	Atelier de réflexion et de production en plusieurs temps
12h30	Repas
14h00	Le problème de l'U.E.
15h30	Comment évaluer l'acquisition d'une démarche scientifique ? Atelier de réflexion et de production (suite)
17h00	Soirée lyonnaise

Cinquième jour

9h00	Le problème de l'U.E. dernières recherches
10h00	Exposé-débat : Les outils de calcul dans la recherche mathématique (Michel Mizony)
12h30	Repas
14h00	Le problème de l'U.E. : phase de communication Compléments (Gilles Aldon)
16h00	Evaluation de l'U.E.
17h00	Pot de départ puis... Bonnes vacances !

Qu'est ce qu'une démarche scientifique ?

L'idée qu'on se fait a priori d'une démarche scientifique

Confrontation avec des productions d'élèves : Analyse de protocoles

Démarche scientifique et activité mathématique

Pour vous, qu'est ce qu'une démarche scientifique ?

Qu'est-ce qui est, dans cette démarche, spécifique aux mathématiques ?

SCIENCES ?

exactes

humaines

prévision de phéno-
mènes reconductibles

ENVIRONNEMENT

Facteurs extérieurs
Problèmes

DEMARCHE SCIENTIFIQUE

Curiosité - découverte
Questions

Expérimenter)
Conjecturer)
Errer)

Remise
en cause
perpétuelle

Démontrer : Valider et confronter

Rédiger

MATHS

-sujets
- jeu
- appréhension du sujet
- esthétique
- démonstration

Prouver que c'est vrai
- abstration du réel

TRANSMETTRE - COMMUNIQUER - SAVOIR

AU DEPART : UNE QUESTION

* Analyse précise et objective de cette question

* Choix d'une péthode de recherche
  - étude d'exemples, de cas particuliers,
  - expérimentation (erreurs, simulation...)
  - rattachement à une théorie connue

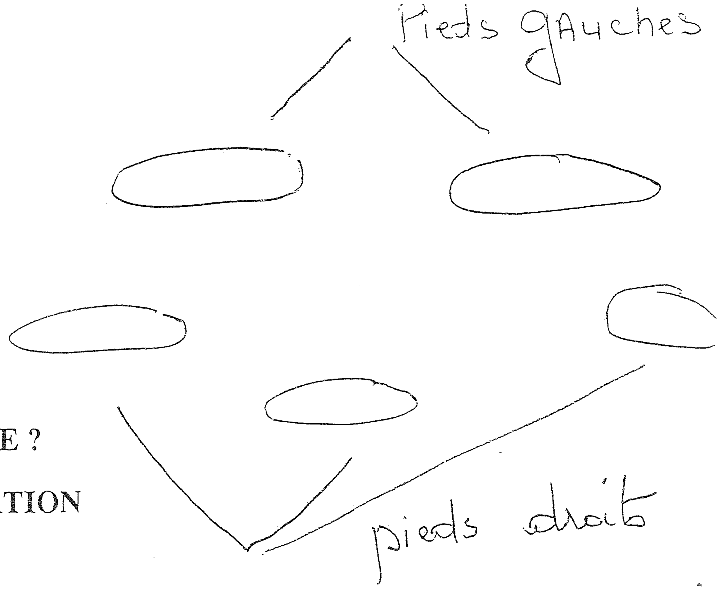
* Elaboration d'hypothèses

* Validation de ces hypothèse
  - calcul
  - démonstration

protocole propre à chaque domaine

* Conclusion en revenant au problème posé

* Communication du résultat



QU'EST-CE QU'UNE DÉMARCHE SCIENTIFIQUE ?

- OBSERVATION/EXPÉRIMENTATION
- ANALYSE
- CONJECTURES
- VALIDATION
- SYNTHÈSE ET PROLONGEMENTS POSSIBLES

REMARQUE : le doute est présent dans toutes ces phases.

QU'EST-CE QUI EST SPÉCIFIQUE AUX MATHÉMATIQUES ,

- TRAVAIL BASÉ SUR LES AXIOMES ET LES THÉOREMES
- RAISONNEMENT DEDUCTIF
- LOGIQUE (Raisonnement par l'absurde, contraposée...)
- RÉSULTATS INÉFUTABLES P.P. (presque partout)
- MODELISATION DE SITUATIONS
extérieures aux Mathématiques.

A -1 - Un **problème** se pose :

- à la suite d'observations d'une collecte d'informations
- pour répondre à un problème pratique
- LB/1

2 - On émet des **hypothèses**

3 - **On construit un dispositif pour**
les valider)
les invalider)**Modélisation**

⇒lavalidation (ou l'invalidation) ouvre souvent la voie à d'autres questions Goto
1

B - 1 - La nature des questions peut être différente de celles posées par les sciences expérimentales.
2 - Pas de spécificité
3 - Le mode de validation
démonstration
vrai-faux

A partir des documents joints et de la présentation succinte de l'activité, est-ce que les élèves, selon vous, sont entrés dans une démarche scientifique ?

Qu'est ce qui vous le fait dire ?

Le flocon de Von Koch

Situation

Les élèves de première S sont par groupes de quatre dans une salle de classe et à un horaire normal avec leur professeur de mathématiques. Chaque élève dispose en propre et de façon permanente depuis début janvier d'une TI92. Les élèves ont cherché en classe le problème deux fois une heure à une semaine d'intervalle (11 et 18 Février 1996). A l'issue de ces deux heures le professeur a donné à terminer le travail lors d'un devoir à la maison. Le groupe que j'ai observé était constitué durant la première séance de 3 garçons, Jérôme, Guillaume et Germain.
La deuxième séance, un quatrième élève (Florient) est venu s'ajouter au groupe.
Les élèves savent que leur travail est utilisé pour une recherche. Deux autres groupes sont observés simultanément par des chercheurs.

Consigne :

Aucune consigne particulière mais distribution de la feuille d'énoncé reproduite page suivante.

Problème :

Calculer le périmètre et l'aire du flocon de Von Koch

Voir énoncé complet page jointe

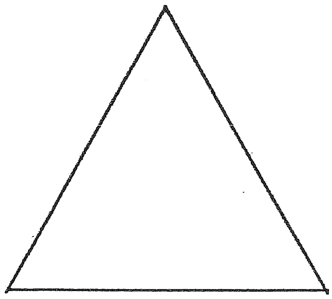
En ce qui concerne le document joint :

Il s'agit d'un entretien avec un élève de la classe qui a été réalisé une semaine après la deuxième recherche en classe. Le devoir à la maison a déjà été rédigé par les élèves de la classe.
Les questions sont posées par un chercheur qui a au préalable observé le groupe dans lequel Jérôme travaillait.

ENONCE

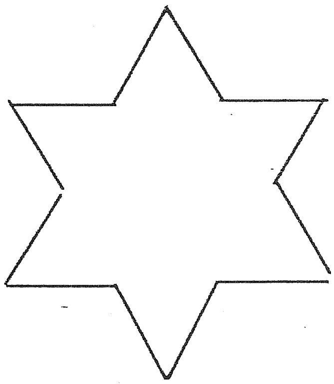
Une construction qui n'en finit pas !

Etape initiale :



Etape n° 1

Chaque côté du triangle est partagé en trois parties égales ; On supprime le segment central de chaque côté et on le remplace par deux segments de même longueur :



On recommence l'opération sur chacun des côtés.

Dessiner l'étape suivante.

Quelle est le périmètre de cette surface lorsque l'on a répété indéfiniment cette opération ?

Quelle est l'aire de cette surface ?

Etude de fonctions

Situation

Les élèves de première S disposent à titre privé d'une TI92 depuis la rentrée de Janvier. Le problème a été donné aux élèves le lundi 19 Février.

Consigne :

Le but du travail que je vous propose aujourd'hui est de réaliser dans la classe un document qui serait un bestiaire des fonctions usuelles et que l'on pourrait diffuser dans le lycée et hors du lycée en direction d'élèves de classes de premières S. Vous connaissez déjà un certain nombre de fonctions ; par exemple les fonctions affines : vous savez que ces fonctions sont définies sur R, que la croissance d'une fonction affine dépend du signe de a, que la représentation graphique d'une fonction affine est une droite qui coupe l'axe des ordonnées. De même, vous connaissez les fonctions polynômes du second degré, quelques autres fonctions par leurs représentations graphiques.
Ce que je voudrais, c'est que pour chaque type de fonction, vous fassiez un travail analogue à celui qui a été fait pour les fonctions du second degré cette année
Chaque groupe travaille sur les types de fonctions qui sont données sur la feuille du groupe.
Chaque groupe présentera son travail à l'ensemble de la classe et sera interrogé par le groupe qui aura étudié le même type de fonctions.
6 groupes dans la classe :
Groupe 1 : fonctions polynômes de degré 3, fonctions du type $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$
Groupe 2 : fonctions du type $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$, fonctions du type $f(x)=\sqrt{ax+b}$
Groupe 3 : fonctions polynômes de degré 4, fonctions du type $f(x)=\sqrt{ax+b}$
Groupe 4 : fonctions polynômes de degré 3, fonctions du type $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx^2+dx+e}$
Groupe 5 : fonctions du type $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx^2+dx+e}$, fonctions du type $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{dx^2+ex+g}$
Groupe 6 : fonctions polynômes de degré 4, fonctions du type $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{dx^2+ex+g}$

En ce qui concerne les documents joints :

Il s'agit des compte-rendus écrits donnés par les élèves d'un groupe à l'issue des exposés du groupe.

Chaque exposé est séparé du précédent d'environ une dizaine de jours.

Problème :

Les types de fonctions à étudier :

les fonctions polynômes de degré 3, 4, ...

les fonctions rationnelles définies par :

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d} \text{ ou } f(x)=\frac{ax+b}{cx^2+dx+e} \text{ ou encore } f(x)=\frac{ax^2+bx+c}{dx^2+ex+g}$$

...

les fonctions définies par : $f(x)=\sqrt{ax+b}$

Courbes du troisième degré :

Situation	Les élèves de première S sont par groupes de deux dans une salle de classe et à un horaire normal avec leur professeur de mathématiques. Chaque élève dispose en propre et de façon permanente depuis fin décembre d'un micro ordinateur portable muni d'un logiciel de calcul formel pouvant afficher des tracés de courbes. Un groupe de deux élèves est filmé. C'est la deuxième fois dans la classe qu'un tel travail de recherche de problème est filmé.
Consigne :	Répondre au problème posé en utilisant une feuille de réponse pour chaque groupe de deux élèves. Un exemplaire de la feuille de réponse est reproduit ci dessous.
Problème : voir énoncé complet (feuille jointe)	J'ai représenté graphiquement 6 fonctions polynomes de degré 3. J'ai obtenu les 6 courbes suivantes. Pouvez vous trouver des exemples de fonctions polynômes de degré 3 illustrant chacune de ces courbes. Qu'est ce qui vous permet de décider que vos exemples correspondent à la courbe que vous avez choisi?

En ce qui concerne les documents joints :

Il s'agit de la retranscription d'un protocole d'observation de la recherche du problème par un groupe de deux élèves.

MODÈLE DE LA FEUILLE DE RÉPONSE DISTRIBUÉE AUX ÉLÈVES

NOM

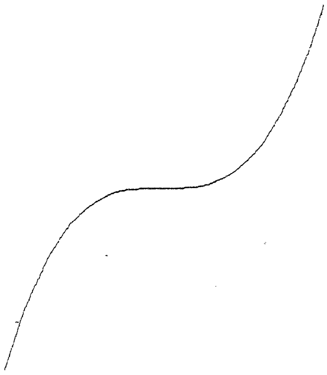
FEUILLE DE REPONSE

TYPES	EXEMPLES PROPOSES	POURQUOI ?

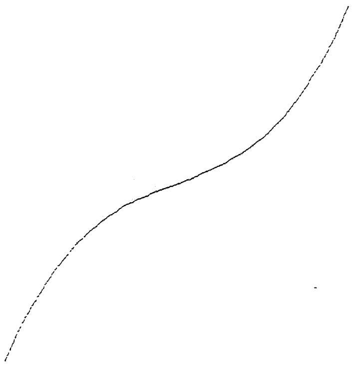
ENONCÉ

J'ai représenté graphiquement 6 fonctions polynômes de degré 3. J'ai obtenu les 6 courbes suivantes. Pouvez vous trouver des exemples de fonctions polynômes de degré 3 illustrant chacune de ces courbes.

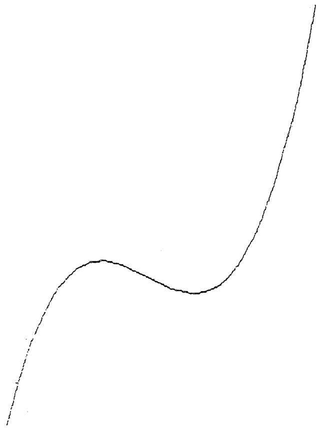
Qu'est ce qui vous permet de décider que vos exemples correspondent à la courbe que vous avez choisi ?



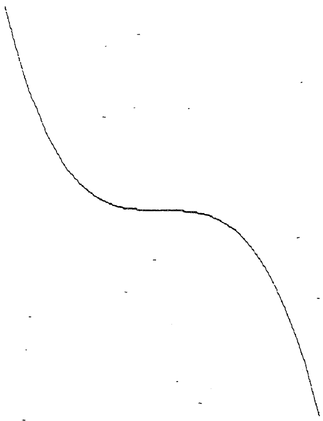
type 1



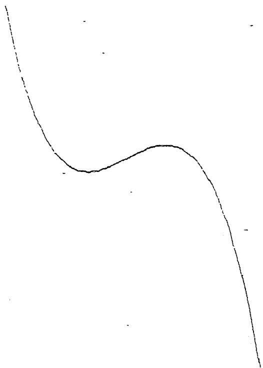
type 2



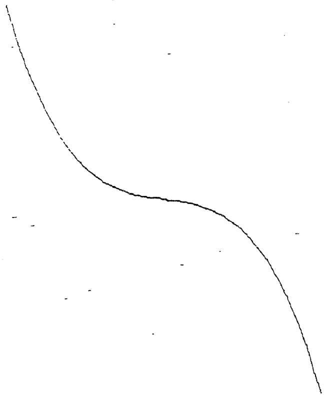
type 3



type 4



type 5



type 6

Problème du point fixe

On considère une application f de $\{1,2,...n\}$ dans $\{1,2,...n\}$ où n est un naturel non nul. On suppose f croissante, montrer qu'il existe un entier k tel que $f(k) = k$, k est appelé point fixe.
Etudier de possibles généralisations aux cas suivants, avec f croissante :

$f : D \cap [0,1] \to D \cap [0,1]$, où D est l'ensemble des décimaux.

$f : Q \cap [0,1] \to Q \cap [0,1]$, où Q est l'ensemble des rationnels.

$f : [0,1] \to [0,1]$

ou toute autre généralisation.

Situation :

Le cadre du travail des élèves est celui de MATH.en.JEANS.
Chaque semaine, d'octobre à juin, des élèves volontaires ont travaillé deux heures, en dehors du temps scolaire, en présence de l'enseignant, sur un sujet proposé par un chercheur en mathématiques
En début d'année scolaire, le chercheur donne les mêmes sujets aux lycéens de deux établissements. La recherche s'étale sur l'année scolaire ; les élèves tiennent par groupe un cahier de recherche.
Quatre fois dans l'année, les élèves des deux lycées se sont rencontrés, les équipes qui traitaient le même sujet ont confronté leurs travaux, leurs points de vue. Ils ont fait le point avec le chercheur, ont pu lui poser des questions, et ont exposé au groupe entier tout ou partie de leur travail.
Au printemps, un colloque régional a regroupé les participants à des recherches du même type. Les élèves ont alors communiqué l'état de leurs travaux par un panneau et par un exposé oral d'une vingtaine de minutes.
L'année s'est achevée par la rédaction d'un compte-rendu écrit de la recherche.
Un tel cadre a permis d'observer un même groupe d'élèves qui travaillent pendant plusieurs mois sur le même problème. Les observations ont été complétées par des enregistrements, on dispose aussi du cahier de recherche réalisé par les élèves.

En ce qui concerne les documents proposés

• Moment de la recherche d'où sont extraits les documents :
Pour situer rapidement le moment de la recherche où interviennent les documents suivants, on peut dire que les élèves ont montré l'existence d'un point fixe dans N, et que leur conjecture pour D est semblable. Une première phase de recherche dans D a consisté à reprendre la démonstration dans N pour l'adapter à D an divisant les nombres entiers par de grandes puissances de dix, ce qui n'a pas abouti.
Dans la phase suivante, les élèves essaient d'adapter une nouvelle fois la démonstration valable dans les entiers en remplaçant 1 par "le plus petit décimal strictement positif e". Le problème tourne alors autour de l'existence de ce nombre e.

• Les documents proposés :
Les documents choisis sont relatifs à cette période, et comportent :
- un extrait du cahier de bord des élèves (12-1-94)
- le début de l'enregistrement de la séance suivante, 12 minutes le 19-1-94.

DÉMARCHE SCIENTIFIQUE ET ACTIVITÉ MATHÉMATIQUE

Claude Tisseron, LIRDHIST, IREM, Université de Lyon 1

Les objectifs de ce texte

L'origine de ce texte est l'exposé introductif à l'Université d'été qui avait un double but :

-proposer une courte mise en perspective historique et épistémologique de la référence à la démarche scientifique en sciences et en mathématiques.

-présenter en vue de la suite de l'Université d'été un instrument pertinent d'analyse des conditions d'utilisation des connaissances chez un sujet : la notion de conception.

Les contraintes de mise en forme et un souci de clarté ont amené à compléter certaines parties au delà de ce qui était préparé et qui de toutes façons n'a pas été présenté du fait de la réduction drastique du temps prévu pour l'exposé.

INTRODUCTION

La référence à l'apprentissage d'une démarche scientifique dans les programmes pose deux questions : la première relative à la place de cette démarche dans l'apprentissage des mathématique et aux modalités propres à celles ci, c'est le thème de travail de l'université d'été. La seconde question porte sur la pertinence idéologique de cette référence comme justification éventuelle de l'enseignement des mathématiques. Nous n'aborderons pas cet aspect sauf à montrer rapidement en quoi, historiquement, les mathématiques ont été longtemps la référence de la connaissance scientifique.

Cette référence à l'apprentissage d'une démarche scientifique en mathématique peut se faire sur divers registres :

-un registre idéologique renvoyant à la valeur attachée en soi à une certaine méthode ;

-l'exercice effectif de certaines formes de travail associées au travail scientifique ;

-un rapport au savoir particulier fait de vigilance et d'esprit critique associé au travail scientifique.

-un registre épistémologique renvoyant à la valeur attachée à ce rapport au savoir.

Sur la référence idéologique à une méthode dite "scientifique", nous dirons en quoi le terme de démarche scientifique ne s'associe pas automatiquement à des critères universels de scientificité.
Sur l'exercice en classe de mathématiques de certaines formes de travail associées au travail scientifique, nous verrons en quoi elles peuvent faire référence au travail du chercheur.
Sur le rapport au savoir qui accompagne le travail du chercheur nous distinguerons l'attitude de vigilance épistémologique (vigilance et esprit critique) de la mise en oeuvre d'activités de contrôle.

Pour nous, si la référence à la démarche scientifique peut avoir un rôle important, c'est par les liens entre ce rapport au savoir qui donne leur sens et leur valeur à ces formes de travail et la façon dont celles ci peuvent le créer dans des activités de recherche associées au désir et à la volonté de réaliser une tâche pour elle même.

Les autres exposés et activités de ce recueil montreront comment reproduire avec des élèves certains aspects et modalités du travail du chercheur, en particulier ce rapport au savoir.

Vous avez dit scientifique ?

Notons d'abord qu'en France, contrairement aux pays anglos saxons, le terme "sciences" inclus parfois les mathématiques. Les mathématiques sont aussi considérées comme le langage indispensable des autres sciences et appelées par certains à ce titre la "science des sciences", cette expression étant parfois aussi utilisée pour la physique considérée comme l'exemple fondateur et permanent de mathématisation des phénomènes matériels (Paty, p.192 par exemple).

Démarche scientifique

Le terme de "démarche scientifique" est riche de sens et réfère simultanément à des formes d'activités utilisés par ceux que la société reconnait comme des chercheurs et aux valeurs que portent ces formes d'activités par rapport aux types de connaissances qu'elles produisent : les connaissances scientifiques étant opposées aux connaissances communes.
L'utilisation de mathématiques pour décrire un domaine d'études apparait parfois comme un garant de la "scientificité" de cette description donc de sa vérité. L'exemple des sciences économiques et sociales est édifiant avec l'utilisation abusive des statistiques souvent citée.
Du point de vue de la Culture banalisée par les médias l'activité scientifique produirait, comme l'activité mathématique, une connaissance vraie et irréfutable bien qu'en réalité les modalités du vrai en maths soient assez différentes de celles des autres sciences. L'expression "démarche scientifique" renvoyant alors à ce qu'il pourrait y avoir de commun à leurs diverses modalités de recherche et de validation. Ceci introduit une première distinction entre les modalités de la recherche qui auront en commun de décrire des activités de "résolution de problèmes" faisant intervenir une "démarche expérimentale" et les moments décisifs de validation à partir desquels seront explicités les "résultats". A ce propos certains auteurs opposent un "contexte de découverte" à un "contexte de justification" en marquant la différence entre la manière intuitive et subjective dont une recherche est menée et la reconstruction rationnelle qui en est faîte afin de communiquer un processus de pensée qui mène au résultat obtenu, Les formes de travail du contexte de découverte, tatonnantes et raisonnées à la fois, sont en fait celles utilisées en situation de résolution de problème.

La science est-elle vraie ?

Une réponse positive a semblé longtemps aller de soi en prenant comme critère de vérité la conformité au réel, c'est à dire l'adéquation à décrire les phénomènes observés.
En mathématiques, si la géométrie a d'abord été une théorie de notre perception de l'espace. la révolution des géométries non euclidiennes entre autres a amené à la notion de vérité relative à un système d'axiomes. Les mathématiques nous parlent des mondes logiquement possibles.
Dans les sciences de la nature, la physique Newtonienne a longtemps décrit avec exactitude ce qui était observé, voire a permi des prédictions spectaculaires : par exemple la découverte de Neptune par Le Verrier en 1846 aprés quelques années de calculs! Pourtant la théorie Newtonienne supposée vraie pendant deux siècles est remise en cause par son incapacité à expliquer la rotation du périhélie de Mercure que la relativité décrit parfaitement. C'est à partir de limites et remises en causes de ce type qu'est apparue l'idée qu'une science ne peut valider sa vérité par la conformité de sa représentation des phénomènes.
L'épistémologue Karl Popper propose de dire que la science produit des théories conjecturales qui peuvent être réfutées par une expérience contradictoire (Popper, 1963). Pourtant le degré de fiabilité d'une telle expérience dépend de la précision des mesures qui l'accompagnent. Mais alors comment interpréter une telle expérience? Que dit-elle réellement?
Laissons de côté le fait que les savants sont attachés à leur théorie qui va être modifiée autant que faire se peut pour expliquer les faits nouveaux, mais qui gardera éventuellement avec son noyau dur un champ de validité[1], et venons en à la question sous jacente à celle de la vérité comme conformité aux faits: qu'est ce qu'un fait ?
Sur cette question éminement complexe, bornons nous à donner très schématiquement les positions de quatre épistémologues contemporains (D'après l'article de Jarosson, 1992)
-Karl Popper croit à une séparation totale entre faits et théorie, pourtant la description d'un fait contient toujours, implicitement, diverses théories.
-Thomas Khun introduit l'idée que chaque théorie a un noyau organisateur irréfutable par décision méthodologique qu'il appelle paradigme et qui inclue un système de croyances plus ou moins explicites associé au cadre de référence. Alors tout fait, toute mesure est interprétée dans le cadre d'un paradigme qui peut faire refuser une réfutation qui n'y entre pas (penser à Hermitte disant "Dieu nous garde de telles monstruosités" en parlant des fonctions continues nulle part dérivables).
-Lakatos reprochera à Khun de mettre trop l'accent sur l'aspect social de la vérité de la science. Pour lui, il n'y a pas de fait en soi, mais des faits observés, décrits à partir de théorie, en cas de problème on met un cordon protecteur comme Hermitte, ou on modifie la théorie.
Il en résulte qu'on ne peut mettre en premier ni le fait, ni l'idée, ils avancent ensemble, la science est recherche de la vérité, dans la discussion rationnelle critique de théories en

[1]On demandait à Einstein ce qu'il aurait pensé si les mesures avaient réfuté la relativité ; il répondit "Eh bien , j'aurais regretté pour le Bon Dieu. La théorie est correcte.

compétition. Citons Lichnérowicz (Séminaire interdisciplinaire du Collège de France,1991, introduction p.9):

> "ni à travers l'histoire, ni à travers les différents champs où il opère, le concept de vérité n'est univoque. mais la conquête d'une vérité, de la Vérité reste une ambition humaine fondamentale, même si elle apparaît comme asymptotique. Nous avons appris qu'une vérité, aussi modeste soit-elle, n'est jamais donnée comme "évidente", mais durement conquise à force de travail et d'humilité..."

Problèmes et activité scientifique dans les programmes de mathématiques

L'objet de notre travail pendant l'Université d'été sera d'analyser comment développer chez les élèves une démarche scientifique à travers l'étude de situations mathématiques. Les hypothèses fondamentales, implicites ou explicites, des situations qui seront présentées sont les hypothèses de base de la didactique que nous reformulons ici :
L'hypothèse constructiviste suivant laquelle les élèves construisent eux mêmes leurs connaissances et le sens de ces connaissances : le moteur de l'apprentissage est le mécanisme de prise de conscience d'une contradiction suivie de son dépassement.
L'hypothèse épistémologique suivant laquelle ce sont les problèmes et les caractéristiques des situations de résolution liées à certaines modalités de fonctionnement des connaissances qui sont à la source de la signification des connaissances mathématiques (Brousseau(1988)).

Commençons par regarder ce que disent les programmes officiels.

De l'école élémentaire...

La référence aux situations de recherche de problèmes et à l'activité scientifique est présente dés l'école élémentaire et dans des termes qui restent en fait valables pour tous niveaux. Jugeons en par les citations suivantes extraites de (Les cycles à l'école primaire, 1991 p. 52) à propos des "compétences à acquérir" en matière de "résolution de problèmes":

cycle 1	cycle 2	cycle 3
Savoir poser ou résoudre un problème (...) est le propre de l'activité scientifique. (...) Au cycle des apprentissages premiers l'enfant doit pouvoir mettre en oeuvre des stratégies de tatonnement pour trouver des solutions aux problèmes qui lui sont proposés	Il est important (...) que l'élève soit confronté à de véritables problèmes de recherche (qu'il n'a donc pas encore appris à résoudre) et pour lesquels il peut mettre en oeuvre son pouvoir créatif et son imagination pour l'élaboration de solutions originales. (...) Il doit pouvoir - analyser des problèmes de recherche simples; - choisir les données nécessaires à leur résolution; - mobiliser les connaissances déjà acquises; - exposer clairement les résultats.	- reconnaître, trier, organiser et traiter les données utiles à la résolution (...); - formuler et communiquer sa démarche et ses résultats; - argumenter à propos de la validité d'une solution; - élaborer une démarche originale dans un véritable problème de recherche, c'est à dire un problème pour lequel on ne dispose d'aucune solution déjà éprouvée. - élaborer un questionnement à partir d'un ensemble de données".

Notons l'ambiguité de la phrase "Savoir poser ou résoudre un problème est le propre de l'activité scientifique". Comme le fait de "poser ou résoudre un problème" est indépendant de toute référence scientifique, la phrase signifie que c'est une certaine façon de "savoir" le faire qui est scientifique! Comme au cycle 1 le tatonnement est de rigueur, l'explicitation de ce savoir est le fait des précisions données pour les autres cycles.
Si on se pose la question du lien entre la vérité de la solution trouvée et les démarches proposées on se convainct que ces démarches concernent bien comme annoncé la résolution de problèmes mais n'assurent pas la vérité du résultat.

Notons la mention de "véritables problèmes de recherche" dans lesquels la réponse n'est pas inscrite dans les questions, comme dans les "problèmes ouverts" bien connus par ailleurs (Arsac et alt. 1984,1987), mais aussi pour lesquels les connaissances de l'élève sont insuffisantes au niveau des procédures et/ou des concepts.

Cette description fait surtout référence à une méthodologie décrivant les actions d'un élève générique (un enfant au cycle 1) mettant en jeu des connaissances. Mais elle mentionne aussi par deux fois pour le cycle 3 des interactions : "formuler.., argumenter...".
Elle doit être complétée par une description des diverses dimensions en jeu dans les situations de recherche de problèmes en classe :

-les enjeux de connaissance dont chaque élève va investir la situation, ils dépendent de la signification de la tâche et du contrat, ils conditionnent son attitude.

-les modalités d'interaction entre élèves et entre les élèves et le milieu qui vont favoriser l'explicitation des démarches, l'appropriation de méthodes, une construction sociale du sens, tant des connaissances mathématiques que du processus de recherche en lui même.

...au lycée

Voyons maintenant ce que disent les programmes de classes de lycées en 1ère et Terminale à propos de la démarche scientifique depuis la mise en oeuvre du nouveau programme de seconde en 1990-1991 (Bulletin Officiel de l'Éducation Nationale, n°spécial 2, 2 mars 1991, p.33 et 34, les soulignements sont dans le texte).
La référence à la démarche scientifique apparaît plusieurs fois :

> "Entrainer les élèves à la pratique d'une démarche scientifique, en développant conjointement les capacités d'expérimentation et de raisonnement, d'imagination et d'analyse critique (in Intentions majeures)
>
> "Deux objectifs essentiels sont à poursuivre :
> -Entraîner les élèves à l'activité scientifique et promouvoir l'acquisition de méthodes : la classe de mathématiques est d'abord un lieu de découverte, d'exploitation de situations, de réflexion et de débat sur les démarches suivies et les résultats obtenus, de synthèse dégageant clairement quelques idées et méthodes essentielles et mettant en valeur leur portée.
> -Développer les capacités de communication...(in Organisation du travail de la classe).

Les méthodes à acquérir sont précisées dans Objectifs et capacités, 7.Formation scientifique :

> "les capacités d'expérimentation et de raisonnement, d'imagination et d'analyse critique, loin d'être incompatibles, doivent être développées de pair : formuler un problème, conjecturer un résultat, expérimenter sur des exemples, batir une démonstration, mettre en oeuvre des outils théoriques, mettre en forme une solution, contrôler les résultats obtenus, évaluer leur pertinence en fonction du problème posé ne sont que des moments différents d'une même activité mathématique(...)".

L'insistance sur le développement conjoint des diverses capacités est à noter, il se veut sans doute en rupture avec un enseignement auquel il a pu être reproché d'être trop centré sur le raisonnement.
Notons que dans ce texte, il apparaît deux éléments nouveaux permettant d'envisager la possibilité de prouver la vérité des résultats de recherche de problèmes : la démonstration et le recours à une théorie, qui peuvent renvoyer aussi bien à une vérité syntaxique que sémantique.
Notons aussi que la mention de la classe comme "lieu de réflexion et de débat sur les démarches suivies et les résultats obtenus" montre l'importance attachée à une construction sociale réfléchie et négociée du sens des résultats, mais aussi des démarches, donc des règles de validation.

A propos de l'organisation du travail personnel des élèves le même texte précise cinq types de travaux "effectués en dehors du temps d'enseignement, à la maison ou au lycée" : la résolution d'exercices d'entrainement, l'étude de situations plus complexes, les travaux individuels de rédaction, les devoirs de contrôle, l'exploitation de documents.
Deux au moins de ces catégories de travaux mises par ailleurs en lien avec la pratique d'une démarche scientifique en mathématiques ne font pas partie des pratiques usuelles des enseignants : "l'étude de situations plus complexes" et "les travaux individuels de rédaction".

> "-L'étude de situations plus complexes, sous forme de préparation d'activités en classe ou de problèmes à résoudre et à rédiger, alimente le travail de recherche, individuel ou en équipe,..."

-Les travaux individuels de rédaction (solution d'un problème, (...) rapport de synthèse sur un thème d'étude, analyse critique d'un texte...) visent essentiellement à développer les capacités de mise au point d'un raisonnement et d'expression écrite; (...)"

C'est pour tenter de les réaliser, dans le cadre de la classe comme "lieu de réflexion et de débat que des situations de recherche sur un temps long incluant un important travail d'écriture, sont expérimentées depuis 1994 à l'IREM de Lyon dans le cadre d'un projet de recherche. Elles font l'objet de l'intervention de G. Aldon (Cf. infra). Le projet de recherche de 1994 précisait qu'il s'agissait de situations "pour lesquelles manquent un savoir-faire institutionnalisé et des références partagées", qui impliquent "une complexification des fonctions de l'enseignant qui doit simultanément assurer la pratique coutumière requise par les exigences du programme liées au contenu et gérer au mieux l'inconnu d'une situation nouvelle et en grande partie dévolue aux élèves".
Dans l'école d'été de Didactique de 1995, à propos des mêmes travaux individuels de rédaction cités ci dessus, Yves Chevallard mentionne que les enseignants ne disposent pas "d'au moins une technique, à portée non vide, relativement fiable et assez facilement maîtrisable, pour accomplir ce type de tâches" (Chevallard, 1996, souligné par l'auteur).

Le problème de l'élaboration d'outillage pour conduire des situations répondant aux exigences des programmes relatives à la pratique d'une démarche scientifique est posé.

I- LA "MÉTHODE SCIENTIFIQUE", SES RAPPORTS AVEC LES MATHÉMATIQUES, REPÈRES HISTORIQUES

Historiquement la connaissance mathématique par axiomes et démonstrations a été le paradigme de la connaissance vraie et une partie de la science moderne s'est construite en rupture avec ce paradigme par l'introduction de la méthode expérimentale.

Existe-t-il des critères de scientificité universels ?

La question de la caractérisation du noyau commun permettant de parler de démarche scientifique nécessite de préciser les rapports entre les termes "méthode et démarche scientifique", "méthode et démarche expérimentale", "résolution de problèmes".
Pour aller vite, disons que la méthode pourrait décrire les principes et leur justification et la démarche les actions d'un sujet dans des situations de recherche visant à résoudre un problème.

Les tentatives d'explicitation d'une méthode générale de connaissance scientifique sont nombreuses, d'Aristote pour les origines à Descartes, Newton, Auguste Comte... Aujourd'hui, la variété des domaines où s'exerce une pensée qu'il est convenu d'appeler scientifique, implique l'existence d'une grande variété d'objets, de problèmes, d'approches et donc de méthodes, qui font que

> " l'exacte détermination de critères de scientificité reste un problème épistémologique qui ne possède pas (...) une solution universelle" (Paty, 1990, p. 70).

Plus radicale est la critique de Feyerabend pour qui

> "l'idée que la science peut et doit être organisée selon des règles à la fois fixes et universelles est utopique(cité par Jarosson, 1992, p. 81)"

Ces citations rendent compte de l'impossibilité de donner des critères universels, contrairement à ce que l'on pense souvent. Pourtant , l'histoire des sciences montre en leur sein une cohérence, des filiations, des reconstructions obéissant à une certaine rationnalité interne dont l'existence est avérée, Pour en rendre compte Michel Paty propose le concept de "champ de rationnalité" (Paty p.68). Cela nomme un certain fonctionnement de la pensée repérable dans la durée. Sur le long terme, l'adoption d'une connaissance relève de critères essentiellement rationnels, mais renégociés au vu de l'avancée des connaissances et de la reformulation des problèmes et concepts, ils doivent être interprétés en fonction de la culture où ils sont produits. La recherche de la vérité garde un sens permanent, mais les productions n'ont pas de vérité absolue. Les modalités de validation des résultats sont spécifiques au domaine considéré et ont toujours un caractère social par le consensus dont elles sont l'objet de la part de la communauté de référence.

Ce caractère social, qui pointe la difficulté à parler de connaissance objective, est insufisant à rendre compte du processus de la connaissance et de l'élaboration de savoirs : savoirs faire, techniques, théories, nous y revenons en partie ci dessous avec le point de vue de Gilles-Gaston Granger.

Le consensus de la communauté est fonction des systèmes de connaissances et de son cadre de référence en partie implicite dans lequel les croyances jouent un rôle important (y compris dans les institutions scientifiques). Ce consensus n'est pas en soi un critère de scientificité, pas plus que l'exigence de vérité. Ils sont présents dans les communautés scientifiques comme dans des communautés s'intéressant à des domaines faisant de la part de représentants de l'institution scientifique l'objet d'une controverse (l'homéopathie) ou d'un rejet (l'astrologie).
Le plus important nous paraît le travail d'une communauté sur la signification et la portée des règles qu'elle se donne ainsi que sur leur remise en cause éventuelle :

> "Les règles du jeu de la science sont immanentes au jeu de la science, elles ne peuvent être établies ailleurs qu'au sein d'un débat lui même scientifique (...). Toute justification des énoncés de science devra s'appuyer sur des règles de scientificité qui ne seront pas posées ailleurs qu'au sein du débat qui les a produites."(Francis Jacques, in Colloque de Cerisy, p.71)[2].

Cet aspect consensuel permet de valider, mais dans un contexte institutionnel intégrant des effets de modes et des rapports de pouvoir. De ce fait, l'attribution du label "scientifique" peut être refusé à un moment donné à une découverte nouvelle qui n'entre pas dans le système de connaissances et de croyances de la communauté de référence et qui est donc "impensable" pour celle ci. Plus tard cette découverte pourra devenir banale.
L'existence de telles ruptures a été reconnue par Gaston Bachelard comme un phénomène inhérent à l'évolution des sciences sous le nom de rupture épistémologique(Cf. I.3). Il s'agit là d'un critère de rationnalité qui traduit, pour le domaine considéré, l'approfondissement ou la réorganisation de ses concepts et de ses méthodes[3].
Cet approfondissement est lié à la visée de la connaissance scientifique dont Gilles-Gaston Granger dégage un caractère essentiel qui est de :

> "déterminer un rapport à l'expérience, et non pas seulement à l'expérience sensible, mais aussi bien à cette expérience opératoire, qu'on pourrait paradoxalement qualifier d'abstraite (...). La science vise à constituer des objets...(au)sens technique suivant : ce dont on peut constituer des modèles abstraits, manipulables selon des règles explicites, et coordonnables à des épreuves spécifiquement définies et codifiées". (Gilles-Gaston Granger, in Colloque de Cerisy, p. 57).

En résumé, le mode de connaissance de la science serait de constituer en objets (au sens ci dessus) ce qu'elle cherche à connaître. Mais Gilles-Gaston Granger propose en plus de prendre en compte deux autres visées dont les modes de connaissances tout aussi légitimes éclairent ce que la démarche scientifique peut avoir de spécifique. Nous résumons ici son point de vue qui nous paraît éclairer la spécificité de la connaissance qui se veut scientifique. La première est la visée technique qui se manifeste dans un ensemble de procédures organisées en corps de techniques visant à enchainer des actes pour obtenir des résultats sans qu'on soit en état de fournir une interprétation explicative que seule pourrait proposer la science (bien que la réflexion sur des procédures techniques puisse conduire à construire des objets[4]). La seconde correspond à une connaissance sans objet (au sens ci dessus). Elle se manifeste par l'organisation d'un ensemble de significations en un système ; l'exemple idéal est la recherche philosophique[5].

2L'exposé de Marc Legrand montre une mise en scène d'un tel débat.

3Pour les mathématiques grecques, la découverte des irrationnels, déclarés littéralement "innénonçables" par Platon a représenté une telle rupture. Dans l'histoire de l'astronomie le passage à l'héliocentrisme contre le géocentrisme en est une autre bien connue.

4Pour Gilles-Gaston Granger, comme pour bien d'autres (Cf. Lakatos, 1982), ce va et vient de l'opération à l'objet caractérise trés profondément la dialectique de la découverte mathématique. La dialectique "outil-objet" proposée en didactique par Régine Douady en est le versant analogue du côté de l'apprentissage.

5Serait-il provoquant de se demander si certaines parties de l'enseignement des mathématiques au lycée ne se résument pas à "organiser des significations en système" ou au mieux à "enchainer des actes pour produire des résultats", sans viser à constituer des objets au sens de Gilles-Gaston Granger faute de théories? A cet égard, la phrase suivante fait réfléchir : "La synthèse, qui constitue le cours proprement dit, est indispensable mais doit

La référence à la connaissance mathématiques en science

Quel lien y a-t-il avec les mathématiques? La tradition philosophique occidentale présuppose souvent que le concept de rationnalité a pour modèle la rationnalité logico-mathématique. (Arsac, 1992). Cela n'est pas étonnant dans la mesure où notre tradition philosophique s'est longtemps appuyée sur Aristote qui prend les mathématiques comme modèle de science et la connaissances scientifique comme la connaissance de ce qui est logiquement nécessaire à partir d'axiomes posés au départ :

> "Nous estimons posséder la science d'une chose d'une manière absolue(...) quand (...) nous connaissons la cause par laquelle la chose est, et que nous savons que cette cause est celle de la chose, et qu'en outre il n'est pas possible que la chose soit autre qu'elle n'est. Il est évident que telle est la nature de la connaissance scientifique".
> "Ce que nous appelons ici savoir, c'est connaitre par le moyen de la démonstration". (Aristote, seconds analytiques, I.2 71b10-b20. Trad. et notes J. Tricot, Vrin, 1970, p.6-7)

Autrement dit, pour Aristote, la connaissance scientifique est identique à la science démonstrative qui expose les raisons pour lesquelles les résultats sont nécessairement vrais. Laquelle s'appuie sur les règles logiques qu'il décrit par ailleurs et sur les prémisses qui sont des connaissances premières, indémontrables, ayant un caractère d'évidence partagé. Lorsque cette évidence n'est pas partagée, il est nécessaire de poser des postulats, comme le postulat d'Euclide, mais les mathématiques restent la référence. Au 5ième siecle, Proclus parlera des "arguments scientifiques irréfutables" avec lesquels Euclide prouve une généralisation du théorème de Pythagore.
Cette conception de la connaissance scientifique durera en mathématiques jusqu'au XIXème siècle où, après les bouleversements dus aux géométries non euclidiennes, la conception axiomatique remplacera la notion de prémisses évidentes par celle de relations opératoires entre les objets définis seulement par les relations permises dont la géométrie de Hilbert est le modèle[6].

Cette conception aristotélicienne de la science comme connaissance démontrable va perdurer longtemps et elle sera un obstacle au développement des sciences dites expérimentales dont les démarches étaient différentes[7].

Cette idée philosophique qu'il existe une méthode scientifique générale indépendante de son objet est apparue sous diverses formes. Nous avons mentionné Aristote. Son influence se poursuit dans la philosophie médiévale où la logique est traitée comme un instrument universel et est considérée comme la science des sciences.

être brève ; elle porte non seulement sur les quelques notions, résultats et outils de base que les élèves doivent connaître et savoir utiliser, mais aussi sur les méthodes de résolution de problèmes qui les mettent en jeu"(BO spécialn°2, 2mars1991,p.35, II,2,a) Organisation du travail de la classe, souligné dans le texte).

6 A titre de remarque, on peut noter que l'énoncé du Vème postulat est une propriété opératoire du type "si... alors", et qu'en cela il tranche totalement avec la conception de prémisses évidentes. Cela n'est peut-être pas sans rapport avec les nombreuses tentatives de preuve dont il fut l'objet...

7 Aujourd'hui cependant, les sciences physiques, les sciences du vivant (médecine, biologie), les sciences humaines ont en commun d'élaborer et d'utiliser des modèles; mais ces modèles sont plus ou moins formalisés et mathématisés en fonction du degré d'élaboration de leurs objets au sens de G.G. Granger. A ce propos, nous avons mentionné la conception de Popper suivant laquelle des modèles ne peuvent jamais être validés par la vérification de leurs prédictions (plusieurs modèles peuvent prédire des résultats expérimentaux identiques) mais qu'ils peuvent seulement être invalidés par une expérience qui contredit les résultats prédits. Dans le même ordre d'idée, il est possible de montrer "qu'une même réalité peut admettre avec une grande précision à la fois des modèles déterministes et des modèles indéterministes" (Chaos et déterminisme p. 12). La physique reste probablement le domaine dans lequel la mathématisation a été la plus importante depuis Newton. Les nombreux énoncés de cette mathématisation sont à mettre en relation avec le fait que les sciences physiques ont aujourd'hui remplacé les mathématiques comme paradigme de la science.

Voici quelques moments qui marquent l'explicitation de méthodes dans lesquelles la référence aux mathématiques est permanente. Nous passons sans transition au XVIIè s. où la recherche de la vérité devient une préocupation métaphysique essentielle.

La révolution scientifique du XVIIè s

En 1623, Galilée, dans l'Essayeur, explique que pour comprendre l'univers, il faut en "avoir appris la langue et s'être familiarisé avec les caractères dans lesquels elle est écrite"; il s'agit bien sûr des mathématiques. Grâce à cette approche qui marque le début de la révolution scientifique du XVIIè s., Galilée réduira plusieurs questions descriptives et explicatives du monde physique à des considérations essentiellement mathématiques.
Galilée, comme Descartes qui le suit ont pour grand mérite d'éliminer dans l'examen d'un phénomène tout ce qui est secondaire par rapport au phénomène étudié.

En 1637, Descartes écrit son texte fameux du "Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences". Ce texte contient des règles générales destinées à contrôler le fonctionnement de la pensée, du simple au composé, de l'absolu au relatif, et de l'originaire au dérivé, sans rien omettre, selon l'ordre mathématique des vérités démonstratives, pour acquérir une compréhension totale des phénomènes. Cette compréhension prenant appui sur les principes propres à chaque science, ces principes devant "tous être empruntés de la philosophie" et se déroulant par la rigueur de la déduction jugée à l'aune de la certitude du sujet.

> "En faisant de la certitude la condition de détermination de la vérité, Descartes faisait donc du sujet connaissant la condition de détermination de l'objet connu" "De cette façon la vérité n'est pas ce qui est conforme à la réalité, c'est ce à quoi la réalité ne peut être que conforme" (Grimaldi, Vérité scientifique et vérité métaphysique chez Descartes, in La vérité est-elle scientifique? Séminaire Interdisciplinaire du Collège de France)

En cela Descartes prend comme modèle la connaissance mathématique

> "où la vérité d'une idée ne s'atteste que par la certitude qu'on en éprouve"(Op. cité p.27)

renversant l'ordre de la connaissance consistant à ajuster la pensée aux choses.

Cette recherche des principes dans la philosophie fera faire à Descartes quelques erreurs dans ses explications de certains phénomènes naturels. Son idée de certitude basée sūr l'évidence comme fondement sera combattu par Leibniz qui préfère l'évidence formelle, c'est à dire le principe de non contradiction au sein d'un ensemble de définitions.

En 1687, Newton publie ses "Principes mathématiques de philosophie naturelle".. Pour appliquer les mathématiques à l'étude des phénomènes naturels, il explicite les relations mathématiques qui traduisent les manifestations des forces, dont l'origine et la nature sont inconnues. En cela il s'oppose à Descartes (dont il poursuit par ailleurs les travaux mathématiques) qui cherchait l'origine des principes dans la philosophie. Pour réussir sa mathématisation des phénomènes, il doit forger de nouveaux outils mathématiques bases du calcul infinitésimal..

Le positivisme

L'arrangement logique apparemment inébranlable des mathématiques, fascine les philosophes jusqu'au XIXème siècle. En 1830, Auguste Comte, dans son cours de philosophie positive dit que c'est "par l'étude des mathématiques, et seulement par elle, que l'on peut se faire une idée juste et approfondie de ce que c'est que la science". Mais le champ d'investigation des mathématiques est limité : "l'application de l'analyse mathématique (...) ne peut jamais commencer aucune science (...), puisqu'elle ne saurait avoir lieu que lorsque la science a déja (...) quelques équations qui puissent servir de points de départ"...(Cité dans J. Dhombres, Nombre, mesure et continu, Cedic/Nathan,1978, p.206, 207).
Dans son ouvrage, Auguste Comte parle de méthode positive tout en mentionnant que la "méthode" n'est pas un objet d'étude séparable des recherches où elle est "employée". Pourtant la relation d'emploi suppose l'indépendance de ce qui est employé. A tel point que dans le "système de logique positive, ou traité de philosophie mathématique publié quelques années plus tard en 1856,, Auguste Comte parlera de la méthode universelle dont l'application est diversifiée par la nature des problèmes à résoudre.

La méthode expérimentale

Le cours des choses va changer lorsque Claude Bernard va fonder la physiologie expérimentale dans son Introduction à l'étude de la médecine expérimentale (1865) (où il introduit d'ailleurs le terme de déterminisme dans son acceptation actuelle). Dans une première partie de cet ouvrage, Claude Bernard présente un traité général de la méthode expérimentale qui est l'enveloppe littéraire reconstruite à postériori des leçons qu'il a tiré de ses travaux.
Henri Bergson disait en 1913 de cet ouvrage : "Nous nous trouvons devant un homme de génie qui a commencé par faire de grandes découvertes et qui s'est demandé ensuite comment il fallait s'y prendre pour les faire". Il est piquant de constater que , comme pour la démonstration en mathématiques, le produit communiqué exclut les traces de sa génèse et se présente sous une forme reconstruite à postériori. Bergson poursuit en notant que s'il s'agit d'une "démarche paradoxale en apparence et pourtant seule naturelle, la manière inverse de procéder ayant été tentée beaucoup plus souvent et n'ayant jamais réussi" (Cité dans Canguilhem, p144). Bergson fait ici allusion aux chercheurs en physiologie qui utilisaient à l'époque une méthode d'investigation qui se voulait d'obédience mathématicienne basée sur des principes à priori dont Claude Bernard s'est détourné comme il le dit lui-même:
"Moi je suis arrivé dans le champ scientifique par des voies détournées et je me suis délivré des règles en me jetant à travers champs..." (Op Cité, p 145)
La raison du rejet de ces règles est que "Claude Bernard revendique un mode de recherche en physiologie dont les hypothèses de départ et les idées directrices aient été élaborées dans le domaine propre à la physiologie"(Op cité p 145).
Il faut retenir de cela que la méthode est construite en fonction de son objet d'investigation en défiance des habitudes mentales importées d'autres disciplines. Claude Bernard montrera par ailleurs combien les habitudes mentales utilisées jusqu'alors en physiologie, ne permettaient pas la découverte originale qu'il avait faite. Ce que certains lui reprochaient d'ailleurs : avoir trouvé ce qu'il ne cherchait pas et même le contraire de ce qu'il cherchait.

O.H.E.R.I.C

La méthode expérimentale est parfois résumée par le schéma O.H.E.R.I.C (Observation, Hypothèse, Expérimentation, Résultat, Interprétation, Conclusion) que l'on fait remonter à Claude Bernard dans son "Introduction à la médecine expérimentale". Or à y regarder de façon critique, ce schéma, tel qu'il est décrit dans l'introduction, répond à une logique pédagogique, et sa présentation diffère de ce que Claude Bernard à réellement fait.
Ce schéma exprime plus des valeurs de l'esprit scientifique : "Observation, Hypothèse, Expérience, Vérification", que des méthodes dont la mise en oeuvre effective prend des formes spécifiques suivant les disciplines considérées.

On ne peut parler de méthode expérimentale sans évoquer l'opposition formelle entre les deux termes "méthode" et "expérimental" signalée par René Thom (Thom, 1986) pour qui la "méthode expérimentale" est un mythe. L'idée de départ est que la "méthode (du grec meta "vers" et hodos "chemin") caractérise une direction définissable et régulièrement suivie dans une opération de l'esprit; alors que l'idée d'expérience renvoie à l'idée d'hypothèse. Or il n'y a pas d'hypothèse sans un certain nombre d'entités imaginaires dont on postule l'existence et qui constitueront la théorie, une fois l'hypothèse vérifiée. Le débat épistémologique autour de cette question rejoint celui entre fait et théorie, il est toujours ouvert... Il apparaît dès le texte de Claude Bernard que nous avons cité.
Terminons avec cette réflexion de Bachelard sur qui nous reviendrons ci dessous :

> "les rapports entre la théorie et l'expérience sont si étroits qu'aucune méthode, soit expérimentale, soit rationnelle, n'est assurée de garder sa valeur" (Bachelard,1934, p.14)

Claude Bernard, tout en ayant fait une découverte qui allait contre les connaissances de son époque : celle du milieu intérieur, ne pensait pas que cette connaissance trouverait elle aussi ses limites. En cela, il n'a pas pressenti la signification épistémologique de ses propres découvertes. A savoir que la rupture représentée par la connaissance nouvelle qu'il avait introduite marquait l'histoire de sa discipline, non point tant par son contenu, mais par le fait qu'elle se posait en rupture avec les connaissances antèrieures.

Le point de vue de Gaston Bachelard

Il appartiendra à Gaston Bachelard de fonder une épistémologie dans laquelle toute connaissance scientifique est vouée, par nature, à être remise en cause. Trois citations nous servirons de référence; elles réfèrent aux trois concepts de dialectique, du nouvel esprit scientifique et d'obstacle épistémologique.

Le concept de dialectique.

Aristote fait de Zénon le père de la dialectique, au sens de l'art de découvrir les contradictions dans les conséquences de l'hypothèse admise par l'interlocuteur, ce qui est nécessaire pour tester la consistance des propositions liminaires d'une science (Euclide, Eléments, I, p.115). Ce concept est repris par Bachelard :

> "On devrait toujours se méfier d'un concept qu'on n'a pas encore pu dialectiser. Ce qui empèche sa dialectique, c'est une surcharge de son contenu.
> Cette surcharge empèche le concept d'être délicatement sensible à toutes les variations des conditions où il prend ses justes fonctions. A ce concept, on donne surement trop de sens, puisque jamais on ne le pense formellement ;
> Mais si on lui donne trop de sens, il est à craindre que deux esprits différents ne lui donnent pas le même sens" (Bachelard, 1940, p.134, souligné par l'auteur).

(Cf. l'exposé de M.Mizony : les trous noirs comme exemple de concept surchargé!) Cf conceptions

Le nouvel esprit scientifique.

> "Les concepts, les méthodes, tout est fonction du domaine d'expérience, toute la pensée scientifique doit changer devant une expérience nouvelle; un discours de la méthode scientifique sera toujours un discours de circonstance, il ne décrira pas une constitution définitive de l'esprit scientifique." (Bachelard, 1940, p.135).

Pour ce qui concerne notre thème, le lien entre les mathématiques et la démarche scientifique, retenons que la preuve est un travail qui ne se réduit pas à une vérification expérimentale, mais à l'insertion des résultat de l'expérience dans une théorie qui les fonde. Les résultats sont produits dans la théorie avant d'être des résultats d'expérience. S'il arrive à la pensée scientifique de recevoir un donné, c'est seulement en le reprenant dans une théorie qu'elle prouve sa capacité à le comprendre.

> "Toute la pensée scientifique doit changer devant une expérience nouvelle." Bachelard, 1940, p.135)

Ce changement suppose une réorganisation des relations entre concepts et une reprise de leur signification.

La notion d'obstacle épistemologique;

Elle est l'aspect le plus connu de l'oeuvre de Bachelard et le thème de l'ouvrage : la formation de l'esprit scientifique. Voici des extrait de la présentation (pp. 13, 14, souligné par l'auteur).

> "C'est en termes d'obstacles qu'il faut poser le problème de la connaissance scientifique(...) c'est dans l'acte même de connaître, intimement qu'apparaissent, par une sorte de nécessité fonctionnelle, des lenteurs et des troubles(...) c'est là que nous décelons des causes d'inertie que nous appelerons des obstacles épistémologiques."
> "En fait, on connaît contre une connaissance antérieure, en détruisant des connaissances mal faites."[8]
> "La science (...) s'oppose absolument à l'opinion (...). L'opinion pense mal; elle ne pense pas : elle traduit des besoins en connaissance".

Citons à ce propos et en lien avec notre réflexion sur la connaissance scientifique ces mots de (Canguilhem,1968, p.204, 205):

> "Descartes expliquait comment l'erreur est possible. Bachelard la montre nécessaire, non par le fait de ce qui est extérieur à la connaissance, mais par l'acte même de la connaissance."
> "Mais une entreprise qui consiste, de l'aveu de son auteur, à rechercher dans la psychanalyse des obstacles épistémologiques les conditions psychologiques du progrés de la science, ne risque-t-elle pas de disqualifier la science dans sa prétention à l'objectivité ? (...) (Bachelard) se défend en faisant apparaître la rectification de l'erreur comme valorisation du savoir(...).
> "Nous devons confesser, que, sur ce point, Bachelard nous paraît avoir mieux mesuré que surmonté une difficulté philosophique capitale"

---

[8]Nous verrons plus loin comment cette affirmation est à nuancer en approfondissant le terme de connaissance à partir de travaux récents sur les conceptions.

En lien avec nos préocupations d'enseignants, notons que dans le même chapitre de la formation de l'esprit scientifique, G. Bachelard aborde les question d'éducation à propos desquelles il mentionne que :

> "Reste ensuite la tache la plus difficile : mettre la culture scientifique en état de mobilisation permanente, remplacer le savoir fermé et statique par une connaissance ouverte et dynamique, dialectiser toutes les variables expérimentales, donner enfin à la raison des raisons d'évoluer."

La difficulté de la tâche a pour écho la remarque suivante (la didactique n'existait pas encore) :

> "Au cours d'une carrière déjà longue et diverse, je n'ai jamais vu un éducateur changer de méthode d'éducation"

Les travaux de Bachelard ont porté principalement sur les rapports de l'epistémologie et de l'histoire des sciences dans l'étude de la physique et de ses rapports avec le réel, les mathématiques ne sont pas considérées par Bachelard comme relevant de ses analyses. Pourtant des travaux ultérieurs sur l'épistémologie et la didactique des mathématiques ont montré la pertinence du concept d'obstacle pour cette discipline(Brousseau, 1988).

Retenons de ce survol rapide les idées suivantes qui sont présentes dans le développement des sciences :
- Les faits expérimentaux n'ont de sens que dans une théorie, c'est à dire un modèle mathématisé. Une théorie peut-être remise en cause par une expérience négative, ce conflit entre théorie et expérience peut amener à une reconstruction des concepts et des règles définissant leurs relations.
-Du point de vue épistémologique une expérience réussie ne valide pas la justesse d'une théorie dont la cohérence est interne. Une telle expérience atteste de l'efficacité pratique de la théorie, ce qui est d'une autre nature. Mais c'est en fait là que se trouve la source de la reconnaissance sociale de la science par ses applications : dans sa capacité d'agir sur la nature ou de prévoir ses phénomènes.
- L'évolution des connaissances d'un sujet est limitée par le poid de celles qu'il a déjà et de ses opinions. "Les méthodes scientifiques (...) ne sont pas le résumé des habitudes gagnées dans la pratique d'une science" Bachelard, 1949, p. 32)
"L'esprit doit se plier aux conditions du savoir (...). Il doit se mobiliser autour d'articulations qui correspondent auc dialectiques du savoir" (Bachelard, 1940, p.144).
Autrement dit, c'est à partir des spécifités des savoirs considérés que l'ont peut analyser la validité des modalités de mise en oeuvre d'une méthode[9].

II- LE PARADIGME DU CHERCHEUR

L'hypothèse de reproduction

Du point de vue qui nous occupe : l'élaboration de situations susceptibles de développer une démarche scientifique chez l'élève, partons du constat suivant.
Dans son activité professionnelle scientifique, le chercheur :
- -produit des savoirs ;
- -élabore ses méthodologies de recherche.

<u>L'hypothèse de base</u> sur le rôle du problème dans l'apprentissage des mathématiques est que les processus de construction des connaissances chez l'élève peuvent être, sous certains rapports, obtenus en reproduisant le travail du chercheur qui sert de paradigme organisateur des situations de recherche.
Naïvement, on pourrait dire : mettons l'élève en recherche de problème, cela produira
- - la construction de ses connaissances ;
- -l'expérimentation et l'appropriation d'une méthodologie de recherche.

Une condition préalable nécessaire est de créer l'intéret pour la réalisation de la tâche et la responsabilité épistémologique de sa réalisation, c'est la dévolution,

---

[9]La didactique des mathématiques part d'un présupposé comparable.

Ainsi, les situations de recherche de problèmes proposés aux élèves prennent en compte certains des aspects et des modalités du travail du chercheur et tentent d'en reproduire le fonctionnement pour obtenir certains effets.
De nombreuses mises en scènes sont possibles. on se pose évidemment des questions:

-comment faire concrètement, suivant quelles modalités, pour quelles finalités, enjeux et objectifs d'apprentissage ?

-à quel prix ?

-pour quels effets à la fin ?

En recherche, comment ça se passe ?

Trés rapidement, on peut repérer divers aspects. Pour rendre plus attrayante cette petite description, nous donnons de temps en temps la parole à (Thurston, 1995) pour présenter en écho ou contrepoint le point de vue d'un chercheur sur certains aspects de la recherche.

-Par rapport au type de question, de problème :

A priori la réponse exacte et les outils (méthodes, concepts, résultats...) à utiliser sont inconnus, mais une réponse et des outils plausibles s'obtiennent par diverses voies à partir de problèmes voisins, de travaux antèrieurs, de changement de cadre, reformulation de questions etc....

- Par rapport aux modalités de travail

Rôle du temps : on a la possibilité d'approfondir une question dans la durée.
Importance et modalités variées des échanges entre pairs : informels et formalisés, rôles des séminaires.

> "un effet du caractère hautement social de la communauté mathématique est la tendance des mathématiciens à suivre des modes."

Importance de la documentation.
Importance du positionnement par rapport aux travaux antèrieurs, étude, compléments, références.

> "la plupart des mathématiciens adhère à des fondements qui sont reconnus pour être des fictions polies."

Importance d'un rapport particulier au processus de recherche à divers niveaux:
-le métier du chercheur est de chercher, c'est sa raison sociale.
-le chercheur choisi son objet de recherche avec lequel il a certaines affinités.
-le chercheur éprouve en cherchant le plaisir de la recherche et la jubilation de la création.

> "Ce que nous produisons c'est de la compréhension.."
> "il y a une joie réelle à faire des mathématiques, à apprendre de nouvelles méthodes de pensée qui expliquent, organisent et simplifient."

- Par rapport aux modalités d'utilisation des connaissances

Utilisation d'essais, expérimentations de divers types, ajout d'hypothèses ;
Approche dialectique pour ajuster les hypothèses et les résultats qui peuvent s'en déduire.
Statut particulier de l'erreur : dans la recherche on apprend de ses erreurs,
Rôle de la modélisation.
Importance d'utiliser plusieurs cadres de référence.

> "Je pouvais communiquer certaines parties des démonstrations en deux minutes aux topologues, alors qu'il fallait une heure de cours avant que les analystes commencent à comprendre."

Importance des obstacles, qui sont des défis à relever.
Distance entre les connaissances du sujet et les connaissances nécessaires à la résolution, disponibilité de ces connaissances.
Reconstruction des outils ou construction de nouveaux par un va et vient de l'outil à l'objet.
Existence de diverses formes pour les connaissances utilisées dans le milieu, publiées ou faisant partie de la culture professionnelle.

> "(...)beaucoup de choses connues sont des choses pour lesquelles il n'existe pas de source écrite connue. Aussi longtemps que les membres du secteur sont persuadés que l'idée marche, il n'est pas nécessaire d'avoir une source formelle publiée."

- Par rapport aux modalités de validation.

La décision appartient à la communauté des pairs.

"l'environnement social est extrèmement important, nous sommes inspirés par les autres, nous recherchons leur appréciation, et nous aimons aider les autres à résoudre leurs problèmes mathématiques."

Existence d'une validation officielle avec respect des normes de la communication des démonstrations et de validations informelles au cours d'échanges entre pairs.

"d'ordinaire les gens ne sont pas trés bons pour vérifier l'exactitude formelle des preuves, mais ils sont trés bons pour y déceler des faiblesses potentielles ou des failles."[10]

Et dans l'enseignement

Pour éviter de succomber à la tentation ou aux injonctions des programmes de conduire des activités dont le caractère mathématique serait d'être des simulacres de démarche scientifique, il nous paraît important de distinguer ce qui donne à une démarche de recherche un caractère de scientificité et ce qu'il est utile de retenir en mathématiques.

Les travaux des épistémologues et philosophes ont montré que la recherche de caractères de scientificité en soi n'avait pas de réponse. C'est seulement du point de vue d'un domaine particulier, par rapport à une problématique et des modalités d'expérimentation et de validation spécifiques à une communauté que se déterminent ces critères.

Pour l'activité scientifique de production de mathématiques, G.-G. Granger explicite des critères spécifiques aux mathématiques (Peut-on assigner des frontières à la connaissance scientifique? in Colloque de Cerisy, pp.51-52). Il y a d'abord des critères qu'il nomme "externes" : l'application de règles formelles ne conduit à des résultats que par l'invention d'une stratégie, et ces résultats doivent apporter une information. Il y a ensuite des critères "internes" relatives à la non ambiguïté des règles opératoires, la cohérence du sytème garantie au niveau des règles elles mêmes, et la possibilité d'exhibition de modèles moins abstraits que le système lui même dans lesquels les opérations sont plus immédiates et les objets plus riches de propriétés.

Pour l'apprentissage des mathématiques, dans le cadre des procédures de preuve dont la démonstration est l'aboutissement institutionnel et épistémologique, deux types d'actions nous paraissent avoir un caractère fondamental : conjecturer et contrôler :

Conjecturer

A partir de constats et/ou de questions formuler un sous problème, c'est à dire décider de formuler un énoncé dans un contexte théorique et faire de sa preuve un problème à résoudre sur lequel vont se mobiliser les efforts. C'est une signification de la phrase citée au début : "Savoir poser un problème (...) est le propre de l'activité scientifique".

Contrôler ses affirmations.

Le contrôle est l'élément déterminant de la réussite d'une recherche de problèmes. Il peut s'agir de procédures de vérifications de diverses natures sur les résultats et les procédures. Ce contrôle prend des formes diverses suivant les objets sur lequel travaille l'élève (expérimentation, recherche de conjecture, élaboration de preuve...), les modalités de validation qu'il utilise et bien sûr ses connaissances et les conditions didactiques de sa recherche (Cf. Coppe,1996).

La dialectique conjecture-contrôle

[10]Citons également à ce propos J. Nimier (1989) dans Entretiens avec des mathématiciens (souligné par nous) : "Pour tous ces grands mathématiciens, faire des mathématiques c'est avant tout mettre en association des images, des concepts, etc. qui peuvent, à première vue paraître éloignés : les aspects démonstration, rédaction sont très secondaires et ne leur sont utiles que pour communiquer leurs résultats. Il ne s'agit du reste que de la cinquième phase de l'acte créateur d'après Anzieu. Or dans notre enseignement (...) n'est ce pas surtout cet aspect qui est développé ?"(Souligné par moi).

Dans les présentations de travaux d'élèves, la démonstration d'un résultat relève en grande partie des exigences institutionnelles de la classe. Ce point est apparu dans l'université d'été à partir des travaux de recherche de problèmes en groupes conduits par les stagiaires. Il est arrivé souvent que la validation interne à un groupe se fasse suivant divers critères de reconnaissance des propriétés de la situation étudiée. L'expression formalisée de la preuve complète apparaissant essentiellement comme une exigence conventionnelle de la communication intergroupes induite par le contrat de formation. La partie significative de l'activité mathématique était bien dans ce que nous avons souligné ci dessus. La communication de la preuve prend du sens par la validation par les pairs s'il y a un enjeu à cette validation.

Il s'agit de contrôler les énoncés en cherchant leur champ de validité. C'est la dialectisation des concepts dont parle Bachelard. Il peut s'agir en fait d'accepter provisoirement un énoncé problématique dont on tirera des conséquences jusqu'à une éventuelle contradiction. Pour des exemples historiques de cette attitude, particulièrement sur la construction du concept de polyèdre régulier, on lira avec profit l'ouvrage de (Lakatos, 1982)[11].
Un tel comportement se trouve spontanément chez les élèves suivant diverses formes. Par exemple dans l'observation d'élèves de Math en Jeans en 1993-1994, un élève déclare ne pas être satisfait de la justification donnée par son camarade du fait qu'il n'y a pas de plus petit décimal (non nul), mais qu'il considèrera cela comme "juste pour la suite quitte à y revenir si on aboutit à une impasse"(Pontille et alt. 1996).

Du chercheur à l'élève, transposition d'une pratique et/ou d'une attitude

Les situations de recherche de problèmes utilisés dans l'enseignement et/ ou présentées dans l'université d'été : problèmes ouverts, situation problème, situation fondamentale, Math en jeans, problèmes vivant en classe sur une longue durée, prennent en compte la reproduction de certains de ces aspects qu'elles choisissent de privilégier.
Dans toutes ces situations de recherche, l'élève est amené à utiliser ses connaissances. A ce propos, un point revêt une grande importance: celui du sens qu'une activité mathématique donnée a pour les élèves, du point de vue de la forme dans laquelle elle s'exerce, mais aussi et pour une part toute aussi grande des modalités de mise en oeuvre des connaissances et des savoirs qui lui donnent sa signification.
C'est à produire en plus un rapport à la tâche comparable à celui du chercheur que s'attachent les ingénieries rappelées ci dessus. Leurs modalités sont destinées à induire un certain rapport à la tâche, caractérisé par une attitude de vigilance épistémologique.

Vigilance épistémologique

Cette vigilance épistémologique comme retour de la raison sur son propre travail, est certainement ce qui peut caractériser le mieux l'attitude scientifique en ce sens qu'en son absence on ne peut parler, nous semble-t-il, de démarche scientifique. C'est cette vigilance qui permet d'attribuer aux procédures de résolution de problèmes utilisées en sciences leur caractère scientifique. Elle n'est cependant pas un critère de scientificité en soi puisque les méthodes soumises à cette vigilance sont propres à la culture du domaine d'action où elles s'exercent et cette vigilance se trouve en sciences, mais aussi dans des domaines d'étude pour le moins controversés[12].
C'est cette vigilance épistémologique qui induira l'élève dans des procédures de contrôle. Elle va provoquer un souci <u>de précision et de qualité</u> des <u>affirmations et de leurs enchainements</u>. Elle va être provoquée en partie par le fait que cette qualité sera le seul moyen pour lui de décider et/ou comprendre dans un contexte où ces attitudes seront liées à un fort enjeu de connaissance. Du point de vue didactique toute la question est de savoir comment provoquer et maintenir cet enjeu. Nous verrons plusieurs réponses dans les autres travaux. Limitons nous à noter que ce type d'attitude n'est pas habituel et peut même être en rupture avec le contrat scolaire usuel! Des situations spécifiques intégrant une dévolution particulière et la renégociation d'un contrat approprié risquent d'être nécessaires pour induire une telle attitude (Cf. l'exposé de Marc Legrand).
Notons que l'existence de procédures de contrôle peut venir d'autres attitudes, en particulier produire un résultat répondant aux attentes du professeur (Coppe, 1996).
En mathématiques, la démonstration peut être vécue comme un élément déterminant dans le cadre d'une attitude de vigilance ou être réalisée à moindre coût par contrat.

La variété des situations de recherche imaginées et mises en scène par les praticiens et les chercheurs traduit, de façon générale, le désir de favoriser l'élaboration des connaissances de l'élève. Leur variété atteste de la difficulté à organiser, dans le système scolaire tel qu'il fonctionne généralement, des situation permettant d'atteindre l'objectif vague, mais porteur,

---

[11]C'est aussi le point de vue des mathématiciens qui savent que l'on ne peut pas démontrer que les mathématiques sont non contradictoires, mais qui continuent à en faire et à modifier quand c'est nécessaire certains énoncés générateurs de contradictions. L'histoire de la théorie des ensembles est éloquente à cet égard.
[12]Mentionnons à ce propos une étude provoquante qui montre que les tactiques adoptées par des parapsychologues pour faire reconnaître leurs pratiques sont plus "scientifiques" que les objections que leur opposent des scientifiques officiels (Cité dans Sciences Humaines, n°67, Décembre 1996, p.34). Pour clarifier ce point, il peut être utile de revenir à l'analyse de G.G. Granger ci dessus.

d'appropriation par l'élève à la fois de connaissances, d'une méthodologie de recherche scientifique voire d'une méthode de pensée. Citons à ce propos Michel Hulin auquel font écho ci dessus dans ce texte la citation de Chevallard et plus loin dans ce recueil les réflexions de Marc Legrand.

> "...c'est à dire que la physique - et je laisse aux mathématiciens (...) le choix de décider pour les mathématiques - que la physique ne s'enseigne pas. (...) Elle me semble (...) incompatible avec la rigidité du paradigme scolaire traditionnel, de toute l'organisation scolaire avec ses programmes, ses examens (...). L'enjeu c'est donc maintenant d'essayer d'être capable de changer ce paradigme de l'enseignement. (Hulin,1992,p 183-184).

III- L'APPRENTISSAGEE DE MÉTA CONNAISSANCES

L'apprentissage d'une démarche scientifique : une méta-connaissance

Les métaconnaissances sont celles qui portent sur ses propres connaissances, en particulier la façon dont on apprend, dont on cherche, dont on trouve, etc...
L'apprentissage d'une démarche scientifique est de l'ordre d'une méta-connaissance ou n'est pas. Si cet apprentissage est pris comme objectif, l'enseignant doit pouvoir en désigner les éléments et les critères de réussite et les communiquer aux élèves...

Un exemple

A ce propos, notons que dans des interwievs d'élèves de Math en Jeans en fin d'année scolaire 1993-1994, à la question -"qu'avez-vous appris?" ils répondent -"rien"- En effet, littéralement, il n'y avait rien à apprendre en terme de savoirs. L'enjeu de la situation est de conduire une recherche le plus loin possible et de faire le compte rendu des résultats obtenus et des pistes suivies.
Par contre en approfondissant les retombées scolaires de leur travail dans Math en Jeans, au cours d'un entretien, certains déclarent "être mieux capable de repérer si une piste de recherche est bonne ou non". Ils ont donc appris quelque chose, mais il s'agit d'une méta-connaissance d'une autre nature que les connaissances habituellement nommées en classe.
La réponse "n'avoir rien appris" est à interpréter des deux points de vue : non désignation a priori d'une connaissance à acquérir, nature particulière de la méta connaissance visée.
Notons enfin que le terme méta connaissance renvoie à une compétence d'un sujet, contrairement à un savoir qui peut être nommé indépendamment d'un sujet.

Des contraintes pour la classe

Tout dispositif d'apprentissage d'une démarche scientifique représente une centration sur certains aspects du processus de cette démarche choisis et considérés alors en eux mêmes comme objets d'apprentissage. Cette centration sur certains aspects du processus de la recherche va faire exister dans la classe de façon particulière l'objet "recherche de problèmes" autour des aspects retenus de la démarche.
Cette centration sur un processus s'accompagne de formes de travail spécifiques qui peuvent représenter une rupture par rapport à la centration habituelle sur les résultats.
Elle va se traduire par l'existence dans la classe d'un vocabulaire et de formes de travail spécifiques aux moments de la recherche : conjecture, présumés théorèmes, validations, vérifications, preuves, démonstrations, ...
Cette existence sera suivie d'effets en termes d'apprentissage selon l'usage qu'en fera l'enseignant, les usages qu'il rendra nécessaires et pertinents pour les élèves par rapport aux activités proposée, l'importance qu'il accordera à ces usages par les élèves (évaluation)..[13]

Le prix à payer

Il est tentant de comparer les mises en scène du savoir organisées à trente ans de distance par deux enseignants, Roger Godement et Marc Legrand, déclarant tous deux attacher une grande importance au développement à l'école de l'esprit critique des futurs citoyens[14].

---

[13]On trouvera en annexe un descriptif de questions susceptibles d'aider à l'organisation d'un dispositif.

[14]C'est sans doute un point de vue dominant. Depuis l'université d'été, une enquête a montré que sur des réponses à choisir pour répondre à la question "à quoi doit servir l'école?", la réponse "former la réflexion et l'esprit critique est choisie par 66% des enseignants (contre 22% des français), la réponse "former des citoyens"

Citons d'abord Godement dans sa préface du cours d'algèbre:

"Le premier devoir des mathématiciens (...) serait plutôt de fournir ce qu'on ne leur demande pas- à savoir des hommes capables de réfléchir par eux mêmes, dépister les arguments faux et les phrases ambigües, et aux yeux desquels la diffusion de la vérité importerait infiniment plus que, par exemple, la Télévision planétaire en couleurs et en relief : des hommes libres, et non pas des robots pour technocrates."

"..même en enseignant les mathématiques, on peut du moins essayer de donner aux gens le goût de la liberté et de la critique, et les habituer à se voir traités en être humains doués de la faculté de comprendre."

Juste après cette prise de position, Godement décrit l'organisation pédagogique (classique pour l'époque) de son ouvrage :

"pour en revenir aux débutants auquels ce livre s'adresse, nous avons donc cherché à leur parler le langage des mathématiciens professionnels, en définissant tous les termes techniques, clairement et une fois pour toutes, en énonçant explicitement tous les théorèmes ..."

"on s'est efforcé d'établir des théorèmes aussi généraux que possibles..."

C'est justement la possibilité d'apprendre <u>sans effort supplémentaire</u> des résultats de plus en plus généraux qui permet aux jeunes de parvenir aussi rapidement au niveau de la recherche qu'il y a cent ans,..." (Godement, cours d'algèbre, Hermann, p.16-17).

Il s'agit d'expliciter le texte officiel du savoir le plus rapidement possible pour de futurs chercheurs, plutôt que d'en expliquer le sens et l'origine. On voit mal dans ce texte l'articulation avec le projet humaniste. Godement prend de la pratique du chercheur l'utilisation de textes de référence synthétiques. Il y ajoute aussi dans son ouvrage des exercices nombreux et de divers types.

Avec également un objectif de développement de la pensée critique, la démarche de Marc Legrand qu'on trouvera plus loin et dans (Legrand,1995) prend d'autres moyens.

Voici également ci dessous une autre approche, celle de Britt-Mari Barth. Comme celle de Marc Legrand, elle implique la présence d'un contrat et d'une organisation spécifiques impliquant l'explicitation des méta connaissances visées, leur travail au sein d'un domaine de savoir et un engagement personnel fort de l'enseignant..

Les travaux de Britt-Mari Barth

A propos de l'apprentissage de méta connaissances, il faut citer les travaux de Britt-Mari Barth destinés à apprendre aux élèves à réfléchir par la pratique de la méta cognition.

L'enjeu de ces travaux est l'élaboration de séquences d'apprentissages cohérentes offrant aux élèves une expérience d'élaboration de savoirs qui pourra être intégrée en tant qu'outil intellectuel. Cet outil permettra aux élèves de passer à un mode de pensée propositionnel dont la rationnalité peut être considéré comme un aspect d'une démarche scientifique.

Des moyens sur trois niveaux.

Les moyens qu'elle propose sont à trois niveaux.

<u>-Les attitudes et dispositions des élèves envers la tâche.</u>

Leur implication est déterminante pour la réussite d'une activité intellectuelle complexe. Cette implication est obtenue par l'organisation d'environnements particuliers favorisant la confiance mutuelle.

<u>-L'explicitation des (méta) connaissances visées.</u>

Pour former les élèves à une pensée réfléchie, il faut créer un langage commun pour en parler, permettre à l'apprenant de repérer puis nommer ce qu'il fait et dont il doit prendre conscience.

<u>-leur mise en oeuvre au sein de connaissances spécifiques.</u>

La réflexion et le raisonnement sont toujours liés à des connaissances spécifiques dans un domaine de savoir dans lequel pourra fonctionner la prise de conscience des démarches effectuées.

L'organisation en classe de telles situations suppose, pour Britt-Mari Barth, une formation spécifique de l'enseignant d'une part mais aussi (on s'en doutait) un changement de paradigme de l'institution scolaire !

Pour plus de détails, consulter (Britt-Mari Barth, 1996).

---

est choisie par 52% des enseignants (contre 30% des français, et la réponse "accéder au monde du travail" est choisie par 42% des enseignants (contre 69% des français). (LE MONDE, 19 novembre 1996, p.10)

Exemple de méta connaissance

Difficulté de formulation d'une conjecture

La formulation d'une conjecture sous la forme d'un énoncé explicite d'une assertion à prouver est difficile pour l'élève, elle suppose une décentration du registre de l'action qui montre des résultats sur celui de la stratégie, c'est à dire de la pensée.
Ce passage est difficile, il consiste à suspendre une affirmation résultant du constat d'un phénomène pour passer à un énoncé conjectural nécessitant une confirmation.
Ce passage est du même type que le passage du contrôle pratique au contrôle théorique.
Une conjecture peut être induite par une tentative de généralisation de régularités observées expérimentalement sur divers cas particuliers. La formulation explicite de l'énoncé complet à démontrer est déjà dans ce cas une activité qui ne va pas de soi pour l'élève.
Dans d'autres cas, il arrivera qu'un problème ouvert (n'induisant ni la méthode ni la solution selon (Arsac, Germain, Mante 1988) provoque l'émergence de questions. Ces questions sont relatives à des connaissances insuffisantes de l'élève ou à des sous problèmes. La transformation d'une question en problème à résoudre est exactement la formulation d'une conjecture. Elle suppose chez l'élève la décision de choisir, puis d'expliciter complètement une certaine formulation de la question prise comme but à atteindre. Cela implique en acte la reconnaissance du changement de statut de l'énoncé pris comme sous problème. C'est une opération complexe du fait du changement de statut de l'énoncé d'une question en celui d'un problème à prouver.
Cette action peut être encore plus difficile si il faut choisir entre deux énoncés contradictoires.ayant d'égales possibilités pour l'élève. Dans ce cas, il faut avoir exactement une attitude dialectique : choisir de se fixer sur un énoncé et en déduire les conséquences pour en éprouver la solidité.
Une telle prise de décision est difficile, les observations conduites en 1993-1994 autour d'un groupe d'élèves dans Math en Jeans on montré la longue coexistence d'un débat autour d'énoncés contradictoires avant d'en retenir un.

IV- CONCEPTION

La notion de conception a été théorisée pour pouvoir modéliser la connaissance d'un sujet à un instant donné. Cette théorisation est due aux travaux de (Vergnaud 1980) puis de (Balacheff ,1995). Nous en faisons une présentation volontairement trés succinte pour avoir une référence commune sur les modalités de fonctionnement des connaissances d'un sujet en situation de résolution de problème. Nous commençons par une notion due à Sackurt et Léonard (Cf.GECO 1994).

Connaissances locales

Dans le traitement d'une tâche il y a des phases d'actions où un modèle d 'action est déclenché par certains indices. Cette mise en oeuvre peut être adaptée à la situation ou exploratoire, nous ne nous intéressons pas à cet aspect.
Cette mise en oeuvre a un côté automatique : le reconnaissance d'un type de situation par certains indices induit un procédé dont l'efficacité a été reconnue dans des situations antérieures jugées semblables. Cette similitude et la confiance dans le procédé s'accompagnent d'une automatisation de l'action sans contrôle des conditions d'applications qui sont soient oubliées, soit inconnues du sujet. Voici quelques exemples classiques :

Des procédés qui réussissent, et leurs limites

modèle d'action	vrai si	faux si
<u>en multipliant</u> on obtient un nombre plus grand	on multiplie par 2, 3... ou un nombre supérieur à 1	on multiplie par 1/2, 3/5 ... ou un nombre inférieur à 1
<u>Pour interpréter</u> les nombres positifs et négatifs, je pense les nombres positifs comme des gains, les négatifs comme des pertes.	je considère seulement des opérations d'addition ou soustraction dont j'ai des exemples	je considère des opérations avec des produits (règle des signes)
pour prendre le symétrique on fait un rappel horizontal	l'axe de symétrie vertical	l'axe n'est pas vertical

deux segments qui se croisent ont un point commun	on est en géomètrie plane avec des segments au sens usuel	les segments sont constitués seulement de points à coordonnées décimales
une fonction continue est dérivable sauf en un nombre fini de points	il s'agit des fonctions obtenues à partir des fonctions usuelles	la fonction est continue sans autre hypothèse

Chaque fois on a une modèle d'action déclenché par une représentation liée à des exemples connus. A un moment donné de l'apprentissage, ce modèle d'action a un domaine de validité dont les limites sont le plus souvent inconnues du sujet.
Dans ces exemples sur lesquels nous sommes experts, nous connaissons à la fois les procédés et leurs limites, mais pendant l'apprentissage un procédé est d'abord travaillé pour son efficacité dans son domaine de validité. C'est par les usages ultèrieurs erronés que le champ d'application et ses limites vont ensuite se préciser.
Certains auteurs proposent de décrire la connaissance d'un sujet à un moment donné en utilisant le terme assez parlant de "connaissance locale" (GECO, 1994) comme une "connaissance correcte dans certaines limites, mais dont les limites sont inconnues du sujet".

Toute connaissance est locale.

On serait tenté de penser que les connaissances locales sont englobées dans des connaissances "globales" exprimées dans les connaissances scientifiques plus avancées.
En réalité, ce que nous apprend l'épistémologie, c'est que toute connaissance est locale[15]. Ce que Bachelard résume dans cette jolie formule :

> "La connaissance du réel est une lumière qui projette toujours quelque part des ombres"(Bachelard, La formation de l'esprit scientifique, p.13)

Les modèles d'action cités dans les deux derniers exemples ci dessus ont été considérés comme des évidences avant qu'apparaissent leurs limites de validité. Bolzano a été le premier a refuser le caractère d'évidence géométrique de l'existence d'un point commun à deux lignes continues et à prouver cette existence par le caractère complet du corps des réels. C'est Weierstrass qui a construit (à l'effroi d'Hermitte déjà cité) un exemple de fonction continue nulle part dérivable.

Liens avec la signification des connaissances

Disons seulement que la signification d'un modèle d'action pour un sujet dépend autant de la connaissance de situations où il ne s'applique pas que de situations où il s'applique. C'est cette connaissance qui permet des choix entre différentes stratégies.
Pour Brousseau, c'est même la prise de conscience du caractère erroné de certaines connaissance
qui est constitutif du sens d'autres connaissances dont la construction est visée.
Cette rencontre de l'élève avec les limites de validité de ses connaissances ne peut se faire qu'au sein de situations qui vont provoquer chez lui une contradiction. Sur la gestion par le professeur de telles situations, voir (Ratsimba-Rajohn, 1994).

Limites à la mobilisation des connaissances

En situation de recherche de problème, la mobilisation des connaissances dépend de deux principes.
Le principe d'économie qui exprime qu'on mobilise à chaque fois le minimum de connaisance nécessaire.
Le principe de contextualisation qui exprime qu'on mobilise les connaissances auquelles la situation fait référence. le mot situation étant pris ici au sens large : le problème et son contexte. Celui ci évoquant des domaines d'expèrience variés. Le rôle de cette référence du contexte intervient de deux façons : d'abord chez un même sujet, il y a possibilité de coexistence de connaissances jugées logiquement contradictoires pour un observateur expert, mais associées par le sujet à des contextes d'application différents (Viennot, 1979), ensuite l'aptitude à résoudre un problème dépend fortement de la représentation qu'on en a : par exemple, la réussite à des problèmes relevant d'une même procédure mathématique avec les mêmes valeurs numériques dépend du contexte sémantique de son énoncé (Julo, 1993, p.131-139)

[15]Cette affirmation est d'ordre épistémologique. Dans la réalité, on constate au contraire chez certains inventeurs ou utilisateurs de grandes théories (même encore aujourd'hui) l'idée que leur science s'achève avec cette théorie.

Importance des représentations symboliques

Les diverses représentations matérielle ou symbolique utilisées en mathématiques ont plusieurs fonctions: désigner ; communiquer ; organiser les calculs et les raisonnements, conserver les résultats intermédiaires ; accompagner le fonctionnement de la pensée.

Chaque représentation d'objet s'accompagne en principe de règles qui en contrôlent le fonctionnement. Elle est insérée dans un ou plusieurs systèmes de signifiants et de règles. Par exemple, bien que formellement les deux écritures $(gof)'(x) = g'(f(x))of'(x)$ et $dz/dx = dz/dy. dy/dx$ soient considérées comme équivalentes, elles ne fonctionnent pas de la même façon.

Certaines représentations ont des règles implicites d'utilisation, par exemple les représentations graphiques. On trouvera dans (Pontille et alt. 1996) un exemple de reconstruction des règles d'utilisations du cadre graphique dans le cas où les élèves travaillent avec des fonctions de l'ensemble des décimaux dans lui même.

Des représentations diverses d'un même objet peuvent ne pas représenter un même objet pour divers sujets car elles sont liées pour le sujet au contexte.

Chevallard propose d'appeler "objet ostensif" toute représentation que l'on peut effectivement manipuler dans sa matérialité. Ces ostensifs permettent de travailler avec les objets que l'on peut seulement penser, qu'il appelle "émergent" comme la fonction logarithme par exemple. Cette terminologie a l'avantage d'éviter le terme "concept" dont le sens est surchargé. Une référence synthétique est (Chevallard, 1996).

Une description des conceptions d'un sujet

Notion de conception

Ce qui précède montre que pour décrire la façon dont un sujet mobilise ses connaissances en situation de résolution d'un problème, il faut prendre en compte divers éléments.

-les problèmes de ce type ou voisins que le sujet sait résoudre

-les divers outils de résolution qu'il peut utiliser de façon efficace sur ces problèmes : propriétés, règles d'action implicites ou explicites... (on parle d'invariants opératoires)

-les moyens de représentation qu'il mobilise, langagiers ou non, graphiques, dessins, symboles.

A ces trois éléments mis en oeuvre pour la résolution, il faut en ajouter un autre qui n'est pas au même niveau que les outils de résolution :

-les outils de contrôle qui permettent au sujet de prendre des décisions (vérifications, changements de cadre, références diverses, heuristiques, connaissances de la forme à priori du résultat ...)

Ces quatre éléments décrivent ce qu'on appelle la conception du sujet dans cette situation. Notons que la conception est une instanciation de la connaissance du sujet dans un contexte particulier qui la mobilise. Elle n'est pas une propriété du sujet en soi, mais une connaissance manifestée dans l'interaction du sujet avec la situation. Elle est relative au type de problème et au contexte où il se pose. En cela la notion de conception se différencie de celle de connaissance locale.

Du point de vue didactique, cela signifie que la mise en oeuvre des conceptions peut être provoquée par certaines situations.

Cette approche trés simplifiée est formalisée dans (Balacheff, 1995) pour construire un modèle permettant de dépasser la contradiction que représente la coexistence de conceptions contradictoires chez un sujet dont on suppose par principe qu'il est rationnel.

Importance du contrôle

En situation de recherche de problème, il est essentiel de contrôler la validité de ses inférences, calculs, procédures. Ce contrôle prend diverses formes suivant les moments de la recherche et de la validation. En mathématiques, in fine c'est le contrôle théorique qui est visé. Il suppose toujours une centration sur l'objet de la recherche, et une prise de recul par rapport à l'action. Citons quelques exemples d'actions relevant du contrôle : choisir d'abandonner une piste, éventuellemnt provisoirement, repérer le statut des énoncés utilisés, vérifier leurs conditions d'application, s'assurer de la pertinence d'un résultat, par exemple par changement de cadre, contrôler l'écart au but dans la réalisation, repérer des états critiques, revenir sur une procédure en cas d'échec,etc...

Comparaison des conceptions en mathématiques et en sciences expérimentales

Nous mettons en parallèle les deux approches qui paraissent complémentaires :

en mathématiques (Vergnaud, Balacheff)[16]	**en sciences** (Giordan, de Vecchi, 1987)
	problème : point de départ de la réflexion
problèmes types que le sujet sait résoudre avec cette conception. Ils servent de référence	**cadre de référence** : ensemble des connaissances périphériques activées qui permettent à l'élève de formuler sa conception
invariants opératoires concepts, opérations dont dispose le sujet	**opérations mentales** ou invariants opératoires : les concepts, opérations dont dispose le sujet pour mettre en relation les éléments du cadre de référence et le problème
	réseau sémantique : organisation constituée à partir du cadre de référence et des opérations mentales. Elle donne une cohérence à l'ensemble.
signifiant : le système de représentation nécessaire pour exprimer les problèmes et les opérations en jeu : signes, traces, symboles	**signifiant** : les moyens de représentation nécessaires pour exprimer les problèmes et les opérations en jeu : signes, traces, symboles
outils de contrôle	

Cette façon d'envisager la connaissance représente une rupture avec le schéma O.H.E.R.I.C, En effet, ce schéma suppose une sorte d'immanence de la connaissance à l'observation ou à l'expérience (bien faites), une connaissance que l'élève n'aurait qu'à extraire pour remplacer sa propre connaissance erronée. Par contre les modèles des conceptions prennent en compte les connaissances antérieures du sujet, leur organisation en réseau, leurs validités locales et leur possibilités de modification <u>par le sujet lui même dans des situations appropriées</u>. Elles sont associées à une conception(!) particulière de l'erreur comme manifestation nécessaire d'une connaissance du sujet dont il ne percevra l'inadéquation que si l'environnement provoque une mise en échec des actions basées sur cette connaissance.

---

[16] cette présentation est une interpolation dans le vocabulaire de ce paragraphe à partir des travaux des auteurs cités.

BIBLIOGRAPHIE

Arsac G., Germain G., Mante M., Pichod D., (1984), *La pratique du problème ouvert,* IREM de Lyon.

Arsac G., Germain G., Mante M., Tisseron C., (1987),*Varions notre enseignement avec des problèmes ouverts,* IREM de Lyon.

Arsac G et alt., (1992) *Initiation au raisonnement déductif au collège,* IREM et Presses universitaires de Lyon.

Bachelard G, (1934), *Le nouvel esprit scientifique*, Presse Universitaires de France.

Bachelard G, (1938), *La formation de l'esprit scientifique,* Vrin

Bachelard G, (1940), *La Philosophie du non*, Presse Universitaires de France.

Bachelard G.,(1949), Le problème philosophique des méthodes scientifiques, *Congrés international de philosophie des sciences*, I, Epistémologie, Paris.

Barbin E.,(1993), les Eléments de géométrie de Clairaut, une géométrie problématisée, *Repères* 4, 119-133.

Balacheff N. (1995), Conception, Connaissance et Concept, *didactique et technologie cognitives en mathématiques*, Séminaires 1994-1995, 219-244. CNRS-IMAG univ. J. Fourier.

Balacheff N., (1990), Towards a problématique for research on mathematics teaching. *Journal for Research in mathematics Education, 21(4),* 258-272.

Brousseau, G., 1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques, 7(2)*, 33-115.

Britt-Mari Barth, (1996), Pratiquer la méta cognition avec les élèves pour leur apprendre à réfléchir,*Cahiers pédagogiques, 344-345.*

Canguilhem G.(1968),*Etudes d'histoire et de philosophie des sciences*, Vrin (5ème édition 1983).

Chevallard Y., (1995), La fonction professorale: esquisse d'un modèle didactique,*Actes de la VIIIeme Ecole d'été de didactique*, IREM de Clermont-Ferrand.

Chevallard, (1996), Les outils sémiotiques du travail mathématique, *"petit x"* 42, 33-57.

Colloque de Cerisy,(1981), *Karl Popper et la science d'aujourd'hui,* Aubier, 1989.

Coppe S., Arsac G., Guichard Y., (1996), *Vérifications en devoir surveillé,* Repères 22,13-32.

Dahan Dalmedico A., Chabert J.-L., Chemla K., (1992), *Chaos et déterminisme,* Seuil.

Euclide, *Les éléments, vol I,* (trad. et commentaires par B. Vitrac), Presses Universitaires de France, 1990.

Giordan A, de Vecchi G, (1987), *Les origines du savoir,* Delachaux et Niestlé.

GECO., (1994) , Vers un modèle de l'évolution des connaissances locales, Théorie et techniques, *Les débats de didactique des mathématiques,* La Pensée sauvage. 145-156.

Hulin M., *Le mirage et la nécessité,* Presses de l'Ecole Normale Supérieure et du Palais de la découverte.

Jarrosson B, (1992), Le quatuor des épistémologues, *Sciences et Avenir 79.* 79-81

Julo J., (1993), *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques,* Presses Universitaires de Rennes.

Paty M., (1990), *L'analyse critique des sciences*, L'Harmattan.

Popper, (1963), *Conjectures et réfutations,* Payot, 1980.

Lakatos I., (1963). *Preuves et réfutations,* Hermann 1984.

Legrand M. (1993), Débat scientifique en cours de mathématiques et spécificité de l'analyse,*Repères 10*, 123-159.

Ministère de l'Education Nationale, Direction des Ecoles, (1991) *Les cycles à l'école primaire*, Centre National de Documentation pédagogique, Hachette.

Nimier J. (1989), *Entretiens avec des mathématiciens*, IREM de Lyon

Pontille M.C, Feurly-Reynaud J, Tisseron C,(1996), Et pourtant ils trouvent, *repères 24.* 11-34.

Portuguais J., (1995), *Didactique des mathématiques et formation des enseignants,* Peter lang.

Ratsimba-Rajohn H., (1994), Les macles de contradictions : outil d'aide à l'analyse didactique et instrument de gestion de situations didactique, *Les débats de didactique des mathématiques,* La Pensée sauvage, 103-112.

Reichenbach H., (1938), *Experience and prediction,* The University of Chicago Press, Chicago, 5ième édition, 1957.

Séminaire interdisciplinaire du Collège de France,(1991), *La vérité est-elle scientifique?* Editions Universitaires
Thurston W., (1995), Preuve et progrés en mathématiques, *repères 21,* 5-26.
Trouche L. (1994), Calculatrices graphiques, la grande illusion, *repères 14*, Topiques
Vergnaud G., 1980, La théorie des champs conceptuels, *Recherches en Didactique des Mathématiques, 10 (2,3)*, 133-170.
Viennot L.(1979), *Le raisonnement spontané en dynamique élémentaire,* Hermann, Paris.

Le problème de l'U.E.

Première partie

Pourquoi un problème ?

L'idée du "problème de l'U.E." est de faire vivre aux participants une recherche en mathématiques tout au long de l'université d'été, afin de mettre en rapport le thème de l'U.E. avec un travail de recherche en direct. L'objectif de ce travail est de permettre aux stagiaires de faire un parallèle avec une situation de classe où l'élève va mettre en oeuvre ses connaissances et donc leur donner du sens à travers la résolution d'un problème de mathématiques.

Dans cette recherche, on peut distinguer deux niveaux :

le problème lui-même et la théorie de la géométrie fractale sous-jacente ; nous l'avons jugé suffisamment riche et ouvert pour que l'ensemble des participants puissent y trouver un intérêt.

la recherche du problème comme expérimentation d'une situation transposable avec des élèves. Ce qui suppose une distanciation des stagiaires vis à vis du problème lui-même et une attention aux procédures qu'ils mettent en place. L'hypothèse que nous avions émise pour mettre en place ce travail était qu'une condition importante pour faire vivre à ses élèves une situation de recherche de problème est de vivre soi-même une telle expérience. Ceci doit permettre une référence à des connaissances à partir de l'action et favoriser un transfert à des situations de classe.

Le travail, initialisé dans ce temps a vécu sur toute la semaine. Les modalités de travail autour de ce problème (répartition sur chaque jour) ont permis aux deux niveaux d'interagir avec les contenus des autres activités.

Le problème de l'UE

Présentation de l'énoncé du problème :

Il s'agit d'un problème issu d'une modélisation de croissance de population en biologie. Nous ne sommes nullement spécialistes de cette discipline, et sur tous les problèmes d'interprétation, nous serions bien en peine de donner des avis pertinents.
Cependant nous nous sommes appuyés sur le livre "Modélisation en Biologie" de A. Pavé chez Aléas, pour proposer ce problème.

Les croissances de population peuvent donner lieu à plusieurs modèles :

M1 : la croissance de la population se fait en prenant en compte un taux d'accroissement fixe, correspondant aux naissances ; on a d'une unité n de temps à la suivante n+1:

$$x_{n+1} = (1+b)x_n \text{ ou } x_{n+1} = x_n + b.x_n.$$

C'est un modèle linéaire, dont l'inconvénient est de proposer une croissance tendant vers l'infini, dont on sait bien qu'elle ne rend pas compte de la réalité (ou une extinction si b négatif) .

M2 : le modèle de la croissance de la population prend en compte un taux de mortalité fixe, en plus du taux de natalité :

$$x_{n+1} = x_n + b.x_n - s.x_n.$$

C'est encore un modèle linéaire, avec le même inconvénient que le précédent.

M3 : On peut, pour améliorer le modèle, supposer que le milieu n'est capable d'accueillir qu'un nombre limité P d'individus (dès que ce nombre est atteint, le taux de reproduction est nul), le modèle le plus simple est alors de considérer que le taux de reproduction dépend linéairement de la population, en intégrant la contrainte précédente, ce qui donne :

$$x_{n+1} = x_n + b(P - x_n)x_n - s.x_n.$$

Ce dernier modèle peut se travailler comme suit :

$x_{n+1} = x_n(1 + bP - s) - bx_n^2.$

En posant $(1 + bP - s) = a$, on a :

$$x_{n+1} = ax_n - bx_n^2 = ax_n(1 - \frac{b}{a}x_n)$$

En faisant un changement d'échelle, on peut poser $u_n = \frac{b}{a}x_n$, on obtient alors :

$$u_{n+1} = a\,u_n(1 - u_n)$$

Le problème de l'UE

Enoncé du problème

La croissance d'une population est modélisée par le modèle logistique (ou de Verhulst), c'est à dire que :

$$u_{n+1} = a\,u_n(1-u_n)$$

Quel est, selon ce modèle, l'avenir d'une telle population ?

Conditions de cette recherche, dispositif :

• Le travail sera fait par groupes de quatre, sur une plage réservée chaque jour de cette université d'été.
• Les outils à disposition sont des livres, des PC portables, des TI 92.
• Au départ, vous pourrez bénéficier, si vous le souhaitez, d'un atelier d'initiation à la TI 92, et/ou à Dérive.
• Des phases de communication et d'échanges sur ce travail sont prévues : la première, intermédiaire, le mardi ; la seconde, finale, le dernier jour.
• La phase de communication du dernier jour est l'enjeu de ce travail, chaque groupe aura une plage de 20 minutes pour présenter des résultats, des questions, des observations sur cette recherche.

Consigne

Chercher le problème que nous venons de vous présenter, d'abord individuellement, puis par petits groupes de quatre au maximum.
Garder des traces de cette recherche, c'est à dire se regarder chercher, grâce à un dispositif choisi par le groupe.

Débat scientifique en cours de mathématiques

Marc Legrand a proposé aux participants des recherches de problèmes, à propos desquelles il a animé un débat scientifique, analogue à celui qu'il met en place dans son enseignement en DEUG A, à Grenoble.

Il a ensuite travaillé à construire, avec les stagiaires, une analyse des phénomènes liés à cette pratique, en s'appuyant à la fois sur le vécu des participants, et sur sa pratique de ce type d'enseignement.

La journée s'est déroulée en alternant des phases de travail individuel, en groupes, de mises en commun et d'exposés.

Les pages suivantes ont été proposées par Marc Legrand, pour fixer les idées essentielles développées durant cette journée.
Nous n'avons pas repris la description complète du déroulement de cette journée.

DEBAT SCIENTIFIQUE
EN
COURS DE MATHEMATIQUES

Marc Legrand

De quoi s'agit-il ?

Il s'agit d'une forme d'enseignement basé sur un double principe :

- un principe humaniste et social : pour que les enseignements scientifiques soient à la fois formateurs pour le sujet qui s'instruit et adaptés aux sociétés qui attendent des compétences spécifiques de ceux qui ont été introduits à ce type de pensée, il faut que les élèves et les étudiants puissent trouver dans ces enseignements les moyens de se construire une rationalité qui respecte simultanément les contraintes de la science et leur identité propre, il faut que ces apprentissages contribuent à la construction d'une cohérence globale chez un sujet tout autant épistémique que psychologique et social;

- un principe épistémologique : celui qui n'a pas eu suffisamment l'occasion de jouer lui-même en vraie grandeur un véritable jeu scientifique n'a que très peu de chances de s'intéresser aux raisonnements essentiels de la science, de comprendre la portée réelle des résultats qu'elle établit (comprendre la puissance, mais aussi les limites de ses algorithmes et modes de pensée), et par suite d'exploiter avec pertinence ses résultats pour résoudre plus scientifiquement les problèmes qui se présentent à lui.

Dans cette optique, depuis une quinzaine d'années, nous organisons et analysons dans des classes de collège et de lycée (élèves de 12 à 18 ans) et dans des amphis d'université, des cours de mathématiques qui s'effectuent tout ou partie sous forme de "débat scientifique".

Le trait caractéristique commun de toutes ces expérimentations est qu'on y voit régulièrement de vrais élèves ou de vrais étudiants (des élèves ou des étudiants non exceptionnels) pratiquer en cours de mathématiques de véritables activités scientifiques (entrer dans des questionnements et formuler des raisonnements, qui, toutes proportions gardées, sont de même nature que ceux que nous rencontrons dans nos communautés de recherche).

Par exemple, quand à la fin d'une année scolaire un élève de douze ans explique à ses camarades la différence entre choix d'unité et choix d'axiome de la façon suivante :

" Que le tour complet fasse 360°, ce sont les hommes qui l'ont décidé, mais que la somme des angles du triangle fasse un demi-tour, çà c'est le monde qui le veut ! ",

nous trouvons dans son propos une profondeur et une consistance épistémologique inattendues à ce niveau.

Quand on sait de plus que cet élève et cette intervention n'ont rien d'exceptionnel dans ce type d'organisation didactique, on se met à faire le pari que si les élèves ou les étudiants pouvaient exprimer avec leurs mots ce qu'ils conçoivent dans un cours, s'ils pouvaient parler à la première personne, i.e. si leur prise de parole pouvait avoir comme fonction principale d'expliquer à leurs pairs ce qu'ils pensent avoir compris, ce qu'ils croient être vrai (et non pas de montrer à l'enseignant qu'ils savent ce qu'ils sont censés savoir), la très grande majorité de nos élèves ou de nos étudiants se révèleraient peut-être (contrairement à ce qu'on pense trop souvent) tout à fait aptes à aborder en profondeur des problématiques franchement scientifiques.

Marc Legrand Enseignant-chercheur à l'Université J. Fourier de Grenoble (France)
Institut J. Fourier B.P. 74 - 38402 Saint-Martin d'Hères Cedex FAX 76 51 44 78

En nous appuyant donc sur cette base expérimentale et sur ce pari, nous allons essayer d'analyser ici les ressorts et les rouages de cette organisation du didactique et d'en donner les traits caractéristiques.

Pour tenter d'atténuer les effets d'abus et de contresens que provoque inévitablement une description un peu formelle de ce débat (voir partie II), je vous propose de faire une première analyse à partir d'un exemple.

I) Etude d'un exemple :

Nous sommes au deuxième mois de la première année d'université; la centaine d'étudiants de cet amphi "connaissent" les rudiments du calcul différentiel et ses applications : détermination des extrema d'une fonction, développements limités, etc. Le principe du débat scientifique a été négocié par le professeur dès le premier cours.

- Un premier étudiant a posé, au début du cours, la question suivante :

La fonction $g(x) = 36\,x + \sqrt{1 + \cos(\pi.x)}$ *admet-elle un maximum local au point* 1 *?*

Et il a ajouté: *"Je pense que la réponse est non, mais je ne sais pas comment le montrer, car je ne sais pas calculer* $g'(1)$ *à cause de la racine carrée!"*

En guise de réponse, le professeur demande alors à l'amphi de voir si on ne pourrait pas déterminer directement le signe de $\Delta g = g(1 + \Delta x) - g(1)$.

- 2ème étudiant : *"Quand* $x \to 1$, $\sqrt{1+ \cos(\pi.x)} \to 0$ *, on a donc* $g(x) \to 36\,x$ *; en* 1 *,* Δg *est donc approximativement égal à* $36\ \Delta x$ *, donc* $g'(1) = 36$ *! "*

Le réflexe premier de l'enseignant est de reprendre les choses en main en disant en substance :

" Il faudrait se méfier, car dire que $g(x)$ *est approximativement égal à* $36\,x$ *nous permet seulement de dire que la différence entre* Δg *et* $36\,\Delta x$ *est un infiniment petit* $r(\Delta x)$ *; or, nous savons bien que nous ne pouvons rien conclure en termes de dérivée ou de différentielle si nous ignorons si ce reste est négligeable ou non devant* Δx *!"*

Toutefois ce professeur ne donne pas lui-même cette explication car, bien qu'il sache que cela lui ferait "gagner beaucoup de temps", il ne peut ignorer que ce faisant, il se prive d'une possibilité de savoir où en est l'amphi sur ce sujet et, au cas où "l'ignorance collective" serait grande, il sait qu'il perd par là-même une très bonne occasion de réduire cette ignorance sur un sujet qu'il juge essentiel.

Il renvoie donc la balle à l'amphi sous forme d'une demande d'adhésion au raisonnement précédent (demande qui ne signifie pas "je ne suis pas d'accord, cherchez l'erreur!", mais plutôt "si quelque chose vous dérange dans ce raisonnement, faites-le savoir!").

- Professeur : *Tout le monde est bien d'accord avec le raisonnement :* $g(x) \to 36\,\Delta x$ *, donc* Δg *est approximativement égal à* $36\,\Delta x$ *, donc* $g'(1) = 36$ *?*

- 3ème étudiant : *Je ne vois pas pourquoi* $g'(1) = 36$ *.*

- Le professeur au 2ème étudiant : *Il ne comprend pas comment vous déterminez* $g'(1)$ *!*

- Le 2ème étudiant : *On sait bien que "*Δg *équivalent à* $36\,\Delta x \iff g'(1) = 36$ *"!*

Comme à ce moment aucun étudiant ne proteste pour mettre en évidence le glissement qui vient de se produire entre cet "approximativement égal à $36\,\Delta x$ ", magiquement devenu "équivalent à $36\,\Delta x$ ", le professeur peut être certain qu'il règne dans cet amphi un doux malentendu autour du concept de reste différentiel.

A cet instant, deux choix s'offrent à ce professeur :

- il peut décider de se voiler la face en cherchant par effet Topaze [10] à faire dire à ses étudiants ce qu'il veut entendre : que le reste doit être un $o(\Delta x)$, et ils le feront pour lui faire plaisir puisqu'il le leur demandera, mais dans ce cas sa démarche n'est pas cohérente, ce n'était pas la peine qu'il lance ce débat car il a déjà lui-même longuement insisté quelque temps avant, lors du passage entre dérivée et développement limité, sur l'importance de bien vérifier que le "reste" était négligeable devant Δx. Sans cette vérification, avait-il averti, on peut prendre n'importe quel nombre comme nombre dérivé! (le débat montre qu'il n'a pas été bien entendu)

- ou bien il considère que le concept de différentiel est en grand danger dans cet amphi et qu'une simple explication de sa part aurait (comme on vient de le voir) très peu de chances de transformer chez ces étudiants leurs savoirs formels sur la dérivée et les ordres de grandeur en un savoir pratique, i.e. un savoir disponible dans l'action pour résoudre les problèmes.

Il opte donc pour la poursuite du débat entre les étudiants, mais il réoriente ce dernier d'une certaine façon parce qu'il prévoit un enlisement.

En effet, il pense que s'il laisse aller les choses comme elles se présentent, l'amphi risque rapidement de lui demander de trancher, car d'un côté, personne ne peut être totalement contre ce qui vient d'être dit en termes d'équivalent, et de l'autre, ceux qui ne sont pas convaincus n'ont probablement pas à ce moment de l'année les moyens de lutter mathématiquement contre le glissement qui s'est subrepticement effectué d'un passage à la limite sur des fonctions vers un "approximativement égal" des différentielles finalement transformé en un "équivalent à..." !

Il renvoie donc la balle une deuxième fois dans l'amphi sous une forme beaucoup plus précise.

- Le professeur : *Il me semble que ce qui est en débat depuis quelques instants, c'est la conjecture suivante :*

Conjecture :

Soit $\Delta f = f(1+\Delta x) - f(1)$ l'accroissement d'une fonction f définie autour de 1 ;
si α) : $\Delta f = 36\,\Delta x + r(\Delta x)$ avec $r(\Delta x) \to 0$ quand $\Delta x \to 0$, **alors** $f'(1) = 36$.

Je vous laisse cinq minutes pour prendre position sur cette conjecture.

Au bout d'environ dix minutes, un vote donne les proportions suivantes :

Vrai = environ 2/3 d'amphi , Faux = quelques étudiants, Autre = environ 1/3 d'amphi.

Et le débat qui suit prend la tournure suivante:

1) La majorité des étudiants qui soutiennent la conjecture le font à cause de l'apparence différentielle de α) et ne se soucient même pas formellement de l'ordre de grandeur du reste.

2) Ceux qui sont gênés pour se prononcer dans un sens ou dans un autre (position Autre dans le vote) le sont plus, semble-t-il, pour une question de forme que de fond. (Ils se rappellent "le cours" et ne retrouvent pas la forme canonique en $o(\Delta x)$ ou $\Delta x.\varepsilon(\Delta x)$ d'un reste différentiel, mais au fond, ils ne savent pas vraiment si le fait de remplacer cette notation par celle d'un reste $r(\Delta x)$ qui tend vers zéro avec Δx peut radicalement changer la situation; en tout cas, ils ne peuvent expliquer pourquoi.

3) Parmi ceux qui ont voté Faux, certains subodorent que la précision " $36\,\Delta x$ " est en fait illusoire dans α) , car elle est "tuée" par l'imprécision sur l'ordre de grandeur de l'infiniment petit $r(\Delta x)$.

D'autres enfin (qui se répartissent entre Faux et Autre) tendent même à penser que si ce n'était la présence de ce $36\,\Delta x$, on aurait pu écrire la même chose avec une fonction f seulement continue en 1.

Si les réserves exprimées par ce troisième groupe font vaciller certains de leurs camarades dans leurs convictions, elles ont beaucoup de mal à convaincre; en effet, comme ces différents interlocuteurs n'ont pas statut de professeurs, l'affirmation péremptoire "il faut que le reste dans α) s'écrive $o(\Delta x)$ pour que l'on puisse dire que $f'(1) = 36$ " n'est ni plus ni moins crédible que l'affirmation contradictoire "comme Δf est approximativement égal à $36\,\Delta x$, $f'(1) = 36$ ".

Si le professeur ne s'introduit pas subrepticement dans ce débat en prenant implicitement parti pour un argument contre l'autre (par exemple par des mimiques, des moues ou des intonations de voix), l'issue du conflit réclame que l'un au moins des protagonistes aille jusqu'au bout du jeu mathématique, i.e. ou bien revienne à un savoir ancien admis par tout le monde - ici la définition de la dérivabilité - (attitude que des élèves ou des étudiants ont énormément de mal à adopter), ou bien propose à ses pairs un contre-exemple pour montrer que la conjecture est fausse.

Si ces attitudes ne se manifestent pas spontanément, le professeur se contente seulement de rappeler que c'est ainsi que se résolvent les conflits dans la communauté mathématique. Il invite donc chacun à essayer de trouver des arguments mathématiques reconnus de tous, pour soutenir un point de vue qu'ils ont avancé jusqu'ici plus comme une intime conviction qu'à partir d'une argumentation franchement scientifique!

Il n'est pas rare alors qu'après une nouvelle période de débats privés, de calculs, puis d'agitation fébrile dans un coin de l'amphi, une main timide ou triomphante se lève annonçant : *"on a trouvé un contre-exemple"* ou plus prudemment *"on pense avoir trouvé un contre-exemple"*.

Ce candidat contre-exemple peut être :

- une "fonction" comme :

$h(x) = 36\,x$ pour $x \leq 1$ et $h(x) = 36\,x + 1$ pour $x \geq 1$, qui n'est pas dérivable, mais qui n'est pas non plus un contre-exemple puisque ce n'est pas une fonction,

- ou une fonction comme $k(x) = 36\,x + |x-1|$, qui vérifie α), mais qui est non dérivable en 1 puisque :

$$\Delta k = 37\,\Delta x \text{ quand } \Delta x \geq 0 \text{ et } \Delta k = 35\,\Delta x \text{ quand } \Delta x \leq 0 \text{ !}$$

Par contre, il est peu probable (car c'est difficile d'y penser si on ne domine pas la réflexion sur les ordres de grandeur d'un reste différentiel) de voir apparaître la fonction g initiale qui vérifie α), mais qui n'est pas dérivable en 1.

Ici, la fonction h écrite au tableau comme elle est proposée, i.e. sans commentaires ni réticences du professeur quand il voit apparaître la double définition de h(1), fait d'abord très peur au camp des partisans de la conjecture; d'ailleurs, au bout de quelques instants, l'amphi semble même K.O., car totalement acquis à ce contre-exemple cinglant et ce jusqu'à ce qu'un étudiant fasse remarquer que h n'est pas une fonction.

L'arrivée de k jette elle aussi visiblement un froid car on se convainc facilement que c'est bien une fonction et qu'elle vérifie α) ; mais l'impact sur l'amphi est moins violent qu'avec h, car les auteurs de cette proposition affirment plus qu'ils ne montrent la non dérivabilité de k en 1.

A ce stade, on peut dire que l'amphi est déstabilisé, mais que l'affaire est loin d'être totalement gagnée, car pour certains étudiants, k est d'une part une fonction très particulière et de l'autre il ne leur "saute pas aux yeux" qu'elle est non dérivable en 1 ; dans leur esprit la conjecture peut donc demeurer "en partie vraie" et le raisonnement erroné sur l'inutilité de prendre en compte l'ordre de grandeur du reste peut demeurer "en partie valide"!

Mais fort heureusement (et ce cas n'est pas rare), l'analyse de la contradiction amenée par le contre-exemple k amorce une "idée de génie" chez un 4ème étudiant.

En clair, l'analyse de la façon dont k est fabriquée donne brutalement à cet étudiant le moyen de prouver ce qu'il subodorait depuis le début, à savoir que dans la conjecture le $36\,\Delta x$ est illusoire : l'écriture α) ne donne en fait que la continuité de f !

Cet étudiant commence donc par s'assurer auprès de ses voisins immédiats qu'il n'est pas en train de penser une énormité; on voit alors ce groupe d'étudiants discuter fébrilement, puis des mains se lever haut et fort :

- Groupe d'étudiants : *On a une conjecture !*

- Professeur : *oui ?*

- 4ème étudiant (poussé par les autres) :" *Toute fonction continue vérifie* α). "

Le professeur écrit au tableau :

Conjecture 2 Toute fonction continue f vérifie α) .

- Groupe d'étudiants (avec enthousiasme) : *Et on a la preuve !*
- Professeur : *oui ?*
- 4ème étudiant (avec émotion) : *Si on pose* $r(\Delta x) = \Delta f - 36\,\Delta x$ *, ça marche à tous les coups !*

Preuve triviale qui crée une sorte de stupéfaction dans l'amphi du type "c'est trop simple pour être vrai !", car chacun se dit : "j'aurais pu y penser!" (mais, à mon sens, on ne peut imaginer une telle preuve tant qu'on n'a pas senti le rôle de l'ordre de grandeur du reste dans les écritures différentielles).

Cet essai est d'ailleurs transformé quelques instants après lorsqu'un dernier étudiant s'exclame :

Finalement, si la conjecture 1 était vraie, on aurait le théorème
" continue $\Rightarrow$ *dérivable " !*

Je pense que pour la majorité des étudiants, cette dernière observation arrivant à ce moment est susceptible d'avoir une incidence forte sur leur rapport aux infinitésimaux, parce que (contrairement à ce qui se produira quand l'amphi se comportera davantage comme une communauté mathématique) pendant tout un temps et pour beaucoup d'étudiants, un seul contre-exemple et un contre-exemple comme k a une faible valeur épistémique, cela leur apporte une contradiction, mais pas une forte contradiction.

A l'inverse, pour un grand nombre d'étudiants, le faux théorème précédent est une erreur grossière, il a donc une valeur épistémique forte pour apporter la contradiction, donc ici, pour montrer tout le danger qu'il y a à ne pas vouloir se préoccuper de l'ordre de grandeur du reste d'une écriture différentielle (ce qui était la connaissance visée par l'enseignant en organisant ce débat).

Toutefois, si on constate avec joie que la majorité des étudiants considèrent spontanément (en vertu de savoirs anciens) l'implication "continue $\Rightarrow$ dérivable" comme une erreur grossière, c'est malheureusement pour des raisons plus institutionnelles (les professeurs l'ont souvent dit) que mathématiques (très peu peuvent "spontanément" en donner un contre-exemple, fût-ce avec un simple dessin) !

C'est là d'ailleurs une des actions de transformation essentielles qui est dévolue à la pratique du "débat scientifique" : enseigner dans l'action aux élèves et aux étudiants comment on s'éclaire sur le vrai et le faux en mathématiques, en particulier comment on se persuade intimement qu'un énoncé est faux, comment on convainc définitivement les autres de cette fausseté en construisant soi-même un contre-exemple ad hoc.

Ce contre-exemple doit de plus, pour être efficace, être le plus simple possible (au niveau de la preuve) pour ne pas être lui-même contesté; ici par exemple, la fonction initiale g ne serait certainement pas un "bon" contre-exemple de la conjecture pour cet amphi à ce moment, puisque quasiment aucun de ces étudiants n'a présentement les moyens de faire rapidement admettre à ses camarades que g est non dérivable en 1 !

Epilogue de cet exemple (explicitation d'autres incidences du débat)

Après ce détour qui a permis, semble-t-il, à l'amphi tout autant d'approfondir les concepts de continuité, de différentiabilité et d'ordre de grandeur que de préciser certaines règles du jeu mathématique, le professeur peut, s'il le souhaite, reprendre complètement les choses en main et répondre rapidement et directement à la question initiale; il peut aussi se dire que sont réunies maintenant un ensemble de conditions qui devraient l'aider à faire faire à l'amphi des pas décisifs dans la compréhension et du jeu mathématique et du jeu de l'analyse.

Ici, ayant fait ce deuxième choix, après une pose, le professeur renvoie à nouveau la balle dans le camp des étudiants de la façon suivante :

- Professeur : *Partant de la question :*

La fonction $g(x) = 36\,x + \sqrt{1+\cos(\pi x)}$ *admet-elle un maximum local au point 1 ?*

nous venons de prouver que la conjecture :

C1 Si $\alpha)$ $\Delta f = 36\,\Delta x + r(\Delta x)$ *avec* $r(\Delta x) \to 0$ *quand* $\Delta x \to 0$, *alors* $f'(1) = 36$ *est fausse!*

Cela nous permet-il de résoudre simplement les deux autres conjectures :

C3 $g'(1) = 36$

C4 g n'a pas de maximum local en 1 ?

Quand ce professeur choisit de mettre en débat ces deux conjectures, il forme le double projet suivant :

1) Il s'attend à ce que la conjecture C3 soit considérée comme fausse par certains à cause de la fausseté de C1, i.e. pour une mauvaise raison : la mauvaise compréhension de la négation mathématique dans laquelle le non-$(\forall x, A(x))$ devient $(\forall x, \text{non-}A(x))$, l'existence d'un contre-exemple impliquant alors que tout devient contre-exemple !!!

Le débat sur C3 a donc pour but principal de faire travailler l'amphi (si cela s'avère nécessaire) sur cette "fausse" négation qui, lorsqu'elle apparaît, n'est pas à considérer comme un lapsus, une étourderie, mais comme le révélateur d'une non-compréhension profonde de la logique mathématique.

Ce problème essentiel "réglé", le professeur proposera, si personne ne le suggère, de faire un développement limité sur le cosinus pour obtenir des raisons quasi identiques à celles qui nous ont servi pour montrer la non-dérivabilité de k :

$\Delta g = (36 + \pi/\sqrt{2}).\Delta x + o(\Delta x)$ si $\Delta x \geq 0$, $\Delta g = (36 - \pi/\sqrt{2}).\Delta x + o(\Delta x)$ si $\Delta x \leq 0$.

2) Pour C4, le professeur prévoit que certains étudiants déclareront : "on ne peut pas répondre", mais pas dans le sens : "nous n'avons pas encore trouvé de réponse", mais dans celui : "il est impossible de résoudre une conjecture qui fait visiblement intervenir le théorème classique qui, précisément, ne s'applique pas ici"!

Le débat sur C4 a donc pour objet principal (en terme de connaissance) non de résoudre C4, mais de faire prendre conscience aux étudiants que par effet de recettes, ils ont tendance à assimiler conditions suffisantes et conditions nécessaires et suffisantes. (Beaucoup d'étudiants pensent par exemple qu'on est obligé de calculer la dérivée de $\exp(x^2)$ pour prouver sa croissance !)

Ainsi, le professeur lance le débat sur ces deux dernières conjectures essentiellement pour faire émerger des méta-connaissances sur la négation abusive et sur le mélange entre conditions nécessaires et conditions nécessaires et suffisantes.

Il institutionnalisera les propos "méta" développés plus ou moins maladroitement par les étudiants et (ce qui est toujours très utile quand cela peut se faire) il validera par la situation la pertinence de ces propos : il fera remarquer qu'on a pu prouver non-C3 sans se servir abusivement de non-C1, et il annoncera qu'on va pouvoir résoudre C4 sans se servir de la condition suffisante que représente le théorème de non maximum local.

Pour terminer la résolution de C4 , ce professeur effectue deux choix importants :

i) Il modifie localement et explicitement le contrat du débat : contrairement aux situations précédentes, il ne demande plus aux étudiants de proposer d'abord leurs idées, c'est lui momentanément qui fait les propositions décisives sur un plan mathématique et méta-mathématique. Il invite ses interlocuteurs à n'intervenir mathématiquement que sur des points techniques ou pour faire part de leurs interrogations "méta" (pourquoi s'y prend-on ainsi ? est-ce valide ? etc.).

ii) Il décide de ne pas proposer la trame de solution la plus simple (par exemple en faisant intervenir des théorèmes généraux comme les accroissements finis), car cela ne lui donnerait pas l'occasion d'enseigner ce qui lui paraît essentiel à ce moment, ce que les étudiants manifestent ignorer le plus à cet instant : comment manipuler les infiniment petits de telle façon que leurs procédures ne les conduisent pas aux erreurs de raisonnement qui se sont produites dans la résolution de la première conjecture.

Il choisit donc de recourir aux raisonnements à la fois très simples et très complexes caractéristiques de l'analyse, en sachant que le fait de mélanger approximations et majorations représente une rupture dans l'ordre des difficultés, un saut épistémologique.

<u>Trame de solution proposée par le professeur</u>

<u>Principe</u> : Pour montrer que f n'a pas de maximum local en 1, il suffit de trouver $ß > 0$ tel que $f(x) > f(1)$ sur $]1, 1+ß[$.
Pour y parvenir, prenons $\Delta x > 0$ et considérons les trois étapes :

Du renseignement : a) $\Delta f = (36 + \pi/\sqrt{2}).\ \Delta x + \Delta x.\varepsilon(\Delta x)$

on tire : b) $\Delta f \geq 36\ \Delta x$ dès que $|\varepsilon(\Delta x)| \leq \pi/\sqrt{2}$,

d'où l'existence d'un $ß > 0$ tel que c) si $0 < \Delta x \leq ß$, alors $\Delta f \geq 36\ \Delta x$.

Quels sont les obstacles que le dialogue professeur-étudiants devrait pouvoir faire ressortir ici ?

Le travail du professeur est ici d'amener ses étudiants à entrevoir les problématiques suivantes :

- Quand on possède le renseignement a), on ne peut rien faire a priori, car l'ignorance dans laquelle on se trouve sur le signe et la grandeur de la quantité $\varepsilon(\Delta x)$ interdit de répondre à la question cruciale : pour quels Δx a-t-on $\Delta g > 0$?

- Un passage à la limite, en annulant $\varepsilon(\Delta x)$, supprime l'incertitude précédente, mais ...

n'est-on pas en train de dire alors que pour Δx assez petit, l'accroissement Δg est quasiment égal à $(36 + \pi/\sqrt{2}).\Delta x$?
N'est-on pas en train de refaire le même abus que celui qui a engendré la conjecture fausse : Δf approximativement égal à $36\ \Delta x$, donc $f' = 36$?

Si ce professeur souhaite livrer les clefs de l'autonomie scientifique à ses étudiants, il faut donc qu'il puisse leur montrer comment il s'y prend lui-même pour se persuader que le raisonnement fait ici est valide (comment il s'y prend dans ce cas pour se "débarrasser" avec certitude du caractère insaisissable de l'infinitésimal $\varepsilon(\Delta x)$).

Ici il a cherché une condition suffisante "classique" :

$\Delta f \geq a\ .\Delta x$, quand $0 < \Delta x \leq ß$, pour deux réels a et $ß$ strictement positifs.

"Classique" signifiant : dans laquelle ne figure plus de termes infinitésimaux inconnus; cette minoration une fois établie permet alors à tout le monde d'être absolument certain du résultat (puisqu'il n'est plus nécessaire, pour conclure, de faire des passages à la limite litigieux).

Pour ne pas "tricher" avec ce qui est devenu un "habitus" pour lui, et qui est probablement encore un obstacle majeur pour pratiquement tous ses étudiants, ce professeur doit aussi pouvoir leur expliquer que pour arriver à faire cela (établir une condition suffisante classique), il lui a fallu exploiter un mode de pensée qui n'est pas du tout traditionnel dans la vie courante :
Accepter de perdre de l'information pour atteindre un objectif précis, et pour cela s'obliger à choisir ce qu'on accepte de perdre afin de gagner de la simplicité démonstrative, donc de la certitude.

Ici, par exemple, on disposait du nombre $(36 + \pi/\sqrt{2})$.
En posant dans b) la condition "prendre $\Delta x > 0$ de telle sorte que $|\varepsilon(\Delta x)| \leq \pi/\sqrt{2}$ ", on a choisi de "perdre" $\pi/\sqrt{2}$; ce choix s'est avéré judicieux puisqu'il nous a permis de "gagner" la certitude "$\Delta f \geq 36\ \Delta x$" , et par suite $f(x) > f(1)$ sur un intervalle non réduit à un point à droite de 1 !

Mais (difficulté majeure) ce choix ne s'impose pas, il n'est pas nécessaire, on aurait pu décider de "perdre" 36 ou $(36 + \pi/\sqrt{2})/2$ ou tout nombre $\partial < (36 + \pi/\sqrt{2})$, puisque dans tous les cas on serait arrivé à la même conclusion qualitative.

Pour un mathématicien non professionnel, c'est très difficile de comprendre que lorsque s'offrent plusieurs possibilités pour établir un résultat, la rigueur ne consiste pas à les garder toutes et à faire ensuite de l'approximatif parce qu'on ne sait pas mener rigoureusement de front toutes ces possibilités, mais qu'au contraire la rigueur consiste à effectuer un choix en partie arbitraire (si ce n'est pour la simplicité des calculs) afin de pouvoir mener son raisonnement jusqu'au bout en remplaçant les ambiguïtés et les affirmations litigieuses dues aux non-choix par les renseignements précis que nous procure le fait d'avoir fait un choix.

En guise de conclusion sur cette présentation du débat scientifique à partir d'un exemple

Ce que je veux souligner ici pour conclure, c'est l'importance de la cohérence globale des choix du professeur :

- si, dans la première partie, le professeur reste neutre sur le plan épistémologique, c'est parce qu'il estime que cette neutralité est nécessaire pour que ses étudiants expriment ce qu'ils pensent au fond, et il peut ne pas s'impliquer personnellement au niveau épistémologique tant qu'il sent que l'amphi, dans son ensemble, a les moyens de gérer ses erreurs : suffisamment d'étudiants peuvent subodorer les contradictions et y apporter des éléments de réponse pertinents;

- si, dans la dernière partie par contre, le professeur reprend à sa charge l'essentiel des explications, c'est parce qu'il pense qu'un débat à ce moment de l'année, entre étudiants seuls, sur un point à la fois très technique et très épistémologique, serait nécessairement trop hâché et confus pour que la majorité des étudiants puissent le suivre, en saisir la trame, en comprendre les imbrications;

- s'il choisit de faire cette explication à ce moment, c'est parce qu'il pense que le débat préalable des étudiants sur les conjectures antérieures a été suffisamment riche et profond pour permettre à une majorité d'étudiants d'avoir envie d'écouter une telle explication et, malgré l'apparence très technique de la preuve de C4 , de sentir qu'il s'agit là d'un procédé démonstratif particulièrement fécond, à approfondir, à intérioriser;

- s'il a choisi de s'embarquer dans des considérations "méta" (très délicates à gérer) sur le traitement des infiniment petits et sur la nécessité de choisir de perdre de l'information pour gagner en fiabilité, c'est parce qu'il pense qu'elles arrivent à point nommé, pour l'amphi, pour résoudre un problème qui lui a beaucoup résisté; ces explications ont tendance à dénouer les paradoxes qui sont apparus, sans être franchement dépassés, dans les débats précédents.

En clair, je sous-entends ici qu'une telle démonstration du professeur, si elle arrivait ex abrupto dans le cours, serait éventuellement recopiée, mais non reçue par la très grande majorité des étudiants dans ce qu'elle a de plus profond, et ce ne serait probablement pas les commentaires "méta" qui y changeraient quelque chose. (A la limite ils pourraient même empirer la situation, car ils se perdraient sans doute dans le bruit d'un amphi qui, extérieur à la problématique du professeur, attendrait en fait que ce dernier "passe à la suite" et propose des mathématiques plus simples, plus "concrètes").

Ici, on constate que la démonstration du professeur et ses commentaires "méta" sont écoutés dans le silence et notés - non pas immédiatement compris et acceptés comme on le souhaiterait - mais suffisamment entendus, pris au sérieux pour qu'on puisse ultérieurement en retrouver des traces importantes. (Il est classique qu'un tel amphi arrive, à partir du milieu de l'année, à mener par lui-même des raisonnements de ce type à propos de situations problématiques analogues.)

Ce sont donc tous les atermoiements qui ont amené à cette démarche et tout ce que cette démarche a introduit de franchement nouveau que le professeur va finalement institutionnaliser en conclusion de ce cours.

On trouvera dans [11] une étude qui montre que de telles difficultés sont en général loin d'être maîtrisées par une bonne part des étudiants de 3ème ou 4ème année d'université; ce qui nous amène à poser la question fondamentale :

Notre "méta" de mathématicien, si important à partager dans l'enseignement pour que nos interlocuteurs aillent au delà d'une mathématique très scolaire, ne se perdra-t-il pas toujours dans une sorte d'indifférence générale de nos élèves ou de nos étudiants si à aucun moment il ne leur est donné la possibilité de débattre de tout cela en ayant eux-mêmes la responsabilité de la conclusion ?

Après cette entrée en matière qui fixe pour l'essentiel les enjeux du débat scientifique en cours de mathématiques, je vais essayer maintenant de préciser les raisons, les faits et les comportements les plus caractéristiques de ce choix didactique dans un cours de mathématiques.

Comme on ne peut raisonnablement aborder dans un même article tous les problèmes que pose une telle transformation de la coutume didactique, je renvoie pour plus de précisions aux articles [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7].

II) Présentation générale du débat scientifique

1) Les raisons épistémologiques de ce choix didactique

Il me semble qu'apprendre du scientifique et en particulier des mathématiques, c'est pour l'essentiel s'initier à appréhender le monde d'une façon très particulière, celle d'une communauté de personnes qui, pour donner sens aux réalités intellectuelles et matérielles qu'elles rencontrent, ont choisi d'en saisir les invariants, d'en expliquer les régularités et de montrer le caractère nécessaire de certaines occurences; c'est donc faire un pas de côté vis-à-vis du simple "bon sens" qui nous permet de gérer le contingent.

Chacun peut constater que pour la plupart de nos élèves et de nos étudiants, entrer dans une telle forme de pensée, hériter d'une telle culture, ne se produit pas "naturellement". Cela se produit d'autant moins facilement, semble-t-il, que celui qui apprend s'assigne un strict rôle d'élève ayant seulement à retenir le discours du maître et à reproduire par mimétisme ses techniques et ses attitudes démonstratives.

Cela se produit d'autant moins donc, que nos interlocuteurs élèves sont privés, se privent, du nerf de la vie scientifique : la mise en doute de ce qui paraît bien établi, l'intrusion dans l'inconnu.

Ils sont privés ou se privent d'autant plus de l'essence même de la science qu'ils s'interdisent de prendre du recul par rapport à la validité et à la pertinence de ce que nous leur enseignons, qu'ils considèrent nos savoirs moins comme des outils de compréhension du monde que comme des vérités en soi, des dogmes, des articles de loi à finalité interne à l'institution école : des savoirs faits pour la récitation, pour passer les examens et concours.

Comme je l'ai signalé au départ, nos recherches sur "le débat scientifique en cours de mathématiques" reposent sur un pari fondamental.

Le pari fondamental

La plupart de nos élèves ou de nos étudiants peuvent être associés sur le fond à l'aventure scientifique, ils peuvent dans leur ensemble s'intéresser véritablement à la science, et par suite ils peuvent individuellement et collectivement s'épanouir pleinement en tant que sujet et en tant que citoyen en effectuant des apprentissages scientifiques.

Les conditions du réalisme de ce pari

Pour qu'un tel pari humaniste et démocratique ne soit pas purement utopique, il est nécessaire d'insérer dans le quotidien de nos enseignements un dispositif didactique qui nous oblige structurellement, nous professeurs, à prendre en compte la réalité de nos interlocuteurs : d'où partent-ils, sont-ils entrés dans la problématique que nous leur proposons ? le rythme de notre enseignement respecte-t-il la respiration de leur pensée ?

Les conséquences de ce pari réaliste

Imaginons un dispositif didactique tel qu'au moins dans certains cours de mathématiques, nos élèves ou nos étudiants aient la possibilité de vivre les mathématiques au premier degré, i.e. d'entrer significativement dans l'intimité de cette communauté scientifique.

Remarque :

Je prétends que la démarche exposée ici est réaliste dans la mesure où elle ne se soustrait pas aux réalités sociales, culturelles et humaines dans lesquelles nous nous trouvons :

- initialement nous partons bien du principe que la majorité de nos interlocuteurs élèves ou étudiants sont très scolaires,
- mais en pratique, nous constatons que le pari fondamental se révèle fondé à chaque fois qu'on parvient à redonner toute sa place à la personne humaine qui se trouve derrière l'élève, i.e. dès qu'on tend à lui proposer une vision du savoir dans laquelle il prend sa place en tant que personne propre.

2) La nature de cette transposition didactique de la vie scientifique

Pour faire entrer l'élève dans l'intimité d'une communauté scientifique, nous avons cherché à repérer les éléments fondamentaux qui donnent vie à la communauté de recherche mathématique afin de voir s'ils étaient transposables sur un plan didactique sans en dénaturer le sens.

Ce que nous allons appeler ici "les règles ou les principes du débat scientifique en cours de mathématiques", c'est un système de conditions qui semblent permettre aux élèves d'une classe ou aux étudiants d'un amphi de pratiquer en vraie grandeur, au sein même du cours de mathématiques, une part essentielle du métier de chercheur : "émettre et résoudre des conjectures", travailler sur les définitions et sur les modes de preuves afin d'agrandir par ce moyen, dans la communauté scientifique à laquelle on participe, le patrimoine des objets mathématiques et de leurs propriétés.

Le but d'un telle construction n'est absolument pas de se donner un outil ad hoc pour sélectionner les futurs chercheurs en mathématiques, puisque ce que nous visons ici, c'est au travers de l'introduction des concepts et résultats fondamentaux, l'acquisition par tous d'une culture mathématique de base, i.e. d'une culture scientifique qui pourra jouer un rôle important tant pour ceux qui poursuivront leurs études dans cette discipline que pour ceux qui ne se spécialiseront pas dans cette branche.

Si nous parlons de débat scientifique en cours de mathématiques, c'est parce que nous avons constaté que pour les élèves ou les étudiants, la compréhension du jeu mathématique que permet l'introduction d'un débat en classe ou en amphi est assez différente suivant que les énoncés mathématiques manipulés pendant ce débat sont considérés comme des objets purement didactiques (que l'on "jette" après qu'ils nous ont "appris" ce qu'ils devaient) ou bien institutionnalisés par le professeur comme des savoirs qui seront réutilisés par la suite.

Dans le premier cas - le jeu des exercices et problèmes de l'école - le jeu de l'élève consiste essentiellement à utiliser intelligemment ce qu'il sait déjà pour répondre aux questions posées; sa problématique dominante n'est pas de savoir ce qui peut marcher, ce qui est vrai en soi et ce qui ne l'est pas, mais plutôt de décoder la réponse attendue par le professeur et éventuellement de déjouer les pièges qu'il vous a tendus pour savoir si vous savez !

Dans le second cas, on invite l'élève à s'associer à une activité qui respecte l'essence même de toute activité scientifique : être productrice de savoirs; dans cette acceptation, le travail du sujet au cours du débat est d'oublier un peu sa position d'élève pour se poser à lui-même les questions fondamentales : de quoi parle-t-on ? qu'est-ce qui est vrai ? qu'est-ce qui est pertinent ? n'est-on pas en train de passer à côté du problème que l'on prétend traiter ? etc. etc.

Toutefois, il ne faut pas qu'il y ait la moindre ambiguïté sur la signification du terme "élaboration de savoirs nouveaux au cours du débat"; l'activité proposée ici aux élèves ou aux étudiants ne consiste pas à leur demander de "redécouvrir" en un temps court ce qui a mis des siècles à émerger erratiquement.

Les découvertes et les créations personnelles que ce débat tente de susciter sont essentiellement des découvertes et des créations de significations; ce qui est fondamentalement en jeu ici, c'est l'entrée du sujet dans une problématique ad hoc, c'est la découverte par lui des difficultés et des problèmes constitutifs du savoir abordé.

A partir d'une "bonne" situation choisie par le professeur, l'étudiant, par le jeu de ses questions et de ses conjectures, peut aller au devant du savoir à instituer (celui du programme), il ne découvre pas ce savoir, mais il se met en position de le comprendre et de lui donner sens.

L'expérience cruciale

A terme, les élèves d'une classe ou les étudiants d'un amphi doivent pouvoir faire l'expérience scientifique individuelle et collective suivante : lorsqu'ils partent (au niveau du sens) des mêmes prémices que les mathématiciens professionnels, et lorsque face à un problème ils exploitent entre pairs leurs heuristiques propres dans une rationalité mathématicienne, ils parviennent souvent à l'issue d'un cheminement erratique à des conclusions voisines de celles des spécialistes; dans certains cas, leurs propres preuves les persuadent "scientifiquement", i.e. même lorsque ces preuves présentent des maladresses, elles contiennent de plus en plus souvent les éléments essentiels d'une démonstration mathématicienne (telle qu'ils peuvent par exemple les retrouver dans des livres spécialisés).

Individuellement d'abord et collectivement ensuite, les élèves se rendent donc compte peu à peu qu'en travaillant leurs propres intuitions et leurs propres preuves, ils parviennent à leur donner une fiabilité de type professionnel (ils ne prouvent plus n'importe quoi, à partir de n'importe quoi, sous l'injonction magistrale : "prouvez que....", ils acquièrent les moyens et la force de mettre en doute, voire de se révolter contre une vérité d'autorité s'ils pensent qu'elle est fausse !).

3) Description externe rapide des traits caractéristiques du "débat scientifique en cours de mathématiques"

a) Les énoncés mis en discussion pendant le débat:

Les énoncés étudiés sont le plus souvent des énoncés **conjecturaux** *à propos desquels les élèves ou les étudiants sont invités à se prononcer tant au niveau de la pertinence que de la validité.*

b) Les niveaux de responsabilité scientifique:

Lorsqu'un élève propose une conjecture, il agit **à la première personne** et de **bonne foi**, i.e. il ne se réfère pas à un savoir officiel garantissant la véracité ou la pertinence de ce qu'il propose : il conjecture ceci ou cela parce qu'il croit à la pertinence et à la vérité de la solution qu'il apporte.

La responsabilité scientifique d'accepter ces conjectures (les mettre à l'étude et éventuellement en faire des théorèmes) ou de les rejeter (les déclarer non pertinentes ou fausses) **incombe à la classe entière** et non au professeur seul!

Par exemple, la présence de plusieurs énoncés concurrents doit assez spontanément susciter chez les élèves **une attitude d'appréciation de valeur épistémique et de tri** : "Celui-ci est non pertinent! Celui-là est plus fort que tel autre! Ce dernier paraît plus important à traiter en priorité, etc.!"

c) Le déroulement de la phase centrale du débat:

Un énoncé ayant été choisi pour être étudié, les élèves sont invités, après un temps de recherche semi-privée (seuls ou avec leurs proches voisins), à se prononcer sur sa vérité par un vote individuel.

Après un tel vote, figure par exemple au tableau :

Vrai	Faux	Autre
$\neq 40$	6	1/2 amphi

Ce vote n'est pas réputé avoir une valeur scientifique ou démocratique, par contre sa fonction est :

- didactique : s'il y a des désaccords, il y a peut-être quelque chose que l'on n'a pas vu à élucider, à apprendre,
- épistémologique : la présence de doutes exprimés ou de désaccords manifestes rend nécessaire l'explicitation des points de vue, le recours à la preuve.

En postulant la sincérité des participants, les significations contractuellement convenues sont les suivantes:

- si je m'inscris dans la case Vrai (ou exclusif Faux), ce n'est pas parce que je suis certain d'avoir raison (ou en classe de 6ème, parce que c'est un copain - ou un non copain - qui a proposé la conjecture), mais parce que j'ai des raisons scientifiques pour le penser ;
- si je m'inscris dans la case Autre, ce n'est pas par indifférence, c'est parce que je suis conscient que je n'ai pas d'arguments rationnels suffisants pour décider, ou que je suis traversé par deux raisonnements contradictoires, ou encore que je trouve le problème ambigu, mal posé. Je suis donc prêt à expliquer les raisons de mon embarras et demandeur de précisions, d'explications, je suis prêt à examiner de façon critique les "preuves" de ceux qui semblent avoir déjà pu décider rationnellement!

S'engage alors le débat public dont les caractéristiques externes sont :

- un seul étudiant parle à la fois, il parle fort de façon à être entendu par tous,

- les autres étudiants écoutent et ne peuvent prendre parti que publiquement (ils s'interdisent d'engager en réaction des débats privés avec leurs proches voisins),

- le professeur écoute et s'interdit (ne serait-ce que par des mimiques hautement significatives pour ses interlocuteurs élèves) de prendre parti sur un plan épistémologique;

- il distribue la parole et note au tableau, autant que faire se peut, les éléments du débat, avec comme seul critère de choix non pas la sélection du vrai ou du pertinent, mais l'exploitation de tout ce qui serait susceptible de permettre à un plus grand nombre d'élèves de rester au fait de ce qui se dit de scientifique : faire en sorte que ceux qui sont éloignés physiquement et épistémologiquement puissent entendre effectivement les propositions qui sont faites, qu'ils puissent voir émerger les contradictions, qu'ils parviennent à débusquer les fausses contradictions, qu'ils s'échappent des faux débats.

d) Les éléments moteurs du débat : le doute et les certitudes

De façon générale dans ce débat, aucun de ceux qui sont autorisés à prendre parti sur un plan épistémologique (aucun élève) n'est censé connaître a priori le résultat, connaître "la bonne réponse"; personne donc (puisqu'il est explicitement convenu que le professeur ne laissera apparaître de quelque façon que ce soit son opinion de spécialiste, tant qu'il n'abordera pas explicitement la phase de conclusion) **n'a le pouvoir de déclarer une conjecture vraie ou fausse par un argument d'autorité.**

Ainsi, quand c'est le professeur qui propose une conjecture, la réponse ne doit pas a priori (comme c'est le cas habituellement quand un professeur pose une question ou un problème) être supposée connue ou découler de façon "évidente" (pour qui a compris ce jeu) des propositions précédentes. Quand c'est un élève qui fait une affirmation qui n'a pas été antérieurement débattue, nul ne peut, en cas de désaccord, exiger qu'on accepte son point de vue en s'abritant derrière l'argument indiscutable : "j'ai lu dans un livre..." ou "tel professeur m'a dit que ..."!

e) **Tout débat est conclu par une phase d'institutionnalisation,** dans laquelle le professeur joue pleinement son triple rôle de spécialiste : mathématicien, didacticien, meneur d'un groupe social.

Sont alors désignés comme des savoirs:
- les résultats exacts et leurs raisons,
- les résultats erronés et leurs doubles raisons : pourquoi sont-ils faux ? et pourquoi on les pensait vrais?
- les développements "méta" qui ont permis d'avancer dans la recherche.

III) De la théorie à la pratique : quelles transformations du rapport personnel de l'élève, et aussi du professeur, aux mathématiques ?

En pratique, il semble bien que ce qui nourrit le formidable investissement que ce type de contrat didactique réclame aux élèves et à leur professeur est d'ordre épistémologique et cognitif bien sûr, mais aussi d'ordre psychologique, social et éthique, et c'est l'équilibre et la cohérence entre ces différents registres qui permet après-coup à un tel dispositif de vivre dans la classe ou l'amphi et d'y perdurer en gardant des caractéristiques assez voisines de celles qui viennent d'être formellement décrites.

A mon sens, le dispositif du débat ne peut devenir un processus didactique stable permettant de travailler au quotidien des savoirs authentiquement scientifiques en cours de mathématiques qu'à partir du moment où se produit une évolution profonde, voire une révolution au niveau des visions et des préoccupations principales des élèves et du professeur :

* *"Les premiers cours qui se sont déroulés sous forme de débat m'ont paru ridicules."*

* *"Au début je ne participais pas trop, cela me paraissait inintéressant; depuis, en écoutant je me suis rendu compte que cela pouvait être intéressant, parfois même passionnant."*

* *"Ce qui m'a le plus gêné au début me paraît aujourd'hui le plus intéressant : ne plus penser les maths comme une science finie, ne plus venir en cours apprendre la formule miracle pour faire des calculs impressionnants ! "*

Je pense que la transformation fondamentale est celle qui amène l'étudiant à considérer que la science est un moyen pour lui d'appréhender le réel, que les mathématiques existent en soi :

* *"En octobre, math = simple outil inintéressant en lui-même; j'ai découvert des chemins."*

* *"Je n'avais jamais considéré le rôle des maths dans la réalité, c'était une science abstraite complètement séparée de la réalité. "*

* *"Avant je voyais les mathématiques dans le domaine de la calculatrice, sans pouvoir les rapprocher de la réalité, sans voir l'utilité."*

* *"Mes conceptions ont changé de façon radicale car, avant, les sciences me paraissaient comme du fixé et du connu; j'ai découvert que plus on avance, plus il en reste à découvrir."*

* *"Cette année je me rends compte qu'on peut réfléchir en mathématiques. J'ai découvert qu'une démonstration n'est pas que le fruit de l'intuition, mais résulte d'une recherche et d'une compréhension."*

* *"Je comprends maintenant que les mathématiques sont une matière à part entière et qu'on peut trouver du plaisir à l'étudier."*

Cette transformation fondamentale se traduit par le fait que les exigences des élèves passent de la forme au fond; du "écrivez-nous tout", elles deviennnent "faites-nous comprendre l'essentiel" :

- *"Je me suis demandé comment avec un cours si brouillon j'arrivais à apprendre quelque chose ! "*

et lorsque leurs questions récurrentes sont de moins en moins du type : "cela tombe-t-il régulièrement aux examens et concours ? a-t-on le "droit" de ... ? etc. etc."

- *" Au début j'attendais sans cessse qu'après le débat se déroule un "vrai cours": des définitions et théorèmes; maintenant j'apprécie les avantages, une seule chose me gêne : il sera impossible de boucler le programme, les débats prennent trop de temps!"*

* *"J'avais l'impression que ce débat nous faisait perdre beaucoup de temps et qu'on n'apprenait pas grand-chose; en fait je me rends compte que j'ai appris beaucoup de choses."*

De façon plus globale et plus personnelle, il me semble qu'un pas décisif est franchi lorsque l'élève se met à identifier la nature de sa propre transformation : qu'est-ce que je vois différemment aujourd'hui et pourquoi ? qu'est-ce que je comprends mieux ? qu'est-ce que je sais faire de nouveau ?

* *"Je m'intéresse vraiment aux mathématiques pour la première année de ma vie."*

* *"J'ai découvert qu'un scientifique ne doit pas rester bloqué par ce qui paraît invraisemblable."*

* *"Je me dis que je veux prendre la parole, car avant de parler il faut s'obliger à être clair dans sa tête."*

* *"J'arrive à m'étonner moi-même !"*

* *" En amphi on est catapulté vers un autre univers, on sent la classe et notre personnalité dans une autre dimension."*

** "Le fait de mettre en doute et même de nier des faits que l'on prenait pour des évidences jusqu'alors m'a permis de prendre du recul sur tout ou presque tout, mais en revanche j'ai du mal maintenant à distinguer les vraies évidences au risque peut-être de perdre du temps, ce que je n'aurais pas fait avant."*

** "Les démonstrations m'ont toujours semblé sorties du chapeau d'un prestidigitateur; la pratique du débat m'a montré qu'on pouvait les construire en réfléchissant avec méthode.*

Mais, à mon avis, cette transformation de l'élève ne peut se produire si elle n'est pas précédée et accompagnée par une transformation analogue du professeur.

Si, par exemple, devant l'ampleur du programme, les préoccupations qui dominent sa pratique de professeur au jour le jour restent d'épargner le plus possible à ses élèves l'affrontement des difficultés, le débat scientifique tel que nous le décrivons ici ne pourra être une aide à son projet didactique puisqu'il sera en permanence en contradiction avec la philosophie générale de ce projet.

** "Ce qui m'a le plus frappé au début de l'année, c'est le décalage entre le débat et les enseignements des autres professeurs de maths qui sont semblables à un manuel: hyperstructurés, hyperdécoupés, mais monotones; ils n'apportent rien de plus qu'un manuel."*

Par le débat, le professeur va découvrir que, paradoxalement, son vrai rôle de maître est peut-être davantage de faire buter ses élèves sur les vraies difficultés du programme que de les leur épargner à leur insu en "hyperdécoupant", en "hyperstructurant" le savoir; s'il arrive à ouvrir suffisamment le débat dans son cours, certaines interventions de ses interlocuteurs lui montreront très crûment comment à trop vouloir simplifier le travail de l'élève par des choix pédagogiques facilitateurs, on peut aller jusqu'à rendre incompréhensibles sur le fond les mathématiques qu'on enseigne!

"J'ai découvert qu'on pouvait comprendre les mathématiques !"

La négociation d'un nouveau contrat didactique

Il est clair qu'on ne peut modifier de cette sorte des coutumes scolaires aussi bien établies que sont celles de nos classes et de nos amphis, sans prendre l'initiative de négocier un nouveau contrat didactique.

Dans cette négociation, l'essentiel se fait implicitement par petites touches au fil des débats, mais si les paroles sont conformes aux actes, il ne faut pas sous-estimer l'importance d'une négociation explicite, voire à certains moments écrite:

** " La pratique du débat devrait progressivement vous permettre de découvrir :*

- qu'avoir des idées "intelligentes" n'est pas réservé qu'aux autres !

- qu'avoir des idées, c'est bien! mais qu'il faut arriver à les formuler, à les rendre compréhensibles par d'autres,

- que le plus important dans la résolution d'un problème, ce n'est pas de se précipiter pour donner la "bonne" solution, c'est plutôt d'arriver à se poser les "bonnes" questions, c'est de voir en quoi le problème est plus simple ou plus complexe que ce qui paraissait initialement,

- que lorsqu'on n'a pas compris quelque chose, lorsqu'on voit apparaître des paradoxes ou des contradictions parce qu'on pense mal le problème, on est rarement seul dans cet état; certaines fois on est dix, d'autre fois cinquante, d'autre fois encore on est presque tous dans cette situation. Et si personne n'ose se l'avouer, le faire savoir, on perd alors une formidable occasion de comprendre et de progresser!

- qu'il n'y a rien d'humiliant à être l'auteur d'une proposition ou d'un raisonnement erroné, car les mises en situation de recherche qui vous sont proposées en cours ne visent pas à montrer ce que vous savez déjà faire, mais à vous faire entrer dans des problématiques nouvelles : savoir de quoi on parle, ce qui est exact et ce qui ne l'est pas, connaître les raisonnements qui aboutissent et ceux qui tournent en rond.

A la limite, chacun doit être conscient que si tout le monde proposait immédiatement des solutions exactes et complètes, cela voudrait dire que la situation qui vous est proposée serait inadaptée pour ce cours, puisqu'elle vous amènerait à travailler des savoirs déjà bien connus et maîtrisés par vous tous !

Celui qui après avoir réfléchi, fait honnêtement part au groupe de son travail d'investigation, ne fait donc pas perdre son temps à l'amphi, même si ce qu'il propose est maladroit ou franchement faux !"

(Eléments du contrat didactique donné par le professeur en début d'année aux étudiants de DEUG qui ont fait les remarques citées précédemment)

IV) Différents types de situations gérées par le débat :

On en trouve essentiellement trois :

- **Les situations de questionnement** : telle celle présentée au début de l'article; le travail du professeur consiste alors, pour une bonne part, à ne pas répondre directement aux questions des élèves, mais indirectement, par le biais de conjectures, à amener ses interlocuteurs au cours du débat à localiser, à identifier, à problématiser ce qu'ils ne comprennent pas.

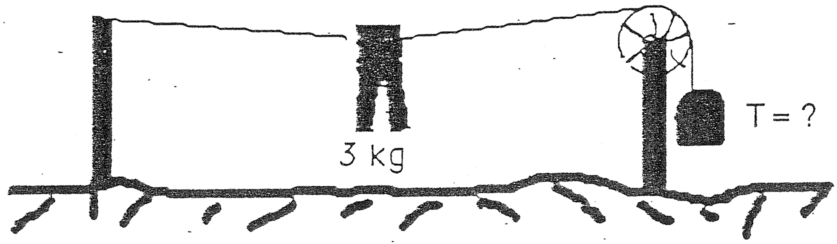
- **Les situations d'introduction à un nouveau concept**

Il s'agit de situations problématiques le plus souvent issues de la physique, qui lorsqu'elles sont bien construites (cela demande souvent beaucoup de travail), permettent une entrée très significative dans un concept nouveau.

Par exemple, pour introduire à la notion de vecteur dans le secondaire, on trouvera décrite dans [6] la situation suivante :

<u>Le blue-jean</u>

Ce blue-jean mouillé suspendu sur ce fil à linge pèse environ 3 kg.



Question :

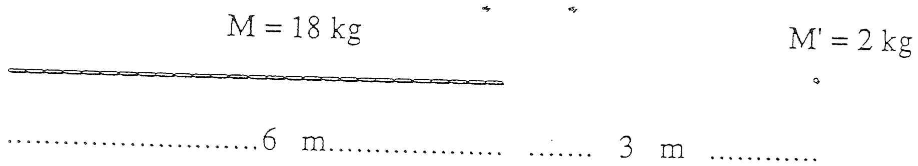
La tension T du fil (c'est-à-dire la valeur en kg du contrepoids C qu'il faudrait suspendre à son extrémité pour soutenir le blue-jean dans cette position) est-elle à votre avis plutôt de :

1,5 kg   3 kg   6 kg   20 kg   45 kg   100 kg   ?

Vous pouvez travailler seul ou avec vos proches voisins afin de déterminer la réponse qui vous semble la plus satisfaisante. //

De même, en Deug A, les étudiants connaissant la formule d'attraction de deux masses ponctuelles m et m' : $F = k.m.m'/r^2$, on peut introduire à la problématique de l'intégrale de Riemann (découpage, encadrement, sommation, passage à la limite) à partir de la question suivante :

Question : *Quelle est la force F qui s'exerce entre deux masses M et M' situées à 3 m l'une de l'autre, la masse M étant constituée d'une barre homogène de 6 m de long et de 18 kg, et la masse M' de 2 kg étant considérée comme ponctuelle ?*



Réponses des étudiants au bout de 15 mn de travail personnel :

F =	- 8 k	4/9 k	k	4/3 k	4 k	8 k	?
Nb. d'étud.	10	3	#50	8	10	4	#25

Ici, le débat que suscitent ces résultats contradictoires amène les étudiants qui croient majoritairement pouvoir appliquer un faux principe de centre de gravité (résultat majoritaire k), à revoir leur position trop simpliste. Arrivent alors des procédures d'encadrements ([4/9 k , 4 k]). Pour affiner ces encadrements, ils sont conduits à effectuer des découpages de plus en plus fins, puis à consentir à un passage à la limite pour faire disparaître totalement les erreurs d'encadrement (4/3 k est ce résultat limite).

Le débat met donc en évidence la fonctionnalité d'une procédure fondatrice du concept d'intégrale. Pour une étude plus détaillée, voir [4].

- Les situations d'approfondissement d'un concept

Il s'agit d'utiliser le débat pour approfondir un objet mathématique déjà introduit, en demandant aux élèves de conjecturer les propriétés de ces objets qui paraissent les plus évidentes. (La conjecture décrit alors une propriété qui serait "bien agréable" ou "bien pratique" si elle était vraie !)

Par exemple, la fonction intégrale dépendant de la borne sup. $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ ayant été définie par les sommes de Riemann, on demande aux étudiants de faire des conjectures reliant les qualités mathématiques des fonctions f et F .

En général, on obtient d'abord les conjectures naïves ou fausses du type :

- " f continue $\Rightarrow$ F est continue", " f croissante $\Rightarrow$ F croissante",

puis en les résolvant, le débat fait émerger les théorèmes classiques :

- "F est toujours continue",
- " f positive $\Rightarrow$ F croissante",
- "f continue $\Rightarrow$ F dérivable" etc etc

Pour une étude plus détaillée, voir [3] & [4].

En définitive

On observe qu'il y a possibilité d'émergence d'un "débat réellement scientifique" en cours de mathématiques, si la classe ou l'amphi sait (par un contrat didactique explicite) :

- que les solutions des problèmes abordés ne sont pas à chercher directement dans les savoirs déjà institués et peuvent même, dans certains cas, ne pas pouvoir être obtenues au moyen de ces seuls savoirs,

- et que cependant, par un travail d'investigation sur le problème mis à l'étude, chacun peut à partir de ses intuitions et de ses connaissances propres faire cheminer scientifiquement le groupe classe ou amphi vers la résolution du problème : chacun est susceptible à un moment ou à un autre de proposer des conjectures pertinentes et exactes, des preuves valides.

Il découle de cette double certitude l'obligation pour chaque participant d'entendre les propositions de tous et de les examiner avec intérêt, mais aussi de les regarder toutes avec circonspection puisque dans ce débat entre pairs, personne n'est réputé avoir raison d'office : "si c'est vrai, c'est intéressant, mais est-ce bien vrai ? est-ce suffisant pour conclure ? a-t-on besoin de passer par un cheminement aussi compliqué ? etc etc."

Le nerf de ce débat est donc la transposition didactique d'une hypothèse épistémologique largement inspirée par les travaux de I. Lakatos [8] et d'une certaine vision démocratique de la vie sociale :

Face à une situation problématique, pour acquérir quelques certitudes scientifiques, il est fécond de ne pas s'inféoder tout de suite à une personne qui saurait mieux que quiconque ce qui est vrai et ce qui est pertinent, il faut paradoxalement prendre le risque d'exprimer ses idées personnelles, d'être ouvert aux idées des autres et simultanément douter de tout !

Un des enjeux du débat est de faire découvrir à chacun qu'à partir du moment où l'on n'inhibe pas ses facultés imaginatives et créatrices, on a des idées personnelles intéressantes, mais que ces idées spontanées ne sont pour ainsi dire jamais immédiatement satisfaisantes et totalement exactes, il faut les travailler, puis donner ses conclusions sous une forme conjecturale de façon à ce que puisse s'amorcer le jeu des preuves et réfutations qui permet très souvent d'aller collectivement beaucoup plus loin dans la compréhension des idées et dans la découverte de solutions adaptées et fiables que ce que chacun aurait pu réaliser individuellement.

Un tel débat ne pouvant s'établir et perdurer que dans un climat de confiance, de respect et d'estime réciproque, le professeur doit donc peu à peu, s'il ne l'a déjà effectué, faire le deuil de tous ces "mauvais" outils de pouvoir magistraux que sont les références trop fréquentes aux prochains examens et contrôles, les chantages à la note et au classement, les comparaisons péjorantes de niveaux, sans parler de cet abus total de pouvoir que sont les dénis de capacité proférés publiquement à l'encontre de telle personne ou groupe de personnes.

Il doit par contre mettre toute son autorité de professeur pour instaurer le respect de la prise de parole :

- dans les parties de recherche privée, personne ne doit se sentir autorisé à prendre la parole intempestivement pour faire entendre publiquement son point de vue, car cela pourrait empêcher certains de se forger une opinion propre;
- dans la partie débat public, la parole de celui qui intervient doit être considérée comme "sacrée" : on veut comprendre ce qui est proposé, et pour cela les débats privés sont exclus, car ils ne respectent pas l'intervenant, interdisent de l'écouter et de lui répondre, les pressions externes (bruits intempestifs, dénigrements, etc.) sont donc totalement hors sujet dans le débat scientifique, et là effectivement il faut que pendant longtemps le professeur mette toute son autorité dans la balance pour faire comprendre et respecter cette règle du jeu sans laquelle le débat se pervertit immanquablement.

<u>En définitive, ce qui montre que l'élève ou l'étudiant tend à souscrire ou non à ce contrat, c'est d'une part la façon dont il se positionne par rapport aux assertions, et d'autre part le choix de ses interlocuteurs privilégiés.</u>

- S'adresse-t-il à l'enseignant sous la forme: "est-ce que j'ai le droit de...? est-ce que j'ai raison de... ? est-ce que vous confirmez que... ?"

- Ou bien prend-il un risque social et épistémologique en s'adressant effectivement à ses pairs pour leur dire : "avec telle hypothèse, je pense que... j'affirme que..." ?

Bibliographie

[1] L'enseignement des mathématiques au niveau universitaire. 1988. Textes réunis par la commission INTER IREM "UNIVERSITE". ICME 6.

[2] Legrand M. 1986. Genèse et étude sommaire d'une situation codidactique: le débat scientifique en situation d'enseignement. Colloque franco-allemand de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique. La Pensée Sauvage.

[3] Legrand M. 1991. Les compétences scientifiques des étudiants sont-elles indépendantes de la façon dont nous leur présentons la science ? Gazette des Mathématiciens, Supplément n° 48.

[4] Grenier D. - Legrand M. - Richard F. 1985. Une séquence d'enseignement sur l'intégrale en DEUG A première année. Cahiers de Didactique des Mathématiques, IREM Paris VII, n° 22.

[5] Legrand M. 1993. Débat scientifique en cours de mathématiques. Repères IREM n°10, Topiques Editions.

[6] Legrand M. 1995. Mathématiques, mythe ou réalité, un point de vue éthique sur l'enseignement scientifique. Repères IREM n° 20 & 21. Topiques Editions.

[7] Di Martino H., Michalopoulo N., Pintard D., 1991- 92- 95, La situation du pétrolier. DEA de didactique des mathématiques à l'Université de Grenoble.

[8] Lakatos I. 1976. Preuves et réfutations. Paris : Hermann Ed., 1985.

[9] Johsua S. et Dupin J.J. 1989. Représentations et modélisations: le "débat scientifique" dans la classe et l'apprentissage de la physique. Editions Peter Lang S.A., Berne.

[10] Brousseau G. 1986. La théorie des situations, R.D.M. vol. 7.2., La Pensée Sauvage.

[11] Artigue M. et al. 1989. Questionnaire de travail sur les différentielles. IREM de Paris VII.

Les règles du débat mathématique

Avertissement

Tout mathématicien vous dira qu'il ne sert pratiquement à rien de lire des mathématiques ou de regarder quelqu'un en faire devant vous, car pour comprendre les mathématiques il faut en faire soi-même; mais comme "faire des mathématiques", c'est pratiquer un jeu très subtil, il est essentiel de bien connaître les règles de ce jeu et surtout **l'esprit de ces règles.**

C'est le refus des contradictions qui est le nerf du raisonnement mathématique; par suite, pour avoir envie de prouver, pour avoir des intuitions de preuves, il vous faut être capable de percevoir les contradictions qui peuvent surgir lorsqu'on se contente de raisonner trop naïvement.

L'activité Circuit qui ne cache pas les vraies difficultés qu'il faut surmonter et les faux paradoxes qu'il faut dépasser pour exploiter la logique mathématique, a pour but de vous dévoluer l'instrument principal du mathématicien pour déceler les contradictions : "le contre-exemple" ; c'est son maniement correct qui vous permettra d'entrer vous aussi à part entière dans le jeu scientifique.

Si vous travaillez cette activité et si vous la mettez en œuvre en participant aux débats du cours ou des T.D. , vous deviendrez de plus en plus souvent capable de prendre des décisions scientifiques pertinentes et valides par vous-même, sans être obligé d'en référer à un maître ou à un livre pour savoir si vous avez raison ou non. En effet, en pratiquant ce jeu vous acquerrez une intuition de plus en plus solide des raisonnements qui sont valides et vous subodorerez de mieux en mieux par contre les raisonnements qu'il serait prudent de regarder à deux fois car ils risquent de vous mener à votre insu à des contradictions irréductibles.

Question préliminaire

En quelques mots... quelles sont les idées qui vous viennent immédiatement à l'esprit quand vous pensez aux mathématiques ? aux mathématiciens ?

Pour schématiser, disons qu'en dehors des visions très négatives des "mathématiques" consécutives aux enseignements où les mathématiques ont été principalement orientées vers la sélection, notamment les mathématiques de terminale ou de "prépa" ressenties par certains comme du "bourrage de crâne", comme une matière où il fallait appliquer des recettes sans trop chercher à comprendre le pourquoi ou le comment, les interventions de l'amphi ont fait apparaître deux épistémologies principales :

- une vision plutôt utilitariste des mathématiques : ce sont des outils pour faire d'autres sciences,

- une vision plutôt idéaliste des mathématiques : c'est une structure de pensée autonome, un langage universel, elles ont un fonctionnement et un intérêt propres indépendamment de leurs applications aux autres sciences.

Rédaction Marc Legrand

Nous essayerons dans notre travail en commun de ne pas faire de "bourrage de crâne", mais de ne pas privilégier non plus l'une de ces épistémologies aux dépens de l'autre; au contraire nous chercherons à les mettre en synergie :

- ceux qui ont une vision trop utilitariste des mathématiques et qui ont tendance à les réduire à des formules à appliquer "bêtement", auront à découvrir que pour être véritablement utilisables dans d'autres disciplines, les formules et théorèmes doivent pouvoir être interprétés et modifiés. Ils seront donc invités à chercher à mieux comprendre les mécanismes par lesquels on établit les résultats généraux afin de pouvoir les utiliser avec plus de pertinence et d'efficacité.

- ceux qui par contre auraient trop tendance à considérer les mathématiques comme un jeu en soi sans rapport avec le reste du monde, devront découvrir qu'ils peuvent considérablement enrichir leur vision des mathématiques, se donner des outils de compréhension et des motivations pour pousser plus loin leurs investigations mathématiques, en acceptant d'aller regarder comment ces mathématiques servent dans leurs applications et interviennent ailleurs, notamment en physique.

La présence de ces deux épistémologies dans l'amphi est donc à considérer comme un fait positif si, dans les débats, chacun accepte d'aller regarder un peu à côté de son point de vue privilégié.

La "perte de temps" réelle qu'engendrera nécessairement le fait de tenir compte de points de vue antagonistes est à relativiser, car sur le fond c'est probablement ce type de confrontation qui vous sera le plus profitable à long terme: c'est par là que chacun d'entre vous pourra progressivement développer une **épistémologie personnelle riche et positive**, à propos des mathématiques.

Développer une telle épistémologie au cours de vos études est, à mon sens, capital pour chacun de vous, car c'est ainsi que vous parviendrez à **stimuler votre imagination, à croire en vos idées, à avoir envie de les travailler, de les soumettre aux autres**, et finalement c'est par un tel travail que vous deviendrez capable de **tenir compte des idées extérieures tout en refusant que d'autres "pensent à votre place" !**

Epistémologie vient du grec épistémé (= science) et logos (discours, étude de...).

L'épistémologie d'une personne (à propos d'une discipline), c'est le tissu des réflexions qu'elle accumule au fil des années sur les concepts et les méthodes de cette discipline.

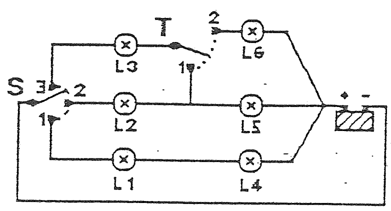
Faire de l'épistémologie, c'est tenter de répondre aux questions cruciales :

- quelle est la signification, la portée de tel ou tel résultat ? qu'est-ce qui est important ?
- quels problèmes je peux aborder avec cette discipline ? à quoi ça sert ?
- qu'est-ce qui est valide, légitime ?
- pourquoi j'aime / je déteste ceci ou cela ?
- qu'est-ce que je comprends bien, mal ? et pourquoi etc.

L'activité Circuit : confrontation de deux logiques

Pour comprendre ce que sont les mathématiques, il faut les regarder du dedans et du dehors !!

Des conjectures faites à propos d'un circuit électrique ont pour objet de **mettre en évidence des différences fondamentales** entre la **logique** que nous utilisons dans la vie **quotidienne** et celle qui est en vigueur dans la **communauté mathématique.**



Ce circuit comporte six lampes notées L_1, L_2,....L_6 et deux commutateurs S et T .

S ne peut prendre que les trois positions S_1, S_2, S_3.

T ne peut prendre que les deux positions T_1 et T_2 .

77

Etude de la première conjecture

C1) Si je vois la lampe n°4 briller, je suis certain que la lampe n°1 brille elle aussi.

Dans un certain modèle (le modèle des circuits normalisés), cette conjecture ne peut être que vraie; par contre, pour un circuit effectif, elle peut s'avérer fausse ou "indécidable".

Si, par exemple, vous prenez les ampoules avant et arrière d'un vélo, chacune d'elles brille convenablement (pour toute personne non aveugle située à proximité) quand elle est branchée séparément sur une pile 4,5 V ; si, par contre, vous les mettez en série comme c'est le cas des lampes L4 et L1 de la conjecture C1, la plus puissante ne brille plus, i.e. **personne ne la voit briller,** bien qu'un courant passe effectivement (l'intensité du courant dans ce montage série est limitée par la forte résistance de l'ampoule la moins puissante; par suite, comme l'intensité n'a quasiment pas varié pour l'ampoule de faible puissance, on continue à la voir briller, alors que pour l'ampoule de forte puissance, l'intensité qui la traverse et la tension appliquée à ses bornes sont devenues beaucoup trop faibles pour faire chauffer convenablement un filament peu résistant, celui-ci n'émet donc plus suffisamment de photons pour impressionner notre rétine et on dit que cette ampoule ne brille pas!).

En approfondissant cette conjecture dans un débat contradictoire, on se rend compte que plus on analyse la portée de la phrase, plus il devient raisonnable d'envisager des réponses assez opposées suivant les points de vue d'où on se place; ceci nous montre a posteriori la nécessité dans laquelle on se trouve dans tout travail scientifique **de (re)définir les termes primitifs** dont on se sert dans **les déclarations de portée générale** (même lorsqu'elles sont apparemment assez contextualisées comme l'est C1).

Objectif et nécessité scientifique

Cette **obligation de (re)définir les termes utilisés** (i.e. **créer un modèle scientifique**) apparaît dès que nous avons l'ambition d'arriver à terme à nous **mettre d'accord sur certaines "vérités" par des arguments rationnels** (il y a des liens assez étroits entre les contraintes d'une pensée scientifique et celles d'une organisation démocratique de la vie en société).

En créant un modèle mathématique, nous nous donnons des outils pour penser certaines réalités, et des règles du jeu pour en discuter en visant deux objectifs :

1) **parvenir à nous mettre d'accord,** i.e. arriver à terme à considérer **unanimement** certaines déclarations générales, les conjectures, **comme vraies ou comme fausses à partir de raisons que nous pouvons partager,**

2) **être plus rigoureux dans nos actions,** i.e. nous tromper moins que nous ne le ferions si nous nous contentions d'utiliser notre simple "bon sens".

Créer un modèle mathématique, c'est donc ici commencer par faire des hypothèses explicites sur les ampoules ; cette opération revient à exclure certains cas particuliers que l'on ne "veut ou peut" considérer.

Par le choix des hypothèses de modélisation, on définit le champ de l'étude, on délimite le domaine de validité de la théorie que l'on met en place.

Si, par exemple, nous prenons les hypothèses :

H1 : toutes les ampoules sont en état H2 : toutes les ampoules sont identiques,

on élimine un certain nombre d'éventualités évoquées dans le débat qui rendent cette conjecture C1 fausse ou incertaine; toutefois, cette opération seule ne suffit pas pour définir un modèle mathématique : **il nous faut pour cela préciser le sens que nous donnons dans notre modèle aux affirmations élémentaires "je suis certain", "je vois briller",** qui se sont avérées dans le débat moins universelles qu'on ne le pensait initialement.

Le plus souvent, pour une personne donnée à un moment donné, l'affirmation **"je vois briller"** n'est pas ambiguë, car cette dernière voit briller ou ne voit pas briller ; une telle affirmation devient par contre sujette à caution lorsqu'on l'introduit **dans une conjecture mathématique où ce que l'on affirme ne doit pas dépendre de la personne qui analyse la conjecture, de sa position dans l'espace, dans le temps ou dans la société.**

Force a été de constater que sans règle du jeu supplémentaire, la véracité de l'affirmation "je vois briller" dépendait de l'observateur, de sa position par rapport à la lampe, du contexte dans lequel il envisageait le problème.

Certains d'entre vous ont dit : "Je change de position par rapport à cette conjecture suivant qu'on est en cours de math ou de physique"; d'autres ont précisé : "Ma position dépend de la façon dont j'interprète l'expression "je vois briller". Cela veut-il dire : "un courant passe" ou bien "je vois avec mes yeux" ?

Il est donc clair que l'objectif fondamental de la pensée scientifique : se mettre rationnellement d'accord, ne sera jamais atteint si on ne précise pas davantage de quoi on parle.

Le choix dichotomique des mathématiciens dans la constitution d'un modèle

* De façon un peu caricaturale, disons que la pensée mathématique présente deux aspects spécifiques faussement contradictoires :

- d'une part le mathématicien pose un **regard très particulier** sur le monde puisqu'il peint systématiquement les objets en noir et blanc : allumé - éteint, 0,1 , vrai - faux, c'est-à-dire qu'il se fabrique un monde imaginaire **dans lequel l'état des objets est dichotomique** (de deux choses l'une, ou bien ceci, ou bien cela !)

- de l'autre, ce mode de représentation du monde qui paraît très personnel et déconnecté de toute réalité est néanmoins assez **universel**, en ce sens que dans pratiquement toutes les autres sciences, une fois modélisées les réalités observables ou concrètes que l'on veut étudier, c'est avec la logique du modèle mathématique que les problèmes théoriques sont traités.

* Si nous voulons entrer dans le monde du mathématicien, **il nous faut donc accepter que dans ce monde le "réel", ce sont les idées; les objets "concrets" sont des objets de pensée qui ont été précisés.**

Ces objets, même s'ils ont souvent un support métaphorique concret important (par exemple nos ampoules ici), n'existent en tant qu'objets mathématiques que par ce qu'on en dit (d'où l'importance des définitions) et par les règles d'interaction (les axiomes) que l'on choisit de leur imposer dans leurs relations avec les autres objets (un peu comme les différentes pièces d'un jeu d'échecs).

Ici, par exemple, dans cette activité ayant pour support métaphorique un circuit électrique, pour avoir une discussion compatible avec la pensée mathématique, il nous faut **remplacer la perception sensorielle "voir une lampe briller" par un axiome**; on va prendre celui qui semble le mieux en adéquation avec la réalité physique d'un circuit normalisé où "tout marche bien".

Axiome 1 : "Une lampe brille si elle est en circuit fermé sur le générateur, et sinon elle ne brille pas".

Dans ce modèle qui ne prend plus en compte toute la complexité de la réalité quotidienne (réalité quotidienne où une lampe peut briller plus ou moins suivant l'état du circuit, de l'observateur et de leurs positions mutuelles), **une lampe ne peut plus être que dans deux états :** ***allumée ou éteinte,*** synonymes de "brille" ou "brille pas", de "courant passe" ou "ne passe pas" etc.!

Dans ce modèle notre axiome 1 règle dichotomiquement le cas de l'événement élémentaire "je vois l'ampoule Li briller" quand il n'y a qu'une seule ampoule Li dans le circuit; par contre il reste une ambiguïté quand on intercale une seconde ampoule Lj dans un circuit fermé comportant l'ampoule Li (cela peut-il ou non ouvrir ce circuit ? c'est le cas par exemple des ampoules néon !).

Il nous faut donc, pour lever cette ambiguïté, ajouter un deuxième axiome afin de "régler le problème des ampoules en série".

On peut donc prendre pour deuxième axiome:

Axiome 2 : "Une ampoule Li en série avec une seconde ampoule Lj se comporte par rapport à elle comme un conducteur et vice-versa "

Résultat : Dans un modèle mathématique muni de ces deux axiomes, il semble maintenant que l'on peut rationnellement et unanimement trancher sur la véracité de C1.

En effet, si on voit L_4 briller, cela signifie que L_4 est en circuit fermé sur le générateur (Axiome 1), donc que S est dans la position 1 ; mais alors, comme L_4 est un conducteur par rapport à L_1 (Axiome 2), L_1 est aussi en circuit fermé sur le générateur, et donc *dans ce modèle on est certain que L_1 brille elle aussi* (et ce quelle que soit la position apparente des interrupteurs sur le schéma, puisque dans un modèle mathématique ce qui prime, c'est "ce qu'on dit être vrai" et non ce qu'on "voit" sur le schéma).

Les conséquences de ces premiers choix théoriques

Une fois que nous avons prouvé dans l'amphi que cette conjecture était un énoncé général vrai dans le modèle circuit normalisé, nous avons pu déclarer que C1 était un théorème de ce modèle.

Ce nouveau statut de C1 autorise chaque membre de la communauté amphi à employer dans la suite du travail le jugement " C1 est une affirmation vraie", sans être tenu de donner d'autres justifications que le rappel du théorème.

L'économie de ce travail de modélisation est double :

- dans le modèle convenu, **personne ne peut plus maintenant,** sans s'exclure de la **communauté d'idées, présenter comme "contre-exemple" de C1** un montage tel **celui que j'avais apporté fait d'ampoules de résistances très fortement différentes** puisqu'il ne satisfait pas aux hypothèses du modèle.

Le modèle est donc le garant d'une certaine efficacité du travail scientifique, car à moins qu'on ne se rende compte d'une erreur de raisonnement ou de calcul, ce qui est acquis est acquis; personne donc ne peut s'amuser au petit jeu de la polémique qui stérilise la portée de la plupart des débats lorsque certains, pour avoir raison, se permettent d'introduire des cas "tordus" dont on ne voulait pas parler.

- **à l'inverse, personne** (ayant compris les conventions des communautés scientifiques, conventions que nous sommes en train d'expliciter) **ne peut, s'il connait les hypothèses et axiomes du modèle, être berné par C1** : il ne peut espérer, à partir des affirmations de cet énoncé, pouvoir faire briller au sens habituel les deux ampoules du circuit vélo que j'ai apporté, **puisqu'il doit interpréter la conclusion de C1 dans notre modèle** (lorsque C1 affirme que la lampe n° 1 brille, cela ne signifie pas qu'on peut voir cette ampoule briller avec nos yeux, mais seulement que ses extrémités sont reliées au générateur).

Cela montre à la fois la force et les limites des modèles mathématiques : on gagne en clarté et en fiabilité, mais on perd en portée.

Pour caricaturer ce que nous sommes en train de préciser, disons que *"les conjectures déclarées vraies dans un modèle sont des assertions universellement vraies, mais pas universellement applicables"!*

En effet, un modèle tel que le précédent est pertinent pour rendre compte de toute réalité matérielle où toutes les ampoules ont des caractéristiques électriques "identiques" (en ce sens les assertions vraies de ce modèle sont universellement vraies), mais il devient inadéquat par exemple pour traiter d'une réalité où les ampoules sont prises indifféremment dans le stock d'un marchand de cycles (pour traiter mathématiquement cette réalité plus complexe, il faudrait changer de modèle, en particulier changer l'axiome 2).

Nous voyons bien, sur cet exemple, quelles tensions et quelles complémentarités existent naturellement entre les préoccupations d'utilité (un modèle doit servir) et de fiabilité (une théorie ne doit pas conduire à l'erreur).

Pour être fiable, un modèle doit donc être construit avec une rigueur interne qui peut paraître bien superfétatoire quand on reste au seul niveau des réalisations immédiates de la vie quotidienne, mais il faut comprendre qu'un modèle peu précis ne permet de se mettre d'accord qu'avec peu de personnes (à la limite, uniquement avec celles qui pensent exactement comme vous), d'où l'effort de définition fait en mathématiques.

Réciproquement, les résultats d'une théorie scientifique construits dans un objectif d'universalité comme le sont les résultats mathématiques, n'ont qu'une portée limitée: ils ne sont vrais que sous des hypothèses très restrictives, d'où le danger de vouloir les appliquer "bêtement" sans chercher à comprendre les mécanismes internes de leur élaboration.

Le problème général de l'adéquation du modèle choisi avec le réel étudié est le travail spécifique de chaque science appliquée (c'est à mon avis ce qui signe la spécificité de cette science et en représente la difficulté principale).

Convention pour la suite de l'activité Circuit

Dans la suite de notre travail sur ce circuit, nous nous placerons dans le modèle défini par les axiomes précédents qui correspondent aux schémas dit normalisés.

Il est donc clair, à partir de cette convention, que si notre modèle est suffisamment explicite, quelqu'un qui n'aurait aucune connaissance en électricité et qui n'aurait jamais manipulé de circuit devrait néanmoins pouvoir jouer le jeu proposé.

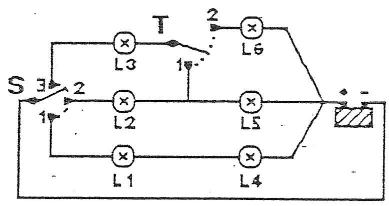
Il faudra donc, si nécessaire, compléter au fur et à mesure que les besoins se feront sentir les règles de notre modèle mathématique, afin que chacun puisse juger sans ambiguïté la véracité des conjectures qui sont mises en débat.

Convention de travail générale

A partir de maintenant, convenons formellement que tout débat de conjecture se situe dans un modèle dont on précise les hypothèses et les règles implicites autant que faire se peut.

Il faudra donc ne jamais hésiter à intervenir en cours ou en T.D. si vous soupçonnez la présence de quelque malentendu au niveau du modèle de référence, afin de faire expliciter les hypothèses et les conventions (conventions adoptées par les communautés scientifiques au fil des siècles et transmises dans l'enseignement le plus souvent de façon implicite pour ne pas alourdir le propos).

Etude de la deuxième conjecture



C2) Si la lampe n°2 n'est pas allumée, alors la lampe n°5 ne l'est pas non plus.

notée ultérieurement

C2) : non-L_2 $\Rightarrow$ non-L_5 .

En majorité l'amphi a considéré cette conjecture comme fausse, à cause du cas particulier S_3 - T_1 qui éteint L_2 mais n'éteint pas L_5 (ce que l'on note "non-L_2 et L_5 ") contrairement à ce qu'affirme la conjecture; toutefois, un certain embarras est apparu dans la dichotomie vrai - faux puisque cette conjecture fausse dans ce cas S_3-T_1 ne se présente pas comme "toujours fausse" (elle est exacte dans les cas S_3-T_2 et S_1-T_1 ou T_2) ; un embarras encore plus grand est apparu quand on s'est interrogé explicitement sur les cas bizarres S_2 - T_1 ou T_2.

Ainsi , pour cette conjecture C_2 , on dira que le cas particulier S_3-T_1 vérifie (rend vraie) l'hypothèse A et ne vérifie pas (rend fausse ou falsifie) la conclusion B .

Le particulier et le général en mathématiques

1) Les conjectures " Si A , alors B " : des relations d'un type très particulier entre deux assertions générales A et B .

En pratique, un énoncé " si A , alors B " est une affirmation générale qui se veut "toujours vraie" dans la façon dont elle met en relation deux affirmations A et B (alors que ces affirmations A et B elles, ne sont pas supposées toujours vraies).

Contrairement aux cas des sciences plus descriptives, les résultats les plus utilisés en mathématiques ne sont pas la description d'un unique fait particulier vrai : " 4 est pair", mais plutôt une relation entre deux énoncés, par exemple :

" si un nombre est multiple de 4 , alors il est multiple de 2 ".

Ces énoncés " si A , alors B ", dits hypothético-déductifs, mettent donc en relation de façon non symétrique deux énoncés dichotomiques A et B .

Le plus souvent, ces affirmations "élémentaires" A , B sont générales, c'est-à-dire que derrière les expressions indéfinies "si un triangle est isocèle...", "si la lampe L1 est allumée...", " si un nombre x est multiple de 2 ..." etc. n'évoquant qu'un objet particulier à chaque fois, *"se cache en réalité une variable, qui dans certains cas peut prendre plusieurs, voire une infinité de valeurs différentes" : la variable situations particulières ou cas particuliers envisageables dans le modèle.*
Cas particuliers à propos desquels ces expressions, vues comme des affirmations, peuvent avoir le caractère de vérité : vrai ou (exclusif) faux.

Dire que A , B sont des affirmations générales dichotomiques signifie donc que pour chaque cas-particulier du modèle, ces affirmations sont bien définies et sont soit vraies, soit fausses; par contre, il n'est pas dit que sur l'ensemble des cas particuliers envisageables, leur caractère de vérité soit fixe. (Par exemple, A peut varier et être vrai pour au moins un cas particulier et pas pour tous, i.e. faux pour au moins un cas et pas pour tous!).
Ainsi, dans le cas où l'affirmation générale A (resp. B) est : " être multiple de 4 " (resp. " être pair ") porte sur tous les entiers, elle est dichotomique, vraie sur une infinité de cas particuliers et fausse sur l'infinité des cas particuliers complémentaires; dans notre modèle de circuit, les affirmations élémentaires " l'ampoule L_i est allumée " ou " l' ampoule L_j est éteinte " (que l'on note L_i pour " L_i est allumée" et non-L_j pour " L_j est éteinte") ont (à partir de nos hypothèses et axiomes de modélisation) un état de vérité totalement déterminé dans chacun des six cas particuliers envisageables correspondant aux six positions combinées des interrupteurs S et T.

Conjecturer " si A , alors B ", ce n'est donc pas affirmer A et/ou B indépendamment l'un de l'autre, c'est envisager le résultat général B comme une nécessité dans un certain cadre, sous certaines conditions (celles qui sont résumées dans l'hypothèse A).

En un certain sens, affirmer " si A , alors B ", c'est dire : "si on ajoute à notre modèle initial l'hypothèse supplémentaire A (i.e. si on supprime tous les cas particuliers qui ne vérifient pas A), alors B devient universellement vrai dans notre nouveau modèle (i.e. est vérifié par tous les cas particuliers de ce nouveau modèle).

Pour ne pas changer sans arrêt de modèle de référence, on préfère traiter ces conjectures comme des énoncés généraux portant a priori sur tous les cas particuliers du modèle initial, et en réalité sur les seuls événements qui satisfont l'hypothèse, et **on dote ces énoncés d'une "grammaire" telle qu'on puisse les faire entrer eux aussi, au niveau de leur caractère de vérité, dans la dichotomie vrai-faux.**

Pour cela, en premier lieu, on **exclut a priori du débat mathématique** les énoncés dans lesquels les termes sont flous, subjectifs, qui contiennent des sous-entendus non explicitables et des assertions "élastiques".

Ensuite, en utilisant une construction de type " si A , alors B " (ou toute autre dans laquelle l'hypothèse A **est clairement désignée et la conclusion** B **aussi**, par exemple $A \Rightarrow B$,) on s'assure que dans chaque situation particulière envisageable dans le modèle général, chacune des assertions A (resp. B) a un caractère de vérité bien déterminé : soit vrai, soit exclusivement faux. (C'est pour cela que nous avons discuté si longtemps au niveau de C1 pour nous mettre d'accord de façon dichotomique sur les faits élémentaires L_i ou non-L_i .)

Avant d'aller plus loin, on remarquera que l'équivalent des conjectures en mathématiques est le plus souvent appelé hypothèses, principes ou lois dans les sciences de l'observation, que les hypothèses du mathématicien qui ne sont pas des faits universellement vrais, mais seulement une façon de délimiter le champ de l'étude, sont les données dans les autres disciplines, et que les conclusions (les résultats dans les autres disciplines) ne sont pas prétendues être vérifiées universellement, mais seulement dans le cadre de l'étude, c'est-à-dire dans le cadre général du modèle mathématique et sous l'hypothèse supplémentaire qui a été mentionnée.

2) Classification des cas particuliers du modèle par rapport à une conjecture donnée

Bien qu'une conjecture P : " si A , alors B " soit une relation entre les deux énoncés généraux A et B , **son caractère de vérité se détermine** au vu de l'état respectif de A et de B **sur certains cas particuliers** envisageables dans le modèle.

De façon générale, vis-à-vis d'une conjecture P : " si A , alors B ", **on classe les cas particuliers du modèle en trois types bien distincts:**

- les exemples (de la conjecture), cas particuliers qui satisfont l'hypothèse A et la conclusion B; ici, dans C2 , il y en a trois (S_1 & T_1 , S_1 & T_2 , S_3 & T_2).

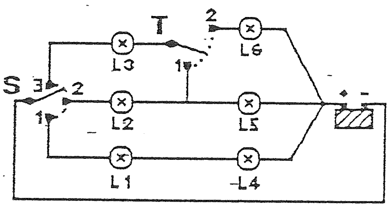
Les exemples tendent à montrer que la conjecture est vraie et signifiante.

- les contre-exemples (de la conjecture), événements vérifiant l'hypothèse A et non la conclusion B ; ici, dans C2 , il n'y en a qu'un (S_3 & T_1).

Sur un plan pratique, on pourrait dire que ce sont les cas où ***la théorie induit une mauvaise représentation de la réalité****, puisqu'ayant souscrit aux hypothèses, on est trompé sur les résultats lorsqu'on se fie à l'affirmation générale que contient la conjecture dans sa conclusion!*

Les contre-exemples montrent donc que la conjecture est fausse dans sa généralité.

- les hors-sujet[1] : ce sont des événements qui ne vérifient pas l'hypothèse. (Dans C2 , il y en a deux : S_2 & T_1 , S_2 & T_2). Qu'ils soient en accord ou non avec la conclusion de la conjecture (ici ils sont tous les deux en désaccord), ils n'ont pas plus d'effet sur la vérité que sur l'utilité de la conjecture, puisqu'un énoncé hypothético-déductif, par principe, ne "se préoccupe pas" dans ses conclusions des événements particuliers qui ne vérifient pas l'hypothèse.



C2) Si la lampe n°2 n'est pas allumée, alors la lampe n°5 ne l'est pas non plus.

notée ultérieurement

C2) : non-$L_2 \Rightarrow$ non-L_5 .

1) Cette appellation non standard (en général, en mathématiques, on ne les nomme pas) est proposée pour qu'on ne traite pas ces cas particuliers comme des "super" contre-exemples. Elle est cohérente avec l'enseignement du français.

3) <u>Quel critère de vérité le mathématicien choisit-il pour lier faits particuliers et idées générales</u> ?

Dans l'exemple de la conjecture C_2, le bilan des cas particuliers est : sur six événements possibles, figurent un contre-exemple, deux hors-sujet et trois exemples !

On aurait donc envie de dire que **cette conjecture est fausse, mais pas "totalement fausse"**, puisque trois exemples tendent à montrer qu'elle est vraie et un contre-exemple s'y oppose.

Dans la vie quotidienne en tout cas, on ne dit pas automatiquement d'une telle phrase qu'elle est fausse, on évalue d'abord le poids des exemples et des contre-exemples et **on n'applique sans remords le label faux** qu'aux énoncés généraux dans lesquels les contre-exemples sont majoritaires, ou bien dans lesquels les contre-exemples, bien que rares, représentent des événements inacceptables, une catastrophe par exemple !

La double convention de la communauté mathématique au sujet du caractère de vérité d'un énoncé hypothético-déductif est tout autre !

Pour que les conjectures de type " si A , alors B " satisfassent à l'objectif de dichotomie, on adopte en mathématiques la convention suivante :

<u>Convention fondamentale au sujet de la vérité d'une conjecture mathématique de type " si A , alors B "</u>

1) Une conjecture sera déclarée fausse dès qu'elle admet un contre-exemple.

2) Elle sera déclarée vraie s'il est impossible qu'elle soit fausse (i.e. si on démontre qu'elle ne peut avoir de contre-exemple).

<u>Conséquences épistémologiques de cette convention:</u>

1) En mathématiques, il n'y a pas de petit ou de grand contre-exemple, ni de conjecture très fausse ou très vraie; il y a ou il n'y a pas de contre-exemple, la conjecture est simplement fausse ou vraie.

2) Une conjecture est donc vraie ou exclusivement fausse ou encore elle est "indécidable" (indécidable signifie qu'il n'y a pas de contradiction logique à la considérer comme vraie ou au contraire à la considérer comme fausse : postulat d'Euclide). Ce dernier cas ne nous concernera probablement pas dans nos débats. Par contre il arrivera souvent qu'on soit bien en peine de déterminer tout de suite le caractère de vérité d'une conjecture proposée par tel ou tel d'entre nous; on dira alors que la conjecture est non résolue, ce qui correspondra à la case "Autre" dans les votes.

3) Pour montrer qu'une conjecture est fausse, il suffit d'exhiber un contre-exemple et non tous les contre-exemples.

Il faut se persuader qu'on ne montrera pas mieux la fausseté d'une conjecture en exhibant dix ou une infinité de contre-exemples, d'autant plus qu'à vouloir être trop général dans cette preuve de fausseté on risque d'introduire des cas particuliers qui seront de faux contre-exemples, i.e. des hors-sujets ou des exemples dont la présence détruira en partie la qualité et la rigueur de l'argumentation puisqu'ils seront présentés à tort comme prouvant la fausseté de la conjecture.

Par contre, pour faire une telle preuve de fausseté, il ne suffit pas de dire "la conjecture est fausse, car je n'y crois pas" ou "parce que je ne suis pas d'accord"!

Il faut se mettre au travail pour exhiber un contre-exemple; le plus simple et le plus précis possible sera donc le "meilleur", car il ne suffit pas de dire "voici un vague objet, c'est sûrement un contre-exemple", il faut (pour prouver) que chacun puisse vérifier que ce que vous proposez existe bien, vérifie l'hypothèse et non la conclusion.

4) Pour montrer qu'une conjecture est vraie, il faut montrer qu'elle ne peut être fausse : cela indique la relative pauvreté du vrai du mathématicien !

Cette façon de traiter "le vrai" comme du "non-faux" n'est pas directement tournée vers l'action, elle est donc contraire à l'attitude naturelle de ceux qui, dans toute entreprise, se préoccupent d'abord de l'utilité de ce qu'ils font (ceux qui tout naturellement se préoccuperaient plutôt de savoir si la conjecture a ou non beaucoup d'exemples !)

Cette recherche d'utilité (avoir beaucoup d'exemples), bien qu'importante, n'est pas à mettre sur le registre de l'évaluation de la vérité d'une conjecture.

Bien entendu, quand on s'intéresse à une conjecture, on a intérêt à ce qu'elle ait beaucoup d'exemples (sinon pourquoi se charger d'énoncés généraux qui ne serviront pratiquement jamais), mais **si l'on ne veut pas tomber sur des paradoxes insurmontables et faire des contre-sens fâcheux sur la portée des énoncés mathématiques, il faut se persuader que la vérité d'un énoncé et son utilité ne sont pas sur le même registre!**

C'est la raison pour laquelle, quand une conjecture ne porte que sur très peu de cas particuliers, comme c'est le cas dans notre circuit, une façon de montrer qu'elle est vraie est d'étudier les cas particuliers en vérifiant un par un qu'aucun d'entre eux n'est un contre-exemple; c'est parfois un moyen très sûr et une preuve très économique de la vérité d'un énoncé qu'on appelle **"preuve par exhaustion"**.

Ce moyen est souvent péjoré (on entend parfois dire à tort : "ce n'est pas une preuve") parce qu'il n'explique pas pourquoi "ça marche".

Prouver et /ou éclairer !

Si une preuve réussit simultanément à montrer qu'il n'y a pas de contre-exemple et à expliquer pourquoi le résultat B "marche" toujours sous les hypothèses A , on a ce qu'on appelle une "belle" preuve, une preuve "éclairante", et on la préférera à d'autres preuves qui expliquent moins bien ou même n'expliquent rien, bien qu'elles persuadent !

Quand on a le choix, on a toujours intérêt, si cela n'est pas trop compliqué, à présenter les preuves les plus éclairantes possibles, mais à nouveau, faire de ce critère de qualité d'explication une obligation dans une preuve mathématique (par exemple rejeter les preuves par exhaustion ou par l'absurde), ce serait (comme pour l'utilité d'une conjecture au sens d'avoir beaucoup d'exemples) faire un contre-sens sur le fonctionnement du jeu mathématique : prouver que c'est vrai, c'est a priori seulement montrer que "ça ne peut être faux" !

La recherche systématique de contre-exemples : une méthode de découverte de preuves!

Tester une conjecture sur quelques cas particuliers cruciaux, pour déceler la présence d'éventuels contre-exemples, avant de s'engager dans une recherche de preuve formelle, est une bonne méthode de travail pour plusieurs raisons :

- regarder ce qu'un énoncé général signifie sur des cas particuliers où l'on sait de quoi on parle, c'est une première façon de donner du sens à la théorie, de la "concrétiser" au bon sens du terme;

- si la conjecture est fausse, on peut parfois s'en rendre compte très rapidement dès lors qu'on a le réflexe de tester sa validité sur des cas simples qu'on "connaît" bien;

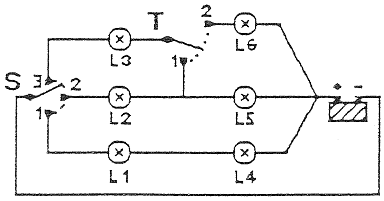
- de plus, il faut bien reconnaître que la preuve formelle d'une conjecture vraie est souvent très inaccessible : si on ne voit pas très bien de quoi il s'agit en toute généralité, on n'a aucune idée sur la façon de "démarrer".

Or, lorsque la conjecture est vraie, tous les cas particuliers sur lesquels on la teste "marchent" et ce, même en prenant des cas particuliers de plus en plus "tordus" !

A force d'échouer dans nos différentes tentatives pour "démolir" cette conjecture, on finit par comprendre pourquoi le jeu des hypothèses rend les conclusions si nécessaires et pourquoi tous nos essais pour trouver un contre-exemple échouent; ce faisant, on découvre des arguments, voire des preuves montrant que personne ne pourra jamais trouver de contre-exemple.

Ainsi, de fil en aiguille, en cherchant à montrer rigoureusement qu'une conjecture est fausse, on peut souvent découvrir une preuve de sa véracité !

C3) La conjecture paradoxale qui n'a ni exemples ni contre-exemples



C3) Si L_1 et L_3, alors L_2 et non-L_5.

ou

C3) : L_1 et $L_3 \Rightarrow L_2$ et non-L_5.

Cette conjecture, paradoxalement vraie, est là pour nous montrer la "dureté" de la convention :*"en mathématiques, quand on a la preuve qu'une conjecture ne peut avoir de contre-exemple, on la déclare vraie";* dureté qui ne se ressent que lorsque l'énoncé met en jeu des éléments qui ont pour nous une signification très concrète.

En effet, cette conjecture (dont l'hypothèse est irréalisable dans notre modèle) n'admet ni exemples (elle ne sert à rien), ni contre-exemples (elle n'est pas fausse); **comme on a la preuve qu'envisager un contre-exemple conduirait à une absurdité** (allumer simultanément L1 et L3) ou remettrait en cause les hypothèses de modélisation, cette conjecture C3 est donc vraie (par défaut) dans notre modèle, mathématiquement vraie!

Ce jugement "C3 est vraie" est très opposé à notre rationalité du quotidien, rationalité dans laquelle on a appris qu'en dehors d'une intention de tromperie, il ne faut pas parler pour ne rien dire!

En d'autres termes, dans la vie quotidienne on exige implicitement, pour qu'une assertion générale soit déclarée (de bonne foi) vraie, qu'elle affirme quelque chose d'utile et d'intéressant !

Certains d'entre nous ont d'ailleurs dit : "Je ne peux déclarer vraie une conjecture qui n'a aucun exemple !!!"

L'épistémologie mathématique qui se dégage de la discussion de cette conjecture peut se résumer autour des règles d'action suivantes:

- en mathématiques, ce qui est simultanément significatif et utile, ce ne sont pas les axiomes, les théorèmes ou les définitions seuls, mais les couples énoncés généraux - exemples d'applications;

- en mathématiques il ne faut surtout pas déclarer faux ce qui est inutile, car ce serait alors donner à cette "inutilité" une importance qu'elle n'a pas et une consistance abusive :
dire qu'une conjecture est fausse, <u>c'est apporter un renseignement qui n'est absolument pas contenu</u> dans l'affirmation "ça ne sert à rien !"

Celui qui, en mathématiques, déclare fausse une conjecture où l'hypothèse n'est jamais vérifiée (qui n'a donc ni exemple ni contre-exemple), dit une absurdité, *car il affirme que l'irréalisable (par exemple ici, vérifier l'hypothèse "allumer simultanément L1 et L3") peut néanmoins se réaliser, puisqu'un contre-exemple vérifie l'hypothèse) !!!*

Une précision à propos des sur-exigences que l'on a tendance à avoir sur une conjecture pour la considérer comme discutable au niveau de sa vérité:

Comme nous l'avons déjà souligné, pour pouvoir être reconnue comme une conjecture mathématique (vraie ou fausse), l'énoncé " si A , alors B " ne réclame donc qu'une chose :
que les affirmations élémentaires A et B soient vérifiables - dans chaque cas particulier envisageable dans le modèle - de façon dichotomique, i.e. soient, indépendamment l'une de l'autre et suivant les cas, ou bien vraies, ou bien fausses.

Quand le modèle laisse envisager plusieurs cas particuliers (six dans le cas du circuit), l'exigence précédente autorise donc trois éventualités bien différentes pour chacune des deux affirmations élémentaires A ou B qui constituent l'hypothèse ou la conclusion:

1) être vraie dans tous les cas particuliers du modèle (c'est le cas de l'affirmation vide : " L_1 ou non -L_1" ou de l'affirmation "L_1 ou non-L_4")

2) être vérifiée dans certains cas particuliers, mais pas dans tous (c'est le cas des affirmations L_i)

3) n'être vérifiée dans aucun cas particulier (c'est le cas de (L_1 et L_3) ou encore de (L_1 et non-L_1).

Exiger qu'une conjecture vraie ait au moins un exemple, ce serait donc refuser que l'hypothèse A soit dans le cas 3 , c'est-à-dire "jamais vérifiée"!

Ce dernier choix, qui d'un point de vue pratique semblerait être "le choix raisonnable" et a été discuté dans l'histoire des mathématiques, aurait pu être retenu, mais finalement c'est le choix dichotomique "non faux = vrai" qui l'a emporté; accepter de faire des mathématiques avec les mathématiciens d'aujourd'hui, c'est donc se plier à ce choix qui n'a rien de dramatique au niveau du sens, (l'étude de la contraposition montrera tout son intérêt) si on comprend que ce n'est qu'une convention qui restreint la portée du vrai mathématique.

Comme toutes les conventions de forme, il n'est pas forcément très astucieux de vouloir s'y opposer seul : quand on traverse la Manche, il vaut mieux, une fois de l'autre côté, ne pas s'obstiner à conduire à droite !

Etude de deux conjectures comportant des "ou" dans l'hypothèse / dans la conclusion

Le "ou" du mathématicien

C'est un "ou" inclusif *(l'un, l'autre ou bien les deux ensemble), celui de l'informaticien et des automates,*

ce n'est pas le "ou" exclusif du menu : escalope ou poisson. (Le restaurateur, contrairement au mathématicien, ne vous servira les deux que moyennant supplément !)

Par convention mathématique :

" A ou B " signifie : **" A seul vrai",**
" B seul vrai",
" A et B simultanément vrais"

"Non (A ou B)" équivaut à "non-A et non-B"

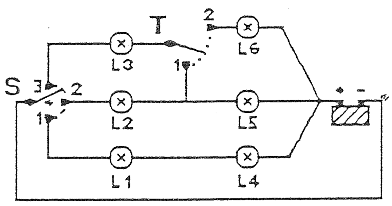
Le " A ou B " du mathématicien n'est donc faux que si A et B sont simultanément faux.

Du point de vue formel, il y a correspondance entre les connecteurs logiques "et", " ou", "non" et les opérations ensemblistes intersection, union et passage au complémentaire.

non (A ou B) = (non A) et (non B) est à comparer avec $C(A \cup B) = CA \cap CB$,

non (A et B) = (non A) ou (non B) est à comparer avec $C(A \cap B) = (CA) \cup (CB)$. //

Ayant précisé le sens du "ou" inclusif du mathématicien, les deux conjectures suivantes sont là pour nous amener à approfondir la façon dont il nous faut interpréter un "ou" suivant qu'il figure dans l'hypothèse ou bien dans la conclusion.



C4) Si L_2 , alors L_5 ou L_4 .

C5) Si L_1 ou L_6, alors L_2 ou L_4.

On remarque d'abord sur un plan purement logique que la conjecture C4) est vraie, car
- la conjecture C'4) Si L_2 , alors L_5 est vraie
- et que si L_5 , alors (en vertu de la convention sur le "ou") on a aussi L_5 ou L_4 .

Sur un plan plus sémantique (au niveau du sens), cette conjecture est un peu "choquante" puisqu'elle donne l'impression de proposer en conclusion L_4 sous hypothèse L_2, alors que précisément L_2 **et** L_4 **ne sont jamais réalisées simultanément.**

Il nous faut néanmoins accepter cette "anomalie de sens" de la logique du "ou", anomalie qui n'a pas que des inconvénients, une fois bien intégré le fait qu'une proposition logiquement exacte n'a pas forcément en mathématiques le sens qu'on lui attribuerait dans le langage courant ou même se trouve "interdite" dans ce même langage car prêtant trop à contre-sens.

Par exemple, quand on regarde l'inégalité " $\pi \leq 4$ ", i.e. " $\pi < 4$ ou $\pi = 4$ " , on est dans une situation semblable à celle de la conjecture C4 , car on sait que la proposition " $\pi = 4$ " ne sera jamais vraie, et cependant, si on déclarait cette inégalité "$\pi \leq 4$ " fausse (parce qu'elle "semble dire quelque chose de faux" : $\pi = 4$!), cela reviendrait à affirmer qu'il y a un contre-exemple.

Nous serions alors pris au piège de nos règles de la logique du "ou" qui ne peut être faux que si les deux termes de l'alternative qui le composent sont simultanément faux : donc π ne pouvant être ni inférieur strictement à 4 , ni être égal à 4 , il deviendrait donc strictement supérieur à 4 , ce qui, du coup, serait une affirmation irréductiblement fausse!

A posteriori, on remarque que l'inégalité $\pi \leq 4$ n'est pas choquante au niveau du sens si on la lit de façon "contraposée" :

" π n'est pas strictement plus grand que 4 " !

Ainsi, par exemple, regardons la propriété P définie sur R par

" P(x) vraie " équivaut à " $(4-x)^3 < 0$ " .

Si nous avons remarqué que pour que P(x) soit vraie, il faut que $x > 4$, nous dirons alors dans une démonstration : "comme $\pi \leq 4$, on peut affirmer que $P(\pi)$ est faux !".

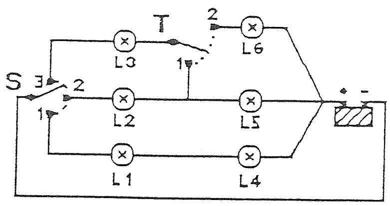
<u>En résumé</u>

Une conjecture de type : " si A , alors (B ou C) " est vraie dès qu'une des deux sous-conjectures " si A , alors B" ou bien " si A , alors C " est vraie,

i.e. "(si A , alors B) ou (si A , alors C) " $\Rightarrow$ "si A , alors (B ou C) ".
(La réciproque est-elle vraie ?)

En un certain sens, on peut dire que le travail du "constructeur" de ce type de conjecture est simple : pour vérifier qu'elle est exacte, il lui suffit dans chaque cas particulier de vérifier qu'elle "marche bien" pour le terme de l'alternative le plus facile à obtenir !

A l'opposé, l'utilisateur de la conjecture doit être très prudent, car si la conjecture est vraie, il sait que sous l'hypothèse prescrite l'un au moins des deux termes de l'alternative de la conclusion est vérifié, mais il ne sait pas lequel, et s'il y a plusieurs cas particuliers envisageables, il ne sait pas si c'est tout le temps le même terme qui reste vrai ou si c'est de temps en temps l'un, puis de temps en temps l'autre, ou de temps en temps les deux : par exemple, si f et g sont deux fonctions numériques définies sur l'intervalle [0, 1] et si on sait que le produit f.g est la fonction nulle, cela revient à écrire "la propriété P(x) : $f(x) = 0$ ou $g(x) = 0$ est vraie sur [0 ,1]" .
Peut-on en déduire que f ou que g est la fonction nulle sur [0, 1] ?



C4) Si L_2 , alors L_5 ou L_4 .

C5) Si L_1 ou L_6, alors L_2 ou L_4.

Etude de la conjecture C5) : Si L_1 ou L_6 , alors L_2 ou L_4 .

Cette conjecture est fausse !

Preuve: Le cas particulier S3&T2 est un contre-exemple puisqu'il allume L_6 (on vérifie l'hypothèse "L_1 ou L_6") et éteint simultanément L_2 et L_4 (on nie la conclusion "L_2 ou L_4")

L'analyse de la véracité de cette conjecture a posé des problèmes très importants dans l'amphi, car beaucoup d'étudiants la pensaient vraie en rééditant sur cet énoncé ce qu'on venait de faire au niveau de la conjecture précédente, i.e. lire cette conjecture en séparant les éléments du "ou", mais cette fois-ci au niveau des hypothèses.

Ce faisant, ils obtenaient alors deux sous-conjectures :

C'5 : Si L_1 , alors L_2 ou L_4

C"5 : Si L_6, alors L_2 ou L_4 .

C'5 étant exacte (vu l'étude précédente), ils voulaient conclure (vu l'étude précédente) que "l'union" des deux était exacte !

Ils proposaient donc implicitement de remplacer C5 par C^5

C^5 : (Si L_1 , alors L_2 ou L_4) ou (Si L_6, alors L_2 ou L_4).

C^5 : C'5 ou C"5 .

La présence du contre-exemple S3&T2 nous oblige à penser que cette opération de séparation des hypothèses est illégitime.

L'étude de ces deux conjectures nous invite à découvrir **des nuances qui n'apparaissent pas directement** dans la lecture des tables de vérité du "ou" et de l'implication : la nécessité d'une sorte de traitement différent du "ou" suivant qu'il apparaît dans l'hypothèse (dans ce cas il se comporte d'un certain point de vue comme un "et") ou au contraire lorsqu'il apparaît dans la conclusion (dans ce cas il se comporte bien comme un "ou").

Pour comprendre les raisons profondes qui doivent nous conduire à déclarer faux un énoncé de type " si A ou B , alors C " dès que l'un des énoncés " si A , alors C " (resp. " si B , alors C ") est faux, il nous faut revenir à l'épistémologie dominante des mathématiques : "fournir des résultats utiles certes, mais surtout qui ne soient jamais faux pour l'utilisateur "!

Quand on construit une conjecture, on ne peut exiger qu'une chose des utilisateurs potentiels: qu'ils respectent les hypothèses du modèle et de la conjecture!

Nous devons donc être conscients que **si nous construisons un énoncé P du type : "si A ou B, alors C " et le déclarons vrai au sens mathématique, nous devons nous attendre à ce que nos utilisateurs le fassent fonctionner dans les pires conditions : du moment qu'ils vérifient l'hypothèse A ou B , ils sont en droit d'exiger la conclusion C !**

Ils pourront donc se placer indifféremment dans l'un des trois cas :

1) A et B vrais (cas le plus favorable pour que "ça marche !")
2) A seul est vrai (cas moins favorable pour que "ça marche !")
3) B seul est vrai (cas moins favorable pour que "ça marche !")

Par suite, si comme c'était le cas dans C5, l'énoncé "$A \Rightarrow C$" est vrai et que par contre "$B \Rightarrow C$" est faux (ce qui rend vrai l'énoncé ($A \Rightarrow C$) ou ($B \Rightarrow C$)), tant que l'utilisateur sera au niveau des cas particuliers dans la situation 1) ou 2) précédentes, il n'aura pas d'ennuis : C sera vrai ; si par contre, une situation particulière le place dans la troisième situation (il a le droit de se servir de P) et si par "malheur" il tombe pile sur un contre-exemple de $B \Rightarrow C$ (c'est possible puisqu'il y en a au moins un), il aura peut-être un "terrible" ennui (C sera faux!) contrairement à la prévision qu'il avait faite avec P ! *(c'est-à-dire que sa centrale nucléaire risque d'exposer s'il l'a construite à partir de cet énoncé "illégitimement déclaré vrai par nous mathématiciens!")*

On se rend compte qu'en tant que constructeur de conjectures, mettre un "ou" dans l'hypothèse, c'est prendre un risque car on fournit ainsi à l'utilisateur un outil polyvalent.

C'est donc très bien si on prend toutes les précautions pour vérifier que l'énoncé est exact quelle que soit l'hypothèse envisagée; sinon c'est (comme le sont souvent les outils-miracles multifonctionnels) un attrape-c....., "ça marche" en démonstration, mais pas le jour où on en a besoin de façon cruciale.

En termes d'équivalence logique, on a donc :

" si A ou B , alors C " $\Leftrightarrow$ " (si A , alors C) et (si B , alors C) " .

Par contre, si l'hypothèse d'une conjecture est multiple de type "et", par exemple Q : (A et B) $\Rightarrow$ C, il suffit bien entendu que l'un des deux énoncés Q1 : $A \Rightarrow C$ ou Q2 : $B \Rightarrow C$ soit vrai pour que l'énoncé Q le soit a fortiori.

Si par exemple l'énoncé Q1 est vrai, cela signifie que l'hypothèse B de Q est "inutile"; cet énoncé Q n'est pas faux, on dit seulement qu'il est *moins puissant, moins intéressant* que Q1 car *moins facilement utilisable!*

On vérifie alors que : (Q1 ou Q2) $\Rightarrow$ Q ; la réciproque est-elle exacte ?

<u>La conclusion de cette étude sur le "ou" est double</u> :

- avant de distribuer automatiquement les "et" et les "ou" dans les implications, il faut bien réfléchir à ce dont on a réellement besoin, car sinon on risque de démontrer quelque chose de vrai ou de faux avec des arguments formellement faux !

-- à chaque fois qu'un doute surgit dans ce genre de transformation, la technique de recherche des contre-exemples peut très souvent nous montrer presque instantanément en quoi notre raisonnement formel qui a toutes les apparences du vrai est néanmoins faux !

L'implication, l'équivalence logique, la réciproque, la contraposée et la négation

Définitions et notations:

- **Une proposition logique ou propriété** est un énoncé A qui ne peut être que vrai ou faux. On note A pour A est vrai , non-A pour A est fausse.

- **L'implication** $A \Rightarrow B$ signifie : la propriété "si A, alors B " est vraie.

On peut "lire" cette proposition sans risque de contre-sens de la façon suivante :
"pour que B soit vraie, il suffit que A le soit".

- **L'équivalence logique** $A \Leftrightarrow B$ signifie que A et B ont le même caractère de vérité (toutes deux vraies, ou toutes deux fausses simultanément).

On peut "lire" cette proposition sans risque de contre-sens de la façon suivante :

"pour que B soit vraie, il faut et il suffit que A le soit"

ou encore

"pour que B soit fausse, il faut et il suffit que A le soit".

- La proposition " B $\Rightarrow$ A " est appelée <u>réciproque</u> de " A $\Rightarrow$ B ".

- La proposition " non-B $\Rightarrow$ non-A " est appelée <u>contraposée</u> de " A $\Rightarrow$ B ".

- <u>La négation</u> non-P d'une propriété P , c'est (<u>seulement</u>) l'affirmation que P est fausse.

<u>Propriétés générales sur les propositions</u> :

- La double négation : non-(non-A) $\Leftrightarrow$ A .

- La double implication : {"A $\Rightarrow$ B" et "B $\Rightarrow$ A"} $\Leftrightarrow$ {A $\Leftrightarrow$ B}.

- La règle de déduction ou sorite : Si A $\Rightarrow$ B et B $\Rightarrow$ C , alors A $\Rightarrow$ C .

<u>Les rapports entre implication et causalité</u>

Le paradoxe d'un lien logique entre:
la mort d'un chat, la vitesse des voitures et le nom du maire!

En octobre 1993 j'avais proposé aux étudiants du DEUG A1 D d'étudier les propositions suivantes :

<u>Les faits</u> : A 7 h. ce matin, Alain Carignon, maire de Grenoble, a vu un chat se faire écraser sur le boulevard Gambetta par des voitures qui roulaient très vite.

<u>Trois affirmations vraies tirées de ces faits:</u>

A : "A 7 h. ce matin, un chat s'est fait écraser sur le boulevard Gambetta de Grenoble."
B : "A 7 h. ce matin, des voitures roulaient très vite sur le bd. Gambetta de Grenoble."
C : "Le maire de Grenoble est Alain Carignon."

<u>Résoudre les conjectures suivantes dans le modèle mathématique</u> :

G1 : Si A , alors B. G2 : B $\Rightarrow$ A . G3 : A $\Leftrightarrow$ C .

<u>Institutionnalisation</u>

Le bon sens nous pousse à voir un lien de cause à effet entre B (les voitures vont très vite) et A (un chat est écrasé); par suite 20% des étudiants ont considéré que G2 était vrai. Par contre, au niveau du sens commun, *établir un lien d'équivalence entre* A (un chat est écrasé) *et* C (Alain Carignon est maire de Grenoble) relève de la démence !!!

C'est pourquoi seulement 10% des étudiants ont considéré G1 ou G3 comme vraies.

Et cependant, puisque les assertions A , B et C sont **simultanément** vraies, elles sont logiquement équivalentes !!! (elles auraient été simultanément fausses, elles auraient été tout autant équivalentes).

Nous touchons là aux différences fondamentales entre la logique mathématique et la logique du quotidien.

*** Dans la vie courante,** la logique que nous utilisons nous sert principalement à trouver des solutions acceptables à des problèmes immédiats, à vérifier la cohérence des solutions qui nous sont proposées et à justifier nos propres prises de décision.

Si ce que nous avons prévu par des raisonnements s'avère adapté aux situations particulières qui nous sont les plus familières, nous ne nous inquiétons pas trop de savoir si ces raisonnements peuvent ou non avoir une valeur universelle; nous ne nous sentons pas responsables s'ils deviennent de véritables pièges pour d'autres personnes placées dans des situations apparemment analogues, mais qui en fait sont suffisamment différentes pour que ce qui "marchait bien" avec nous ne "marche plus" du tout avec elles.

Quand un événement surprenant se produit dans notre environnement, plutôt que de chercher une faille dans nos raisonnements qui ne nous ont pas permis de le prévoir, nous cherchons davantage à trouver une cause externe, et quand quelque chose ne "marche pas" dans une organisation sociale, nous cherchons à trouver un responsable; en définitive, plutôt que de nous intéresser à ce qui est nécessaire dans un système de contraintes données, nous cherchons davantage à cerner ce qui semble être la cause directe des effets que nous constatons.

En résumé, ce qui prime donc dans une assertion de la vie quotidienne, c'est:

- **l'utilité immédiate du résultat** , i.e. la teneur de la conclusion,

- **la causalité :** si nous relions deux faits A et B dans une proposition de type " si A , alors B", le fait A est vu le plus souvent comme la cause de l'effet B .

En particulier lorsque le résultat ou effet B est considéré comme néfaste, nous nous attachons à supprimer *sa cause A* , c'est-à-dire que dans ce cas *la logique quotidienne du " si A , alors B " est de sous-entendre l'implication réciproque "et si non-A, alors non-B"* .

Deux exemples d'implications réciproques implicitement sous-entendues dans la logique du quotidien

I) Un père déclare à son fils en début d'année:

"si tu travailles, je te donnerai une moto en juin !"

Ce fils ne travaille pas ! Le père lui donne néanmoins une moto en juin ! Est-ce logique ?

II) Un père annonce à son fils en début d'année:

"si tu ne travailles pas, je ne te donnerai pas de moto en juin !"

Ce fils travaille ! Son père refuse néanmoins de lui donner une moto en juin! Est-ce logique ?

Dans le cadre de la vie quotidienne, l'attitude du père est considérée dans les deux cas comme totalement illogique, car dans le cas I) son affirmation sous-entend la réciproque :"et si tu ne travailles pas, je ne te donnerai pas de moto en juin", et dans le cas II), la réciproque *"et si tu travailles, je te donnerai une moto en juin !"* est également sous-entendue, non seulement pour le père et le fils, mais aussi pour toute personne de bonne foi.

Or en réalité, ce qui est nécessaire ici sur un plan purement logique, c'est dans le cas I de donner une moto en juin si le fils travaille, et dans le cas II de ne pas la lui donner s'il n'a pas travaillé !

Comme à chaque fois le fils s'est soustrait à l'hypothèse explicite de l'encouragement ou de la menace du père, les conclusions de ce dernier sont devenues logiquement contingentes.

Dans le cas I, le "don de moto" est logiquement non nécessaire mais licite (même si on peut le considérer comme un acte laxiste sur un plan éducatif); dans le second cas, le "non-don" n'est pas nécessaire non plus, mais il est logiquement correct (même si l'on peut être certain qu'il sera ressenti comme une injustice profonde par le fils et comme un acte de mauvaise foi caractérisé par toute personne témoin de cette scène).

* * <u>En mathématiques</u>, la logique sert essentiellement à prouver l'exactitude des conjectures, c'est-à-dire à montrer qu'elles ne sont pas fausses.

Pour cela il suffit que les liens utilisés pour établir des résultats ne conduisent pas à des résultats faux, que ces liens suffisent à montrer la nécessité des résultats !

Par suite, ***établir un lien d'implication ou d'équivalence logique entre deux assertions , <u>c'est seulement établir une relation non fausse entre les états de vérité de ces deux assertions!</u>***

Ainsi quand deux énoncés A et C sont tous deux toujours vrais comme dans les exemples précédents (ou tous deux toujours faux : hypothèse et conclusion de la conjecture C3 de Circuit) ou encore tous deux dans des états de vérité qui varient avec les faits particuliers, mais qui sur chacun d'entre eux sont simultanément vrais (resp. simultanément faux) (L1 , L4 dans notre circuit ou encore L1 , S1) , il est impossible de trouver de contre-exemple à l'assertion $A \Rightarrow C$ et de même pour l'assertion $C \Rightarrow A$; on dit alors que ces propositions A et C sont ***logiquement équivalentes,*** ce qui ne signifie pas le moins du monde a priori qu'elles aient le même sens, qu'elles "parlent directement de la même chose" ou encore que A soit la cause immédiate de B ou vice-versa.

<u>Un changement de sens radical!</u>

Il s'agit là d'une convention que l'on ne peut accepter en acte (i.e. que l'on ne va pas remettre en cause à la première difficulté) que si l'on change la signification que l'on accorde habituellement aux expressions "implique" ou "sont équivalents".

Dans le langage courant, deux phrases équivalentes sont deux phrases qui éventuellement diffèrent dans la forme, mais qui ont immédiatement le même sens, qui apportent directement la même information, qui sont synonymes; elles sont donc de surcroît toutes deux vraies ou toutes deux fausses simultanément.
L'équivalence des phrases ou des idées de la vie quotidienne a donc une double fonction : conservation du sens immédiat et conservation de l'état de vérité.

En logique mathématique, comme il est souvent difficile d'appréhender directement ce que représente le sens immédiat des objets ou des affirmations (un peu comme dans une partie d'échecs où le déplacement d'une pièce n'a pas grande signification en soi, car ce qui a du sens véritable, c'est le déplacement de cette pièce vu la position des autres pièces et la stratégie qu'on s'est définie pour la suite), **seule la deuxième fonction "préservation du caractère de vérité" est assignée à l'équivalence logique des assertions.**

De la même façon, l'implication, qui dans la vie quotidienne est vue essentiellement comme une relation de cause A à effet ou conséquence B , c'est-à-dire qui sous-entend très souvent l'implication réciproque, **doit en logique mathématique être vue uniquement comme une relation de nécessité non symétrique a priori : affirmer " si A , alors B ou encore $A \Rightarrow B$, en logique pure c'est se contenter de dire que A ne peut avoir lieu sans B** ou encore qu'il ne peut y avoir simultanéité ou coïncidence entre A et non B , i.e. (A et non-B) est un événement impossible dans notre modèle.

Dans $A \Rightarrow B$, A n'est donc pas à regarder comme la "raison ou la cause" de B , mais seulement comme un moyen (parmi d'autres) de se persuader que B est réalisé : *"lorsqu'on constate que A est vrai, on est certain que B l'est aussi" , " savoir A suffit pour savoir B " , "savoir non-B suffit pour savoir non-A "* (contraposition).

En définitive, l'implication : $A \Rightarrow B$ ou " si A , alors B " peut indifféremment être interprétée en mathématiques sans risque de contre-sens comme :

1) Il n'y a pas de A sans B.

2) "A et non-B" est impossible.

3) Pour que B soit vraie, il suffit que A le soit .

4) Pour que A soit fausse, il suffit que B le soit.

5) Quand A est vraie, B est nécessaire.

Quelques exemples mathématiques pour mieux marquer les différences d'interprétation entre logique du quotidien et logique mathématique:

I) L'implication mathématique "$A \Rightarrow B$" ne doit pas être interprétée a priori comme une relation de cause A à effet B , car :

- L'hypothèse d'une proposition logiquement vraie n'est pas nécessaire :

P : "Si $|x| \leq 2$, alors $x^2 \leq 4$ " est vraie,
mais

P': "Si $|x| \leq 1$, alors $x^2 \leq 4$ " est vraie aussi !

P' est "moins intéressante" que P , mais dans certains cas elle suffit!

- La vérité d'un énoncé ne se réfère pas à sa pertinence :

" Si $x \leq 1$, alors $x^2 \geq 0$ "

est un énoncé vrai dans R , bien que son hypothèse soit superflue ; il est déclaré moins intéressant ou moins puissant que l'énoncé vrai :

"Si $x \in R$, alors $x^2 \geq 0$ ".

II) L'équivalence logique " $A \Leftrightarrow B$ " ne signifie pas que A et B ont un rapport de sens entre eux, mais seulement que A et B ont le même caractère de vérité :

- tous deux vrais : $\pi \leq 4 \Leftrightarrow (x^2)' = 2x$,
- ou tous deux faux : $\pi = 4 \Leftrightarrow (x^2)' = 3x$,
- simultanément vrais ou (exclusif) faux :
  dans R $x = 1 \Leftrightarrow x^3 = 1$.

III) La négation "non-P" de la propriété P est seulement en mathématiques l'affirmation "P est faux!".

- Si P est une propriété qui ne porte que sur un seul événement particulier, la dichotomie définit sans ambiguïté l'état P et l'état non-P , et l'on a : "non-non-P" = P .

- Lorsque P est l'implication "si A, alors B", sa négation ne s'écrit pas "si A, alors non-B"

Par exemple, si A est la propriété sur les étudiants "être inscrit en DEUG A1 D au 1er octobre 1994" , si B est la propriété "être reçu au DEUG A1 en juin 1995", et si P est la propriété "si A, alors B", on peut être certain que P est fausse (car il y a des étudiants inscrits en octobre qui ont abandonné) mais on espère bien que la propriété non-P qui est vraie ne se traduira pas par "si A , alors non-B" !!!

La négation de P est donc seulement "il existe un contre-exemple à P " , et non pas "il n'existe pas d'exemple ! ".

Dans la vie courante, on utilise assez indifféremment les expressions "c'est l'inverse", "c'est faux", "c'est le contraire", signifiant suivant les contextes: "c'est la réciproque" (si non-A , alors non-B), "c'est faux dans au moins un cas particulier" (la négation mathématique), "c'est l'inverse" (si non-B, alors non-A : la contraposée mathématique), "c'est tout le contraire" (si A, alors non-B) etc!

En mathématiques on n'emploiera pas ces expressions car elles sont trop ambiguës, et on écrira explicitement en terme d'implication ou d'existence ce qu'on veut dire.

La négation des propositions qui s'expriment avec les quantificateurs universel $\forall$ et existentiel $\exists$.

- Si P est la proposition : " $\forall x \in U$: A(x) ",

i.e. "si $x \in U$, alors A(x)" , ou encore : " $x \in U \Rightarrow A(x)$" ,

sa négation non-P est : " $\exists x \in U$; non A(x) " ,

i.e. "il existe un contre-exemple", soit encore "il existe x dans U tel que A soit faux".

- Si Q est la proposition : " $\exists x \in V$; B(x)" ,

i.e. "il existe un x de V pour lequel la propriété B soit vraie",

sa négation non-Q est : " $\forall x \in V$: nonB(x) ,

i.e. la propriété B n'est vérifiée pour aucun x de V.

On peut vérifier alors que non-non P = P et que non-non Q = Q .

Mais il ne faudrait pas tirer de l'étude de ces deux cas la règle automatique : "Pour nier une propriété, il suffit de permuter les $\forall$ et les $\exists$ ", car en pratique c'est plus fin !

Par exemple, **dire que A est une partie majorée d'un ensemble ordonné E** , c'est dire que les éléments de A ne peuvent être arbitrairement grands ; cela s'écrira : "il existe un majorant a de A , i.e. un élément a de E qui domine tous les éléments x de A " soit :

$$P)\quad \exists a \in E ; \forall x \in A : x \leq a .$$

Dire que A est non bornée, c'est alors dire qu'on peut trouver dans A des éléments arbitrairement grands, c'est-à-dire qu'à chaque fois qu'on se donne un élément dans E , on peut en trouver un autre dans A qui soit strictement plus grand, ce qui s'écrira :

$$\text{Non-P})\quad \forall a \in E , \exists x \in A ; x > a .$$

Si cette négation vous paraît simple, il s'agit alors de vous tester pour savoir si vous pouvez expliquer en quoi elle ressemble ou elle diffère des propriétés Q et S suivantes, obtenues elles aussi en permutant les quantificateurs:

$$Q : "\exists x \in A ; \forall a \in E : x > a", \qquad S : "\forall x \in A ; \exists a \in E : x \leq a ".$$

La propriété Q signifie qu'il existe un élément de A qui est plus grand que tous les éléments de E , propriété qui n'est jamais vérifiée par exemple quand E = R (donc si Q était la négation de P , toutes les parties de R seraient bornées !!!)

La propriété S , par contre, est toujours vraie, donc en un certain sens vide de signification pour caractériser les parties non bornées ; en effet, elle signifie que tout élément x de A est dominé par au moins un élément a de E (comme A est une partie de E , il suffit de prendre a = x à chaque fois).

La propriété S n'est pas fausse, elle ne dit rien (c'est une tautologie ou vérité de La Palice), elle ne traduit donc ni le fait que A soit bornée, ni le fait que A soit non bornée.

L'expérience montre qu'une des sources principales d'erreurs de raisonnement logique en analyse est le traitement mécanique des quantificateurs.

Appel à conjectures sur les relations logiques entre certaines implications :

Si A et B sont des propositions quelconques et si

$$P : A \Rightarrow B , \quad Q : \text{non } B \Rightarrow \text{non } A , \quad R : \text{non } A \Rightarrow \text{non } B$$

sont trois propositions dont la vérité ou la fausseté dépendent des assertions A et B, y a-t-il des relations logiques universelles liant deux à deux les trois relations P, Q et R ?

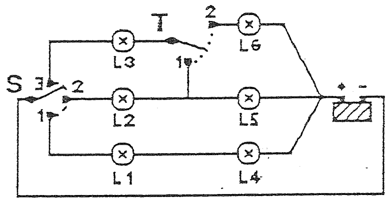
Propriétés générales sur les énoncés, réciproques et contraposées.

1) L'implication $P : \quad A \Rightarrow B$ et sa contraposée $Q : \text{non } B \Rightarrow \text{non } A$ sont logiquement équivalentes.

En d'autres termes : $P \Leftrightarrow Q$.

Cela donne un procédé de compréhension et/ou de démonstration d'une propriété : parfois la contraposée est plus significative, parfois elle est plus simple à démontrer ; elle est rarement les deux à la fois!

Par exemple, la conjecture C3) du circuit dont la véracité révoltait certains,



C3) : L_1 et $L_3 \Rightarrow L_2$ et non-L_5.

devient par contraposition : C'3) : **non (L_2 et non-L_5) $\Rightarrow$ non (L_1 et L_3)**

soit encore C'3) : non-L_2 ou $L_5 \Rightarrow$ non-L_1 ou non-L_3 .

On constate sans peine que cette propriété C'3 est vérifiée dans les six positions de S et T, elle n'a donc que des exemples; **elle est donc simultanément vraie et "utile"** (au sens de : elle a beaucoup d'exemples).

Par suite, au niveau du sens des objets, on n'éprouvera aucune difficulté pour convenir que cette contraposée C'3 de C3 est vraie, puisqu'elle est vérifiée dans tous les cas particuliers du modèle, alors qu'on rechignait à dire que C3 était vraie (par défaut) puisque ses hypothèses excluaient tous les cas particuliers du modèle.

Par contre, au niveau de la preuve, **si on ne s'est pas rendu compte que** (non-L_2 ou L_5) d'une part et (non-L_1 ou non-L_3) d'autre part **sont des tautologies (puisque leurs négations sont impossibles),** et si on veut montrer que la contraposée est vraie sans passer par **l'exhaustion des cas particuliers,** il nous faut montrer que :

d'une part a) : non -$L_2 \Rightarrow$ (non-L_1 ou non-L_3)

d'autre part b) : $L_5 \Rightarrow$ (non-L_1 ou non-L_3)

- La preuve de b) paraît évidente, car $L_5 \Rightarrow$ non-L_1 , donc a fortiori $L_5 \Rightarrow$ (non-L_1 ou non-L_3) .

- Par contre, a) n'est pas évident du tout à montrer, car on ne voit pas ce que nous apporte l'hypothèse non-L_2 pour prouver la conclusion (non-L_1 ou non-L_3).

On ne voit pas, car "il n'y a rien à voir" puisque cette hypothèse est "inutile" et même gênante dans la mesure où :

"non-$L_2 \Rightarrow$ non-S_2" , donc "non-$L_2 \Rightarrow$ (S1 ou S3)", et par suite "non-$L_2 \Rightarrow$ (L_1 ou L_3)", conclusion qui est presque la négation de la conclusion souhaitée (non-L_1 ou non-L_3).

Mais on ne se rend pas compte tout de suite de tout cela ! (la persistance de l'idée de causalité des hypothèses est probablement la "cause" de notre difficulté).

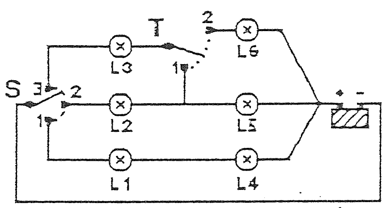
Ainsi, pour faire la preuve de la vérité, C3 est bien plus commode que sa contraposée car on voit immédiatement que C3 ne peut avoir de contre-exemple, alors que la preuve de sa contraposée peut nous laisser longtemps perplexe (au moins tant qu'on n'en prend pas la contraposée !) ; pour ce qui est du sens, c'est plutôt l'inverse.

D'où l'intérêt de pouvoir passer sans réticences d'une forme à l'autre afin de garder le sens et la rigueur !

2) L'implication $P : A \Rightarrow B$ et sa réciproque $R : B \Rightarrow A$ sont logiquement <u>indépendantes</u>

i.e. les conjectures $P \Leftrightarrow R$, $P \Rightarrow R$ et $R \Rightarrow P$ sont toutes les trois fausses !

Par exemple dans notre circuit :	C2 : si non-L_2 , alors non-L_5	est fausse
alors que sa réciproque	C'2 : si non-L_5 , alors non-L_2	est vraie !



Remarques:

- Par contraposition, on observe que :
  la réciproque de $A \Rightarrow B$ est logiquement équivalente à "non-A $\Rightarrow$ non-B" .

- Réciproque qu'il ne faut pas confondre avec la négation de $A \Rightarrow B$, négation qu'il n'est licite (répétons-le) d'écrire : $A \Rightarrow$ non-B que dans le cas exceptionnel où il n'y a qu'un cas particulier possible dans le modèle, puisqu'alors tous les cas particuliers sont (le) contre-exemple.

<u>Le principe de la démonstration</u>

Puisque pour établir la vérité de $A \Rightarrow B$, seul compte le fait de prouver qu'il ne peut y avoir de contre-exemples,

on abandonne le principe du maximum d'information :

<< dire la vérité au sens de dire "tout" ce qu'on sait >>

pour ne dire que ce qui rend la conclusion nécessaire !

Par exemple : résoudre en 2 mn la conjecture C :

C) L'équation en x : $\sin(\pi/6) + \dfrac{2.x^2}{x^6 + 5} = 4$ admet six solutions réelles.//

Cette conjecture est fausse, car cette équation n'a pas de solutions réelles.

Preuve: Comme $\sin(\pi/6) \leq 1$ et comme $\frac{2.x^2}{x^6 + 5} \leq 2$ (il suffit pour s'en persuader de séparer le cas $|x| < 1$ où la fraction est majorée par $2/5$ et le cas $|x| \geq 1$ où $x^2 \leq x^6 \leq x^6 + 5$) , le premier membre de l'équation est majoré par $1 + 2$, il ne peut donc égaler le second membre 4 !

En fait , on constate ici que c'est en acceptant de perdre de l'information :

$$\sin(\pi/6) \leq 1 \qquad \text{et} \qquad \frac{2.x^2}{x^6 + 5} \leq 2$$

qu'on obtient très facilement la preuve par l'absurde que l'équation n'a pas de solution .

Trois stratégies de preuve de $A \Rightarrow B$

- $A \Rightarrow C$ et $C \Rightarrow B$ *(déduction en introduisant des intermédiaires : partant de B, on cherche à introduire une chaîne de conditions suffisantes dont le dernier maillon aurait pour conclusion B et dont le premier maillon aurait pour hypothèse A)*

- non-B $\Rightarrow$ non-A *(contraposition)*

- "A et non-B " est impossible ou absurde ! *(démonstration par l'absurde)*

La démonstration par l'absurde :

Cest parfois le seul moyen dont on dispose pour montrer qu'une propriété est non-fausse, donc vraie !

Principe:

* Si la propriété est l'implication " $A \Rightarrow B$" :

- **on prend pour nouvelle hypothèse "A et non-B",**
- par une suite de déductions logiquement valides, **on essaye d'obtenir une absurdité** (i.e. une propriété certainement fausse ; par ex. $2 = 3$!) .
- puisque cette conclusion "absurde" a été obtenue par une suite de déductions valides, cela prouve que

l'hypothèse introduite "A et non-B" ne peut jamais être vraie .

Comme A est vraie, c'est que non-B est fausse, donc B est vraie; ce qu'on voulait montrer ! //

** Si la conjecture est : **" $\exists$ x, tel que $A(x) \Rightarrow B(x)$ ",**

on la démontre en exhibant un tel x ; on la nie en montrant qu'un tel x conduit à une absurdité.

Etude d'un exemple : la propriété cruciale "$\sqrt{2}$ est irrationnel"

Notre intuition première nous pousserait plutôt à énoncer le résultat inverse.

En effet, lorsqu'il s'agit de comparer les longueurs M et N de deux segments :

________M________ ______N_____

notre "bon sens" nous pousse à penser qu'on peut toujours trouver une unité de mesure U commune, i.e. une longueur U qui, mise m fois bout à bout, donne M , et mise n fois bout à bout donne N :

m n

Dans ce cas, on écrit : $M = m.U$ et $N = n.U$ ou encore $n.M = m.N$.

Les grandeurs M et N sont dites **commensurables;** le nombre $M/N = m/n$ est alors rationnel.

Comme "Pythagore" montre que la longueur de la diagonale du carré de côté unité est $\sqrt{2}$, *notre "bon sens" semble indiquer que : $\sqrt{2}$ est commensurable à 1 , i.e. est rationnel !!*

Preuve de l'affirmation : "$\sqrt{2}$ n'est pas rationnel"

Pour dépasser le simple "bon sens" qui ne permet pas de conclure ici,

- **appelons D l'affirmation : "$\sqrt{2}$ n'est pas rationnel";**
- **supposons non-D : $\sqrt{2}$ est rationnel**
- **et montrons que cela nous conduit à une absurdité.**

1) **Non-D** signifie qu'il existe deux entiers p et q tels que : $\sqrt{2} = p/q$.

2) **On peut supposer, sans changer le problème,** que les opérations de simplification par les multiples de 2 ont déjà été faites, i.e. que :

dans l'écriture $\sqrt{2} = p/q$, p est impair ou q est impair.

3) **On peut donc écrire que : non-D $\Rightarrow \Delta$**

Δ) Il existe deux entiers p et q non tous deux pairs vérifiant l'équation M

$$M : 2 . q^2 = p^2 .$$

4) **Démontrons que cette assertion Δ est absurde, en montrant que "l'écriture M" impose aux entiers p et q d'être tous deux pairs !!!**

a) L'écriture M : $2 . q^2 = p^2$, et q entier, montrent que p^2 est pair;

or p^2 pair $\Rightarrow$ p pair , donc P est pair .

<< La propriété " p^2 pair $\Rightarrow$ p pair " se montre par simple contraposition

(p impair $\Rightarrow$ p^2 impair) .

Preuve : si $p = 2.n + 1$, alors $p^2 = 4.n^2 + 4.n + 1$,

qui peut se réécrire $p^2 = 2.(2.n^2 + 2.n) + 1$,

écriture qui prouve que p^2 est impair". >>

b) Si p est pair, $p = 2.r$ pour un entier r ; par suite " M et q entier " $\Rightarrow$ L

$$L : \text{" } 2 . q^2 = 4 . r^2 , \text{ pour un entier } r \text{ ".}$$

Soit encore en simplifiant par 2 : L $\Rightarrow$ N

$$N : \text{" } 2 . r^2 = q^2 \text{ pour un entier } r \text{ ".}$$

Ce qui prouve *(par le raisonnement précédent)* que q est lui aussi pair.

Ce qui est absurde puisque dans Δ , on a pris p et q tels que l'un au moins soit impair !

Résoudre les conjectures

Les conjectures suivantes portent sur les fonctions réelles de variables réelles f et g_a , $a \in R$, définies par :

$\forall x \in R : f(x) = x^2$,

$\forall x \in R : g_a(x) = x(x-a)(x-1)$, a étant un paramètre réel quelconque.

Une fonction $h : R \rightarrow R$ est dite positive sur A si et seulement si : "$\forall x \in A : h(x) \geq 0$ ".

Résoudre les conjectures

C1 Si $a \geq 0$, g_a est une fonction positive sur $[0 , 1]$.

C2 Si $\int_0^1 g_a(x)\,dx \geq 0$, alors g_a est positive sur $[0 , 1]$.

C3 Si $f + g_a$ est positive sur R , alors g_a est positive sur R.

C4 Si $f(x) = 0$ et s'il existe a dans R tel que $f \circ g_a(x) = 0$, alors $x = 0$.

C5 Si g_2 est croissante sur l'intervalle I, alors $g_2 \circ f$ est croissante sur le même intervalle I.

C6 Si g_a est surjective, alors $f \circ g_a$ est injective.

C7 Si g_a n'est pas négative sur l'intervalle $[1 , 2]$, alors $a \leq 1$.

Démarche mathématique et situation-recherche

L'exemple de M.A.T.H.S en J.E.A.N.

Pierre Duchet et Charles Payan ont proposé aux participants des situations de recherche de problèmes, et sont intervenus pour présenter ce qui, à travers les expérimentations liées à Maths en jean, caractérisait une démarche scientifique dans ce cadre.

Les pages suivantes reprennent les idées essentielles développées durant cette journée, à partir des notes de Gilles Aldon et Claude Tisseron

Démarche mathématique et situation-recherche

Viser l'acquisition d'une démarche scientifique par l'élève de mathématique suppose que celui-ci vive des situations où il puisse mettre en œuvre une telle démarche. A notre sens, c'est l'action même de chercher qui est fondatrice de telles situations.

Première partie : une situation particulière : atelier de recherche

Dans quelle mesure peut-on dire que l'élève effectuant une étude sur un sujet mathématique effectue effectivement une recherche, au sens om le mathématicien effectue des recherches sur une question laissée ouverte par la communauté scientifique ? Afin de centrer cette interrogation sur son terme principal, les participants ont été invités à chercher un problème d'optimisation discrète

Deuxième partie : Situations-recherche et mise en œuvre d'une démarche scientifique

Qu'entend-on, au juste par « démarche scientifique » lorsqu'il s'agit de mathématique ? Dans quel type de situation l'élève pourra-t-il avoir une relation directe à l'objet d'étude, se comporter « comme un mathématicien » ? A partir d'exemples de dispositifs « Math.en.JEANS », les éléments essentiels de ces « situations-recherche » ont été discutées :

1) la science mathématique : un objet, une technique, une démarche.
2) effets didactiques d'une situation-recherche.
3) moyen de contrôles et de validation.

Action « Math.en.JEANS » :
Elle concerne deux établissements scolaires, au moins dix élèves et un professeur par établissement, et (au moins) un chercheur ou universitaire. Une action dure de six à huit mois et comporte :

Une activité simultanée dans les deux établissements (jumelage) sur les mêmes sujets (diversité des approches, débat, émulation) et rythmée pat le tenue de quatre séminaires mettant en présence chercheur, profs et élèves des deux établissements (statut des énoncés, recentrage scientifique, communication, structuration des connaissances, confrontation, publication/rôle de l'écrit).

Une activité hebdomadaire régulière (au moins deux heures) de tous les élèves qui le souhaitent (pas d'élitisme), de classes de niveaux différents (déstabilisation des représentations cognitives, dédramatisation de l'enjeu, créativité) qui travaillent en groupe (rôle du langage, stimulation, efficacité), sur de véritables sujets de recherche (problèmatiques larges et actuelles, outils conceptuels et connaissances à découvrir, voire à créer), en disposant d'outils de travail et de documentation adaptés (dépersonnalisation de la situation d'apprentissage, ouverture aux moyens modernes de calcul et de communication)

Chercheurs, professeurs et élèves des diverses actions de l'Association « Math.en.JEANS », organisent, entre le troisième et le quatrième séminaire un Congrès de synthèse où se rencontrent jeunes et mathématiciens (validations, ouverture, travail de communication, médiatisation)

Les professeurs assurent l'encadrement pédagogique, la promotion de « Math.en.JEANS », dans leurs établissements (particulièrement en direction des filles), l'accès à la documentation, ils assurent la corrélation avec les mathématiques scolaires, gèrent le nouveau contrat didactique et facilitent l'expression écrite (dont le rôle de mémoire est capital).

« Math.en.JEANS » : règles du jeu :

Règle 1 : Nous sommes là pour chercher ensemble sur des sujets bien définis. La recherche demande une certaine continuité ! On admettra donc que la présence régulière de ceux qui se sont inscits est indispensable.

Règle 2 : Qui dit recherche dit équipe de recherche. Nous fonctionnerons donc sur la base de groupes de 3 ou 4 élèves, groupes qui resteront stables.

Règle 3 : Pas de recherche sans mémoirs. Chaque groupe a donc un cahier de recherche dans lequel il consigne ses résultats. Au début de chaque séance, il désigne donc un secrétaire. A la fin de chaque séance, il réserve 10 minutes pour faire le bilan de ses résultats. Le secrétaire consigne ce bilan sur le cahier, et en rend compte en début de la séance suivante.

Règle 4 : Les sujets de recherche sont proposés par le chercheur et le professeur. Mais chaque élève, o groupe d'élèves peut suggérer de nouvelles pistes, ou de nouveaux problèmes.

Règle 5 : Toute règle est discutable. Nous verrons ensemble, à l'usage, s'il faut en modifier, en ajouter, ou en retrancher...

Troisième partie : Quelles connaissances sont en jeu dans une situation-recherche

Phase I : Positionnement

Exposé discussion concernant la nature et le statut des connaissances : connaissances requises, connaissances appelées, connaissances visées. Savoirs conceptuels et savoirs notionnels ; rapport aux savoirs et métaconnaissances. La preuve comme connaissance.

Phase II : Analyse de preuves

Atelier d'analyse de protocoles d'élèves.

Phase III : Quelle connaissance sur la preuve pour une démarche scientifique ?

Débat contradictoire

Phase I-Positionnement

Nous examinons ici très succintement la nature et le statut des connaissances mises en jeu dans une situation de recherche de type Math.en.JEANS.

Trois types de connaissances sont mis en jeu dans une situation de recherche :

- les connaissances qui sont requises sur l'objet pour en aborder l'étude dans la recherche.

Elles constituent des "prérequis" minimaux. Nous les évoquons ici seulement pour mémoire mais leur explicitation est indispensable pour connaître le niveau auquel un problème ou une situation de recherche peut être proposé.

Sur ce point, l'aspect ouvert des énoncés de situation de recherche est associé comme pour le "problème ouvert" à la possibilité d'une appropriation rapide de la situation par l'élève à travers des possibilités d'essais et de démarrage variées permettant des entrées à partir de diverses connaissances.

- les connaissances mobilisées par le sujet concernant l'objet d'étude. Elles sont en principe disponibles mais sous une forme "scolaire" qui ne les rend pas immédiatement opératoire dans un contexte de recherche.

- les connaissances visées comme résultat du processus. Elles de deux ordres :
  . des connaissances mathématiques sur l'objet d'étude,
  . des connaissances sur les méthodes de recherche : processus de preuve, élaboration de conjecture, statuts des divers énoncés. Connaissance de la nécessité de précision.

Ces connaissances méthodologiques, ne donnent pas lieu à institutionalisation. Leur acquisition est supposée être inhérente au processus de recherche lui-même.

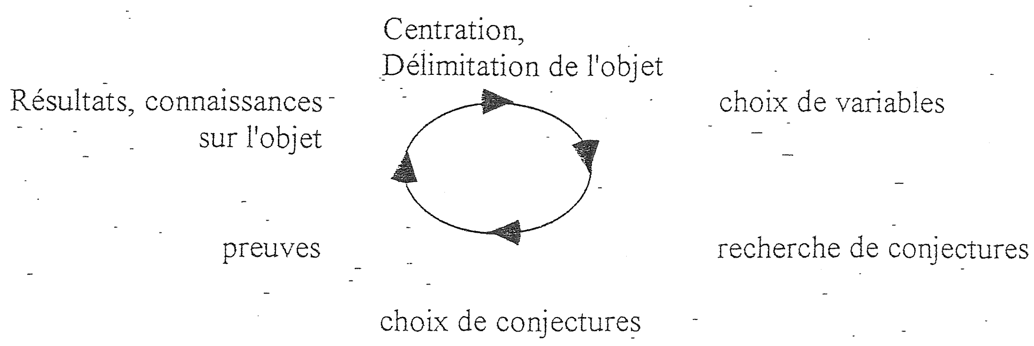
Les interviews d'élèves suivant MEJ à Lyon en 93-94 ont montré que les élèves ne sont pas spontanément capables d'expliciter ces connaissances. Néanmoins, l'enthousiasme des élèves chercheurs participant aux Congrès MEJ montre l'intérêt qu'ils ont fourni à vivre un processus de recherche.

Ce sont ces connaissances méthodologiques qui sont l'enjeu principal de MEJ. Elles sont supposées être les conséquences naturelles de la relation qui se crée entre un sujet et un objet mathématique à travers l'expérimentation d'un processus de recherche dans une situation mettant en jeu des composantes affectives, relationnelles, mathématiques, et méthodologiques.

Quelques aspects méthodologiques

Centrons nous sur la façon dont cette composante méthodologique fonctionne.La description que nous allons faire ne correspond pas à un processus linéaire. Il s'agit de moments qui pourront se reproduire sous diverses modalités lors d'une recherche.

On peut décrire classiquement le processus de recherche par le mouvement suivant :



Choix des variables : "purification de l'objet ".

Un premier aspect va consister à choisir dans l'objet de recherche un certain nombre de variables jugées pertinentes pour cette recherche. On peut décrire ce moment comme une "purification de l'objet " destinée à n'en retenir que les aspects provisoirement utiles.

Elaboration, choix de conjectures

Il est important de distinguer deux niveaux d'élaboration de conjectures suivant leur degré de difficulté pour le sujet.

Un premier niveau de type problème ouvert où, par des ajustements, des essais successifs et des erreurs rectifiés, on aboutit, dans le temps relativement court d'une ou deux séances de classe, à formuler une conjecture plausible puis une preuve convaincante, au niveau de rigueur possible dans la classe.

Un second niveau, présent seulement dans un processus de recherche vivant sur un temps plus long, consistant en conjectures dont la formulation, puis la preuve nécessitent un travail plus long, voire beaucoup plus long. Le travail sur une conjecture qui résiste constitue le coeur du processus de recherche. C'est lui qui va mobiliser les connaissances et les mettre à l'épreuve comme instruments de résolution et de preuve.

C'est à travers cette résistance que va s'affiner la connaissance des objets en jeu : l'objet d'étude et ceux permettant d'agir sur lui, qui seront mobilisés par l'élève chercheur comme seuls moyens de connaissance et d'action.

Cette résistance va amener l'élève chercheur à affiner sa connaissance de ses outils intellectuels par un jeu entre l'attention portée à la définition précise des concepts manipulés et l'attention portée aux opérations qu'il peut effectuer sur eux à partir des formulations de leurs propriétés (théorèmes...).

En passant, notons que cette "résistance" de l'objet mathématique stimule le mathématicien et lui donne le sentiment que les objets qu'ils manipulent ont une réelle existence.

Statut des résultats : positifs ou négatifs

Un second aspect important est le statut accordé aux résultats de la recherche. Dans un travail scolaire habituel, le résultat à démontrer est généralement explicité ou pour le moins évoqué par le maître, ou induit par le contrat didactique et le travail de l'élève consiste à en produire une preuve sous une forme contractuellement requise.

Dans un travail de type MeJ, dans un processus de recherche, l'élaboration de conjectures, puis leur vérification, fait partie intégrante du processus. Prouver qu'une conjecture est vraie est certes intéressante, mais prouver qu'elle est fausse est aussi interessant.

Une conjecture dont on a prouvé qu'elle est vraie ou fausse contribue à informer sur l'objet de la recherche, elle en délimite ses contours. De ce point de vue, le statut des résultats est fondamentalement différent dans un travail scolaire et dans un processus de recherche ou ce qui est à trouver n'est pas encore totalement explicité.

L'INTERACTION SOCIALE COMME MOTEUR DE LA RECHERCHE

Une hypothèse forte est que le travail en équipe est un élément stimulant et producteur dans le processus de recherche. Il permet la confrontation des points de vue par la communication des découvertes, la critique mutuelle, la communication de savoirs, etc... tout cela est bien connu.

Pour cette raison, les élèves-chercheurs sont mis en situation de travailler en équipes avec l'idée de reproduire le fonctionnement d'une même communauté scientifique dans des situations où l'enjeu personnel est la production de savoirs (même si ce savoir est connu par ailleurs le plus souvent).

Problèmes longs, transfert et conditions facilitantes

Problème long et transfert

Gilles ALDON
IREM de Lyon

Je voudrais développer ici le point de vue de l'enseignant, confronté à une situation de classe où tous les élèves disposaient d'un LCF. Cette expérience a lieu à Lyon depuis trois ans et a été rendu possible par les efforts financiers importants de l'IREM de Lyon et de la DITEN.
Pour préparer cette expérience d'intégration d'un LCF dans la classe de mathématiques, je me touvais devant un double défi : le programme de première à respecter et la grande capacité de calcul du logiciel. Pour répondre à ce double défi, je me suis appuyé sur les objectifs des programmes des classes scientifique ainsi que sur des hypothèses d'apprentissage, notamment la construction de la progression fait jouer aux problèmes un rôle central : problèmes dans le court terme repris séances après séances et problèmes dans le long terme, qui vivent sur plusieurs mois dans la classe et qui sont repris à intervalles réguliers dans la classe.

Les hypothèses de départ :
L'outil peut permettre de laisser une liberté aux élèves dans leurs recherches en leur permettant d'explorer une " piste " de travail sans être arrêté par des obstacles techniques, de se diriger vers des " problèmes générateurs de problèmes " en reprenant la terminologie donnée par Alain Bouvier. Par exemple, des problèmes qui auraient comme objectif une classification de tous les résultats possibles dans une situation donnée : ils imposent aux élèves de procéder dans un premier temps à de très nombreux essais puis à faire une synthèse des résultats trouvés.

Première remarque : faisons attention aux opinions trop optimistes et aux hypothèses naïves concernant l'utilisation en classe de tels outils. Si, effectivement ce type de logiciel peut répondre à la plupart des questions techniques qui se posent dans les classes de lycée, le seul fait de disposer de ce logiciel ne donne pas aux élèves les connaissances mathématiques indispensables pour diriger les calculs. Les quelques exemples donnés montrent bien le travail important à faire pour piloter ce type de logiciel. Notons à ce propos la remarque fondamentale de Michèle Artigue :

" il semblerait que l'on soit plutôt face à un système didactique soumis à des forces contradictoires :
la première favorisant comme indiqué un fonctionnement réflexif et conceptuel
la seconde favorisant au contraire une atomisation de la résolution en une muliplicité d'actions élémentaires
L'équilibre résultant entre ces forces contraires dépendent à la fois des caractéristiques de la tâche mais aussi des caractéristiques cognitives des élèves concernés.
Il semble donc nécessaire, quand on élabore des situations avec DERIVE, de prendre en comptes ces caractéristiques pour trouver un équilibre adéquat entre les tendances antagonistes qui seront nécessairement en jeu et, de plus jouent différemment d'un élève à l'autre "

Problèmes longs

Les objectifs de ces problèmes et l'organisation de la classe

Les objectifs des problèmes à long terme sont précisément les objectifs du programme : entrainer les élèves à la pratique d'une démarche scientifique en laissant développer par les élèves eux-même des recherches sur un temps long mais aussi en utilisant au fur et à mesure de leur apprentissage les notions enseignées comme outil dans la résolution d'un problème.

Les caractéristiques d'un problème à long terme :

- il sera cherché par les élèves sur un temps long, dépassant les barrières temporelles habituelles du temps de la classe ;

Cette recherche sur un temps long n'est pas habituelle pour un élève de première. Je vois là une première modification du contrat didactique. Cette modification pour être comprise dans la classe doit reposer sur une explicitation des règles du jeu. Bien sur, le seul discours du professeur est inutile et inopérant. Par conséquent, cette modification du contrat doit être appuyée par une "culture" de recherche de problèmes dans la classe. Une habitude de problèmes défis posés aux élèves, de questions renvoyées aux élèves à la suite d'une remarque, d'une généralisation d'un résultat trouvé dans un exercice...permettent de mettre en place un contrat dans lequel l'imagination, la recherche de conjectures, l'exploration d'un domaine sont pris en compte dans le déroulement de la classe et dans l'évaluation. Les conditions favorisant la dévolution du problème reposent sur une acceptation de la distinction entre la recherche d'une solution et la présentation d'une solution. Chercher, c'est accepter les imprécisions, les essais, les expériences, le flou. "le propre de l'intelligence humaine n'est-il pas de pouvoir travailler avec le flou et l'incertain" A.Bouvier. Le r™le du temps doit permettre aux élèves de développer cette phase de recherche sans avoir une obligation immédiate de production achevée.

- il pourra être abordé par les élèves dès la donnée de l'énoncé. Une première phase d'expériences pourra être mise en rapport avec des connaissances théoriques. La ou les premières solutions que les élèves pourront donner en utilisant leurs connaissances seront incomplètes (une ou plusieurs hypothèses ne pourront pas être prises en compte) ;

La dévolution du problème est une condition première de la réussite dans une situation de problème à long terme. Pour que les élèves transforme le problème posé par le maitre en leur problème, il est indispensable qu'a priori, ils soient capables de trouver dans leurs connaissances des pistes permettant d'avancer dans la recherche d'une solution. Dans ces conditions, le r™le d'un outil de calcul ou de représentation est essentiel pour permettre aux élèves de se lancer dans des expériences, d'explorer une piste de travail sans être arrêté par des obstacles techniques.
D'autre part, la possibilité de travailler sans contrainte temporelle trop forte doit permettre aux élèves de se poser à partir du problème initial des sous-problèmes : je vois là une seconde modification du contrat dans la classe. Se poser des problèmes me para"t une phase fondamentale du développement d'une démarche scientifique ; or cette possibilité ne peut être offerte aux élèves que s'ils peuvent légitimement (c'est à dire d'une façon reconnue dans l'espace social de la classe) dévier du problème posé par le maitre pour poser et chercher leur propre problème.

- les élèves pourront décider de la correction d'une solution proposée ;

"Cette caractéristique est essentielle : une fois que l'élève a investi ses connaissances, il faut qu'il prenne conscience de leur insuffisance, sinon, d'après le principe d'économie, il ne les fera pas évoluer, il cherchera seulement à les adapter. Cette insuffisance, c'est lui et lui seul qui peut en prendre conscience. Elle se constate par le fait que la réponse trouvée est fausse ou que la méthode utilisée est trop lourde." Arsac Problème ouvert et situation-problème.

- il rebondira au fur et à mesure de l'avancée du cours. Soit à la demande des élèves, soit parcequ'un objet enseigné pourra devenir outil dans sa résolution.

Le cours mené parallèlement à la recherche par les élèves du problème, amène des outils de résolution adaptés. Dans une situation idéale, les élèves feront le lien entre les objets enseignés et les outils nécessaires à la résolution du problème. Dans une situation plus "normale" de classe, le r™le de l'enseignant sera de faciliter l'explicitation du caractère outil du concept mathématique présenté et ce, par des activités spécifiques. Il est bon de penser à ne pas rentrer dans un effet Pygmalion et le choix des activités est tout à fait fondamental ; par exemple : les élèves arrivent au problème du raccordement de courbes par les tangentes. En classe, la notion de nombre dérivé a été abordée, j'ai proposé la situation suivante : trouver une fonction du second degré dont le sommet a pour abscisse

2 et tangente en x = 4 à la droite y = 2x-3 ; ou bien : Déterminer les points d'intersection des courbes des deux fonctions : $f(x) = x^3$ et $g(x) = 3x^2 - 3x + 1$. Quelles sont les tangentes aux deux courbes en ce point ? Faire un dessin.

- il sera cherché dans un premier temps en classe puis repris à intervalles réguliers par l'organisation de comptes-rendus (mise en commun des résultats favorisant la communication entre élèves).

La problèmatisation et la reformulation du problème seront l'objectif de ces phases. Ces phases de communication donneront également aux élèves des balises tout au long de l'année permettant d'organiser leur travail. Elles permettent aussi à l'enseignant de faire le point des différentes pistes suivies par les élèves et le cas échéant de rediriger les recherches. Enfin, ces phases sont aussi le lieu où l'enseignant peut montrer des possibilités des outils utilisés lorsque c'est nécessaire (le but n'étant pas d'enseigner toutes les "ficelles" d'un logiciel ou d'une calculatrice mais de permettre d'utiliser à bon escient cet outil pour résoudre des problèmes de mathématiques).

Des exemples

Voiture, TGV

Mon analyse a priori reposait sur le fait que tout au long de l'année, les élèves pourraient chercher des solutions qui évolueraient au fur et à mesure de l'apport de nouvelles connaissances. Le concept de fonction est ici central mais l'utilisation des approximations, des encadrements, la notion de nombre dérivé jouent un rôle déterminant dans la résolution de ce problème.
Une remarque concernant les deux énoncés : les deux énoncés, bien que proches en ce sens qu'il s'agit de trouver une courbe d'une fonction " sous contrainte " sont différents au sens où l'idée que se font les élèves de la carosserie d'une voiture (pas d'angles vifs, forme standard,...) relance assez naturellement la recherche, ce qui n'est pas le cas pour la voie de chemin de fer : certes ils ne doit pas y avoir d'angles trop importants, mais le raccordement par des tangentes ne s'impose pas naturellement. On voit ici l'importance du contexte de l'énoncé ; même si on ne peut pas parler à proprement parler d'un problème de modélisation, le contexte support du problème a une importance très grande quant au retour et au contrôle par les élèves d'une soution fournie.

x^n *- 1*

Toutes ces expériences nous ont montré que le temps est un élément important dans la recherche d'un problème de ce type : en particulier, les élèves n'ont pas le temps de reformuler l'énoncé pour rediriger la recherche bien que ces reformulations apparaissent dans leurs travaux. Il m'a semblé dans ces conditions que ce problème pourrait être cherché dans un temps long. Michèle Artigue dans le même texte signale à propos de cette expérimentation : "Un problème comme celui-ci, dont justement cette expérimentation pour limitée qu'elle soit, nous a aidé à prendre la mesure, nécessite pour vivre de dépasser le statut d'activité gadget, qu'on lui consacre du temps et ce même si l'on dispose pour soutenir le travail d'outils puissants comme DERIVE. Il est clair que le temps effectif d'enseignement n'est pas extensible et que des choix s'imposent. On ne peut à la fois multiplier les activités de recherche et donner à chacune un temps suffisant pour la rendre significative et productrice. On ne peut non plus espérer qu'une activité de recherche conséquente soit entièrement intégrée au temps effectif d'enseignement. Il faut trouver les moyens de faire vivre dans le temps privé des élèves, hors temps scolaire. Ceci pose bien sûr aussi le problème de l'accessibilité des outils nécessaires à la recherche, ici de DERIVE hors temps d'enseignement officiel, loin d'être résolu à l'heure actuelle".

Je me propose dans cette partie de rendre compte des démarches suivies par les élèves, de leurs résultats ainsi que de la gestion de ma classe de première S.

La recherche d'un problème sur un temps long (ici environ trois mois) nécessite une organisation particulière du travail des élèves ; en particulier, les phases de communication internes à la classe ou en direction d'autres classes sont nécessaires pour :

- donner aux élèves des échéances permettant d'organiser leur travail
- permettre à l'ensemble de la classe de profiter des stratégies de chacun
- donner à l'enseignant la possibilité de rediriger les recherches des élèves.

L'organisation générale de ce travail a été la suivante :
Les élèves travaillent en groupe de 4 ou 5.

- Une séance d'une heure de recherche en classe
- Une séance d'une heure de bilan
- Une séance d'une demi-heure d'exposés
- Une séance de une heure et demie de bilan.

L'essentiel du travail de recherche des élèves se faisant à la maison.

L'objectif de ce travail est de faire entrer les élèves dans une micro-recherche en mathématiques et donc de faciliter l'apprentissage de méthodes scientifiques. Les capacités visées portent plus sur un apprentissage de méthodes (organisation des essais, émission d'une conjecture, vérification) et sur la compréhension du statut de théorème d'un résultat mathématique (passage de la conjecture au théorème par la démonstration) que sur des contenus.

Enoncé du problème et consignes :

Trouver des factorisations de $x^n - 1$ pour n entier positif. Consigne : écrire les résultats auxquels vous êtes arrivés sous la forme de "présumés-théorème"

Les premiers résultats de la recherche de la factorisation de $x^n - 1$:

Comme prévu les deux interprétations décrites par Michèle Artigue coexistent dans ces premiers résultats :

- Tous les groupes ont trouvé la factorisation par $(x-1)$.
- Plusieurs groupes ont trouvé la factorisation par $(x-1)(x+1)$ dans le cas n pair.
- Un groupe a donné le résultat suivant pour les puissances de 2 :
  $(x-1)(x+1)(x^2+1)..(x^{n/2}+1)$

L'essentiel du débat dans la première phase de mise en commun porte sur la validité d'un énoncé mathématique : les problèmes de la généralité d'un résultat et de la nécessité d'une preuve sont posés à partir des premières propositions des élèves.

Par exemple, une longue discussion a opposé les élèves concernant le "présumé-théorème" suivant, que l'on retrouve dans beaucoup de compte-rendus :
Pour n impair $x^n-1= (x-1)(x^{n-1}+...+x+1)$
Un travail supplémentaire était nécessaire pour préciser le sens donné au mot "théorème" employé en mathématiques. J'ai donc demandé aux élèves de se mettre d'accord sur un énoncé, entre :

1) Pour tout n impair supérieur à 1 $x^n-1= (x-1)(x^{n-1}+...+x+1)$
et
2) Pour tout n supérieur à 1 $x^n-1= (x-1)(x^{n-1}+...+x+1)$

Les arguments exposés par les élèves étaient de plusieurs types : les tenants de la formulation 1 ont clairement annoncés que le logiciel fournit, dans le cas n pair, une factorisation plus "complète" et que cette formulation n'était donc pas correcte pour le cas n pair. Pour les autres, l'argument exhibé était une preuve : développement du produit. La discussion entre les deux groupes était particulièrement difficile puisque les arguments avancés étaient de nature complètement différente. Les uns portant sur le sens de l'énoncé et les autres sur le résultat mathématique. J'ai pu à cette occasion préciser les deux sens que l'on pouvait donner à l'énoncé du problème sans d'ailleurs imposer une interprétation à la classe : à partir des résultats proposés, j'ai reformulé les différentes pistes pour poursuivre les recherches de la manière suivante :

1) Chercher des démonstrations concernant les conjectures
   A ce stade une seule démonstration a été proposée par un élève : factorisation par x-1.
2) Généraliser le résultat concernant les puissances de 2...
   peut-on prévoir les factorisations pour les puissances de 3, de 5...
3) S'intéresser au cas des n impairs
4) Pour les n pairs peut-on prévoir les facteur(s) différents de $(x-1)(x+1)$
5) Pour quelles valeurs de n la factorisation par x-1 est-elle "complète" ?

Trois semaines plus tard, j'organise une nouvelle mise en commun :

Dans cette séance (courte : Ω heure), je demande à chaque groupe de dire à l'ensemble de la classe les résultats de leurs recherche ; mon rôle est ici de faire formuler les résultats. J'essaye de ne donner aucune indication quant à la validité de ces résultats cependant je demande une preuve pour chaque résultat annoncé. Cette séance me permet de savoir où en sont les recherches des élèves en mettant en commun l'ensemble de leurs résultats mais surtout de relancer ces recherches en fixant aux différents groupes des pistes de travail pour continuer. Cette phase me paraît tout à fait fondamentale pour que les élèves ne se découragent pas (c'est en effet un exercice difficile et inhabituel pour un élève de première que de chercher un problème sur trois mois ! D'autant plus difficile que le problème est ouvert et que les résultats ne sont pas standards), mais aussi pour permettre aux élèves de préciser leurs propres démarches.

Les résultats annoncés par les élèves :

Si n est une puissance de 2 alors :
$x^n - 1 = (x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)...(x^{n/2}+1)$
   la preuve proposée par un élève de la classe :
$(x-1)(x+1) = x^2-1$
$(x^2-1)(x^2+1) = x^4-1$
...
$(x^{n/2}-1)(x^{n/2}+1) = x^n - 1$

Si n est une puissance de 3 alors :
$x^n - 1 = (x-1)(x^2+x+1)(x^6+x^3+1)...(x^{2n/3}+x^{n/3}+1)$

Si n est une puissance de 5 alors :
$x^n - 1 = (x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^{n-5}+x^{n-10}+...+x^5+1)$

Si n est une puissance de 7
$x^n - 1 = (x-1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)(x^{42}+x^{35}+x^{28}+x^{21}+x^{14}+x^7+1)...(x^{6n/7}+x^{5n/7}+...+1)$

Il est à noter que seule la factorisation obtenue lorsque n est une puissance de 5 n'est pas un résultat fourni par DERIVE. Le groupe d'élèves qui a proposé cette factorisation a présenté une preuve obtenue en développant ce produit.

Une communication en direction d'autres élèves appartenant à d'autres classes de l'académie est prévue avant les vacances de Noël. J'organise donc une dernière séance de mise en commun en classe. Durée : 1h30 (30mn de travail par groupe et 1 heure de rédaction définitive et commune de la communication aux autres classes).

Voici cette communication :

Pour tout n, on a :

$x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1)$

Preuve faite

Pour tout n puissance de 2 :

$x^n - 1 = (x-1)(x+1)(x^2+1)\ldots(x^{n/2}+1)$

Preuve faite

Pour tout n puissance de 3 :

$x^n - 1 = (x-1)(x^2+x+1)(x^6+x^3+1)\ldots(x^c+x^d+1)$ où $c= 2n/3$ et $d = n/3$

Pas de preuve

Pour tout n puissance de 5 :

$x^n - 1 = (x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^{20}+x^{15}+x^{10}+x^5+1)\ldots(x^A+x^B+x^C+x^D+1)$

où $A = 4n/5$, $B = 3n/5$, $C = 2n/5$, $D = n/5$

$x^n - 1 = (x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^{n-5}+x^{n-10}+x^{n-15}+\ldots+x^5+1)$

Pas de preuve

Pour tout n puissance de 7 :

$x^n - 1 =$

$(x-1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)(x^{42}+x^{35}+x^{28}+x^{21}+x^{14}+x^7+x+1)\ldots$

$(x^A+x^B+x^C+x^D+x^E+x^F+1)$

où $A = 6n/7$, $B = 5n/7$, $C = 4n/7$, $D = 3n/7$, $E = 2n/7$, $F = n/7$

Pas de preuve

Pour tout nombre premier, on a la seule factorisation :

$x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1)$

Pas de preuve

Pour tout n pair, on a :

$x^n - 1 = (x^{n/2} + 1)(x^{n/2} - 1)$

preuve faite

Pour tout n = wk, on a :

$x^n - 1 = (x-1)(x^{w-1}+x^{w-2}+\ldots+x+1)(x^{n-w}+x^{n-2w}+\ldots+1)$

preuve faite.

On a essayé :

$x^{0,4} - 1 = (x^{1/5} - 1)(x^{1/5} + 1)$

$x^{0,8} - 1 = (x^{1/5} - 1)(x^{1/5} + 1)(x^{2/5} - 1)$

$x^{0,7} - 1 = (x^{1/10} - 1)(x^{3/5} + x^{1/2} + x^{2/5} + x^{3/10} + x^{1/5} + x^{1/10} +1)$

Question : qu'est ce que c'est que $x^{a/b}$?

Quelques remarques concernant l'ensemble du travail

Il semble que les notations "formelles" (notations indicées en particulier) sont bien assimilées. A partir du moment où les élèves ont "inventé" cette notation, ils en ont une meilleure maîtrise. C'est un savoir qui est réinvestissable dans d'autres domaines.

Après la première phase de recherche, j'ai remarqué que les élèves avaient une phase de découragement ou d'interrogations : "y-a-t-il encore d'autres choses à trouver ?" m'a demandé un élève. Cependant, lors de la deuxième mise en commun, les élèves avaient trouvé un grand nombre de résultats et testé beaucoup sur l'ordinateur. Une élève m'a montré la factorisation de x625 - 1 pour appuyer un résultat général sur la factorisation dans le cas n puissance de 5 ! Il est important de noter que le rôle de l'enseignant change dans le cadre d'une recherche sur un temps long : non plus de faire émerger les solutions souhaitées a-priori mais plus de suivre les interrogations des élèves pour faire rebondir la recherche.

Les deux interprétations de la tache signalées par Michèle Artigue sont présentes dans ces résultats : résultats permettant de prévoir la factorisation rationnelle de DERIVE et résultats généraux ; c'est le cas par exemple des deux factorisations fournies pour les puissances de 5 :

$$x^n - 1 = (x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^{20}+x^{15}+x^{10}+x^5+1)\ldots(x^A+x^B+x^C+x^D+1)$$

où A = 4n/5, B = 3n/5, C = 2n/5, D = n/5. C'est la factorisation DERIVE

$x^n - 1 = (x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^{n-5}+x^{n-10}+x^{n-15}+\ldots+x^5+1)$. Ce résultat ne peut pas s'obtenir directement sur DERIVE
De la même façon, la factorisation pour n=wk n'est pas obtenu directement avec DERIVE.

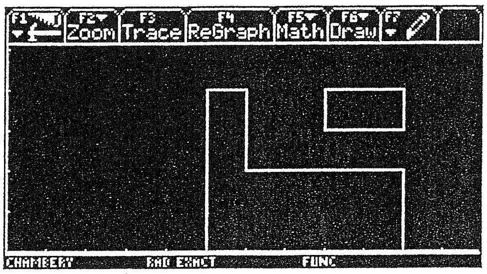
Les élèves qui sont restés dans la première interprétation ont été amené à restreindre leur champ de recherche : les puissances de nombre entier (2,3,5, 7), les nombres premiers. La méconnaissance des propriétés arithmétiques élémentaires est sans doute la cause d'une exploration peu systématique des nombres : il aurait été possible d'introduire à cette occasion ces propriétés, mais l'arithmétique ne fait malheureusement pas partie des programmes du secondaire ! Le travail fourni sur les polynômes par ces élèves leur a permis de comprendre "en acte" ce concept. Pour ces élèves, c'est essentiellement la commande Factor de DERIVE qui a été utilisée, permettant de repérer des régularités en multipliant les essais et de tester des conjectures. Ceux qui ont dirigé leurs recherches sur des résultats généraux ont, en revanche, utilisé plus de commande du logiciel pour regrouper des facteurs, les développer, diviser... Ce travail a nécessité de mettre en place des stratégies élaborées et d'effectuer sur les polynômes des calculs qui ne sont pas habituels en classe de première. Pour les uns comme pour les autres, ce problème a été l'occasion de rentrer dans une démarche de recherche en mathématiques en vraie grandeur. Les questions que les élèves ont été amenés à se poser concernant la nature d'un résultat mathématique sont un aspect de l'apprentissage des méthodes scientifiques. De même que l'ensemble des phases que les élèves ont explicité à travers les différentes communications des résultats (reformulation du problème, émission de conjectures, passage à la preuve, référence à une théorie, rédaction et exposés des résultats).

Le rôle de DERIVE est bien sûr primordial dans ce problème : il permet, bien sur, de multiplier les essais pour faire émerger des régularités, mais aussi de tester des hypothèses, de mener à bien des calculs complexes. Dans les phases de mise en commun, les élèves ont pu vérifier rapidement les résultats proposés par leurs camarades.

A travers la recherche de ce problème (et d'une manière générale à travers la recherche de problèmes sur un long terme) les élèves acquièrent de l'autonomie vis à vis de l'outil et seront capables de réinvestir leurs connaissances dans d'autres cadres. La connaissance de l'outil et de sa pertinence passe par son utilisation dans la recherche de problèmes !

D'autres questions peuvent se poser : ainsi la réponse donnée par DERIVE à la factorisation de x^n-1 pour des valeurs non entières de n renvoie une nouvelle question... l'aventure n'est pas terminée !

Un problème en terminale proposé par Luc Trouche :



Le dessin est une modélisation des contraintes s'exerçant sur la trajectoire d'un avion :
Il décolle en O, doit passer au dessus du relief qui culmine en B, puis passer au dessus du plateau et sous la masse nuageuse, et enfin atterir sur une piste de longueur infinie : le contact entre l'avion et la piste devra se faire à l'infini.
Question 1 :
Déterminer une fonction dont la représentation graphique satisfasse à toutes ces contraintes. On n'utilisera que des combinaisons de fonctions puissance et de l'exponentielle.
Question 2 :
On veut optimiser le trajet. L'idée est que l'avion monte " le moins possible ".

la pente maximale de l'avion soit la plus faible possible
ou bien
l'avion devra voler au plus près des reliefs ; il faudra minimiser l'integrale de f.

Quelles fonctions peut-on étudier :

Un dernier type d'énoncé qui consiste en une classification et une étude systématique d'un domaine :

les fonctions polynômes de degré 3, 4, ...
les fonctions rationnelles du type :

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d} \text{ ou } f(x)=\frac{ax+b}{cx^2+dx+e} \text{ ou encore } f(x)=\frac{ax^2+bx+c}{dx^2+ex+g}\ldots$$

les fonctions du type $\sqrt{ax+b}$ ou $\sqrt{ax^2+bx+c}$

...

Donner les résultats fournis par les élèves.

Un autre énoncé en préparation :
Faire le point sur toutes les équations que l'on sait résoudre et celles que l'on ne sait pas résoudre.
Si on ne sait pas résoudre une équation, trouver des méthodes permettant d'approcher les solutions aussi près que l'on veut.

Toute petite première analyse en vrac :

A priori, tous les élèves de première peuvent aborder le problème posé : connaissance de méthodes de résolution d'équations du premier degré, du second degré (ça fait partie du cours), d'équations polynômes de degré supèrieur pouvant se factoriser. Cette première phase permettant de faire le point devrait également permettre aux élèves de prendre conscience du fait qu'ils ne savent pas résoudre beaucoup d'équations (nous non plus d'ailleurs !). On peut supposer que des équations transcendantes pourraient apparaître dans le catalogue ! Des méthodes géométriques pourraient alors être envisageables (cf. équation de Képler x=t-e sin(x)).

La difficulté du problème peut être rendu sensible par l'utilisation de la calculatrice qui résoud instantanément l'équation (x-2)(x-3)(x-5)=0 mais qui ne sait pas (dans un temps raisonnable) résoudre la même équation lorsque le premier membre a été développé.
L'étude de représentations graphiques des fonctions usuelles permet de faire le lien entre la résolution d'une équation et l'étude d'une fonction (au moins dans un premier temps avec la représentation graphique d'une fonction).

L'idée de suite peut sembler naturelle si l'on veut s'approcher de plus en plus d'une solution.

L'utilisation de la calculatrice peut être multiple :

vérification dans le cas où elle donne une valeur exacte.
représentation graphique
calcul différentiel et programmation formelle.
aide à des calculs pouvant être complexes
factorisation

Le rôle du logiciel

Les LCF favorisent une dévolution du problème : les élèves ont a priori un moyen de rentrer dans le problème, de commencer les recherches par une phase exploratoire et expérimentale pour progressivement rentrer dans une démarche reflexive. Cependant l'utilisation d'un LCF n'est pas suffisant pour permettre de faire vivre en classe ce type de situations. Il ne s'agit que d'un élément facilitant ; mais il serait illusoire de donner au logiciel un rôle trop important. L'expérience montre que pour tirer profit au maximum de l'outil, les élèves doivent être capables de savoir quand et comment s'en servir et surtout quand il ne faut pas s'en servir. Il me semble que ce nécéssaire recul vis à vis de l'outil ne va pas de soi et qu'il doit être l'objet de discussions et de négociations à l'intérieur de la classe et notamment c'est un des objectifs des phases de communication. Ce qui ramène au délicat problème de la gestion de la classe dans ce genre de situations et les interventions du prof qui doivent porter à la fois sur le contenu mathématique du travail réalisé par les élèves mais aussi sur la démarche mise en place par les élèves. Le travail d'analyse des différentes observations menées pendant ces années devrait nous permettre de nommer les éléments essentiels de façon à engager un processus de transfert de ce qui n'est encore qu'une innovation. Par exemple, Luc Trouche qui a mis en place un tel type de problème dans sa classe cette année signale :

" Trois éléments semblent en tout cas certains :

- c'est parce qu'il y a eu un travail régulier de recherche, toute l'année, dans des situations variées que les élèves ont pu s'engager dans une recherche plus ardue dans le cadre du " problème long "

- réciproquement, l'existence de ce problème de longue haleine a donné une continuité de travail sur une bonne partie de l'année, a maintenu une " tension intellectuelle " dont une bonne partie de la classe a profité

- la possession d'un outil comme la TI92 a permis à bon nombre d'élèves de s'approprier des " petits bouts " de solution, de voir une partie de l'objet en cours de construction "

Pour revenir en guise de conclusion aux apports de logiciels de calcul formel à l'enseignement des maths, je voudrais illustrer mon propos par quelques opinions des élèves recueillis par des interviews et des questionnaires.

Une hypothèse forte fondant cette expérience résidait dans le fait que la posséssion privée du logiciel permettrait une meilleure connaissance de ses possibilités et de ses limites. Cette hypothèse se trouve confirmée par l'utilisation que les élèves en ont fait :
"de toutes façons, l'ordinateur il réfléchissait par rapport à ce que je lui donnais donc si je lui donnais des données fausses il me donnais un résultat faux".

Un autre élève raconte : "Comme on faisait les fonctions, j'aimais bien regarder la courbe que l'ordinateur me traçait, je visualisais et en même temps je voyais les calculs à côté".

"Pour moi, le problème “ étude de fonctions ” a été très enrichissant du point de vue mathématique et nous a permis de travailler en groupe...."

Ce sentiment lié au travail en groupe revient souvent dans les avis donnés par les élèves avec cependant des bémols liés au travail de chacun dans le groupe.

"Pour moi, le problème “ étude de fonctions ” a été intéressant et utile. Utile car cela m'a permis de réviser mes leçons grace à la pratique et aux recherches (applications concrètes). Celà m'a également permis de me familiariser avec la TI92"

Le lien avec le cours est signalé dans plusieurs fiches

"Pour moi, le problème “ étude de fonctions ” a été une corvée au début mais est devenu plus intéressant au fur et à mesure que l'on trouvait des résultats. Pourtant les exposés oraux ont été difficiles car ils étaient parfois ennuyeux à cause des longues démonstrations ou ne m'intéressaient pas."

Sentiment très partagé en ce qui concerne les exposés. Si des élèves ont appréciés les phases de communication, on voit ici que ce n'est pas complètement partagé : cette remarque doit être prise en compte pour la gestion de la classe et en particulier des phases de communications. Un autre problème se pose quant à l'évaluation du travail de groupe ; je ne veux pas ici rentrer dans les détails de ce problème crucial qui demanderait un développement long ! Cependant, et en lien avec les machines et leur utilisation, on peut noter quelques questions dont les réponses ne sont pas évidentes : quel est le statut d'un résultat fourni par la machine ? Quel est le statut de la machine dans une recherche ? Quand doit-on vérifier un résultat fourni et quand peut-on lui faire confiance ? Peut-on légitimement donner un résultat fourni par la machine ? ou plus précisément quel contrat vis à vis des résultats de la calculatrice sera négocié dans la classe ?

Je laisse cependant la conclusion à cet élève pour me faire plaisir, et je vous jure que je ne lui est pas souflé la réponse !

"Pour moi, le problème “ étude de fonctions ” a été une bonne expérience de travail en commun et de recherche mathématique. Je trouve les résultats rigoureux et très intéressants. Nous avons appliqué une véritable méthode scientifique : observation, analyse des résultats, théorisation et vérification (mise en application)"

Problèmes longs, transfert et conditions facilitantes

Problème long et transfert

Gilles ALDON
IREM de Lyon

Je voudrais développer ici le point de vue de l'enseignant, confronté à une situation de classe où tous les élèves disposaient d'un LCF. Cette expérience a lieu à Lyon depuis trois ans et a été rendu possible par les efforts financiers importants de l'IREM de Lyon et de la DITEN.
Pour préparer cette expérience d'intégration d'un LCF dans la classe de mathématiques, je me touvais devant un double défi : le programme de première à respecter et la grande capacité de calcul du logiciel. Pour répondre à ce double défi, je me suis appuyé sur les objectifs des programmes des classes scientifique ainsi que sur des hypothèses d'apprentissage, notamment la construction de la progression fait jouer aux problèmes un rôle central : problèmes dans le court terme repris séances après séances et problèmes dans le long terme, qui vivent sur plusieurs mois dans la classe et qui sont repris à intervalles réguliers dans la classe.

Les hypothèses de départ :
L'outil peut permettre de laisser une liberté aux élèves dans leurs recherches en leur permettant d'explorer une " piste " de travail sans être arrêté par des obstacles techniques, de se diriger vers des " problèmes générateurs de problèmes " en reprenant la terminologie donnée par Alain Bouvier. Par exemple, des problèmes qui auraient comme objectif une classification de tous les résultats possibles dans une situation donnée : ils imposent aux élèves de procéder dans un premier temps à de très nombreux essais puis à faire une synthèse des résultats trouvés.

Première remarque : faisons attention aux opinions trop optimistes et aux hypothèses naïves concernant l'utilisation en classe de tels outils. Si, effectivement ce type de logiciel peut répondre à la plupart des questions techniques qui se posent dans les classes de lycée, le seul fait de disposer de ce logiciel ne donne pas aux élèves les connaissances mathématiques indispensables pour diriger les calculs. Les quelques exemples donnés montrent bien le travail important à faire pour piloter ce type de logiciel. Notons à ce propos la remarque fondamentale de Michèle Artigue :

" il semblerait que l'on soit plutôt face à un système didactique soumis à des forces contradictoires :
la première favorisant comme indiqué un fonctionnement réflexif et conceptuel
la seconde favorisant au contraire une atomisation de la résolution en une muliplicité d'actions élémentaires
L'équilibre résultant entre ces forces contraires dépendent à la fois des caractéristiques de la tâche mais aussi des caractéristiques cognitives des élèves concernés.
Il semble donc nécessaire, quand on élabore des situations avec DERIVE, de prendre en comptes ces caractéristiques pour trouver un équilibre adéquat entre les tendances antagonistes qui seront nécessairement en jeu et, de plus jouent différemment d'un élève à l'autre "

Problèmes longs

Les objectifs de ces problèmes et l'organisation de la classe

Les objectifs des problèmes à long terme sont précisément les objectifs du programme : entrainer les élèves à la pratique d'une démarche scientifique en laissant développer par les élèves eux-même des recherches sur un temps long mais aussi en utilisant au fur et à mesure de leur apprentissage les notions enseignées comme outil dans la résolution d'un problème.

Les caractéristiques d'un problème à long terme :

- il sera cherché par les élèves sur un temps long, dépassant les barrières temporelles habituelles du temps de la classe ;

Cette recherche sur un temps long n'est pas habituelle pour un élève de première. Je vois là une première modification du contrat didactique. Cette modification pour être comprise dans la classe doit reposer sur une explicitation des règles du jeu. Bien sur, le seul discours du professeur est inutile et inopérant. Par conséquent, cette modification du contrat doit être appuyée par une "culture" de recherche de problèmes dans la classe. Une habitude de problèmes défis posés aux élèves, de questions renvoyées aux élèves à la suite d'une remarque, d'une généralisation d'un résultat trouvé dans un exercice...permettent de mettre en place un contrat dans lequel l'imagination, la recherche de conjectures, l'exploration d'un domaine sont pris en compte dans le déroulement de la classe et dans l'évaluation. Les conditions favorisant la dévolution du problème reposent sur une acceptation de la distinction entre la recherche d'une solution et la présentation d'une solution. Chercher, c'est accepter les imprécisions, les essais, les expériences, le flou. "le propre de l'intelligence humaine n'est-il pas de pouvoir travailler avec le flou et l'incertain" A.Bouvier. Le r™le du temps doit permettre aux élèves de développer cette phase de recherche sans avoir une obligation immédiate de production achevée.

- il pourra être abordé par les élèves dès la donnée de l'énoncé. Une première phase d'expériences pourra être mise en rapport avec des connaissances théoriques. La ou les premières solutions que les élèves pourront donner en utilisant leurs connaissances seront incomplètes (une ou plusieurs hypothèses ne pourront pas être prises en compte) ;

La dévolution du problème est une condition première de la réussite dans une situation de problème à long terme. Pour que les élèves transforme le problème posé par le maitre en leur problème, il est indispensable qu'a priori, ils soient capables de trouver dans leurs connaissances des pistes permettant d'avancer dans la recherche d'une solution. Dans ces conditions, le r™le d'un outil de calcul ou de représentation est essentiel pour permettre aux élèves de se lancer dans des expériences, d'explorer une piste de travail sans être arrêté par des obstacles techniques.
D'autre part, la possibilité de travailler sans contrainte temporelle trop forte doit permettre aux élèves de se poser à partir du problème initial des sous-problèmes : je vois là une seconde modification du contrat dans la classe. Se poser des problèmes me para”t une phase fondamentale du développement d'une démarche scientifique ; or cette possibilité ne peut être offerte aux élèves que s'ils peuvent légitimement (c'est à dire d'une façon reconnue dans l'espace social de la classe) dévier du problème posé par le maitre pour poser et chercher leur propre problème.

- les élèves pourront décider de la correction d'une solution proposée ;

"Cette caractéristique est essentielle : une fois que l'élève a investi ses connaissances, il faut qu'il prenne conscience de leur insuffisance, sinon, d'après le principe d'économie, il ne les fera pas évoluer, il cherchera seulement à les adapter. Cette insuffisance, c'est lui et lui seul qui peut en prendre conscience. Elle se constate par le fait que la réponse trouvée est fausse ou que la méthode utilisée est trop lourde." Arsac Problème ouvert et situation-problème.

- il rebondira au fur et à mesure de l'avancée du cours. Soit à la demande des élèves, soit parcequ'un objet enseigné pourra devenir outil dans sa résolution.

Le cours mené parallèlement à la recherche par les élèves du problème, amène des outils de résolution adaptés. Dans une situation idéale, les élèves feront le lien entre les objets enseignés et les outils nécessaires à la résolution du problème. Dans une situation plus "normale" de classe, le r™le de l'enseignant sera de faciliter l'explicitation du caractère outil du concept mathématique présenté et ce, par des activités spécifiques. Il est bon de penser à ne pas rentrer dans un effet Pygmalion et le choix des activités est tout à fait fondamental ; par exemple : les élèves arrivent au problème du raccordement de courbes par les tangentes. En classe, la notion de nombre dérivé a été abordée, j'ai proposé la situation suivante : trouver une fonction du second degré dont le sommet a pour abscisse

2 et tangente en x = 4 à la droite y = 2x-3 ; ou bien : Déterminer les points d'intersection des courbes des deux fonctions : $f(x) = x^3$ et $g(x) = 3x^2 - 3x + 1$. Quelles sont les tangentes aux deux courbes en ce point ? Faire un dessin.

- il sera cherché dans un premier temps en classe puis repris à intervalles réguliers par l'organisation de comptes-rendus (mise en commun des résultats favorisant la communication entre élèves).

La problèmatisation et la reformulation du problème seront l'objectif de ces phases. Ces phases de communication donneront également aux élèves des balises tout au long de l'année permettant d'organiser leur travail. Elles permettent aussi à l'enseignant de faire le point des différentes pistes suivies par les élèves et le cas échéant de rediriger les recherches. Enfin, ces phases sont aussi le lieu où l'enseignant peut montrer des possibilités des outils utilisés lorsque c'est nécessaire (le but n'étant pas d'enseigner toutes les "ficelles" d'un logiciel ou d'une calculatrice mais de permettre d'utiliser à bon escient cet outil pour résoudre des problèmes de mathématiques).

Des exemples

Voiture, TGV

Mon analyse a priori reposait sur le fait que tout au long de l'année, les élèves pourraient chercher des solutions qui évolueraient au fur et à mesure de l'apport de nouvelles connaissances. Le concept de fonction est ici central mais l'utilisation des approximations, des encadrements, la notion de nombre dérivé jouent un rôle déterminant dans la résolution de ce problème.
Une remarque concernant les deux énoncés : les deux énoncés, bien que proches en ce sens qu'il s'agit de trouver une courbe d'une fonction " sous contrainte " sont différents au sens où l'idée que se font les élèves de la carosserie d'une voiture (pas d'angles vifs, forme standard,...) relance assez naturellement la recherche, ce qui n'est pas le cas pour la voie de chemin de fer : certes ils ne doit pas y avoir d'angles trop importants, mais le raccordement par des tangentes ne s'impose pas naturellement. On voit ici l'importance du contexte de l'énoncé ; même si on ne peut pas parler à proprement parler d'un problème de modélisation, le contexte support du problème a une importance très grande quant au retour et au contrôle par les élèves d'une soution fournie.

$x^n - 1$

Toutes ces expériences nous ont montré que le temps est un élément important dans la recherche d'un problème de ce type : en particulier, les élèves n'ont pas le temps de reformuler l'énoncé pour rediriger la recherche bien que ces reformulations apparaissent dans leurs travaux. Il m'a semblé dans ces conditions que ce problème pourrait être cherché dans un temps long. Michèle Artigue dans le même texte signale à propos de cette expérimentation : "Un problème comme celui-ci, dont justement cette expérimentation pour limitée qu'elle soit, nous a aidé à prendre la mesure, nécessite pour vivre de dépasser le statut d'activité gadget, qu'on lui consacre du temps et ce même si l'on dispose pour soutenir le travail d'outils puissants comme DERIVE. Il est clair que le temps effectif d'enseignement n'est pas extensible et que des choix s'imposent. On ne peut à la fois multiplier les activités de recherche et donner à chacune un temps suffisant pour la rendre significative et productrice. On ne peut non plus espérer qu'une activité de recherche conséquente soit entièrement intégrée au temps effectif d'enseignement. Il faut trouver les moyens de faire vivre dans le temps privé des élèves, hors temps scolaire. Ceci pose bien sûr aussi le problème de l'accessibilité des outils nécessaires à la recherche, ici de DERIVE hors temps d'enseignement officiel, loin d'être résolu à l'heure actuelle".

Je me propose dans cette partie de rendre compte des démarches suivies par les élèves, de leurs résultats ainsi que de la gestion de ma classe de première S.

La recherche d'un problème sur un temps long (ici environ trois mois) nécessite une organisation particulière du travail des élèves ; en particulier, les phases de communication internes à la classe ou en direction d'autres classes sont nécessaires pour :

donner aux élèves des échéances permettant d'organiser leur travail
permettre à l'ensemble de la classe de profiter des stratégies de chacun
donner à l'enseignant la possibilité de rediriger les recherches des élèves.

L'organisation générale de ce travail a été la suivante :
Les élèves travaillent en groupe de 4 ou 5.

Une séance d'une heure de recherche en classe
Une séance d'une heure de bilan
Une séance d'une demi-heure d'exposés
Une séance de une heure et demie de bilan.

L'essentiel du travail de recherche des élèves se faisant à la maison.

L'objectif de ce travail est de faire entrer les élèves dans une micro-recherche en mathématiques et donc de faciliter l'apprentissage de méthodes scientifiques. Les capacités visées portent plus sur un apprentissage de méthodes (organisation des essais, émission d'une conjecture, vérification) et sur la compréhension du statut de théorème d'un résultat mathématique (passage de la conjecture au théorème par la démonstration) que sur des contenus.

Enoncé du problème et consignes :

Trouver des factorisations de $x^n - 1$ pour n entier positif. Consigne : écrire les résultats auxquels vous êtes arrivés sous la forme de "présumés-théorème"

Les premiers résultats de la recherche de la factorisation de $x^n - 1$:

Comme prévu les deux interprétations décrites par Michèle Artigue coexistent dans ces premiers résultats :

Tous les groupes ont trouvé la factorisation par (x-1).
Plusieurs groupes ont trouvé la factorisation par (x-1)(x+1) dans le cas n pair.
Un groupe a donné le résultat suivant pour les puissances de 2 :
$(x-1)(x+1)(x^2+1)..(x^{n/2}+1)$

L'essentiel du débat dans la première phase de mise en commun porte sur la validité d'un énoncé mathématique : les problèmes de la généralité d'un résultat et de la nécessité d'une preuve sont posés à partir des premières propositions des élèves.

Par exemple, une longue discussion a opposé les élèves concernant le "présumé-théorème" suivant, que l'on retrouve dans beaucoup de compte-rendus :
Pour n impair $x^n-1= (x-1)(x^{n-1}+...+x+1)$
Un travail supplémentaire était nécessaire pour préciser le sens donné au mot "théorème" employé en mathématiques. J'ai donc demandé aux élèves de se mettre d'accord sur un énoncé, entre :

1) Pour tout n impair supérieur à 1 $x^n-1= (x-1)(x^{n-1}+...+x+1)$
et
2) Pour tout n supérieur à 1 $x^n-1= (x-1)(x^{n-1}+...+x+1)$

Les arguments exposés par les élèves étaient de plusieurs types : les tenants de la formulation 1 ont clairement annoncés que le logiciel fournit, dans le cas n pair, une factorisation plus "complète" et que cette formulation n'était donc pas correcte pour le cas n pair. Pour les autres, l'argument exhibé était une preuve : développement du produit. La discussion entre les deux groupes était particulièrement difficile puisque les arguments avancés étaient de nature complètement différente. Les uns portant sur le sens de l'énoncé et les autres sur le résultat mathématique. J'ai pu à cette occasion préciser les deux sens que l'on pouvait donner à l'énoncé du problème sans d'ailleurs imposer une interprétation à la classe : à partir des résultats proposés, j'ai reformulé les différentes pistes pour poursuivre les recherches de la manière suivante :

1) Chercher des démonstrations concernant les conjectures
   A ce stade une seule démonstration a été proposée par un élève : factorisation par x-1.
2) Généraliser le résultat concernant les puissances de 2...
   peut-on prévoir les factorisations pour les puissances de 3, de 5...
3) S'intéresser au cas des n impairs
4) Pour les n pairs peut-on prévoir les facteur(s) différents de (x-1)(x+1)
5) Pour quelles valeurs de n la factorisation par x-1 est-elle "complète" ?

Trois semaines plus tard, j'organise une nouvelle mise en commun :

Dans cette séance (courte : Ω heure), je demande à chaque groupe de dire à l'ensemble de la classe les résultats de leurs recherche ; mon rôle est ici de faire formuler les résultats. J'essaye de ne donner aucune indication quant à la validité de ces résultats cependant je demande une preuve pour chaque résultat annoncé. Cette séance me permet de savoir où en sont les recherches des élèves en mettant en commun l'ensemble de leurs résultats mais surtout de relancer ces recherches en fixant aux différents groupes des pistes de travail pour continuer. Cette phase me paraît tout à fait fondamentale pour que les élèves ne se découragent pas (c'est en effet un exercice difficile et inhabituel pour un élève de première que de chercher un problème sur trois mois ! D'autant plus difficile que le problème est ouvert et que les résultats ne sont pas standards), mais aussi pour permettre aux élèves de préciser leurs propres démarches.

Les résultats annoncés par les élèves :

Si n est une puissance de 2 alors :
$x^n - 1 = (x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)...(x^{n/2}+1)$
la preuve proposée par un élève de la classe :
$(x-1)(x+1) = x^2-1$
$(x^2-1)(x^2+1) = x^4-1$
...
$(x^{n/2}-1)(x^{n/2}+1) = x^n - 1$

Si n est une puissance de 3 alors :
$x^n - 1 = (x-1)(x^2+x+1)(x^6+x^3+1)...(x^{2n/3}+x^{n/3}+1)$

Si n est une puissance de 5 alors :
$x^n - 1 = (x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^{n-5}+x^{n-10}+...+x^5+1)$

Si n est une puissance de 7
$x^n - 1 = (x-1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)(x^{42}+x^{35}+x^{28}+x^{21}+x^{14}+x^7+1)...(x^{6n/7}+x^{5n/7}+...+1)$

Il est à noter que seule la factorisation obtenue lorsque n est une puissance de 5 n'est pas un résultat fourni par DERIVE. Le groupe d'élèves qui a proposé cette factorisation a présenté une preuve obtenue en développant ce produit.

Une communication en direction d'autres élèves appartenant à d'autres classes de l'académie est prévue avant les vacances de Noël. J'organise donc une dernière séance de mise en commun en classe. Durée : 1h30 (30mn de travail par groupe et 1 heure de rédaction définitive et commune de la communication aux autres classes).

Voici cette communication :

Pour tout n, on a :

$$x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1)$$

Preuve faite

Pour tout n puissance de 2 :

$$x^n - 1 = (x-1)(x+1)(x^2+1)\ldots(x^{n/2}+1)$$

Preuve faite

Pour tout n puissance de 3 :

$$x^n - 1 = (x-1)(x^2+x+1)(x^6+x^3+1)\ldots(x^c+x^d+1) \text{ où } c= 2n/3 \text{ et } d = n/3$$

Pas de preuve

Pour tout n puissance de 5 :

$$x^n - 1 = (x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^{20}+x^{15}+x^{10}+x^5+1)\ldots(x^A+x^B+x^C+x^D+1)$$

où $A = 4n/5$, $B = 3n/5$, $C = 2n/5$, $D = n/5$

$$x^n - 1 = (x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^{n-5}+x^{n-10}+x^{n-15}+\ldots+x^5+1)$$

Pas de preuve

Pour tout n puissance de 7 :

$x^n - 1 =$

$(x-1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)(x^{42}+x^{35}+x^{28}+x^{21}+x^{14}+x^7+x+1)\ldots$

$(x^A+x^B+x^C+x^D+x^E+x^F+1)$

où $A = 6n/7$, $B = 5n/7$, $C = 4n/7$, $D = 3n/7$, $E = 2n/7$, $F = n/7$

Pas de preuve

Pour tout nombre premier, on a la seule factorisation :

$$x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1)$$

Pas de preuve

Pour tout n pair, on a :

$$x^n - 1 = (x^{n/2} + 1)(x^{n/2} - 1)$$

preuve faite

Pour tout n = wk, on a :

$$x^n - 1 = (x-1)(x^{w-1}+x^{w-2}+\ldots+x+1)(x^{n-w}+x^{n-2w}+\ldots+1)$$

preuve faite.

On a essayé :

$x^{0,4} - 1 = (x^{1/5} - 1)(x^{1/5} + 1)$

$x^{0,8} - 1 = (x^{1/5} - 1)(x^{1/5} + 1)(x^{2/5} - 1)$

$x^{0,7} - 1 = (x^{1/10} - 1)(x^{3/5} + x^{1/2} + x^{2/5} + x^{3/10} + x^{1/5} + x^{1/10} +1)$

Question : qu'est ce que c'est que $x^{a/b}$?

Quelques remarques concernant l'ensemble du travail

Il semble que les notations "formelles" (notations indicées en particulier) sont bien assimilées. A partir du moment où les élèves ont "inventé" cette notation, ils en ont une meilleure maîtrise. C'est un savoir qui est réinvestissable dans d'autres domaines.

Après la première phase de recherche, j'ai remarqué que les élèves avaient une phase de découragement ou d'interrogations : "y-a-t-il encore d'autres choses à trouver ?" m'a demandé un élève. Cependant, lors de la deuxième mise en commun, les élèves avaient trouvé un grand nombre de résultats et testé beaucoup sur l'ordinateur. Une élève m'a montré la factorisation de x625 - 1 pour appuyer un résultat général sur la factorisation dans le cas n puissance de 5 ! Il est important de noter que le rôle de l'enseignant change dans le cadre d'une recherche sur un temps long : non plus de faire émerger les solutions souhaitées a-priori mais plus de suivre les interrogations des élèves pour faire rebondir la recherche.

Les deux interprétations de la tache signalées par Michèle Artigue sont présentes dans ces résultats : résultats permettant de prévoir la factorisation rationnelle de DERIVE et résultats généraux ; c'est le cas par exemple des deux factorisations fournies pour les puissances de 5 :

$$x^n - 1 = (x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^{20}+x^{15}+x^{10}+x^5+1)\ldots(x^A+x^B+x^C+x^D+1)$$

où A = 4n/5, B = 3n/5, C = 2n/5, D = n/5. C'est la factorisation DERIVE

$$x^n - 1 = (x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^{n-5}+x^{n-10}+x^{n-15}+\ldots+x^5+1).$$

Ce résultat ne peut pas s'obtenir directement sur DERIVE

De la même façon, la factorisation pour n=wk n'est pas obtenu directement avec DERIVE.

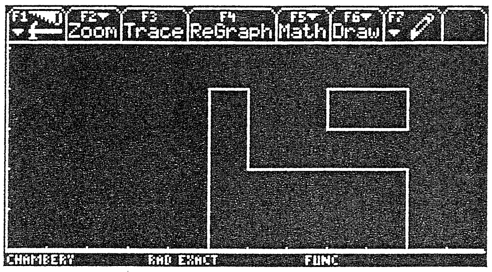
Les élèves qui sont restés dans la première interprétation ont été amené à restreindre leur champ de recherche : les puissances de nombre entier (2,3,5, 7), les nombres premiers. La méconnaissance des propriétés arithmétiques élémentaires est sans doute la cause d'une exploration peu systématique des nombres : il aurait été possible d'introduire à cette occasion ces propriétés, mais l'arithmétique ne fait malheureusement pas partie des programmes du secondaire ! Le travail fourni sur les polynômes par ces élèves leur a permis de comprendre "en acte" ce concept. Pour ces élèves, c'est essentiellement la commande Factor de DERIVE qui a été utilisée, permettant de repérer des régularités en multipliant les essais et de tester des conjectures. Ceux qui ont dirigé leurs recherches sur des résultats généraux ont, en revanche, utilisé plus de commande du logiciel pour regrouper des facteurs, les développer, diviser... Ce travail a nécessité de mettre en place des stratégies élaborées et d'effectuer sur les polynômes des calculs qui ne sont pas habituels en classe de première. Pour les uns comme pour les autres, ce problème a été l'occasion de rentrer dans une démarche de recherche en mathématiques en vraie grandeur. Les questions que les élèves ont été amenés à se poser concernant la nature d'un résultat mathématique sont un aspect de l'apprentissage des méthodes scientifiques. De même que l'ensemble des phases que les élèves ont explicité à travers les différentes communications des résultats (reformulation du problème, émission de conjectures, passage à la preuve, référence à une théorie, rédaction et exposés des résultats).

Le rôle de DERIVE est bien sûr primordial dans ce problème : il permet, bien sur, de multiplier les essais pour faire émerger des régularités, mais aussi de tester des hypothèses, de mener à bien des calculs complexes. Dans les phases de mise en commun, les élèves ont pu vérifier rapidement les résultats proposés par leurs camarades.

A travers la recherche de ce problème (et d'une manière générale à travers la recherche de problèmes sur un long terme) les élèves acquièrent de l'autonomie vis à vis de l'outil et seront capables de réinvestir leurs connaissances dans d'autres cadres. La connaissance de l'outil et de sa pertinence passe par son utilisation dans la recherche de problèmes !

D'autres questions peuvent se poser : ainsi la réponse donnée par DERIVE à la factorisation de x^n-1 pour des valeurs non entières de n renvoie une nouvelle question... l'aventure n'est pas terminée !

Un problème en terminale proposé par Luc Trouche :



Le dessin est une modélisation des contraintes s'exerçant sur la trajectoire d'un avion :
Il décolle en O, doit passer au dessus du relief qui culmine en B, puis passer au dessus du plateau et sous la masse nuageuse, et enfin atterir sur une piste de longueur infinie : le contact entre l'avion et la piste devra se faire à l'infini.

Question 1 :
Déterminer une fonction dont la représentation graphique satisfasse à toutes ces contraintes. On n'utilisera que des combinaisons de fonctions puissance et de l'exponentielle.

Question 2 :
On veut optimiser le trajet. L'idée est que l'avion monte " le moins possible ".

la pente maximale de l'avion soit la plus faible possible
ou bien
l'avion devra voler au plus près des reliefs ; il faudra minimiser l'integrale de f.

Quelles fonctions peut-on étudier :

Un dernier type d'énoncé qui consiste en une classification et une étude systématique d'un domaine :

les fonctions polynômes de degré 3, 4, ...
les fonctions rationnelles du type :

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d} \text{ ou } f(x)=\frac{ax+b}{cx^2+dx+e} \text{ ou encore } f(x)=\frac{ax^2+bx+c}{dx^2+ex+g}\ldots$$

les fonctions du type $\sqrt{ax+b}$ ou $\sqrt{ax^2+bx+c}$

...

Donner les résultats fournis par les élèves.

Un autre énoncé en préparation :

Faire le point sur toutes les équations que l'on sait résoudre et celles que l'on ne sait pas résoudre.

Si on ne sait pas résoudre une équation, trouver des méthodes permettant d'approcher les solutions aussi près que l'on veut.

Toute petite première analyse en vrac :

A priori, tous les élèves de première peuvent aborder le problème posé : connaissance de méthodes de résolution d'équations du premier degré, du second degré (ça fait partie du cours), d'équations polynômes de degré supèrieur pouvant se factoriser. Cette première phase permettant de faire le point devrait également permettre aux élèves de prendre conscience du fait qu'ils ne savent pas résoudre beaucoup d'équations (nous non plus d'ailleurs !). On peut supposer que des équations transcendantes pourraient apparaître dans le catalogue ! Des méthodes géométriques pourraient alors être envisageables (cf. équation de Képler x=t-e sin(x)).

La difficulté du problème peut être rendu sensible par l'utilisation de la calculatrice qui résoud instantanément l'équation (x-2)(x-3)(x-5)=0 mais qui ne sait pas (dans un temps raisonnable) résoudre la même équation lorsque le premier membre a été développé.
L'étude de représentations graphiques des fonctions usuelles permet de faire le lien entre la résolution d'une équation et l'étude d'une fonction (au moins dans un premier temps avec la représentation graphique d'une fonction).

L'idée de suite peut sembler naturelle si l'on veut s'approcher de plus en plus d'une solution.

L'utilisation de la calculatrice peut être multiple :

vérification dans le cas où elle donne une valeur exacte.
représentation graphique
calcul différentiel et programmation formelle.
aide à des calculs pouvant être complexes
factorisation

Le rôle du logiciel

Les LCF favorisent une dévolution du problème : les élèves ont a priori un moyen de rentrer dans le problème, de commencer les recherches par une phase exploratoire et expérimentale pour progressivement rentrer dans une démarche reflexive. Cependant l'utilisation d'un LCF n'est pas suffisant pour permettre de faire vivre en classe ce type de situations. Il ne s'agit que d'un élément facilitant ; mais il serait illusoire de donner au logiciel un rôle trop important. L'expérience montre que pour tirer profit au maximum de l'outil, les élèves doivent être capables de savoir quand et comment s'en servir et surtout quand il ne faut pas s'en servir. Il me semble que ce nécessaire recul vis à vis de l'outil ne va pas de soi et qu'il doit être l'objet de discussions et de négociations à l'intérieur de la classe et notamment c'est un des objectifs des phases de communication. Ce qui ramène au délicat problème de la gestion de la classe dans ce genre de situations et les interventions du prof qui doivent porter à la fois sur le contenu mathématique du travail réalisé par les élèves mais aussi sur la démarche mise en place par les élèves. Le travail d'analyse des différentes observations menées pendant ces années devrait nous permettre de nommer les éléments essentiels de façon à engager un processus de transfert de ce qui n'est encore qu'une innovation. Par exemple, Luc Trouche qui a mis en place un tel type de problème dans sa classe cette année signale :

“ Trois éléments semblent en tout cas certains :

- c'est parce qu'il y a eu un travail régulier de recherche, toute l'année, dans des situations variées que les élèves ont pu s'engager dans une recherche plus ardue dans le cadre du “ problème long ”

- réciproquement, l'existence de ce problème de longue haleine a donné une continuité de travail sur une bonne partie de l'année, a maintenu une “ tension intellectuelle ” dont une bonne partie de la classe a profité

- la possession d'un outil comme la TI92 a permis à bon nombre d'élèves de s'approprier des “ petits bouts ” de solution, de voir une partie de l'objet en cours de construction ”

Pour revenir en guise de conclusion aux apports de logiciels de calcul formel à l'enseignement des maths, je voudrais illustrer mon propos par quelques opinions des élèves recueillis par des interviews et des questionnaires.

Une hypothèse forte fondant cette expérience résidait dans le fait que la possession privée du logiciel permettrait une meilleure connaissance de ses possibilités et de ses limites. Cette hypothèse se trouve confirmée par l'utilisation que les élèves en ont fait :
"de toutes façons, l'ordinateur il réfléchissait par rapport à ce que je lui donnais donc si je lui donnais des données fausses il me donnais un résultat faux".

Un autre élève raconte : "Comme on faisait les fonctions, j'aimais bien regarder la courbe que l'ordinateur me traçait, je visualisais et en même temps je voyais les calculs à côté".

"Pour moi, le problème “ étude de fonctions ” a été très enrichissant du point de vue mathématique et nous a permis de travailler en groupe...."

Ce sentiment lié au travail en groupe revient souvent dans les avis donnés par les élèves avec cependant des bémols liés au travail de chacun dans le groupe.

"Pour moi, le problème “ étude de fonctions ” a été intéressant et utile. Utile car cela m'a permis de réviser mes leçons grace à la pratique et aux recherches (applications concrètes). Celà m'a également permis de me familiariser avec la TI92"

Le lien avec le cours est signalé dans plusieurs fiches

"Pour moi, le problème “ étude de fonctions ” a été une corvée au début mais est devenu plus intéressant au fur et à mesure que l'on trouvait des résultats. Pourtant les exposés oraux ont été difficiles car ils étaient parfois ennuyeux à cause des longues démonstrations ou ne m'intéressaient pas."

Sentiment très partagé en ce qui concerne les exposés. Si des élèves ont appréciés les phases de communication, on voit ici que ce n'est pas complètement partagé : cette remarque doit être prise en compte pour la gestion de la classe et en particulier des phases de communications. Un autre problème se pose quant à l'évaluation du travail de groupe ; je ne veux pas ici rentrer dans les détails de ce problème crucial qui demanderait un développement long ! Cependant, et en lien avec les machines et leur utilisation, on peut noter quelques questions dont les réponses ne sont pas évidentes : quel est le statut d'un résultat fourni par la machine ? Quel est le statut de la machine dans une recherche ? Quand doit-on vérifier un résultat fourni et quand peut-on lui faire confiance ? Peut-on légitimement donner un résultat fourni par la machine ? ou plus précisément quel contrat vis à vis des résultats de la calculatrice sera négocié dans la classe ?

Je laisse cependant la conclusion à cet élève pour me faire plaisir, et je vous jure que je ne lui est pas souflé la réponse !

"Pour moi, le problème “ étude de fonctions ” a été une bonne expérience de travail en commun et de recherche mathématique. Je trouve les résultats rigoureux et très intéressants. Nous avons appliqué une véritable méthode scientifique : observation, analyse des résultats, théorisation et vérification (mise en application)"

Conditions facilitantes pour la mise en place d'un travail visant l'acquisition de compétences liées à une démarche scientifique en mathématiques, à l'aide de recherche de problèmes

Par J. Feurly-Reynaud, IREM de Lyon

On l'aura compris, il ne faut pas s'attendre à ce que l'activité des élèves s'organise de façon spontanée dans le sens visé par l'enseignant, lors d'activités de recherche de problèmes visant l'apprentissage d'une démarche scientifique.

Il est également prévisible que l'évolution des comportements des élèves sera d'autant plus significative que l'enseignant installe peu à peu, mais durablement, une culture de recherche de problèmes dans la classe, les temps qui y sont consacrés faisant bientôt partie du déroulement usuel du temps d'enseignement, et intégrant les apprentissages inscrits dans les programmes.

Dans la façon de penser ce type de projet, il est donc indispensable d'intégrer la variable "temps" comme une donnée importante .
D'une part, il ne faut pas trop attendre d'une expérimentation de recherche de problèmes qui aurait lieu ponctuellement dans l'année scolaire, même si on y observe des phénomènes intéressants
D'autre part, il vaut mieux savoir à l'avance que le dispositif qui peut permettre pour les élèves à la fois la mobilisation sur le long terme, et l'évolution progressive des comportements constitutifs de l'acquisition d'une démarche scientifique doit être un dispositif réellement intégré au temps d'enseignement, et pensé globalement comme une stratégie centrale de l'enseignement à l'échelle d'une année scolaire par exemple.

Il ne s'agit pas du tout de discréditer le premier type d'expérimentation, recherche ponctuelle de problèmes, qui nous parait être pour l'enseignant un indispensable passage pour pouvoir ultérieurement s'engager dans des actions plus lourdes, mais bien plutôt de prévenir les désillusions qui suivent souvent la phase d'enthousiasme - nécessairement naïf - de l'enseignant qui conduit ce travail.

Deux questions se posent immédiatement dans l'un ou l'autre de ces contextes pour la mise en oeuvre d'un tel projet : la première concerne le choix d'un problème, ou d'une suite de problèmes, qui soit pertinent par rapport aux objectifs qu'on s'assigne, ainsi qu' aux conditions dans lesquelles le travail se déroule, et la seconde concerne le dispositif.

Pour ce qui est du type de problèmes, ceux qui conviennent le mieux pour travailler dans ce sens sont de type ouvert, le degré d'ouverture du problème pour l'élève conditionnant en partie l'investissement personnel qu'il va consentir à faire. Un problème ouvert est un problème à énoncé court, dans lequel l'élève peut entrer a priori sans effort, mais pour lequel il ignore la réponse (qui n'est donc pas dans l'énoncé !). Il doit disposer en outre de moyens de contrôle, lui permettant de tester ses solutions. On peut même envisager d'utiliser des "problèmes générateurs de problèmes", dans lesquels l'élève est amené à choisir l'étude de questions ou sous questions non explicitement formulées d'emblée.

Certains contenus mathématiques peuvent paraître plus que d'autres convenir d'emblée à ces conditions : des domaines comme l'arithmétique paraissent, par exemple, séduisants à cet égard. Ils peuvent convenir si le cadre fixé est celui d'une expérimentation ponctuelle, mais, dans le cadre d'une expérimentation plus suivie, il faut penser à la longévité du problème, qui, pour survivre comme moteur de l'apprentissage dans la classe, ne doit pas apparaître comme ayant un caractère purement anecdotique par rapport aux contenus d'enseignement. Des contenus de recherche trop déconnectés de ceux des programmes peuvent mettre en péril le crédit que les élèves doivent accorder à ce travail pour en tirer profit.

C'est pourquoi un premier travail, pour l'enseignant, peut être de pointer, dans le programme de la classe, des contenus mathématiques suffisamment importants et consistants : il peut s'agir d'un concept particulièrement central, ou lié à un obstacle épistémologique, c'est à dire un contenu nouveau nécessitant, pour être compris, un changement de point de vue qui n'est pas accessible d'emblée, et qui demande à l'élève une réorganisation de ses connaissances pour l'intégration de ce nouvel objet.

Il est nécessaire de faire une analyse du concept visé : à quels types d'erreurs doit-on s'attendre ? quel degré d'appropriation est visé au juste ? que savent les élèves sur la question ? à quel champ de problèmes, en mathématiques, est relié ce concept ?

Il faut ensuite, par rapport à ce contenu, choisir un problème, ou une suite de problèmes susceptible de répondre aux enjeux que l'on s'est fixés.
Pour cela, deux choses sont également importantes : le fond, et la forme ! L'idée du problème compte, mais la forme de l'énoncé est tout aussi importante. Par exemple les énoncés : "Trouver les / la / une / des factorisations de $x^n - 1$" ne provoquent pas les mêmes effets sur le déroulement de la recherche, bien que l'idée centrale soit la même.
Une analyse a priori des démarches des élèves selon l'énoncé fourni peut guider l'enseignant pour une formulation optimale de l'énoncé en fonction des buts visés.

Le dispositif imaginé par l'enseignant pour conduire ce travail est aussi très important, il s'inscrit dans le temps, qui doit être considéré comme une variable très importante. La présentation de ce dispositif aux élèves est une phase essentielle, une négociation est nécessaire pour qu'ils acceptent de rentrer dans le jeu. Ce qui fait la difficulté de cette entreprise, c'est que les élèves ne peuvent pas saisir toutes les implications d'un tel projet avant de l'avoir vécu.
Dans le cas d'un travail de longue haleine, une solution raisonnable est de demander la confiance des élèves pour un délai déterminé, et d'annoncer des moments de renégociation et de régulation avec la classe sur cette façon de travailler.

Différentes phases de travail peuvent être envisagées : la recherche peut être conduite à certains moments en classe par petits groupes, elle peut se prolonger en dehors du cours, il peut y avoir des temps de mise en commun, en grand groupe...
Une condition pour que ce travail ne s'essouffle pas est qu'il soit finalisé, que des échéances soient fixées : l'exposé d'un groupe devant la classe de l'état de la recherche à plusieurs moments annoncés par avance peut être une façon de le faire, on peut aussi penser à la production d'un document commun...De façon générale, tout ce qui vise à la communication du travail d'un groupe vers l'extérieur est mobilisateur pour les élèves. Le sujet peut en être le contenu de la recherche elle même, mais la description des difficultés, des divers moments - découragements, enthousiasme,...- peut constituer un enjeu de communication très formateur, qui prend en compte le vécu, les démarches, bref, l'humain, qui est indissociable d'une entreprise de recherche.

Dans ce cadre, une des conditions très importante de réussite, déjà mise en évidence lors du travail conduit à l'IREM de Lyon sur le problème ouvert, est la capacité de l'enseignant à assumer un rôle nouveau par rapport à celui qu'il endosse dans un contexte plus traditionnel. Cet aspect est évidemment lié au dispositif adopté pour ce travail, nous avons pointé des organisations possibles, qui toutes demandent de la part de l'élève l'apprentissage de l'autonomie. Lors par exemple de séquences de travail en petits groupes pour des phases de recherche, l'enseignant doit accepter de laisser partir les élèves sur leurs propres pistes, même si cela doit conduire à une apparente perte de temps. Il faut se préparer à ne pas répondre aux questions qui demandent les solutions, et savoir garder le silence n'est pas chose facile, tant cette attitude est à l'opposé de l'habitude. Il faut essentiellement reformuler les questions que se posent les élèves, leur demander où ils en sont, sans porter, dans cette phase du travail, de jugement de valeur sur leur production. Il faut avoir confiance en leur capacité à trouver des résultats, à formuler des questions intéressantes, et parfois inattendues, et quiconque a tenté l'expérience sait qu'ils ont une imagination fertile.

La difficulté est pour l'enseignant de concilier la gestion du temps, car il est le garant de l'avancement du travail, avec la liberté de chercher nécessaire aux élèves, qui seuls ont le pouvoir d'avancer, ce qui peut paraître un pari paradoxal. Le rôle essentiel de l'enseignant, c'est d'aider les élèves à entrer dans le dispositif, et à y avancer dans leur travail.
Ceci demande une attention permanente à la fois au groupe et aux individus, et ce type de travail s'accompagne d'un changement du contrat habituel de la classe, tant du côté des élèves que du côté de l'enseignant.

Enfin ce travail vise essentiellement à l'apprentissage d'une démarche, par essence complexe. La prise de conscience de la démarche par les élèves eux-mêmes semble un objectif important dans ce cadre. Elle ne peut se réaliser sans un support : une consigne de travail en ce sens, analogue à celles qui ont pu vous être données pendant cette université d'été, peut s'intégrer à certaines phases de communication et permettre une telle appropriation.
Il semble bien en effet que le transfert de l'apprentissage d'une démarche à d'autres situations ne puisse se faire qu'à la condition qu'ait lieu la prise de conscience de ce qui a été vécu dans l'action par le sujet lui même, la mise en mots est un moyen de le permettre.

En dernier lieu, il faut penser au du rôle spécifique des outils de calcul dans les situations visant l'acquisition d'une démarche scientifique, dont je ne parle pas ici, puisque d'autres collègues ont abordé ces problèmes au cours de cette université d'été.

Pour résumer mon propos, je vous propose la liste des questions auxquelles vous n'échapperez pas si vous vous lancez avec des élèves dans un travail visant à l'acquisition d'une démarche scientifique :

- **Contenus mathématiques visés ?**

Concepts majeurs, obstacles épistémologiques... Quelle analyse ?

- **Choix d'un problème, ou d'une suite de problèmes**

Idée de base ? Formulation : quel énoncé ? Erreurs prévues ?
Quel degré d'ouverture ? Quelles pistes possibles pour la recherche élèves ?
Si nécessaire, rôle de l'outil de calcul : quel impact sur les démarches possibles ?
Quelles possibilités éventuelles d'évolution au cours de l'année scolaire ?

- **Choix du dispositif**

Quelles phases de travail ? quelles consignes ? Rôle éventuel de l'outil de calcul ?
Modalités de travail : individuel, petits groupes, grand groupe, à la maison...
Finalisation du dispositif : quelle production pour les élèves ? Quel enjeu : communication entre élèves, entre groupes, vers l'extérieur de la classe ?

• Intégrer le temps comme variable didactique

Nécessaire si ce qui est visé est l'évolution des représentations, l'acquisition de compétences liées à la démarche scientifique
Peut permettre au problème de rebondir
Quelle tolérance par rapport aux errances de la recherche ?

• Changement du rôle de l'enseignant, négociation d'un nouveau contrat

Quand intervenir ? Relances, reformulations...
Temps de renégociation, de régulation ?
Comment permettre la conscientisation des démarches par les élèves ?

Travail sur l'évaluation

Trois phases ont constitué ce travail.

- Une liste des objets d'évaluation a été construite par les stagiaires à partir de leur expérience de recherche du "Problème de l'UE". Ce travail a débouché par une mise en commun sur une classification en contenus, savoir-être et savoir faire.

- Parmi les précédents objets, quels sont ceux qui paraissent importants à évaluer, dans le contexte de la classe.

- Réflexion sur la construction d'un dispositif intégrant ces éléments d'évaluation.

Pour vous, y a-t-il des contenus mathématiques que ces recherhes vous ont remis en mémoire, vous ont fait retravailler, que vous avez redécouverts, voire découverts ?

Quels sont les aspects, les temps de votre démarche qui ont été marquants, déterminants ?

Comment avez vous vécu cette recherche ?

Classification des objets possibles d'évaluation, à partir du travail conduit par les participants au cours des recherches de problèmes

Objets qui relèvent des savoirs nécessaires à la résolution de problèmes

Savoirs mathématiques nécessaires, variables selon la situation

Connaissances mobilisables, dans le contexte

Heuristiques et stratégies, méthodes de travail

Contrôles et vérifications : de type local, global, à la fin d'une recherche. Ces modalités conditionnent la réussite.

Objets qui relèvent des savoir faire

Savoir choisir une piste, et savoir l'abandonner
Repérer qu'il y a diverses pistes possibles

Planifier la tâche :
Délimiter les sous problèmes, transformer des questions en problèmes
Boucles essai - erreur - conjecture - contrôle

Reconnaître un statut particulier à l'erreur, qui nous apprend quelque chose : par rapport aux essais, par rapport à ses propres croyances

Capacité à généraliser, à se centrer sur un objet pour le délimiter

Repérer le statut d'un énoncé : constat, conjecture, piste, exemple, contre-exemple, théorème

Repérer les variables pertinentes, la pertinence d'un résultat

Savoir changer de cadre

Savoir évaluer son propre travail : contrôle pragmatique, pratique, expérimental ou théorique.
Contrôler la réalisation, l'écart au but, rechercher des états critiques

Savoir prendre du recul, remettre en cause ses représentations

Creuser le sens des concepts en lien avec une formalisation, savoir repérer les questions cruciales

Objets qui relèvent du vécu, des savoir-être

Savoir vivre la confrontation des résultats, les conflits de savoir, sans qu'ils soient des conflits mettant en cause la personne

Respect des modalités de travail des individus : savoir s'écouter, tolérer la parole des autres, les silences nécessaires à chacun

Désir de preuve, avant la preuve

Savoir reconnaître qu'on s'est trompé, dépasser le découragement, les blocages

Accepter l'erreur et savoir la dépasser

Savoir accepter le plaisir de chercher, l'impression de liberté, mais aussi la peur de chercher, la douleur qui peut survenir lorsqu'une de ses productions a été écartée

Evaluation des savoir-faire
dans l'acquisition d'une démarche scientifique

Dans le cadre de la classe, qu'est ce que vous estimez intéressant

de repérer pour vous en tant que prof

de faire repérer à vos élèves

En quoi c'est important ?

Choisir un élément qui a été pointé comme intéressant et imaginez quels types de dispositifs pourraient être pertinent pour son évaluation

Pour le prof **ou** **Pour l'élève**

Démarches d'un chercheur en mathématiques

L'idée de ce temps de travail était de pouvoir faire un parallèle entre le travail de chercheur en mathématiques et les activités de recherche proposées à des élèves.
A cette fin, Michel Mizony, enseignant chercheur à Lyon I, est intervenu pour présenter une analyse de l'utilisation qu'il a faite des outils de calcul formel depuis plusieurs années.

Le calcul formel
dans ma pratique d'enseignant et de chercheur

Michel Mizony

31 Octobre 1996

Les mathématiques redeviennent-elles
une discipline expérimentale?

Introduction :

L'objectif principal de mon exposé sera d'essayer de vous décrire comment, en tant qu'enseignant et chercheur, j'utilise le calcul formel; de fait le logiciel Maple V.3. En particulier, pour l'utilisation de tels logiciels, j'insisterai :
1- sur la nécessité du contrôle et de la vérification;
2- sur l'aller-retour permanent entre théorie et expérimentation;
3- sur l'intérêt de s'interroger sur les «boîtes noires».

L'essentiel du temps sera consacré à un exemple de travail en recherche, mais auparavant je donnerai deux exemples d'exercices enseignés en Deug 2ème année, à l'université Lyon 1.

Sur l'enseignement

Voir l'article «réflexions méthodologiques en Maple» dont les deux exemples sur la procédure factor (prédéfinie dans Maple) et le tracé d'une courbe (ou la nécessité de vérifications) ont été présentés.

Une pratique de recherche

Au niveau de l'utilisation du calcul formel en recherche, je vais plus essayer de décrire les étapes d'une recherche que d'en tirer des conséquences. Il est possible, qu'emporté par ma passion du sujet traité, je fasse quelques digressions.
Suivons le plan suivant :
Plan des aller-retours étape expérimentale - théorie.
A Le problème des courbes de rotation des galaxies spirales
B ⟶ premiere étape expérimentale
Le problème des n-corps alignés, premier algorithme
⟵ retour à la théorie
Mise au point de l'algorithme pour un disque de points
C ⟶ deuxième étape expérimentale
La méthode marche pour un disque de 5000 points.
⟵ retour à la théorie
Pourquoi cette méthode fonctionne-t-elle? Etude des méthodes existantes.

D ⟶ troisième étape expérimentale
Comparaison des quatre méthodes existantes; trois semblent coïncider.

⟵ retour à la théorie
Preuve de l'équivalence théorique de notre méthode et d'une existante, et de son inéquivalence avec la méthode la plus souvent employée.

E ⟶ quatrième étape expérimentale
Elaboration du chemin de la preuve de l'équivalence avec la dernière méthode.

⟵ retour à la théorie
Achèvement de la preuve, rédaction d'un article, etc...

F ⟶ cinquième étape expérimentale
Mise au point d'un programme «définitif» traitant 40000 points.

⟵ retour à la théorie
Perspectives et problèmes épistémologiques.

A Le problème.

Depuis une dizaine d'années je travaille sur des problèmes liés à la mise en œuvre de la relativité générale. Dans ce cadre se posent des problèmes dit de masse manquante. En tant que mathématicien à l'université Lyon 1 (U.R.A. 746), ma recherche consiste à mieux poser ces questions de masse manquante aux trois niveaux suivants : a) à l'échelle de l'univers, b) au niveau des amas de galaxies et c) à celui des galaxies. C'est ce dernier problème, dit des courbes de rotation des galaxies spirales, que je vais présenter.

Que se passe-t-il ? Les astronomes observent essentiellement deux aspects des galaxies spirales : leur luminosité et leur courbe de vitesse de rotation autour du centre (par effet Dopler). Leurs observations, de plus en plus précises et portant sur un grand nombre de galaxies spirales, montrent deux aspects permanents : la courbe de luminosité en fonction de la distance radiale suit une décroissance exponentielle, la courbe des vitesses de rotation est du type «rigide» près du centre puis plate jusqu'aux confins du disque galactique (visible). Il s'agit donc, à partir de ces données, de reconstruire la répartition de matière dans une galaxie, en particulier la densité surfacique de son disque et sa masse totale (deux données qui ne sont pas directement observables). Il est usuellement admis que l'on ne peut pas rendre compte de la platitude de la courbe de rotation d'une galaxie sans faire appel à la présence d'un halo sphérique et massif de matière englobant la galaxie. Ce halo non observé pose ainsi un problème de masse manquante. Les méthodes existantes pour déduire la courbe de densité surfacique à partir de la courbe de rotation reposent sur l'évaluation d'intégrales doubles qui ne sont pas absolument convergentes et nécessitent soit la connaissance de la courbe de rotation jusqu'à l'infini, soit la connaissance de la fonction dérivée (par rapport à la distance radiale) de cette courbe, deux aspects impossibles à observer. Ces méthodes se font dans le cadre de la théorie de la gravitation de Newton, les corrections relativistes étant supposées faibles à juste titre devant les incertitudes provenant de ces méthodes.

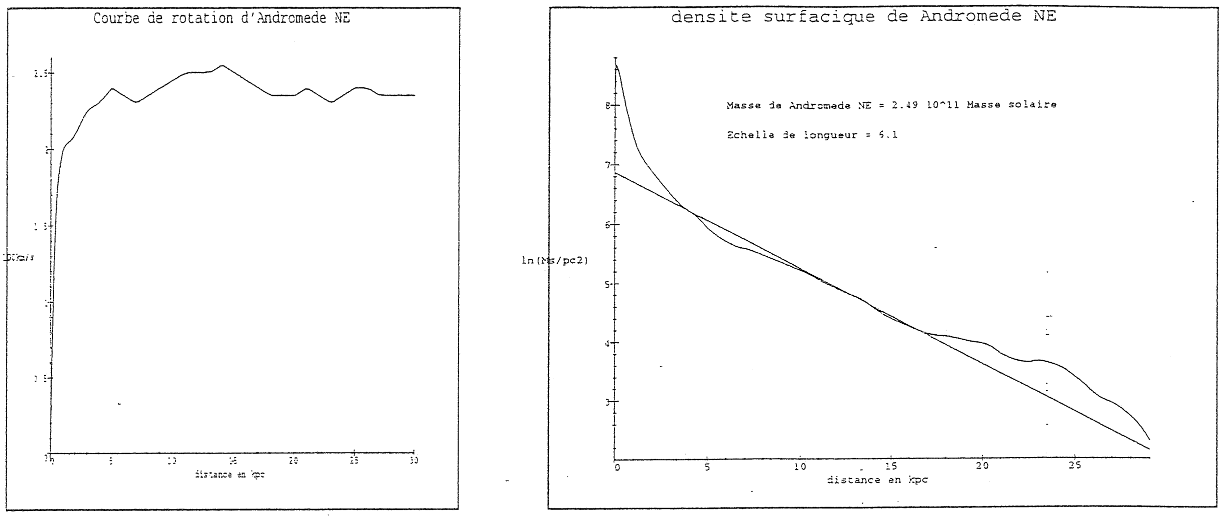


Figure 1: A gauche la courbe des vitesses de rotation observées pour la galaxie d'Andromède; les distances radiales sont exprimées en kiloparsecs (kpc), le parsec (pc) étant une unité astronomique valant environ 3,26 années-lumière. A droite la courbe de densité surfacique (qui s'exprime en *masses solaires par parsec*^{2} (Ms/pc^2); cette densité, obtenue par la méthode précise que nous avons mise au point, est tracée avec une échelle logarithmique et comparée à la droite approximant le logarithme de la densité lumineuse observée. Le suffixe NE précise simplement que j'ai utilisé les données dites Nord-Est de la Galaxie, j'aurai pu tout aussi bien prendre les données dites Sud-Ouest, qui, bien que légèremnt différentes, aboutissent aux mêmes conclusions.1

En collaboration avec deux collègues, J.B. Baillon mathématicien de l'université Lyon 1 et D. Méra astrophysicien de l'E.N.S. de Lyon, nous avons mis au point une nouvelle méthode permettant de trouver la répartition de masses à partir de la seule donnée de la courbe de rotation observée. J'ai utilisé le logiciel Maple pour élaborer et mettre au point cette méthode. Voici donc les étapes essentielles d'une recherche débutée en septembre 93.

B Premiere étape expérimentale

Supposons une galaxie spirale barrée, simplifiée à l'extrême, en la modélisant par $2n+1$ corps alignés placés de manière symétrique de part et d'autre du corps central, à des distances fixées, et tournant de manière rigide. Un premier programme basé sur l'équilibre des forces, nous conduit à résoudre un système linéaire de n équations à $n+1$ inconnues (la masse du corps central et celle de chacun des n corps d'un bras). Soit M la somme des masses alignées (c'est l'équation manquante) et w la vitesse de rotation angulaire. Après quelques essais et tatonnements, nous avons résolu le système, avec comme variable w à M fixé. On obtient expérimentalement : pour chaque w il y a une solution, la famille (m_i); puis en imposant la contrainte du fait que chaque masse devait être positive, le résultat suivant se révéle : il existe w_{max} et w_{min} tels que pour $w \in [w_{min} w_{max}]$ toutes les masses soient positives. De plus l'écart relatif $\frac{w_{max}-w_{min}}{w_{min}}$ est très petit, fait surprenant a priori.

$\longleftarrow$ Retour à la théorie

Une vérification dans des livres et auprès de collègues mécaniciens montre que ce résultat semble inconnu. Certes le problème de la rotation rigide d'une ligne de corps massifs est de fait complètement irréaliste, du fait de l'instabilité d'un tel système, mais la méthode utilisée peut s'étendre sans difficulté majeure au problème d'un disque de corps massifs, dont la courbe de vitesse de rotation est donnée. D'où la mise au point théorique de la méthode.

La méthode :

Soit une galaxie spirale constituée d'un corps central de masse m_o et d'un disque de rayon R_g formé de n corps massifs x_i répartis avec une symétrie axiale ; A chaque point x_i nous associons sa masse (inconnue) m_i, sa distance au centre d_i, sa vitesse de rotation v_i et ses distances aux autres points d_{ij}.

A chaque point x_i associons le vecteur $\vec{d_{ij}} = x_j - x_i$; alors la force $\vec{F_i}$ agissant sur ce point x_i est:

$$\vec{F_i} = \sum_{j \neq i} G \frac{m_i m_j}{d_{ij}^3} \vec{d_{ij}},$$

où G est la constante de Newton.
Maintenant supposons que ces forces donnent naissance à la courbe de rotation (dans le cadre de la théorie de Newton de la gravitation), nous avons :

$$\vec{F_i} = m_i \frac{v_i^2}{d_i} \frac{x_i}{d_i}.$$

Alors l'équilibre des forces radiales entre les $n+1$ corps se traduit par l'ensemble des n équations :

$$\frac{v_i^2}{d_i} \frac{x_i}{d_i} = \sum_{j \neq i} G \frac{m_j}{d_{ij}^3} \vec{d_{ij}}.$$

Du fait de la symétrie du problème, la première équation se réduit à $\vec{0} = \vec{0}$.
Soit θ_{ij} l'angle formé par les deux vecteurs x_i et x_j, alors $d_{ij}^2 = d_i^2 + d_j^2 - 2 d_i d_j cos(\theta_{ij})$ ainsi les n équations linéaires se réduisent à :

$$\sum_{j \neq i} m_j F_{ij} = v_i^2 / d_i,$$

où $F_{ij} = G(d_i - d_j cos(\theta_{ij}))/d_{ij}^3$.
Dans le but de résoudre un tel système linéaire nous devons fixer une variable ; nous prendrons la suivante : $w = \frac{1}{M_g}$, où $M_g = \sum_i m_i$ est la masse de la galaxie. Ce choix repose sur le fait que nous pouvons normaliser les équations (1).
Soit $M_i = m_i / M_g$ alors nous avons à résoudre pour chaque w, les $n+1$ équations des $n+1$ inconnues M_i :
pour $i = 1, ..., n$

$$(1) \qquad \sum_{j \neq i} M_j F_{ij} = w \, v_i^2 / d_i \ ,$$

$$(2) \qquad \sum_i M_i = 1 \ ;$$

avec les contraintes :

$$(3) \qquad M_i \geq 0,$$

i.e. chaque masse est positive.
Les équations (1), (2) et (3) forment le point de départ de la programmation.

C Deuxième moment expérimental

Je programme alors cette méthode pour un disque formé de k rayons, ayant chacun n corps équirépartis, et j'effectue une série d'essais sur des courbes de rotation très diverses et fictives et, bien sûr, des tas de petits programmes de tests et de vérifications. Cela marche très bien, avec le même résultat que précédemment.

Ainsi ma conviction est faite que l'on peut rendre compte de n'importe quelle courbe de rotation, sans faire appel à un (hypothétique) halo massif. De plus la précision obtenue sur w permet d'obtenir la masse totale d'une galaxie avec une erreur de méthode négligeable (seule reste l'incertitude liée à celle des observations). Un premier test sur la Voie Lactée nous donne une masse d'environ $1.4\ 10^{11} M_\odot$ (masses solaires).

⟵ Retour à la théorie

Mais des questions se posent, en particulier, pourquoi la méthode fonctionne-t-elle, i.e. pourquoi la matrice (F_{ij}) est-elle inversible ? Et pourquoi existe-t-il toujours w_{max} et w_{min} très proches. Nous sommes alors au printemps 94, je mettrai plus d'un an pour résoudre ces questions. J.-B. Baillon et moi-même menions chacun une programmation et échangions résultats et problèmes.

C'est à l'automne 94 qu'eut lieu la première prise de contact avec Dominique, astrophysicien de l'E.N.S., préparant une thèse sur le halo de la Voie Lactée. Je lui explique ce que j'ai trouvé, sa première réponse est de me dire que ma méthode est sûrement fausse puisque l'on sait bien qu'il faut un halo massif, qu'il existe des méthodes bien connues et qu'en aucun cas je ne pourrai obtenir une courbe de densité surfacique de matière ayant la décroissance exponentielle de la densité lumineuse observée. Vite un petit programme de plus, et la semaine suivante je lui montre que ma méthode permet de retrouver (numériquement sur des exemples) la décroissance exponentielle observée. La collaboration s'engage alors (timidement au début); je lui passe le principe de ma méthode, il me donne des références bibliographiques sur les méthodes connues. Une excellente présentation des trois méthodes existantes se trouvent dans l'ouvrage de Binney et Tremaine intitulé *Galactic Dynamics* [1]. Ces trois méthodes ont pour noms, la méthode des intégrales elliptiques (basée sur le disque vu comme réunion d'anneaux de matière), la méthode des transformations de Bessel (basée sur des propriétés asymptotiques du potentiel gravitationnel créé par le disque de matière) et enfin la méthode des sphéroïdes, la plus utilisée (basée sur le disque vu comme limite de sphères applaties). Le point commun de ces trois méthodes est le fait que, partant d'une densité surfacique, la vitesse de rotation s'exprime par une intégrale double qui n'est pas absolument convergente. Ainsi ces trois méthodes (qui sont en fait des méthodes inverses car elles déduisent une courbe de rotation d'une densité surfacique supposée) ne permettent de trouver un résultat que dans des cas d'école (par connaissance de primitives par exemple).

D Troisième étape expérimentale

C'est la programmation des trois méthodes, la comparaison dans les rares cas particuliers où l'une de ces méthodes fournit un résultat avec ceux de la nôtre. Dominique de son côté programme les quatre méthodes (avec le logiciel numérique Matlab); nos conclusions sont identiques : notre méthode donne les mêmes résultats que la méthode des intégrales elliptiques et que celle des transformations de Bessel; les résultats sont différents de ceux prévus par la méthode la plus en vogue, celle des sphéroïdes. Le 7 avril 95, Dominique me propose d'écrire un article ensemble, il est enfin convaincu surtout par le fait que notre méthode est directe, s'applique dans tous les cas et est très précise. Il reste à établir les preuves mathématiques établissant l'équivalence théorique de trois des méthodes sur quatre, et à comprendre le pourquoi de la différence avec la dernière.

⟵ Retour à la théorie

Il nous apparait très vite que notre méthode est une approximation riemanienne de l'intégrale double de la méthode des intégrales elliptiques, elle lui est donc théoriquement équivalente équivalente, ceci permet en particulier une amélioration de notre algorithme par une choix plus approprié de la disposition des points dans le disque. D'autre part, sous réserve de l'équivalence de cette dernière avec la méthode des transformations de Bessel), nous sommes assurés de l'inversibilité de la matrice; en effet les transformations de Bessel sont bijectives (comme les transformations de Fourier dont elles dérivent). Ainsi la matrice (F_{ij}) est inversible. Pour montrer l'équivalence entre la méthode des transformations de Bessel et celle des intégrales elliptiques, j'ai du permutter les intégrales et introduire des valeurs principales (les intégrales doubles n'étant pas absolument convergentes), puis transformer des fonctions de Bessel d'une part et des intégrales elliptiques d'autre part en séries hypergéométriques. Les fonctions hypergéométriques obtenues étant très différentes dans leur paramétrage, il restait à montrer l'égalité entre ces valeurs principales.

E **Quatrième étape expérimentale** Cette courte étape a eu pour but de trouver formellement un chemin de transformations successives entre fonctions hypergéométriques, chemin permettant de prouver l'égalité entre les intégrales. Vu le choix immense de transformations possibles, la programmation formelle de celles-ci à permis de trouver rapidement un chemin. A la main le travail aurait été très long. Le recours au calcul formel fût une aide très efficace à la recherche d'une preuve.

⟵ Retour à la théorie

Il ne restait plus qu'à écrire cette preuve pour achever la démonstration de l'équivalence théorique de notre méthode avec deux existantes. Puis l'utilisation de propriétés des fonctions hypergéométriques permettait d'évaluer la différence $w_{max} - w_{min}$ et ainsi de prouver pourquoi notre méthode est précise et donc efficace. La rédaction de l'article est achevée en juillet 95, envoyé à une revue, des propositions d'amélioration du contenu nous ont été faites, nous les avons incorporées et avons resoumis l'article; à ce jour nous attendons encore la décision du «referee». Chacun donnons des exposés dans différents séminaires ou colloques, et chacun mettons au point des extensions du programme; par exemple, j'ai étudié les corrections relativistes qui sont faciles à incorporer dans le cadre de notre méthode, Dominique, quant à lui, étudiait l'effet d'un halo autour de la Voie Lactée, halo très peu massif (du tiers de la densité usuellement admise) pour tenir compte d'observations locales (au voisinage du Soleil) et des résultats récents concernant l'observation de microlentilles gravitationnelles en direction du centre galactique et des nuages de Magellan. Il vient de soutenir sa thèse sur ce sujet. A ce propos, il est à signaler que notre méthode remet en cause des résultats «bien connus», il est difficile alors de convaincre les experts, mais Dominique a su le faire. Je vous dis tout cela, car la recherche n'est pas toujours ce que l'on croit, les préjugés y sont nombreux, les modes existent, des mythes sont fabriqués ; par exemple le mythe du trou noir a la vie dure. Pour être plus précis à ce sujet, de nombreuses personnes ont déja montré que dans le cadre de la relativité générale l'effondrement gravitationnel d'une boule de matière ne peut conduire à la formation d' un trou noir. Pour les personnes intéressées voici la référence d'une preuve mathématique de ce fait, rédigée en français dans le journal de la Société Mathématique de France : N. STAVROULAKIS, *Mathématique et trous noirs* ; Gazette des mathématiciens, n^o31 pp119 -132 (1986).

F ⟶ Cinquième étape expérimentale

C'est la mise au point d'un programme «définitif» avec Maple traitant 40000 points; avec un logiciel numérique Dominique traite 250000 points, la précision des résultats est la même. Toutes les recherches décrites précédemment ont donné lieu à l'élaboration de différents programmes avec de multiples tests et procédures de vérifications. La méthode étant bien au point il restait à extraire de toutes ces pages de fichiers, un programme qui optimise le temps de calcul et la place mémoire. Il est donc de moins en moins formel et de plus en plus numérique. Voici les résultats obtenus pour la Voie Lactée.

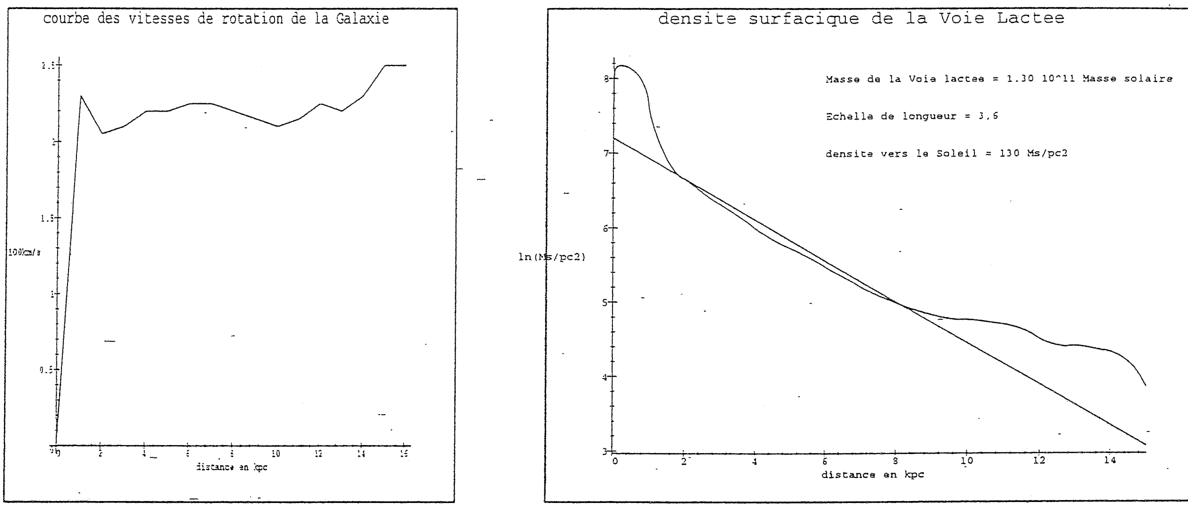


Figure 2: A gauche la courbe des vitesses de rotation observées pour notre galaxie; il y a des incertitudes concernant les confins de la Galaxie (taille et vitesses); le Soleil se trouve à une distance d'environ $8,5$ *kpc* du centre galactique. A droite la courbe de densité surfacique ; cette densité, à décroissance de type exponentielle, admet une échelle de longueur (un terme d'astrophysique relié à la pente de la droite tracée), d'environ 3, 6 kpc; cette échelle correspond à celle associée à la densité lumineuse observée, qui est de $3,5 \pm 0,3$. Sur cette courbe, ainsi que pour celle d'Andromède (figure 1), il apparait que le rapport Masse sur Luminosié n'est pas constant; il y a une sous-estimation de la masse pour les faibles luminosités, ce qui constitue une des conséquences de notre travail. La densité surfacique obtenue au voisinage du Soleil d'environ $130 Ms/pc^2$ est supérieure à celle obtenue par d'autres observations faites dans notre voisinage (elle est d'environ $90 Ms/pc^2$). Il faut donc supposer qu'il existe de la matière non observée dans notre environnement ou (et) un très léger halo dans lequel baigne notre galaxie, en tout cas un halo très nettement plus ténu que celui vainement recherché. Exit donc une justification donnée pour la recherche de particules exotiques et autres objets

étranges.

Conclusion :

Après ces quelques considérations d'astrophysique, revenons pour terminer à l'objet essentiel de mon exposé. L'utilisation du calcul formel m'a permis de renouveler ma pratique de la recherche et de changer mon rapport aux mathématiques. Parmi les conséquences prévisibles de l'arrivée du calcul formel, outre le fait que pour moi les mathématiques (re)deviennent une science expérimentale, il est certain d'une part que l'enseignement de celles-ci sera amené à beaucoup évoluer et d'autre part, qu'au niveau conceptuel, il apparaît un axiome, l'«axiome de l'ordinateur», qui aurait un statut similaire à l'axiome du continu ou celui du choix. Mais c'est une autre histoire.

Un ajout à la conférence donnée :

G $\longrightarrow$ Sixième étape expérimentale :

Mise au point d'une version expurgée pour l'enseignement.

En Septembre 96, deux collègues m'ont demandé si je pouvais leur préparer une version de la méthode qui puisse être enseignée en Deug et en classes préparatoires. A ma surprise, j'ai pu raccourcir encore le programme à une page, programme qui donne des résultats corrects sur les ordinateurs utilisés pour l'enseignement. Ceci pose un problème didactique : c'est un produit fini, expurgé de tous les tatonnements liés à l'élaboration du programme, de toutes les procédures de vérifications. Drôle d'image de la production de savoirs!

Le problème de l'U.E.

Deuxième partie

Compléments à propos du problème de l'U.E.

Ce que je voudrais faire, c'est montrer quelques uns des problèmes qui se posent dans l'étude de cette suite, quelques questions qui peuvent arrivées en ayant une approche expérimentale du problème. Pour travailler, j'ai eu une démarche très expérimentale, et ce que je voudrais montrer, c'est que cette approche renvoie à des développements plus théoriques, que cette étude amène plus de questions que de résultats. Il est à noter que historiquement, l'utilisation des ordinateurs a permis dans ce genre de problèmes d'émettre des conjectures qui ont ensuite été démontrées. Verhlust décrit son modèle au XIX^{eme} siècle et Fegenbaum publie dans les années 80 ses résultats.

Quelques idées en vrac :

Modèle logistique : le mot vient du français logis : c'est l'idée que la population ne peut dépasser une taille imposée par le milieu (un logis)

La première idée est de représenter graphiquement le comportement à long terme de la suite en fonction des valeurs de a.

J'utilise l'algorithme :
(1) Choisir une valeur initiale x_0
(2) Calculer les 100 premières valeurs de la suite
(3) Afficher les 100 valeurs suivantes.

Le scénario de doublement de période.
Quand il y a une branche, le comportement à long terme de la suite tend vers une valeur limite (la suite converge).
Quand il y a deux branches, c'est que le comportement de la suite va se stabiliser vers deux valeurs distinctes : on dit alors qu'il y a un comportement périodique de période 2.
Le schéma montre alors qu'il ya doublement de périodes : 1-2-4-8-...

Premier point : regarder la structure du diagramme. On peut apercevoir la structure auto-similaire en « zoomant » le diagramme. Voir premier programme.

Deuxième point : les branches dans le schéma de doublement de période deviennent de plus en plus court. Il est alors tentant d'imaginer que la longueur des branches décroit suivant une certaine loi. La première hypothèse peut alors être que cette décroissance est géométrique.
Dans ces conditions il doit y avoir un seuil pour le paramètre a tel que le nombre de branches ne croit plus. C'est la valeur de a notée s_∞ et connu sous le nom de point de Fegenbaum. Ce point partage le diagramme en deux parties : la partie concernant le doublement de périodes et la partie gouverné par le chaos.

Essayons alors d'interpréter les résultats observés sur le diagramme de Fegenbaum :

Premiere exploration :

1 < a < 3

Dans ces conditions la suite converge. On peut alors chercher pour quelle valeur de a la suite converge le plus vite. Théoriquement, il s'agit de comparer des vitesses de convergence de suites. Le point fixe est dit super-attractif lorsque la dérivée en ce point est nulle. On obtient le résultat pour a = 2.

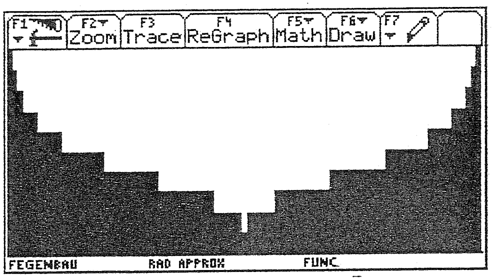
On peut alors se rechercher l'influence du point de départ sur la convergence. Pratiquement, on peut imaginer une expérience en utilisant l'algorithme suivant :

Partant de x_0 je peux chercher le nombre d'itérations nécessaires pour atteindre l'intervalle

$]x^*-\varepsilon, x^*+\varepsilon[$

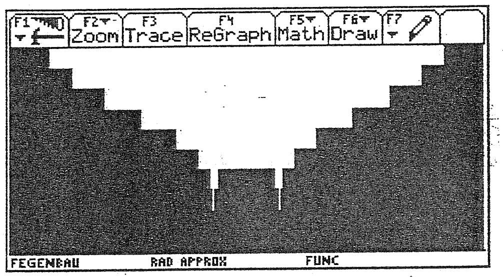
Programme tprofile() sur TI92

Pour la valeur 2 on obtient :

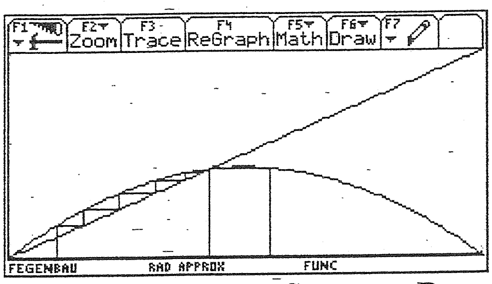


On remarque une symétrie et le nombre d'itérations augmente lorsqu'on s'éloigne de la valeur centrale 1/2.

Pour a = 1.75 on obtient :



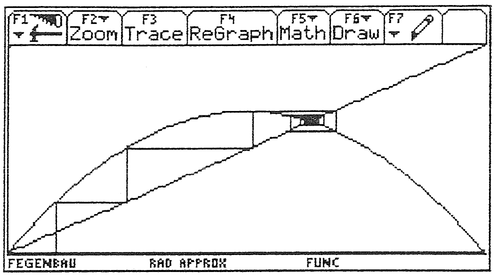
Surprise : il y a deux vallées de part et d'autre de 1/2. En fait, on peut comprendre ce fait en regardant le schéma :

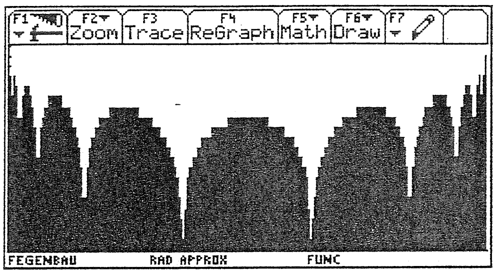


G C D

Si on part de G la suite est croissante vers le point fixe. Si on part de D, on se ramène en un coup à G. Si on part de C, la suite décroit vers le point fixe.

a = 2.75





α G 1/a C 1-1/a D β

Pour atteindre le point fixe en 2 coups, il faut partir de 1/a. Il s'agit alors de regarder l'antécédent, c'est à dire résoudre l'équation f(x) = 1/a. Pour a > 2 on obtient :

$$\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{2a}\sqrt{a^2 - 4}$$

$$\beta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2a}\sqrt{a^2 - 4}$$

Ce qui donne trois intervalles : G = [α,1/a], C = [1/a,1-1/a], D = [1-1/a,β]

Pour a entre 2 et 3, le comportement est le suivant : Si on est dans C alors le terme suivant est dans D et le suivant dans C et ainsi de suite. Si on part de G alors le terme suivant est dans C. Si on part de D, alors le terme suivant est dans G et ainsi de suite.

On peut continuer cette exploration en cherchant la suite des antécédents et décomposer l'intervalle unité en résolvant l'équation $f(\alpha_k) = f(\beta_k) = \alpha_{k-1}$

On obtient :

$$\alpha_k = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{\alpha_{k-1}}{a}}$$

$$\beta_k = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{\alpha_{k-1}}{a}}$$

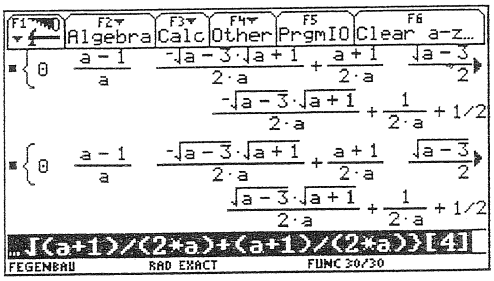
Ce qui explique l'infinité de montagnes et de vallées lorsque a > 2

Deuxième temps : le doublement de période

On cherche alors à résoudre l'équation f(f(x)) = x

C'est une équation du quatrième degré mais comme 0 et 1-1/a sont solutions on peut facilement la résoudre (ou la faire résoudre !)

On obtient :



Ces solutions sont définies seulement pour a > 3.
Le second itéré de f a donc 4 point fixes. Il s'agit de savoir pour quelles valeurs de a ces points fixes sont attractifs et sont super-attractifs.

Examinons en détail :
Pour $a = b_1 = 3$ le point fixe de f perd sa stabilité : $|f'(x^*)| = 1$ De même pour f^2. Mais deux autres points fixes apparaissent pour f^2 x_d et x_g . Pour $a = 1+\sqrt{5}$ on obtient le cas super attractif. C'est le cas où $f^{2}{}'(x_g) = 0$ ou bien où $f(f(1/2))=1/2$.

a	f(x)	$f^2(x)$
1	bifurcation de x^*	
2	x^* super-attractif $x^* = ½$	
3	x^* devient instable	deux nouveaux points fixes x_g et x_d
$1+\sqrt{5}$	f(f(1/2))=1/2	super attractivité $x_g = ½$
?		x_g devient instable

On peut voir alors comment continuer. On cherche les points fixe de f^4 et on détermine les suites s_i points pour lesquels on obtient un cas de super-attractivité et b_i où on a un doublement de période. On peut calculer s_∞ comme limite de la suite s_i les caculs étant plus faciles que de considérer la suite b_i.

Explication de l'algorithme :

L'algorithme repose sur la formule :

$\delta = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{s_n - s_{n-1}}{s_{n-1} - s_{n-2}}$ avec s_n paramètre super attractif correspondant au cycle de longueur 2^{n-1}.

On connaît $s_1 = 2$ et $s_2 = 1+\sqrt{5}$
En effet, $f_a(x) = ax(1-x)$ donc, $f_a'(x) = -2ax + a$
donc $f_a'((a-1)/a) = 2 - a$ et s'annule pour a = 2.
De la même façon en calculant le nombre dérivé du second itéré de f_a en ses points fixes, on obtient $s_2 = 1+\sqrt{5}$

Pour obtenir les termes suivants, on utilise la propriété suivante :
s_n est caractérisé par une orbite de 2^{n-1} avec la propriété que le point critique ½ appartient au cycle. Ainsi s_n est une solution de l'équation : $f_a^{2^{n-1}}(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ d'inconnue a.

On remarque que s_1,, s_2,...,s_{n-1} sont aussi solutions de cette équation. Il faut donc prendre des précautions pour exhiber la "bonne" !

On pose $g(a) = f_a^{2^{n-1}}(\frac{1}{2}) - \frac{1}{2}$

Il s'agit donc de résoudre l'équation g(a) = 0. Pour ce faire on utilisera la méthode de Newton en itérant N(a) = 1 - g(a)/g '(a). On obtient alors une suite $a^{(0)}$, $a^{(1)}$,... qui converge vers une solution de l'équation g(a) = 0, en prenant quelques précautions initiales.

Le problème est donc de calculer g(a) et g'(a). Pour ce faire, on définit la suite x_i par :
$x_0 = 0.5$ et $x_i = a\, x_{i-1}\,(1-x_{i-1})$ (1)
x_i dépend de a et en posant $N = 2^{n-1}$, $g(a) = x_N - ½$
Donc $g'(a) = x'_N$
En dérivant (1), il vient : $x'_i = x_{i-1}\,(1 - x_{i-1}) + a\,(1-2x_{i-1})\,x'_{i-1}$
Pour obtenir g(a) et g'(a), il suffit donc de calculer $x_N - 0.5$ et x'_N

Pour choisir correctement les "bons" points de départ pour s'assure que la méthode de Newton converge vers la solution souhaitée, il suffit de prendre comme valeur initiale de $s_n^{(0)}$ la valeur :
$s_{n-1} + (s_{n-1} - s_{n-2})/\delta_{n-1}$
Pour initialiser le processus, on ne dispose a priori que de s_1 et s_2. On estime alors $\delta_2 = 4$.
L'estimation de l'erreur commise repose sur la remarque suivante :
$s_n - s_n^{(i)} \approx s_n^{(i+1)} - s_n^{(i)}$. On peut donc arrêter le processus dès que $(s_n^{(i+1)} - s_n^{(i)})/ s_n^{(i)}$ est de l'ordre de la précision de la machine. En fait lorsque $1+2^{1-n}$ se distingue de 1. En ce qui concerne le programme en Turbo-Pascal, n=32 et le processus sera arrêté dès que $(s_n^{(i+1)} - s_n^{(i)})/ s_n^{(i)}$ sera inférieur à 10^{-10}.

Résultats : (j représente le nombre d'itérations du procédé de Newton)
n=4
s(4)= 3.55464086276882E+0000 delta(4)= 4.68077099801070E+0000 j= 3
n=5
s(5)= 3.56666737985627E+0000 delta(5)= 4.66295961111410E+0000 j= 3
n=6
s(6)= 3.56924353163711E+0000 delta(6)= 4.66840392591840E+0000 j= 3
n=7
s(7)= 3.56979529374994E+0000 delta(7)= 4.66895374096762E+0000 j= 2
n=8
s(8)= 3.56991346542235E+0000 delta(8)= 4.66915718132880E+0000 j= 2
n=9
s(9)= 3.56993877423331E+0000 delta(9)= 4.66919100211887E+0000 j= 1
n=10
s(10)= 3.56994419460806E+0000 delta(10)= 4.66919947259760E+0000 j= 1
n=11
s(11)= 3.56994535548647E+0000 delta(11)= 4.66920113307371E+0000 j= 1
n=12
s(12)= 3.56994560411108E+0000 delta(12)= 4.66920150920500E+0000 j= 1
n=13
s(13)= 3.56994565735886E+0000 delta(13)= 4.66920158754128E+0000 j= 1

n=14
s(14)= 3.56994566876290E+0000 delta(14)= 4.66920161075035E+0000 j= 1
n=15
s(15)= 3.56994567120530E+0000 delta(15)= 4.66920160302898E+0000 j= 1

Dernier point : que se passe-t-il au delà du point de Fegenbaum ?

Une approche : les accumulations de points qui montrent des lignes plus sombres sur le diagramme de Fegenbaum.
On peut, là encore avoir une approche expérimentale du phénomène en traçant un histogramme des fréquences d'apparition des valeurs de l'itération, on observe un pic en : $v_a = f_a(0.5)$ et en $f_a(v_a)$. Ca provient du fait que la parabole a son sommet en 0.5, ce qui rapproche les orbites les unes des autres. Les histogrammes précédents peuvent faire conjecturer que les lignes de "condensation" seraient les traces des itérés de la valeur critique v_a. Pour a = 4 v_a = 1 et $f_a(v_a) = 0$. Pour a = 3.585, v_a = 0.89625 et $f_a(v_a) = 0.333354$ etc...

Ce programme permet de vérifier cette conjecture en calculant et en traçant les $f_a^k(v_a)$ pour k allant de 0 à 3 dans le premier dessin et pour k allant de 0 à 7 pour le deuxième. Dans ces dessins, a est compris entre 3.6 (un peu supèrieur à s_∞) et 4.

Voir dessins.

Pour terminer quelques questions :

En partant de f(x) = 4x(1-x)
Un petit intervalle initial peut engendrer au bout de quelques itérations une déviation importante, voire un recouvrement entier de l'intervalle [0,1].
On peut chercher à interpréter ce phénomène en divisant l'intervalle unité et, partant d'un intervalle source, savoir si on peut atteindre n'importe quel intervalle cible.
En particulier, on peut chercher à montrer que pour tout intervalle ouvert I et J de longueur non nulle, il existe x dans I tel que après un certain nombre d'itérations atteint J.

On peut mettre en place une expérience numérique pour essayer de vérifier ce fait.
On selectionne 10000 points initiaux également espacés dans I et on suit leurs orbites jusqu'à ce que la cible soit atteinte. Les orbites qui n'atteignent pas J après un certain nombre d'itérations sont appelés les "survivants". Question : combien y-at-il de survivants après 100, 1000,... itérations ?

Que se passe-t-il si au lieu de partir d'un intervalle, on part d'un point ?

En examinant le diagramme de Fegenbaum entre le s_∞ et 4, on aperçoit des bandes plus sombres. Comment sont-elles « distribuées » ?

Pour finir : différence entre hasard et chaos : pour a = 4 tous les points de l'intervalle [0,1] sont atteints. La suite est-elle une suite au hasard ? Pour prouver que ce n'est pas vrai, j'ai utilisé le triangle de Sierpinsky qui apparaît comme attracteur d'un système de 3 homothéties. C'est à dire, on peut le construire de la manière suivante : un point est choisi dans le plan et on applique « au hasard » une des trois homothéties. La trajectoire du point est le triangle de Sierpinsky. C'est un cas particulier d'un résultat plus général concernant les IFS. Voilà les dessins obtenus en utilisant la suite de nombres aléatoires de Turbo-pascal et la suite des itérés de f_4.

Premier programme

Il permet de représenter graphiquement le diagramme de Fegenbaum. Voir dessins.
Etude mathématique :
En général, un point fixe x^* d'un « processus feed-back » $x_{n+1} = f(x_n)$ est caractérisé par $f'(x^*)$:

lorsque $|f'(x^*)| \leq 1$ le point fixe est attractif et il y a convergence
lorsque $|f'(x^*)| > 1$, le point fixe est répulsif.

L'idée de la démonstration étant que dans un voisinage de x^*, f(x) peut se développer suivant la méthode de Taylor et $x_{n+1} \approx x^* + (x_n - x^*)f'(x^*)$ et donc $|x_{n+1} - x^*| < |x_n - x^*|$ dès que $|f'(x^*)| < 1$.

Dans le cas de la suite de Fegenbaum, $f_a(x) = ax(1-x)$ et $f_a'(x) = -2ax + a$
Le point fixe (non nul) de f_a est (a-1)/a et $|f_a'(x)| < 1$ ssi a < 3

Soit $x_0 = (a-1)/a + \varepsilon$
$f_a((a-1)/a + \varepsilon) = (a-1)/a + 2\varepsilon - a\varepsilon - a\varepsilon^2$
Si a < 3, le point fixe est attractif, c'est à dire $|2\varepsilon - a\varepsilon - a\varepsilon^2| < |\varepsilon|$ à condition, bien sûr que ε laisse $(a-1)/a + \varepsilon$ dans]0,1[. Le cas a = 2 donne une décroissance quadratique. C'est le cas de « super-attractivité », lorsque la dérivée au point fixe vaut 0.

Pour a compris entre 1 et 3, on peut s'intéresser à la vitesse de convergence (voir programme tprofile)

Lorsque a < 3 le point fixe est répulsif. Par exemple pour a = 3.1, les oscillations se stabilisent en 2 valeurs qu'on peut approcher avec une calculatrice. Si on veut chercher les valeurs exactes, il faut considérer $f_a(f_a(x)) = x$. On obtient, outre 0 et (a-1)/a les points :

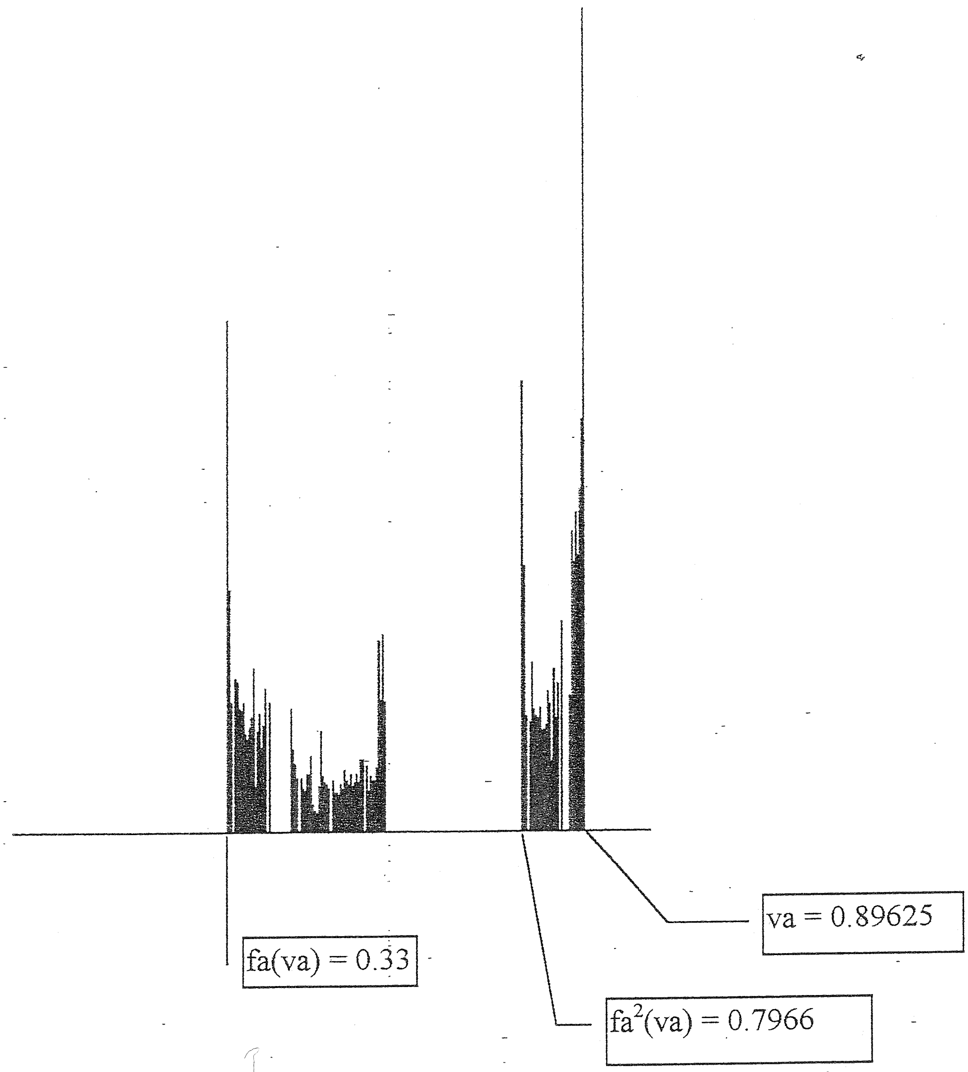
$$\frac{a+1-\sqrt{(a-3)(a+1)}}{2a}$$

$$\frac{a+1+\sqrt{(a-3)(a+1)}}{2a}$$

Pour a = 3.1 on trouve $\dfrac{41-\sqrt{41}}{62}\ et\ \dfrac{41-\sqrt{41}}{62}$

Une première bifurcation pour a = 3 ; peut-on prévoir la suivante ?
Théoriquement, c'est lorsque les points fixes de $f_a o f_a$ deviennent répulsif. On peut expérimentalement approcher ces valeurs. Voir constante de Fegenbaum.

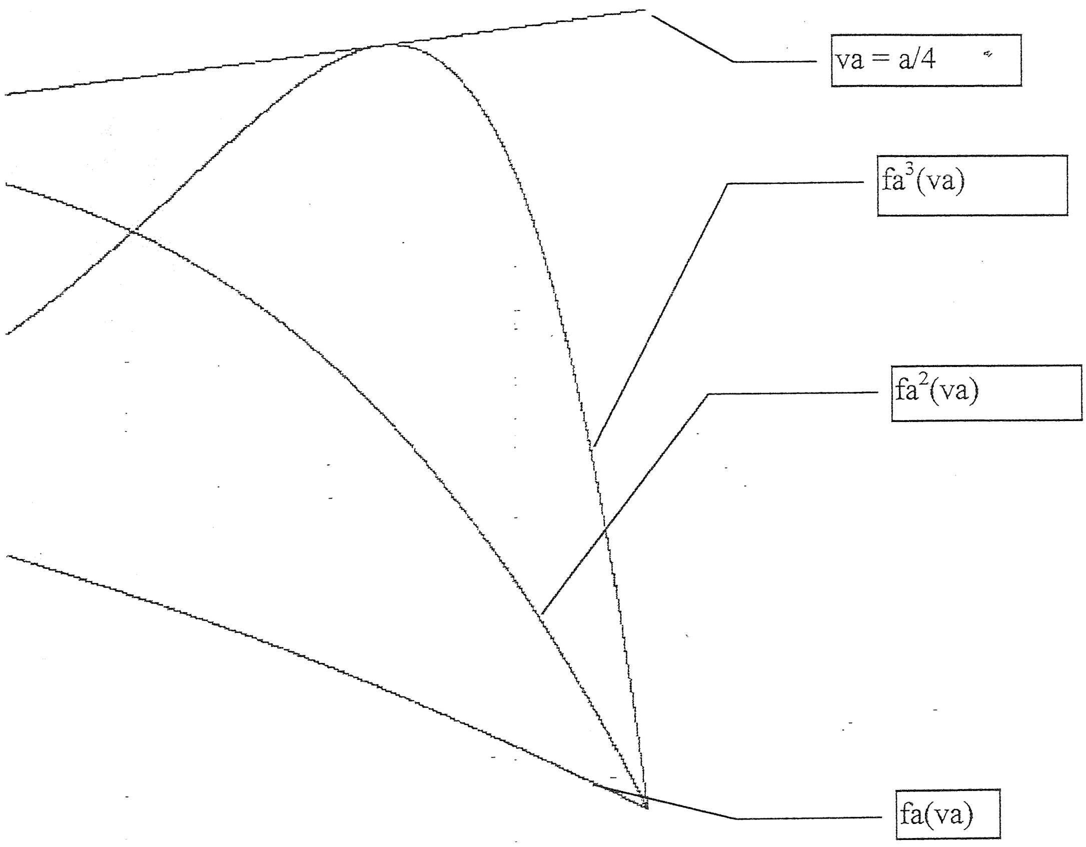
Représentation du comportement de la suite pour a allant de 1 à 4 : diagramme de Fegenbaum.

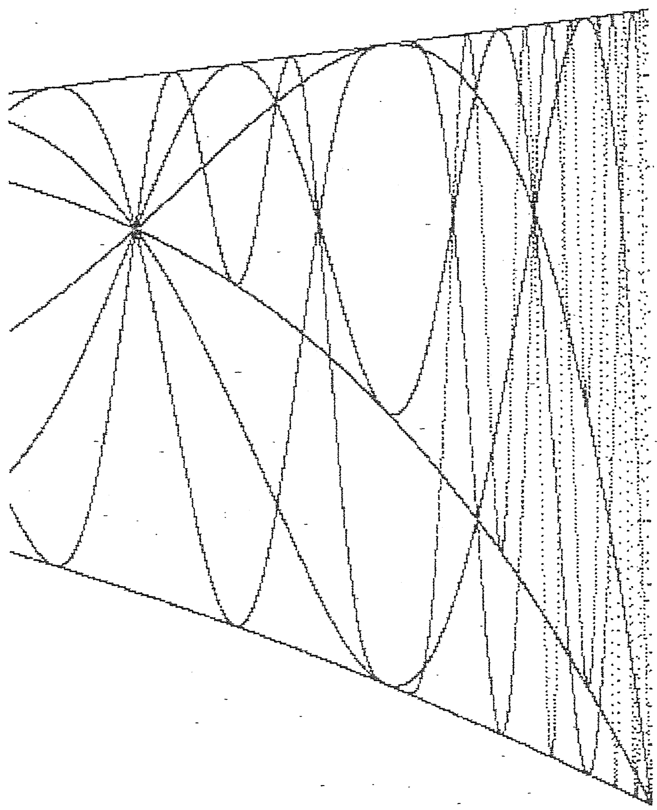


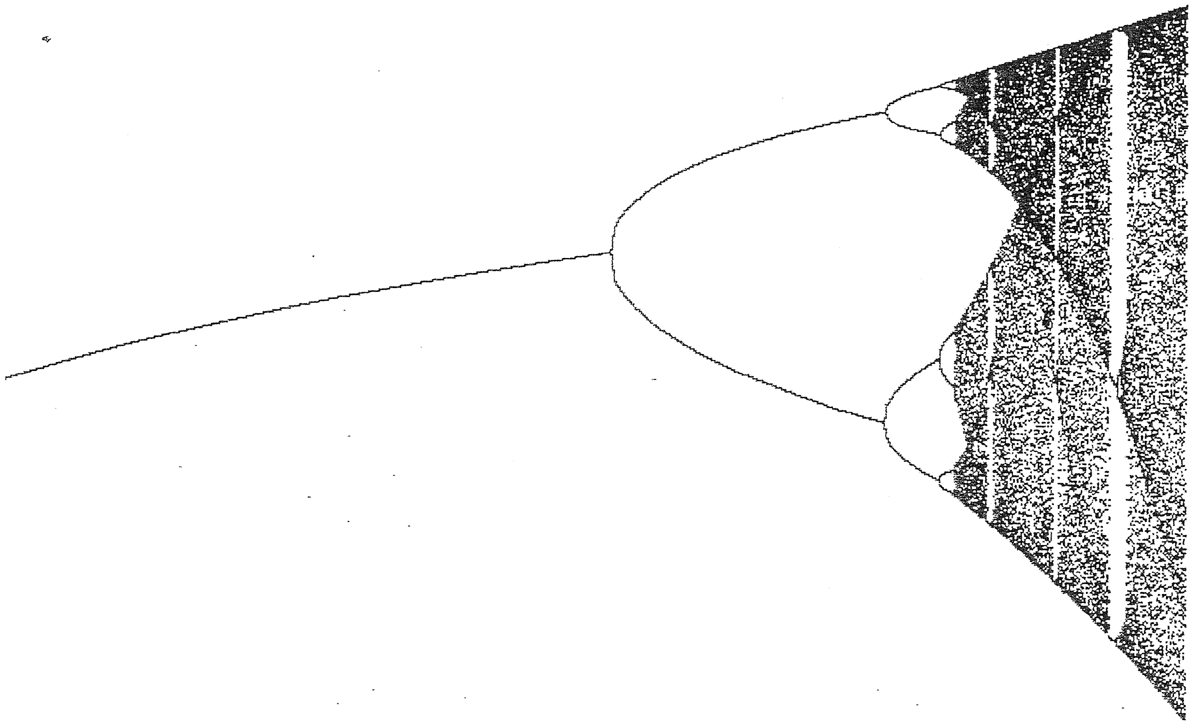
On peut se servir de ces diagrammes pour comprendre et explorer les courbes apparentes sur le dessin généré par le premier programme.

Troisième programme
Sur les dessins générés par le premier programme on voit apparaître des courbes le long desquelles il semble qu'il y ait une "agglomération" des points. Si on trace un histogramme des fréquences d'apparition des valeurs de l'itération, on observe un pic en $v_a = f_a(0.5)$ et en $f_a(v_a)$. Ca provient du fait que la parabole a son sommet en 0.5, ce qui rapproche les orbites les unes des autres. Les histogrammes précédents peuvent faire conjecturer que les lignes de "condensation" seraient les traces des itérés de la valeur critique v_a. Pour $a = 4$ $v_a = 1$ et $f_a(v_a) = 0$. Pour $a = 3.585$, $v_a = 0.89625$ et $f_a(v_a) = 0.333354$ etc...

Ce programme permet de vérifier cette conjecture en calculant et en traçant les $f_a^k(v_a)$ pour k allant de 0 à 3 dans le premier dessin et pour k allant de 0 à 7 pour le deuxième. Dans ces dessins, a est compris entre 3.6 (un peu supèrieur à s_∞) et 4.


va = a/4
fa³(va)
fa²(va)
fa(va)





Quatrième programme :

Il permet de calculer les premières décimales de la constante de Fegenbaum. La précision de Turbo-Pascal permet d'obtenir les 6 premières décimales.

Explication de l'algorithme :

L'algorithme repose sur la formule :

$\delta = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{s_n - s_{n-1}}{s_{n-1} - s_{n-2}}$ avec s_n paramètre super attractif correspondant au cycle de longueur 2^{n-1}.

On connaît $s_1 = 2$ et $s_2 = 1+\sqrt{5}$

En effet, $f_a(x) = ax(1-x)$ donc, $f_a'(x) = -2ax + a$

donc $f_a'((a-1)/a) = 2 - a$ et s'annulle pour $a = 2$.

De la même façon en calculant le nombre dérivé du second itéré de f_a en ses points fixes, on obtient $s_2 = 1+\sqrt{5}$

Pour obtenir les termes suivants, on utilise la propriété suivante :

s_n est caractérisé par une orbite de 2^{n-1} avec la propriété que le point critique ½ appartient au cycle. Ainsi s_n est une solution de l'équation : $f_a^{2^{n-1}}(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ d'inconnue a.

On remarque que $s_{1,}, s_2, \ldots, s_{n-1}$ sont aussi solutions de cette équation. Il faut donc prendre des précautions pour exhiber la "bonne" !

On pose $g(a) = f_a^{2^{n-1}}(\frac{1}{2}) - \frac{1}{2}$

Il s'agit donc de résoudre l'équation $g(a) = 0$. Pour ce faire on utilisera la méthode de Newton en itérant $N(a) = 1 - g(a)/g'(a)$. On obtient alors une suite $a^{(0)}, a^{(1)}, \ldots$ qui converge vers une solution de l'équation $g(a) = 0$, en prenant quelques précautions initiales.

Le problème est donc de calculer $g(a)$ et $g'(a)$. Pour ce faire, on définit la suite x_i par :

$x_0 = 0.5$ et $x_i = a\, x_{i-1}\,(1-x_{i-1})$ (1)

x_i dépend de a et en posant $N = 2^{n-1}$, $g(a) = x_N - ½$

Donc $g'(a) = x'_N$

En dérivant (1), il vient : $x'_i = x_{i-1}\,(1 - x_{i-1}) + a\,(1-2x_{i-1})\,x'_{i-1}$

Pour obtenir $g(a)$ et $g'(a)$, il suffit donc de calculer $x_N - 0.5$ et x'_N

Pour choisir correctement les "bons" points de départ pour s'assure que la méthode de Newton converge vers la solution souhaitée, il suffit de prendre comme valeur initiale de $s_n^{(0)}$ la valeur : $s_{n-1} + (s_{n-1} - s_{n-2})/\delta_{n-1}$

Pour initialiser le processus, on ne dispose a priori que de s_1 et s_2. On estime alors $\delta_2 = 4$.

L'estimation de l'erreur commise repose sur la remarque suivante :

$s_n - s_n^{(i)} \approx s_n^{(i+1)} - s_n^{(i)}$. On peut donc arrêter le processus dès que $(s_n^{(i+1)} - s_n^{(i)})/\, s_n^{(i)}$ est de l'ordre de la précision de la machine. En fait lorsque $1+2^{1-n}$ se distingue de 1. En ce qui concerne le programme en Turbo-Pascal, n=32 et le processus sera arrêté dès que $(s_n^{(i+1)} - s_n^{(i)})/\, s_n^{(i)}$ sera inférieur à 10^{-10}.

```
program constante_de_Fegenbaum;
{$N+}
uses crt;
const max=15;
type suite=array[0..max] of extended;
     suite2=array[0..max,0..200] of extended;
var ss,delta:suite;
    s:suite2;
    n,j,k:longint;
```

{fonction permettant de calculer la $n^{ème}$ puissance de 2}

```
function puis(n:longint):longint;
begin
     if n=0 then puis:=1 else puis:=puis(n-1)*2;
end;
```

{fonction calculant $g(s_n)$ en utilisant la suite récurrente $x=ax(1-x)$}

```
function g(a:extended;n:integer):extended;
var x:extended;
    i:integer;
begin
x:=0.5;
for i:=1 to puis(n-1) do
     x:=a*x*(1-x);
g:=x-0.5;
end;
```

{fonction calculant la dérivée de g en s_n }

```
function gp(a:extended;n:integer):extended;
var x,xp:extended;i:integer;
begin
x:=0.5;xp:=0;
for i:=1 to puis(n-1) do
    begin
    xp:=x*(1-x)+a*(1-2*x)*xp;
    x:=a*x*(1-x);
    end;
gp:=xp;
end;
```

{corps du programme}

```
begin
```

```
        {initialisations}

 clrscr;
 ss[1]:=2;ss[2]:=1+sqrt(5);delta[2]:=4;
 writeln('n=1');
 write('s(1)= ',ss[1],' delta(1)= ',delta[1]);writeln;
 writeln('n=2');
 write('s(2)= ',ss[2],' delta(2)= ',delta[2]);writeln;

        {boucle sur n}

 for n :=3 to max do
    begin
    writeln('n=',n);j:=0;
    s[n,0]:=ss[n-1]+(ss[n-1]-ss[n-2])/delta[n-1];

       {itération du procédé de Newton. s[n,j] représente les termes de la suite s_n^(j)}

       repeat
       j:=j+1;
       s[n,j]:=s[n,j-1]-g(s[n,j-1],n)/gp(s[n,j-1],n);
       until (abs((s[n,j]-s[n,j-1])/s[n,j-1]) <1E-10);

       {affichages}

    ss[n]:=s[n,j];
    delta[n]:=(ss[n-1]-ss[n-2])/(ss[n]-ss[n-1]);
    write('s(',n,')= ',ss[n],' delta(',n,')= ',delta[n],' j= ',j);writeln;
    end;
 repeat until keypressed;
 end.
```

Résultats : (j représente le nombre d'itérations du procédé de Newton)

```
n=4
s(4)=  3.55464086276882E+0000 delta(4)=  4.68077099801070E+0000 j= 3
n=5
s(5)=  3.56666737985627E+0000 delta(5)=  4.66295961111410E+0000 j= 3
n=6
s(6)=  3.56924353163711E+0000 delta(6)=  4.66840392591840E+0000 j= 3
n=7
s(7)=  3.56979529374994E+0000 delta(7)=  4.66895374096762E+0000 j= 2
n=8
s(8)=  3.56991346542235E+0000 delta(8)=  4.66915718132880E+0000 j= 2
n=9
s(9)=  3.56993877423331E+0000 delta(9)=  4.66919100211887E+0000 j= 1
n=10
```

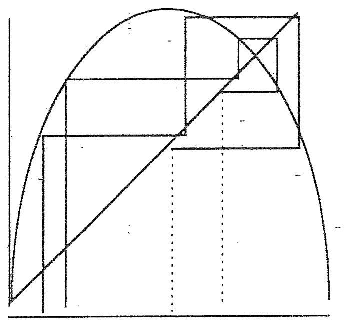
s(10)= 3.56994419460806E+0000 delta(10)= 4.66919947259760E+0000 j= 1
n=11
s(11)= 3.56994535548647E+0000 delta(11)= 4.66920113307371E+0000 j= 1
n=12
s(12)= 3.56994560411108E+0000 delta(12)= 4.66920150920500E+0000 j= 1
n=13
s(13)= 3.56994565735886E+0000 delta(13)= 4.66920158754128E+0000 j= 1
n=14
s(14)= 3.56994566876290E+0000 delta(14)= 4.66920161075035E+0000 j= 1
n=15
s(15)= 3.56994567120530E+0000 delta(15)= 4.66920160302898E+0000 j= 1

Cinquième programme

Quelques pistes de recherche :

Orbite "ergodique"
Première expérience, montrant la sensibilité aux conditions initiales :

En partant de $f(x) = 4x(1-x)$
Un petit intervalle initial peut engendrer au bout de quelques itérations une déviation importante, voire un recouvrement entier de l'intervalle [0,1].



On peut chercher à interpréter ce phénomène en divisant l'intervalle unité et, partant d'un intervalle source, savoir si on peut atteindre n'importe quel intervalle cible.
En particulier, on peut chercher à montrer que pour tout intervalle ouvert I et J de longueur non nulle, il existe x dans I tel que après un certain nombre d'itérations atteint J.

On peut mettre en place une expérience numérique pour essayer de vérifier ce fait.
On selectionne 10000 points initiaux également espacés dans I et on suit leurs orbites jusqu'à ce que la cible soit atteinte. Les orbites qui n'atteignent pas J après un certain nombre d'itérations sont appelés les "survivants". Question : combien y-at-il de survivants après 100, 1000,... itérations ?

Que se passe-t-il si au lieu de partir d'un intervalle, on part d'un point ?

On a déjà vu l'histogramme. Soit alors J un intervalle de largeur Δ_y et de centre y.
$P(y \in J) \approx v(y)\ \Delta_y$
Pour qu'une orbite "attérisse" dans cet intervalle, il faut d'abord qu'elle passe par un intervalle I_1 près de x ou I_2 près de 1-x
$\Delta_y \approx |f'(x)|\ \Delta_{x1}$
$\Delta_y \approx |f'(1-x)|\ \Delta_{x2}$
Donc la probabilité de voir un point dans J près de y est égale à la somme des probabilités d'obtenir des points dans I_1 et I_2 près de x et 1-x.
$P(y \in J) = P(x \in I_1) + P(x \in I_2) \approx v(x)\ \Delta_{x1} + v(1-x)\ \Delta_{x2}$

Soit $v(y) = \dfrac{v(x)}{|f'(x)|} + \dfrac{v(1-x)}{|f'(1-x)|}$

Il s'agit de l'équation de Frobenius Perron dont on peut montrer que la seule densité pouvant la satisfaire est :

$$v(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}$$

(Collet Eckermmann Iterated Maps on an Interval as Dynamical Systems)

Une autre étude possible :

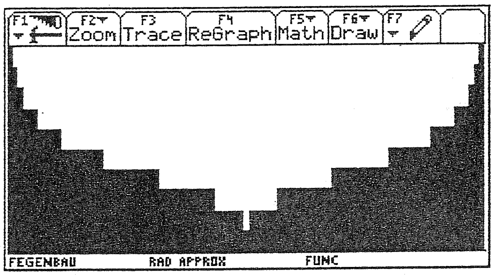
Attractif, super-attractif : démonstration : comment se comporte la suite en fonction de a et de x_0 ? En d'autres termes, en combien d'étapes le procédé itératif va conduire d'un point initial jusqu'au point fixe.
On peut, par exemple partager l'intervalle de départ en n intervalles d'égale longueur et compter combien d'étapes sont nécessaires pour atteindre un intervalle $]x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon[$

Programme TI92 :

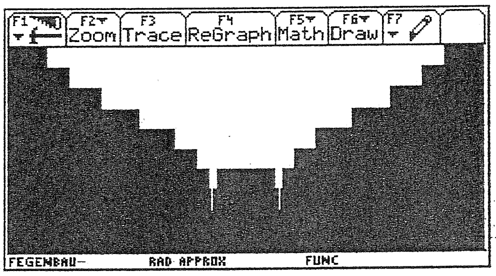
```
tprofile()
Prgm
Local x,k,n
ClrGraph
0→xmin
1→xmax
0→ymin
10→ymax
Dialog
Text "valeur de a"
Request "a=",at
EndDlog
expr(at)→a
setMode("Exact/Approx","APPROXIMATE")
For k,1,599
0→n
k/600→x
```

```
While abs(x-(a-1)/a)>1/6000
a*x*(1-x)→x
n+1→n

EndWhile
Line k/600,0,k/600,n
EndFor

EndPrgm
```

Pour a= 2, (c'est le cas où le point fixe est super attractif), on obtient :



Pour a= 1.75, on obtient :



On remarque deux petites vallées ; d'où provient ce phénomène ? (Chaos and fractals p. 598)
De même : la représentation en escalier provient-elle de la précision des intervalles ou y-at-il un explication ?

Que se passe-t-il pour a > 2 ?

Programme pascal

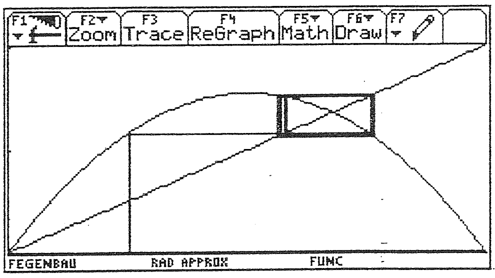
```
program Time_profile;
uses crt, graph, grafmmd;
type tab=array[1..10000]of integer;
var x,a:real;
   k,n:integer;
   t:tab;
begin
write('valeur de a :');read(a);
initgraphique;
for k:=1 to 9999 do
```

```
    begin
    n:=0;
    x:=k/10000;
    while abs(x-(a-1)/a)>1/10000 do
        begin
        x:=a*x*(1-x);
        n:=n+1;
        end;
    t[k]:=n;
    end;
for k:=1 to 9999 do
line(round(getmaxx/10000*k),getmaxy,round(getmaxx/10000*k),round(getmaxy-
getmaxy/2*(t[k]/t[1])));

repeat until keypressed;
end.
```

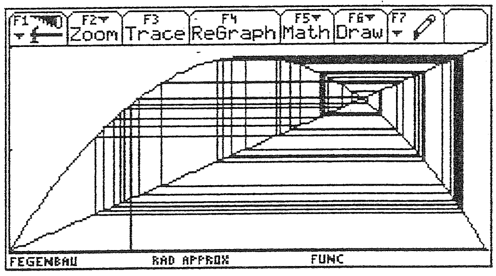
Un programme permettant de représenter la fonction fa, la première bissectrice et les itérations :

```
dessin()
Prgm
Local at,i
setMode("Exact/Approx","APPROXIMATE")
ClrGraph
Dialog
Text "valeur de a"
Request "a",at
EndDlog
expr(at)→a
Disp a
a*x*(1-x)→f(x)
0→xmin
1→xmax
0→ymin
1→ymax

Graph f(x)
Graph x
0.25→x
Line x,0,x,f(x)
For i,1,40
Line x,f(x),f(x),f(x)
Line f(x),f(x),f(x),f(f(x))
f(x)→x
EndFor
EndPrgm
```

Il donne par exemple pour a = 3,1 :



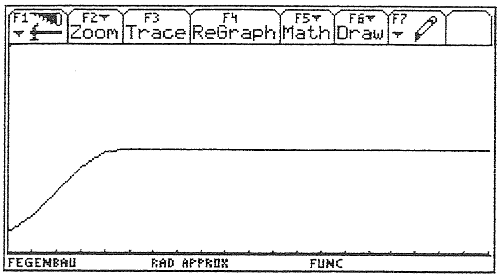
et pour a = 3.8 :



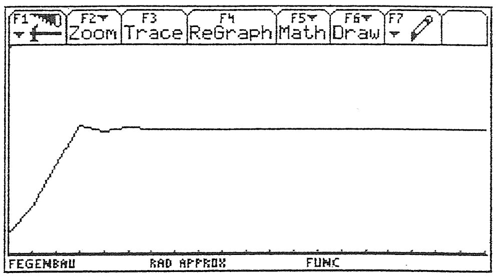
Représentation des termes de la suite

```
(n)
Prgm
Local i,a,x,x1
ClrGraph
ClrDraw
setMode("Exact/Approx","APPROXIMATE")
0»xmin
n»xmax
0»ymin
1»ymax
Disp "a"
Input a
0.1»x
For i,1,n
a*x*(1-x)»x1
Line i-1,x,i,x1
x1»x
EndFor
EndPrgm
```

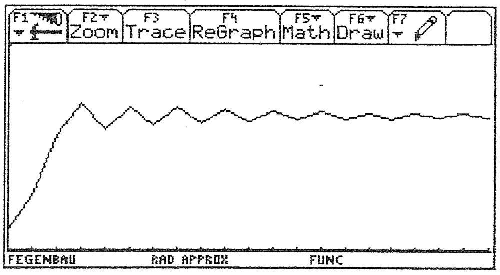
On obtient quelques écrans :



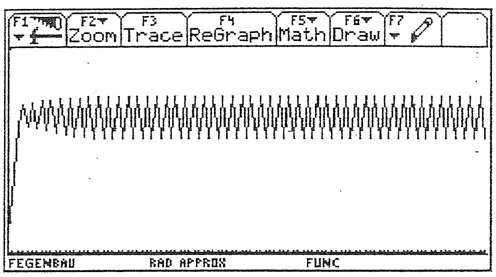
20 premières itérations pour a = 2



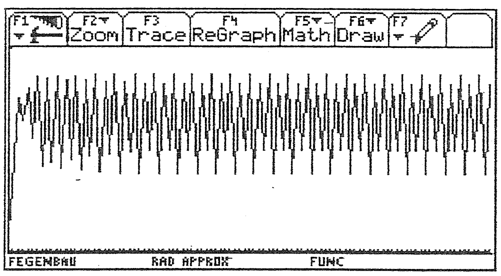
20 premières itérations pour a = 2.5



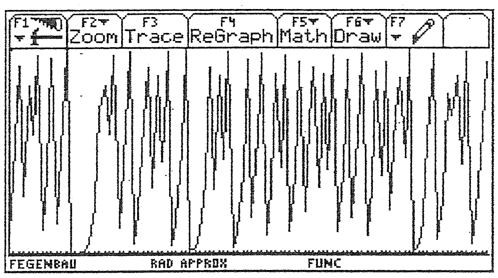
20 premières itérations pour a = 2.9



100 premières itérations pour a = 3.1



100 premières itérations pour a = 3.5



100 premières itérations pour a = 4

Evaluation de l'Université d'été

Bilan des questionnaires individuels Page 167

Compte rendu des questionnaires d'évaluation individuels

Les nombres entre parenthèses représentent la quantité de réponses sur l'item considéré

L'INTERET GENERAL de l'université d'été. POUR VOUS

* Les exposés vous ont-ils semblé pertinents ?
Tout à fait (11) assez (7) moyennement pas du tout

et cohérents avec les ateliers proposés?
Tout à fait (11) assez (7) moyennement pas du tout

L'ORGANISATION GENERALE

* La répartition des différents temps de travail vous a-t-elle paru équilibrée ?
Tout à fait (4) assez (11) Moyennement (2) Pas du tout

* Le rythme de l'Université d'été était :
Trop soutenu (10) bon (8) pas assez soutenu

* Durant cette U.E., pensez-vous avoir pu vous exprimer :
Beaucoup(2) Suffisamment (16) Moyennement Pas du tout

* Les intervenants ont été choisis pour leurs systèmes de références variés.
-L'avez vous perçu ? oui (15) non (1)
-Celà vous a-t-il paru pertinent ? oui (15)

LA LOGISTIQUE.

	Très satisfait	Satisfait	Peu satisfait	Très peu satisfait
Repas	1	11		
Hébergement	9	7	1	
Accueil et Secrétariat	14	4		
Documentation	8	9		

EVALUATION PAR ACTIVITE
Codage :
1 : Très satisfaisant ; 2 : Assez satisfaisant ; 3 : Moyennement satisfaisant ; 4 : Très peu satisfaisant

* Le problème de l'université d'été.

vous a-t-il paru être pertinent dans le contexte de l'université d'été.,	1	2	3	4
du point de vue des contenus ?	8	8	2	
du point de vue des modalités de travail ?	6	11	2	

* Ateliers, travaux de groupes

	1	2	3	4
Qu'est ce qu'une démarche scientifique, pour vous ? (1er jour)	5	11	1	
Analyse de documents (1er jour)	5	11	2	

Atelier sur le débat scientifique - Marc Legrand (2ème jour)	14	4		
Une situation particulière de recherche - C. Payan, P. Duchet (3ème jour)	8	4	5	
Analyse de protocoles - C. Payan, P. Duchet (3ème jour)	2	5	6	1
Atelier sur l'évaluation d'une démarche scientifique (4ème jour)	4	7	7	1
Phase de communication finale sur le problème de l'université d'été. et compléments (5ème jour)	4	11	1	

* Exposés	Pertinence du thème				Articulation avec les travaux en groupe			
	1	2	3	4	1	2	3	4
Recherche de problèmes : représentations, contrôle. C. Tisseron	7	7	2	1	6	5	4	
Débat scientifique et situation fondamentale, M. Legrand	15	2			10	5	2	

* Exposés (suite	Pertinence du thème				Articulation avec les travaux en groupe			
Situations de recherche et démarche scientifique : P. Duchet et C. Payan	10	2	4		5	8	3	2
Démarche scientifique et choix d'enseignement. Problèmes longs et conditions facilitantes G. Aldon, J. Feurly Reynaud	12	3			6	7	1	
Les outils de calcul dans la recherche mathématique M. Mizony	13	2	3		7	8	2	

LE DISPOSITIF PAR RAPPORT À VOS ATTENTES

* Cette Université d'été vous a-t-elle paru répondre aux objectifs annoncés ?

Tout à fait (9) Plutôt oui(9) Plutôt non Pas du tout

Sur quels points éventuellement?

Donner du sens à la démarche scientifique (4 stagiaires)
Être confronté à des exemples d'activités et d'expérience motivant
Les rapports entre recherche et enseignement
La centration sur l'élève

* A-t-elle répondu à ce que vous en attendiez ?

Tout à fait (7) Plutôt oui (10) Plutôt non Pas du tout

Sur quels points éventuellement?

Tout à fait sur le plan culturel
Possibilité de transfert de la pratique du travail de recherche en classe (2 stagiaires)
Prise de recul et de conscience (2 stagiaires)

OK sur les contenus
Situer son travail par rapports à des contenus théoriques, ou aux références didactiques et philosophiques données à l'université d'été. (2 stagiaires)
Echange et ouverture à de nouvelles pratiques
Il manque ce qui pourrait être proposé à des élèves peu motivés

<u>* Y avez-vous trouvé autre chose que ce que vous en attendiez ? Si oui, précisez</u>

Réconfort et relance (3 stagiaires) par la rencontre d'enseignants motivés
Importance du rôle du débat scientifique et du contrat spécifique qui l'accompagne
Découverte du calcul formel
Découverte d'un chercheur
Des idées d'ateliers utilisables à l'étranger
Une ambiance formidable

<u>* Pensez-vous que cette Université d'été aura une incidence sur votre pratique professionnelle ?</u>

oui (8) plutôt oui (9) plutôt non pas du tout

<u>Si oui, précisez (changement de points de vue, de pratiques, activités nouvelles...)</u>

Utiliser des pratiques ou des activités nouvelles (3 stagiaires)
Modeste si possibilité de modification dans le sens de l'université d'été.
Mettre en place un dispositif d'évaluation
Encouragement à évoluer
découverte de certains points importants : contrat, sens, partage...
Meilleure analyse , meilleure gestion des activités, des procédures (2 stagiaires)
Changement de point de vue sur ma pratique, particulièrement sur la notion de contrat avec les élèves.

IV -3-1 *Acquis des stagiaires*

<u>En terme de savoir</u>
Approfondissement et le plus souvent découverte, de concepts didactiques pertinents et de leurs significations dans des situations concrètes ;
Une utilisation du calcul formel.

<u>En terme de savoir faire</u>
Etre capable de décrire et imaginer un dispositif d'enseignement avec plus de précision du point de vue de son fonctionnement.

IV -3-2 *Quels outils d'identification*
Débats, questionnaire d'évaluation et un long tour de table à la fin de l'université d'été.

IV -3-3 *Atteinte des objectifs*
Rappelons nos objectifs tels qu'ils ont été distribués aux stagiaires en début d'université d'été. :

- Favoriser les échanges autour de pratiques visant à prendre explicitement en compte le développement d'une démarche scientifique chez les élèves, en mathématiques.

- Permettre aux participants d'étudier et d'analyser diverses modalités pour réaliser de tels objectifs, à travers des activités de recherche de problèmes.

- Analyser les conditions de la mise en place de telles activités, afin de permettre aux participants d'envisager l'expérimentation de dispositifs du même ordre.

• Réfléchir aux modalités d'évaluation à mettre en place avec des élèves en ce qui concerne le processus d'acquisition d'une démarche scientifique, dans un contexte où les enjeux par rapport à l'institution sont importants.

Il nous semble qu'ils ont tous été atteint à des degrés divers. Le dernier ayant été le moins travaillé comme cela a été noté ci dessus.
Le tour de table final mentionné ci dessus a permis aux stagiaires d 'exprimer leur étonnement et leur satisfaction sur le degré d'adéquation aux objectifs du dispositif global de l'université d'été.
Cela tient en grande partie à la profondeur et à la variété des analyses des divers intervenants, dont le dernier a donné "le point d'orgue" (dixit un stagiaire) en montrant la démarche scientifique d'un chercheur mathématicien utilisant de diverses façons le calcul formel pour réaliser ses travaux.