



INSTITUT DE RECHERCHE
POUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES

Michel GONNARD

300 PROBLEMES



Document 59 - Réédition Février 95

35 F

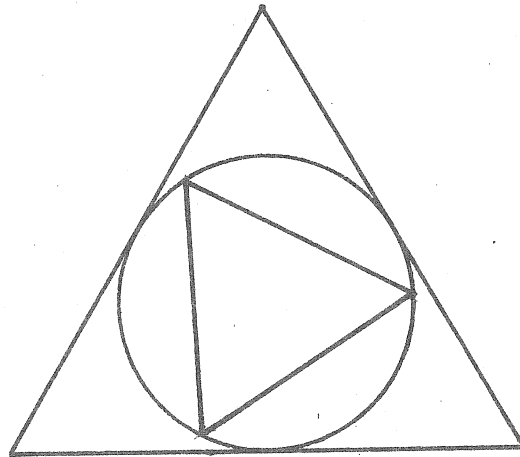
IREM de Lyon - 43 Bd du 11 Novembre - 69622 VILLEURBANNE Cedex



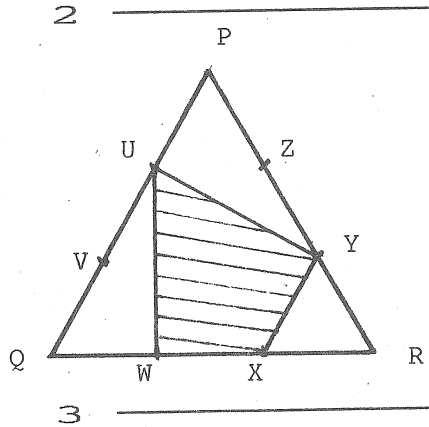
GEOMETRIE : CALCULS D'AIRES

1

Un triangle équilatéral est inscrit dans un cercle qui lui-même est inscrit dans un triangle équilatéral



Quel est le rapport des aires des triangles ?



PQR est un triangle équilatéral

$$PU = UV = VQ = QW = WX = XR = RY = YZ = ZP$$

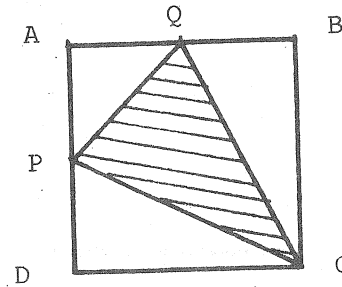
Evaluer $\frac{\text{aire } UWXVYZ}{\text{aire } PQR}$

$ABCD$ est un carré

P est le milieu de $[A, D]$

Q est le milieu de $[A, B]$

Evaluer le rapport $\frac{\text{aire } PQC}{\text{aire } ABCD}$

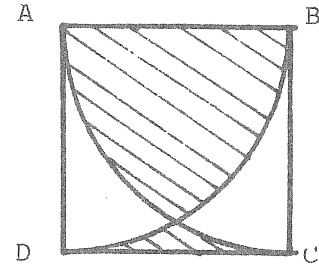


4 _____

ABCD est un carré de côté a

$\widehat{AC}$ et $\widehat{BD}$ sont des arcs de cercles de centre B et A.

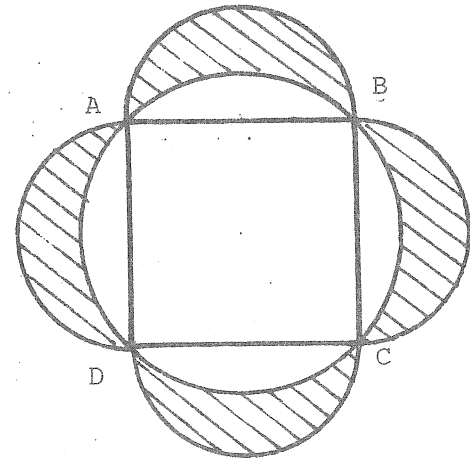
Quelle est l'aire du domaine hachuré ?



5 _____

ABCD est un carré de côté a

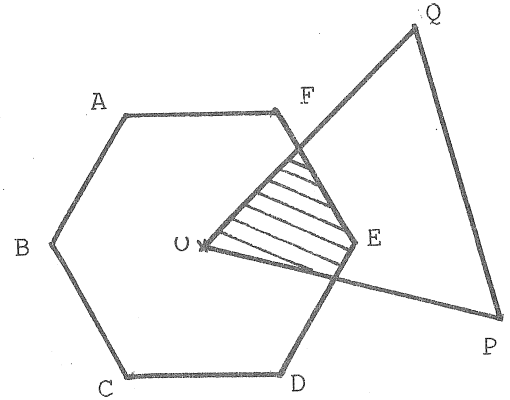
Calculer en fonction de a , l'aire du domaine hachuré.



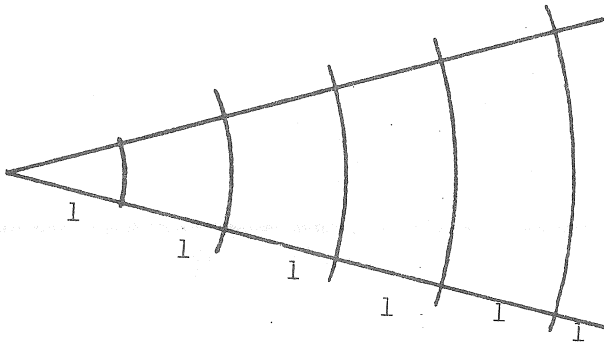
6

ABCDEF est un hexagone régulier de côté a et de centre O . OPQ est un triangle équilatéral de côté $2a$.

Quelle est l'aire du domaine hachuré ?



7

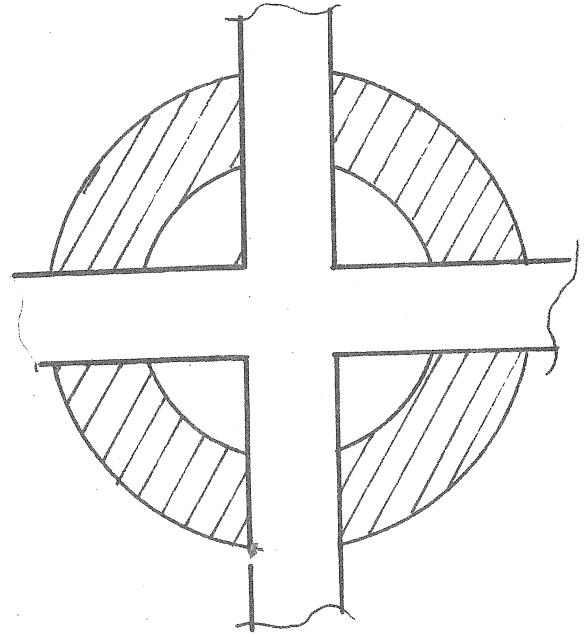


Y-a-t-il des parties de même aire dans cette figure ?

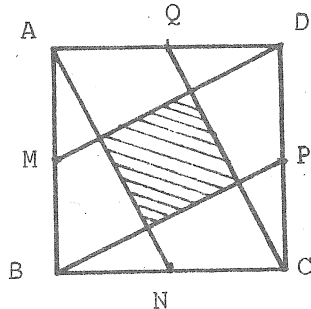
8

Deux avenues, chacune de largeur totale 6 m, se coupent à angle droit : une pelouse (surface hachurée ci-contre) est limitée par ces deux avenues et par deux cercles, centrés au centre du carrefour et de rayon 10 m et 13 m

Quelle est l'aire de la pelouse ?



9



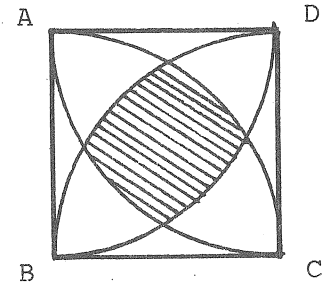
M, N, P, Q sont les milieux des côtés du carré ABCD de côté a .

Quelle est l'aire du domaine hachuré ?

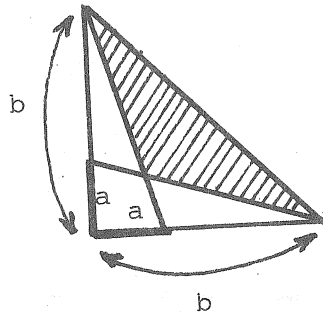
10 _____

ABCD est un carré de côté a .

Calculer l'aire du domaine hachuré en fonction de a .



11 _____



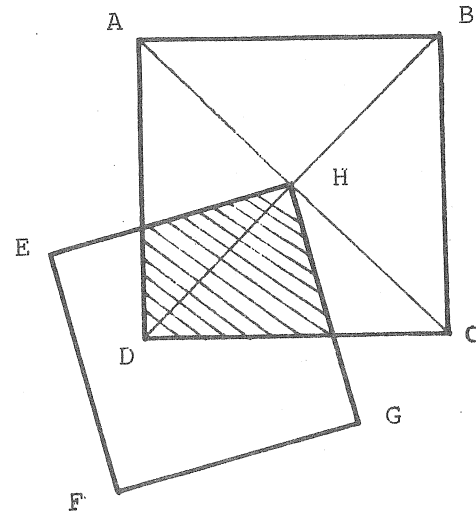
Calculer l'aire du domaine hachuré.

12

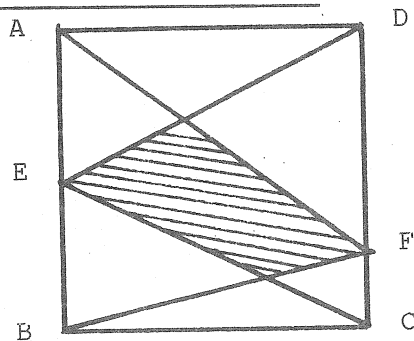
ABCD est un carré de côté $2a$

EFGH est un carré de côté b avec
 $a < b < 2a$

Quelle est l'aire du domaine
hachuré ?



13



ABCD est un carré de côté a .

E est le milieu de $[AB]$.

F est tel que $CF = \frac{CD}{4}$

GEOMETRIE : CONSTRUCTIONS

14 _____

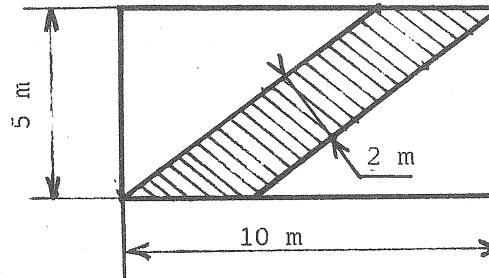
Un paysan prudent a attaché sa chèvre par 2 chaînes de 5 mètres de long. Ces deux chaînes sont attachées respectivement à 2 piquets plantés à 5 m l'un de l'autre. Quelle est la surface de prairie que peut brouter la chèvre ?

15 _____

On considère un jardin de 5 m sur 10 m.

Il est coupé par un sentier de 2 m de large comme sur le dessin ci-contre.

Quelle est l'aire de ce sentier ?



16 _____

On donne trois cercles de même rayon. Construire à la règle et au compas un cercle tangent à ces 3 cercles et les contenant.

17 _____

Soit 3 points formant un triangle ABC. Construire 3 cercles (C_1) , (C_2) et (C_3) vérifiant :

- (C_1) et (C_2) sont tangents en A
- (C_1) et (C_3) sont tangents en B
- (C_2) et (C_3) sont tangents en C

18 _____

On donne n points dans le plan. Construire le plus petit disque qui les contient.

19 _____

Deux points A et B et une droite (D) sont donnés.

Construire le point C pour que (D) soit la droite d'Euler du triangle ABC (Droite d'Euler : c'est la droite (lorsqu'elle existe) passant par O, G et H où O est le centre du cercle circonscrit, G le centre de gravité, H l'orthocentre).

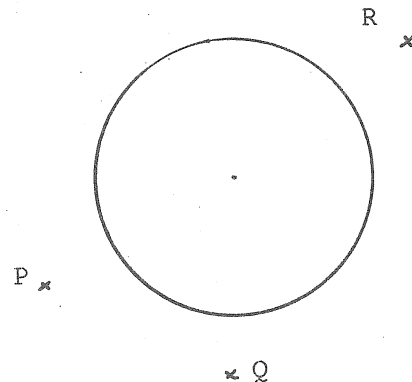
20 _____

M, N, P, Q sont 4 points alignés et r est un nombre positif. Construire un rectangle ABCD tel que $AB = r$ et (AB), (DC), (AD), (BC) passent respectivement par M, N, P, Q.

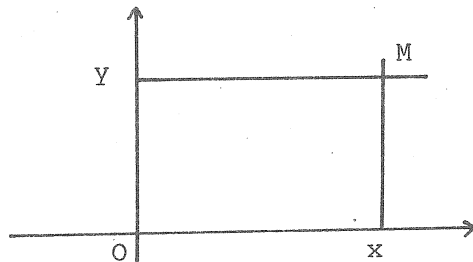
A quelles conditions la construction est-elle possible ?

21 _____

Construire un triangle inscrit dans le cercle et dont les côtés passent par les trois points P, Q, R.



22 _____

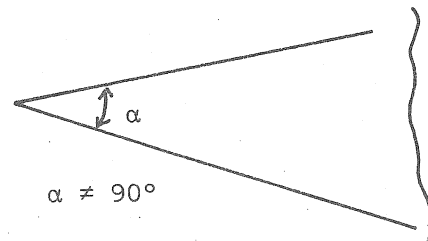


23 _____

Pouvez-vous construire les bissectrices d'un triangle en utilisant uniquement l'instrument non gradué suivant ?

M a pour coordonnées (x, y)

Construire à la règle et au compas le point de coordonnées $(\frac{1}{x}, \frac{1}{y})$

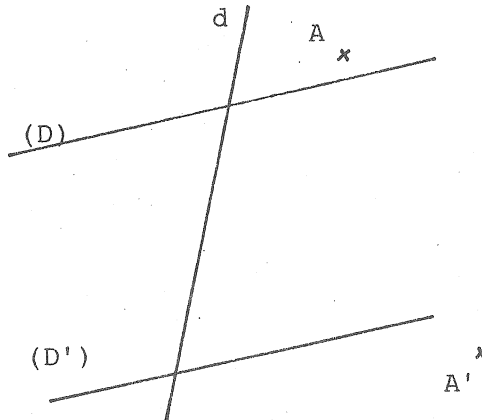


24

Soient 3 droites concourantes. Comment construire un triangle dont les 3 droites sont les médianes.

Même question, les 3 droites sont les hauteurs ; les bissectrices ; les médiatrices.

25



Soient (D) et (D') deux droites parallèles et d une direction.

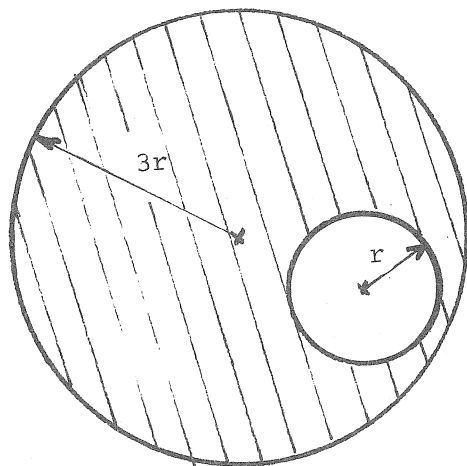
Soient deux points A et A' extérieurs à la bande de part et d'autre.

Construire M sur (D) et M' sur (D')

vérifiant : 1) $(MM') \parallel d$

2) $AM = A'M'$

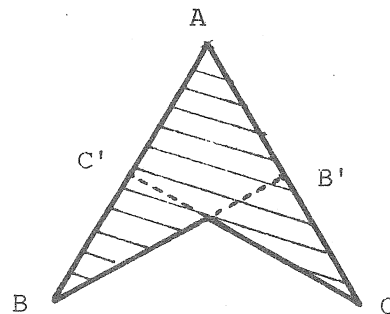
26



Construire à la règle et au compas le centre de gravité de ce disque évidé.

27

ABC est un triangle équilatéral
B' et C' sont respectivement les milieux
de [AC] et [AB].



Construire à la règle uniquement le centre de gravité de cette plaque homogène.

Résous l'équation

$$3^x - 3^{x-3} = 78 \sqrt{3}$$

31 _____

Peut-on construire un triangle isocèle connaissant la base et une de ses bissectrices intérieures ?

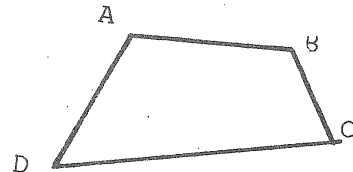
32 _____

Quatre points A, B, C, D non alignés sont donnés dans le plan. Construire un cercle qui passe à égale distance de ces 4 points.

33 _____

A, B, C, D est un quadrilatère convexe.

Construire un carré tel que chacun des côtés contienne un des points A, B, C, D et un seul.



34 _____

On donne deux points A et B et deux droites (D_1) et (D_2) . Construire un parallélogramme ABCD tel que C et D appartiennent respectivement à (D_1) et (D_2)

35 _____

Soient A, B, C, D quatre points alignés. Construire à la règle et au compas un carré dont deux côtés opposés passent par A et B et les deux autres par C et D.

36 _____

Construire un pentagone plan ABCDE connaissant les milieux I, J, K, L, M de ses côtés. Peut-on exécuter cette construction avec le compas seul ?

37 _____

Construire deux triangles ayant le même centre de gravité.

38 _____

Soit G un point. Construire à la règle et au compas un triangle dont le centre de gravité est G ?

39 _____

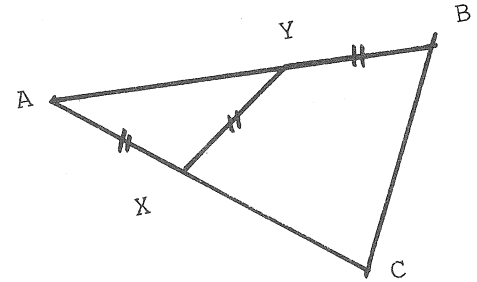
On considère un cercle et deux points P et Q. Construire à la règle et au compas un triangle rectangle inscrit dans le cercle tel que la droite constituant un de ses côtés passe par P, la droite constituant un deuxième de ses côtés passe par Q.

40 _____

Construire à la règle et au compas un carré inscrit dans un cercle donné.

41 _____

Soient A, B, et C trois points non alignés.
Construire un point X de AC et un point
 $Y \neq A$ de AB tel que $AX = XY = YB$.



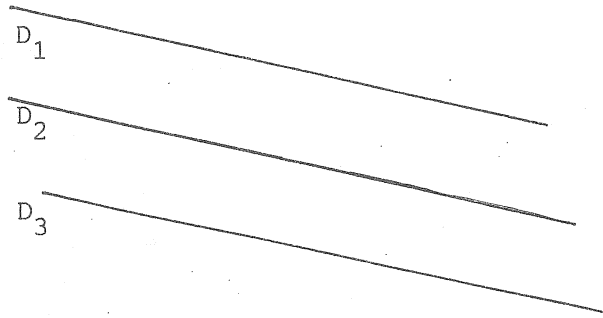
42 _____

Soit ABC un triangle. Construire un hexagone régulier inscrit dans ABC à la règle et au compas.

43 _____

On donne 3 cercles concentriques.
Construire un triangle équilatéral
ayant un sommet sur chacun des cercles.
Cas d'un triangle rectangle ?

44

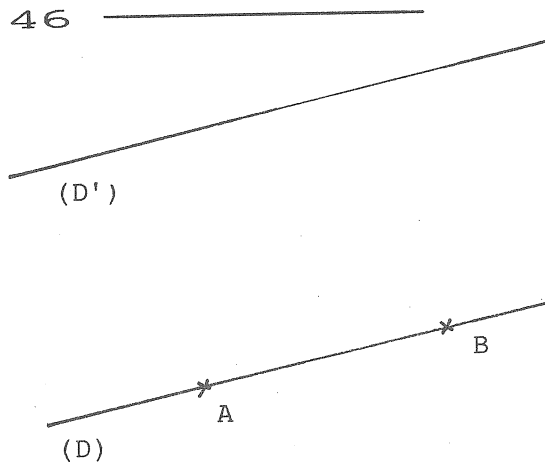


On donne 3 droites strictement parallèles D_1 , D_2 et D_3 . Construire à la règle et au compas un triangle équilatéral ABC dont les sommets A, B et C appartiennent respectivement à D_1 , D_2 et D_3 .

45

On donne : - un cercle (Γ) dont on connaît un diamètre [AB] mais pas le centre
- un point M.

Tracer, en utilisant seulement la règle, une perpendiculaire à (AB) passant par M.



On considère deux droites parallèles
(D) et (D').

A et B sont deux points de (D).

Construire en utilisant uniquement
la règle le milieu de [AB].

47

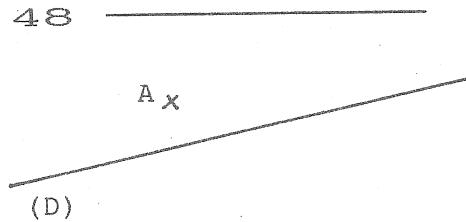
On donne : 1) A et B deux points distincts

2) I le milieu de [AB].

3) C un point

Construire en utilisant uniquement la règle une parallèle à (AB) passant par
le point C.

48



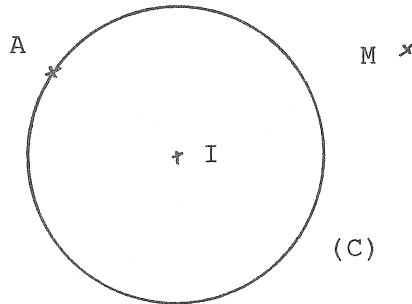
Avec le règle uniquement tracer la droite parallèle à (D) et (D') passant par A.

49

On donne le segment $[AB]$. Avec le compas seul :

- 1) Construire le milieu I de $[AB]$.
- 2) Construire E et F tels que $AE = EF = FB$.

50 _____

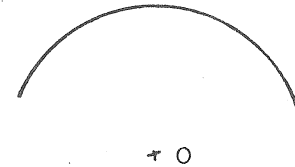


La droite (MA) coupe le cercle (C) en A et B .

Construire B avec le compas seul.

51 _____

Construire le milieu de cet arc de cercle avec le compas seul.



52 _____

A et C sont donnés.

Construire avec le compas seul les deux sommets B et D du carré $ABCD$.

GEOMETRIE : MAXI-MINI

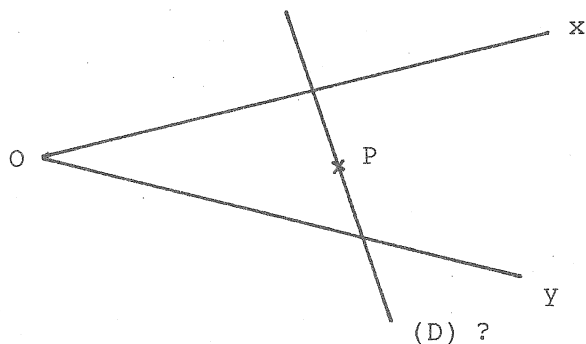
53 _____

Un carré étant donné, quel est le côté du plus petit triangle équilatéral inscriptible dedans ?

54 _____

Trouvez l'aire du plus grand triangle inscriptible dans un cercle donné.

55 _____



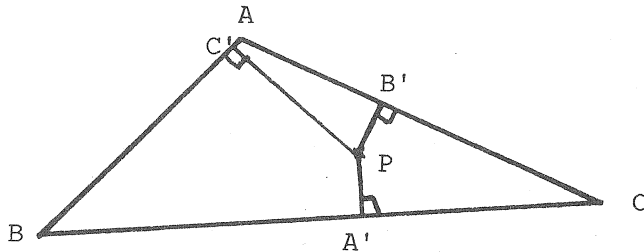
P est un point fixe situé à l'intérieur du secteur angulaire
Tracer une droite (D) passant par P
telle que le triangle ainsi obtenu
ait une aire minimum.

56 _____

Sur un cercle, on donne deux points A et B.

Où placer M sur le cercle pour que
 $MA + MB$ soit maximum?

57 _____



Où placer le point P pour que
 $PA' + PB' + PC'$ soit maximum ?

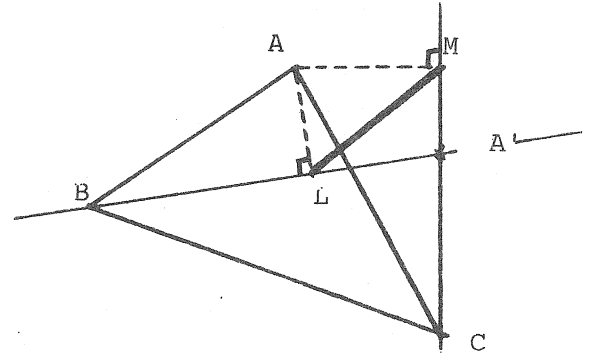
58

ABC est un triangle donné .

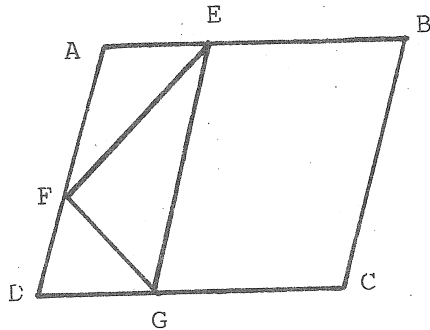
Soit A' distinct de A, de B et de C.

L et M sont les projections orthogonales
de A respectivement sur $(A'B)$ et sur $(A'C)$.

Où placer A' pour que la longueur LM soit
maximum ?



59



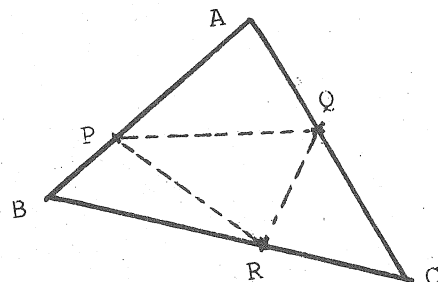
ABCD est un parallélogramme donné.

EFG est un triangle inscrit dans
ABCD.

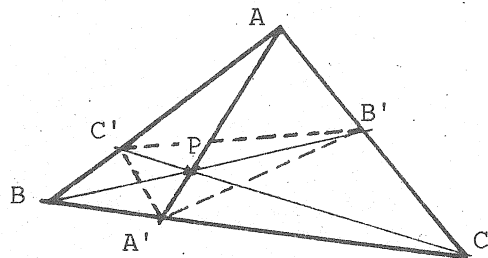
Quelle est l'aire maximum de EFG ?

60

ABC est un triangle donné. Comment choisir P, Q, R sur AB, AC, CB pour que le périmètre du triangle soit minimum ?



61



Quel est le maximum (le minimum) de $\frac{S'}{S}$?

ABC est un triangle quelconque.

P est un point intérieur au triangle ABC.

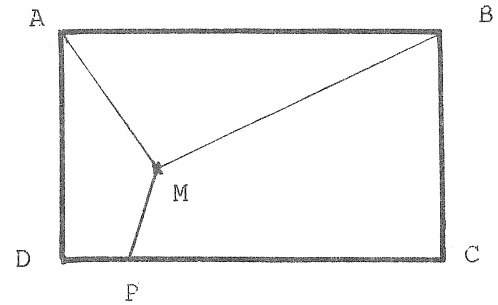
S = aire ABC

S' = aire $A'B'C'$

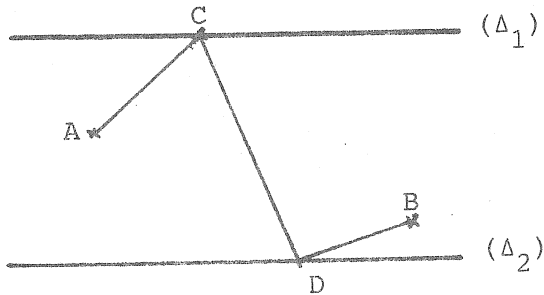
62 _____

ABCD est un rectangle.

Pour quelles positions de M et P (M intérieur au rectangle et P sur [DC]) la somme $MA + MB + MP$ est-elle minimum ?



63 _____

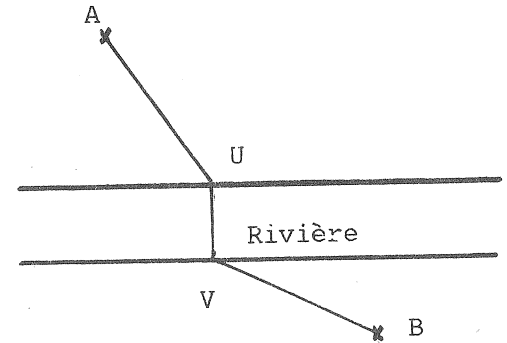


Δ_1 et Δ_2 sont deux parallèles.

Comment choisir C et D respectivement sur (Δ_1) et (Δ_2) pour que $AC + CD + DB$ soit minimum ?

64 _____

Où placer le pont UV pour que le route de A à B soit la plus courte ?



65 _____

Considérons 3 cercles concentriques. Comment choisir sur chacun d'eux un point pour obtenir les sommets d'un triangle d'aire maximum ?

66 _____

Parmi tous les triangles de périmètre p donné, trouver les triangles d'aire maximum.

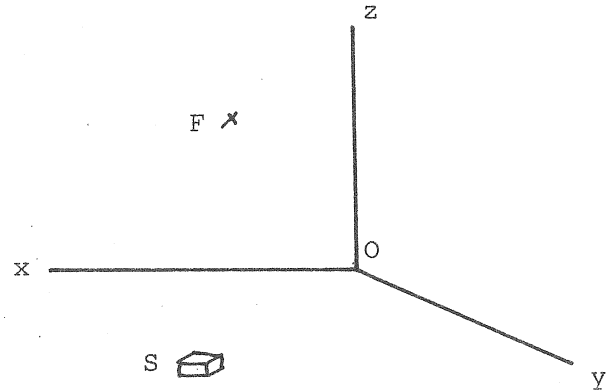
67

Considérer trois cercles concentriques de rayons respectifs a , $2a$, $3a$
Comment choisir sur chacun d'eux un point pour obtenir les sommets d'un
triangle d'aire maximum ?
Quelle est la valeur de cette aire ?

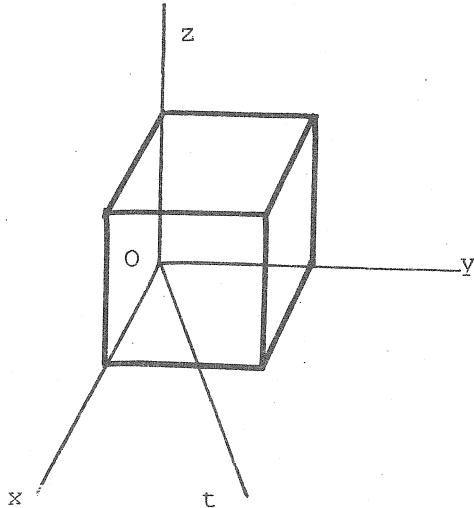
GEOMETRIE : ESPACE

68

La fourmi F se trouve dans le plan xoz.
Le sucre S est situé dans xoy.
Dessiner le plus court chemin pour F
qui veut atteindre S.



69



On se donne un cube dessiné en perspective cavalière (les parallèles sont représentées par des parallèles).
Ot est une demi-droite du plan xoy.
Construire sur ce dessin la direction perpendiculaire à Ot dans xoy.

70 _____

27 points sont rangés sur un cube de telle manière qu'il y ait :

- un point à chaque sommet
- un point au milieu de chaque côté
- un point au centre de chaque face
- un point au centre du cube.

Combien peut-on tracer de droites contenant exactement trois de ces points ?

71 _____

Que peut-on dire d'une droite (D) de l'espace qui fait des angles égaux avec 3 droites d'un plan ?

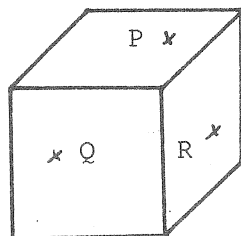
72 _____

On donne un tétraèdre régulier ABCD et deux points P et Q intérieurs au tétraèdre. Quelle est la mesure maximale de l'angle $\widehat{PAQ}$?

73

Un tétraèdre a une seule arête supérieure à 1.
Quel est le volume maximum d'un tel tétraèdre ?

74



P, Q, R sont trois points situés sur les faces visibles de ce cube.

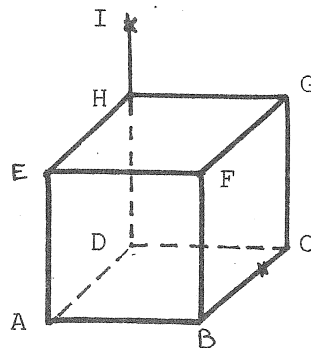
Construire sur le cube la trace du plan PQR.

75

I est fixe sur l'arête DH.

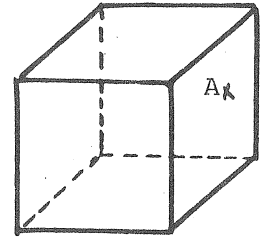
M est un point du segment $[B, C]$.

Donner une construction du point N, point d'intersection de IM et de la face EFGH.



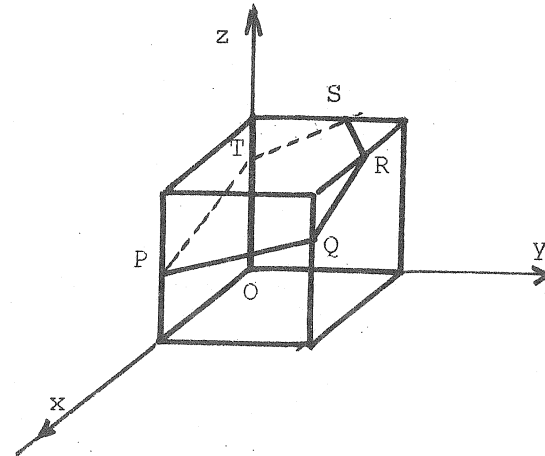
76

Un point A est marqué sur une face d'un cube
(pas une arête).
construire le plus court chemin tracé sur
la surface du cube partant de A et revenant à A
et qui passe une fois et une fois seulement sur
chaque face du cube ne contenant pas A.



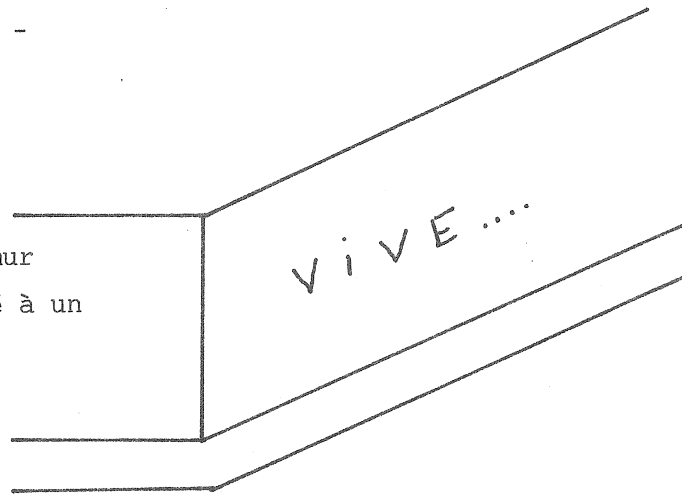
77

On se donne un cube dessiné en perspective
cavalière, et un plan par ses traces PQRST
sur les faces du cube .
Construire dans ce plan la direction perpen-
diculaire à PS.



78 _____

Comment dessiner un slogan sur un mur pour qu'il n'apparaisse pas déformé à un automobiliste situé à 50 m ?



79 _____

$n \geq 6$. Pouvez-vous construire un polyèdre convexe dont le nombre d'arêtes soit n ?

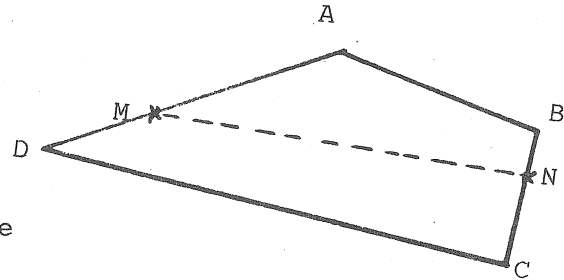
80 _____

Peut-on faire rentrer une règle plate de 31 x 4 cm dans une boîte cubique de 20 cm de côté.

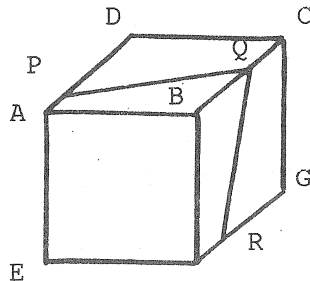
81 _____

ABCD est un quadrilatère convexe. M est un point fixe de $[AD]$.

Existe-t-il un point N de $[BC]$ (et si oui le construire) de façon qu'en "pliant" le quadrilatère suivant MN les points ABCD soient coplanaires ?



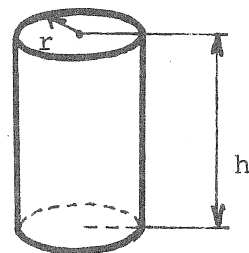
82 _____



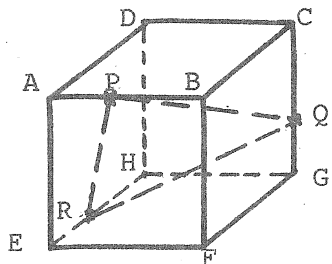
Le plan PQR coupe le cube en deux morceaux.
Réaliser en carton mince des maquettes
de chacun de ces deux morceaux.
(Le cube a par exemple pour côté 10 cm
et $AP = QC = FR = 2$ cm).

83

Soit une boîte de conserve cylindrique d'épaisseur constante, de hauteur h , de rayon r . Son volume V étant donné, comment faut-il choisir h et r pour que son poids vide soit minimal ?



84



ABCDEFGH est un cube.

Comment choisir les points P , Q et R respectivement sur $[AB]$, $[CG]$ et $[EH]$ pour que le triangle PQR ait un périmètre minimum ?

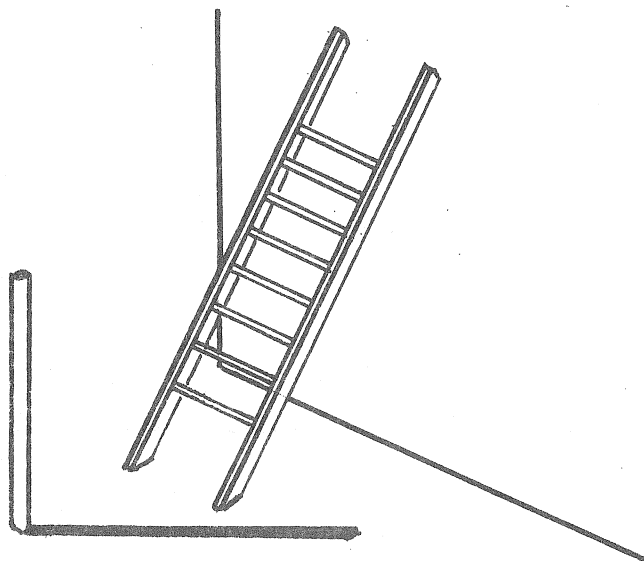
85

$ABCD$ sont 4 points de l'espace. Déterminer l'ensemble des centres de tous les parallélogrammes qui ont un sommet sur chacun des 4 segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$.

86 _____

Quel est le patron du cône ayant le plus grand volume, parmi ceux que vous pouvez découper dans une feuille de format 21 x 29,7 cm ?

87 _____



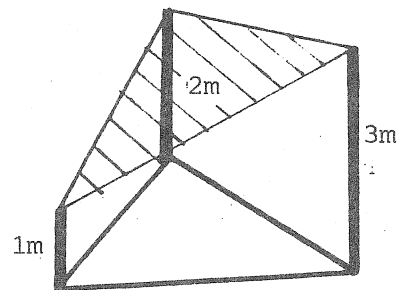
Connaissant l'ombre du piquet, construire celle de l'échelle.

88

Un triangle équilatéral dont les côtés mesurent 1 m repose sur un plan horizontal.

Des poteaux verticaux de 1 m, 2 m et 3 m de haut sont disposés en chacun des 3 sommets du triangle.

Quelle est l'aire en m^2 du triangle formé par les 3 sommets des poteaux ?

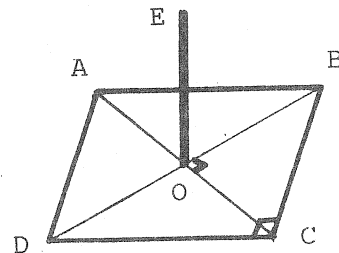


89

On considère un solide S constitué :

- d'une plaque carrée ABCD de centre O
- d'une tige OE perpendiculaire à cette plaque.

- 1) Dessiner l'ensemble des milieux des segments joignant deux points de S.
- 2) Dessiner l'ensemble des centres de gravité des triangles ayant pour sommets trois points de S.

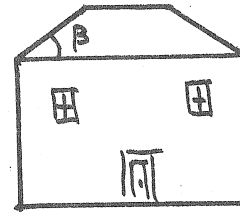
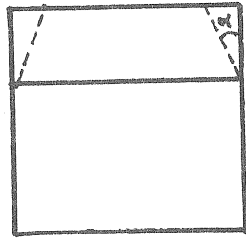
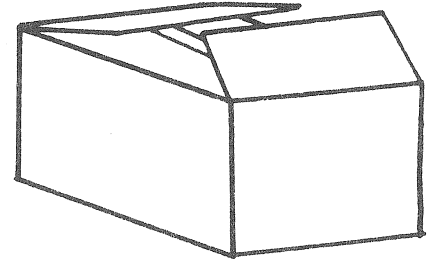


90

A partir d'un carton d'emballage, on fabrique une maison de poupée.

Pour former les pans du toit, on découpe dans les rabats 2 petits triangles selon un angle α .

Sauriez-vous calculer γ pour obtenir un toit de pente β ?



91

Un cube a ses arêtes de longueur 1 mètre .

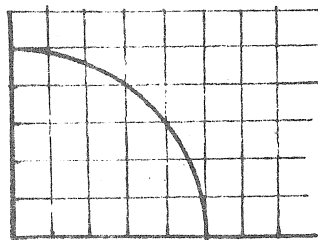
L'ensemble des points à 1 mètre de la surface de ce cube enclose une forme solide. Quel est le volume, en mètres cubes, de cette forme ?

GEOMETRIE PLANE

92 _____

On donne un pentagone régulier convexe de côté a et un point M intérieur au pentagone. Calculer en fonction de a la somme des distances de M aux côtés.

93 _____



Soit (C) un cercle de rayon r unités (le côté d'un carreau représente une unité).

Pouvez-vous trouver en fonction de r le nombre de carreaux traversés ?

94 _____

Partager un disque en 5 parties équivalentes tant en aire qu'en contour.

95 _____

Comment partager un trapèze rectangle dont la grande base est le double de la petite base et dont la hauteur est égale à la petite base en 4 trapèzes d'aires égales ?

96 _____

Une médiane d'un triangle partage un triangle en deux triangles de même aire. Comment découper l'un pour obtenir l'autre ?

97 _____

Etant donné deux polygones de même aire, peut-on découper l'un pour obtenir l'autre ?

98 _____

Comment classer les pentagones ?

99

Dans le plan on donne n points pas tous alignés.

Existe-t-il toujours une droite qui passe exactement par 2 de ces points ?

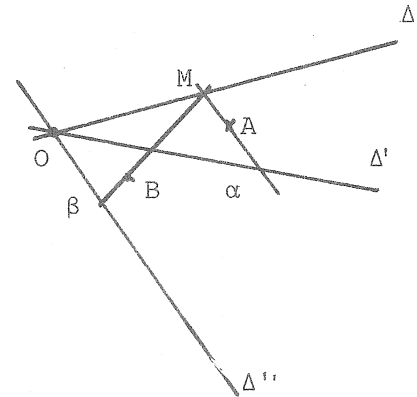
100

Δ, Δ' et Δ'' sont 3 droites concourantes en O . A et B sont 2 points distincts n'appartenant à aucune des droites.

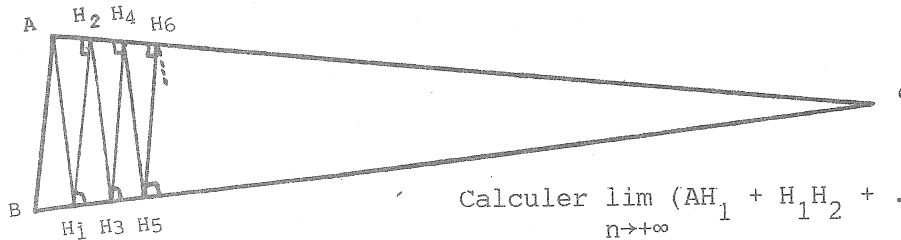
M décrit Δ $MA \cap \Delta' = \alpha$

$MB \cap \Delta'' = \beta$

Que peut-on dire de $\alpha\beta$ lorsque M varie ?



101



Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} (AH_1 + H_1H_2 + \dots + H_{n-1}H_n)$

102 _____

Soient 4 points A, B, C, D donnés dans le plan.

Soit M un point quelconque du plan.

N est le symétrique de M par rapport à A

K est le symétrique de N par rapport à B

L est le symétrique de K par rapport à C

E est le symétrique de L par rapport à D

A quelle condition a-t-on $E = M$?

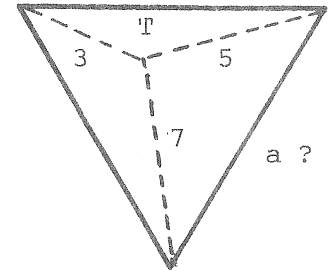
103 _____

Un triangle est dit "aigu" si tous les angles de ce triangle ont une mesure strictement inférieure à 90° . Comment découper un carré en 8 triangles aigus ?

104 _____

Les distances de T aux sommets du triangle équilatéral sont 3, 5 et 7 cm.

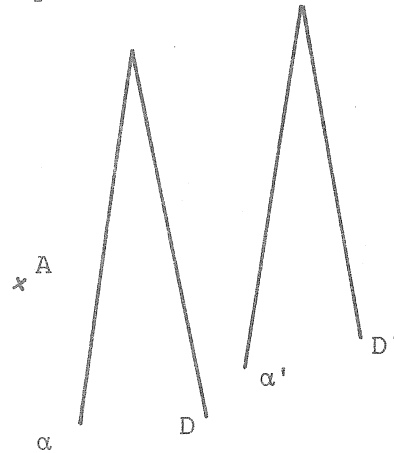
Quelle est la longueur du côté de ce triangle ?



105 _____

(Δ , Δ') et (D , D') sont deux couples de droites parallèles.

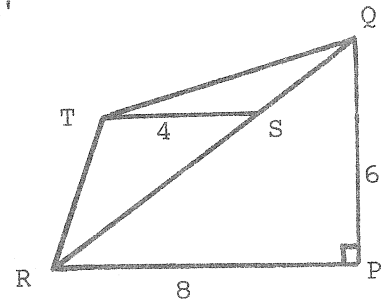
Construire une droite passant par A, sécante à Δ , D , Δ' , D' en E, F, E', F' tels que $EF = E'F'$.



106 _____

Que cette figure, ST est parallèle à PR.

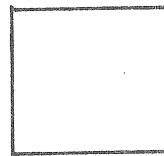
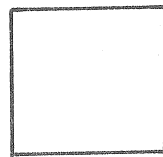
Quelle est l'aire du triangle RQT ?



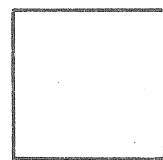
107 _____

Voici deux carrés identiques.

Comment découper ces deux carrés pour en faire un seul ?



Même problème avec 2 carrés inégaux.



108 _____

On donne deux cercles (C_1) et (C_2) .

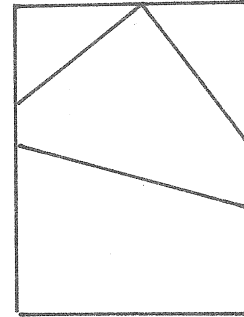
Trouver un point A de (C_1) et un point B de (C_2) tels que la droite AB ait une direction donnée et que la distance AB soit égale à un réel α donné.

109 _____

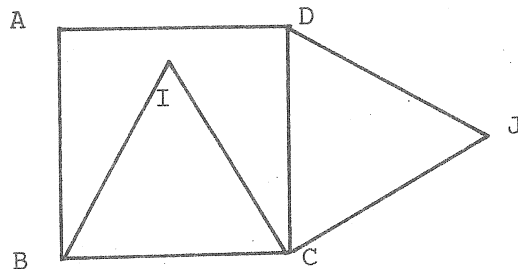
Quel est le rayon du plus grand cercle que l'on puisse tracer dans les carrés blancs d'un échiquier dont les carrés ont 4 cm de côté.

110 _____

Quel est le périmètre du triangle
qui dépasse les limites de la feuille ?



111 _____



ABCD est un carré

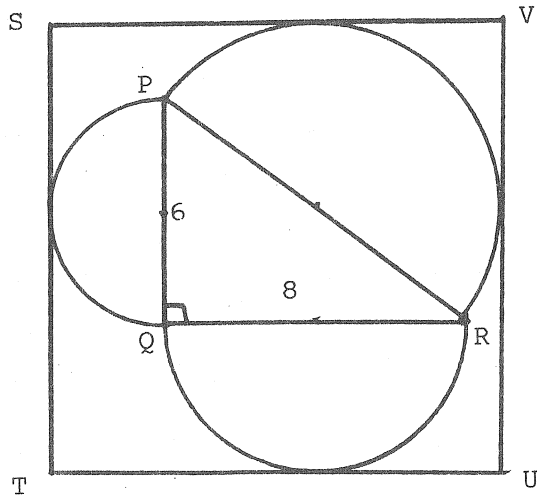
BIC et CDJ sont des triangles
équilatéraux.

Quelle propriété vérifient les
points A, I et J ?

112 _____

Soient (C) un cercle, (D) une droite, A un point. Trouver les points M
de (D) et M' de (C) tels que A soit le milieu de $[MM']$.

113 _____



STUV est un rectangle

PQR est un triangle rectangle en Q
tel que $PQ = 6$ cm et PQ est parallèle
à ST, $QR = 8$ cm et QR est parallèle
à TU.

Les demi-cercles de diamètres PR,
PQ et QR sont tangents à STUV.

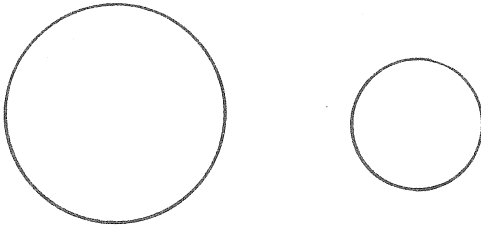
Quelle est l'aire de STUV en cm^2 ?

114 _____

Etant donné un triangle ABC, trouver 3 points A'B'C' sur chaque côté du triangle de façon que

$$\text{aire (A'B'C')} = \frac{1}{2} \text{ aire (ABC)}$$

115 _____



On donne deux cercles extérieurs l'un à l'autre. Existe-t-il à l'extérieur de ces cercles des points M tels que toute droite passant par M rencontre au moins un de ces cercles ?

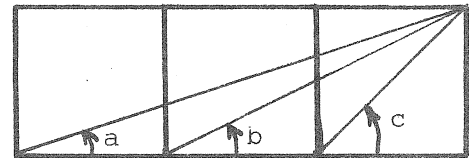
116 _____

On donne A , B et C non alignés dans un plan.

Etudier l'ensemble des points M de ce plan tels que la droite perpendiculaire en M à AM rencontre le segment $[BC]$.

117 _____

La figure suivante est formée de carrés égaux
Quelle relation existe-t-il entre a , b et c ?



118 _____

On vous donne un triangle. pouvez-vous tracer une droite (D) qui partage ce triangle en deux polygones de même aire et de même périmètre ?

119 _____

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

Existe-t-il un triangle équilatéral dont les 3 sommets aient des coordonnées entières ?

120 _____

On donne les points A_1, B_1, C_1 dont on sait que :

A_1 est le symétrique de A par rapport à B , B_1 celui de B par rapport à C et enfin C_1 celui de C par rapport à A.

On demande de rechercher les points A, B et C.

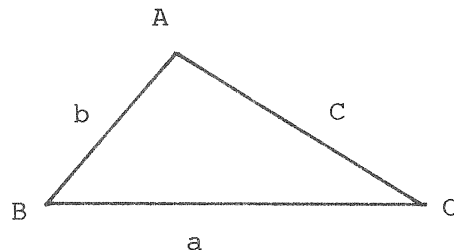
121 _____

Déterminer le(s) triangle(s) ABC du plan tel(s) que la bissectrice intérieure en A, la hauteur issue de B et la médiane issue de C aient des longueurs égales.

122 _____

Existe-t-il un triangle ABC tel que

- 1) a, b et c soient entiers
- 2) $a + b + c = \text{aire ABC}$?



123 _____

Soit un triangle ABC. Est-il toujours possible de le partager en n triangles isocèles, $n \geq 4$?

124 _____

Combien de régions déterminent n cercles ?

125 _____

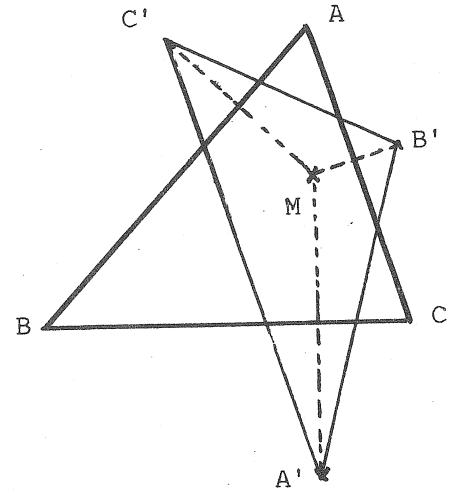
ABC est un triangle.

M un point du plan

A', B' et C' sont les symétriques de M
par rapport aux côtés de ABC.

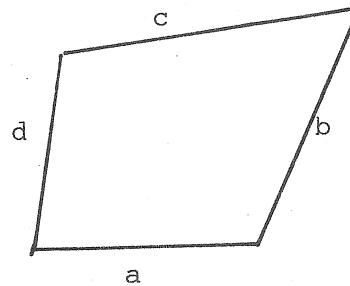
Où placer M pour que :

aire ABC = aire A'B'C' ?



126 _____

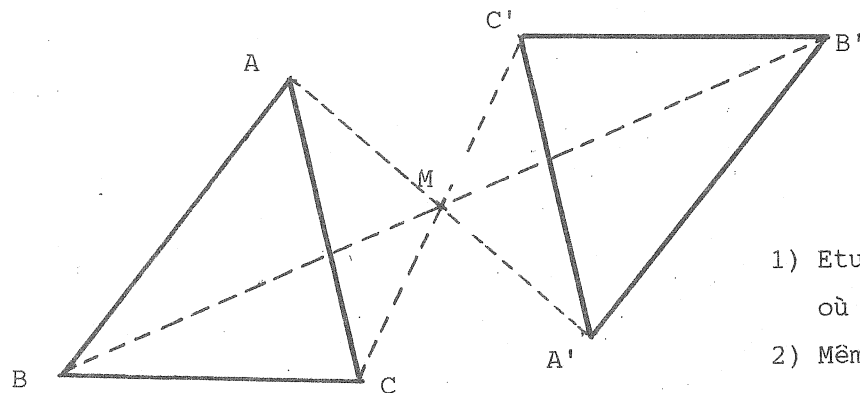
a, b, c, d sont connus. Peut-on prévoir
si les diagonales de quadrilatère sont
perpendiculaires ?



127 _____

Quel est le nombre maximum de régions délimitées par n cordes d'un cercle ?

128



ABC est un triangle ;

M un point du plan.

A'B'C' est le symétrique de

ABC dans la symétrie de centre M.

- 1) Etudier la transformation $M \mapsto M'$
où M' est le centre de gravité de A'B'C'
- 2) Mêmes questions si M' est l'orthocentre
ou le centre du cercle circonscrit,
ou ...

129

Trouver un triangle dont les mesures des côtés sont des entiers consécutifs
et qui possède un angle double de l'autre.

130 _____

On prend un disque de rayon 2. Combien peut-on placer de points dans ce disque de sorte que

- un point soit au centre

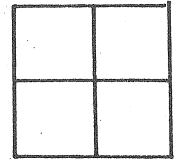
la distance de deux quelconques de ces points soit > 1 ?

131 _____

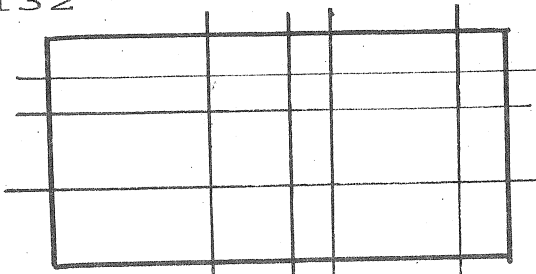
Combien de carrés sur cette figure ?

Cinq ! Où sont-ils ?

Combien de carrés dans un tableau $n \times n$? un tableau $m \times n$?



132 _____

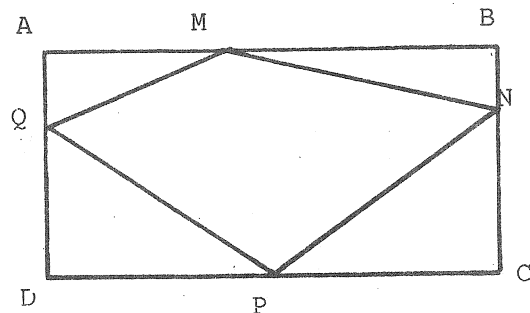


Combien comptez-vous de rectangles ?

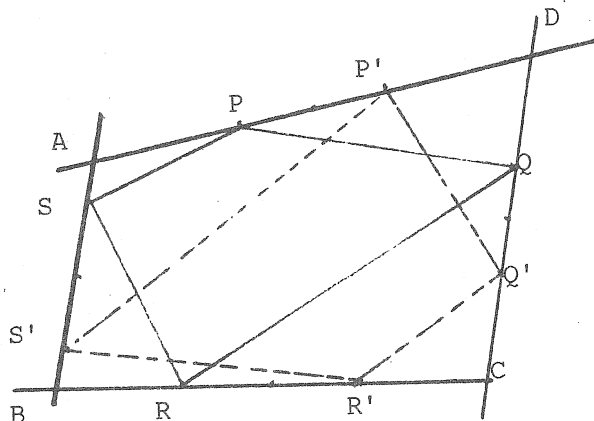
133 _____

MNPQ est un napperon posé sur la table rectangulaire ABCD.

A quelles conditions sur M, N, P et Q a-t-on
aire (MNPQ) = $\frac{1}{2}$ aire (ABCD) ?



134 _____



PQRS est un quadrilatère convexe arbitraire inscrit dans ABCD. Les points P', Q', R' et S' sont les 4 symétriques de P, Q, R et S par rapport au milieu de chacun des côtés AB, BC, CD et DA.

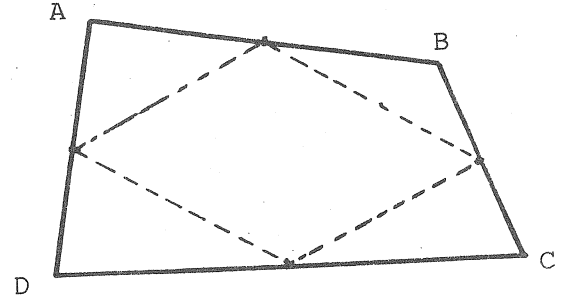
Quels sont les quadrilatères convexes ABCD tels que aire PQRS = aire P'Q'R'S' ?

135 _____

ABCD est un quadrilatère convexe.

Que peut-on dire de la figure formée par les milieux des côtés ?

A quelle condition obtient-on un rectangle ?
un losange ? un carré ?



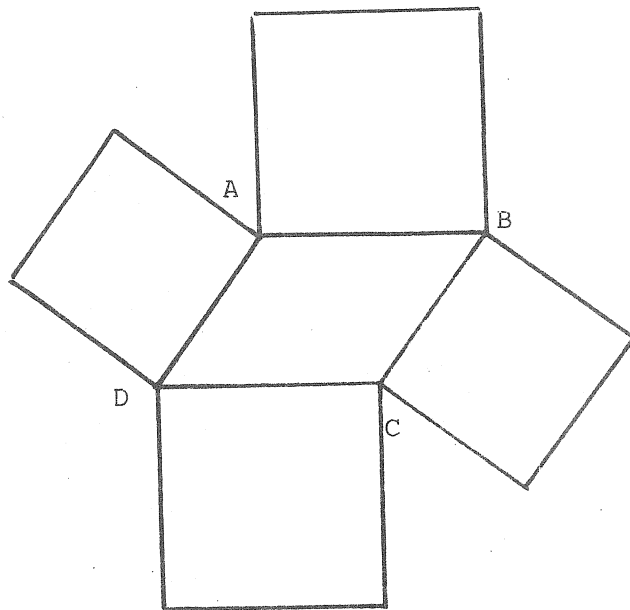
136 _____

On dispose d'un plateau circulaire de 27 cm de diamètre. On veut poser sur ce plateau le plus grand nombre possible de boîtes de conserve cylindriques de 10,5 cm de diamètre (sans les emplier). Déterminer ce nombre.
Même problème en remplaçant 27 par 33. Généraliser.

137

On construit à l'extérieur du parallélogramme ABCD un carré sur chacun des côtés AB, BC, CD, DA.

Que peut-on dire du centre de ces 4 carrés ?



138

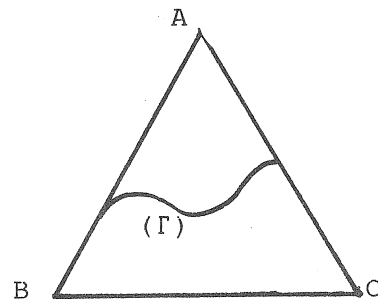
Un rectangle dont les côtés mesurent respectivement m et n unités de longueur (m et n entiers) est subdivisé en carrés de côté unité.

Quel est le nombre de ces carrés traversés par la diagonale ?

139

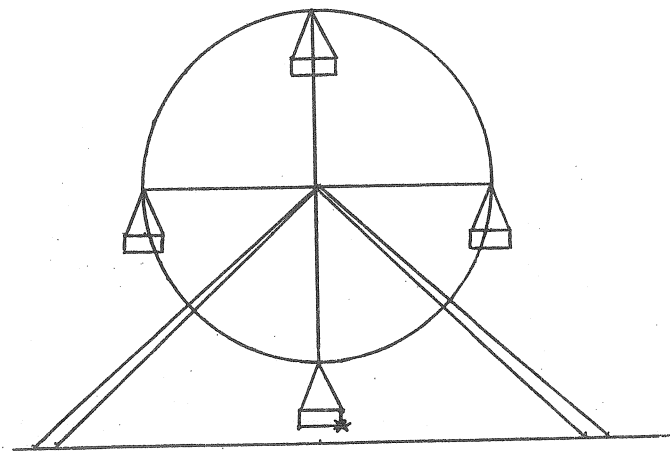
Considérons un triangle équilatéral ABC.
Quel forme doit avoir (Γ) si on veut que :

- 1) (Γ) soit la plus courte possible
- 2) (Γ) détermine dans le triangle deux parties de même aire ?



140

Voici une grand roue de foire. Quelle est la trajectoire décrite par le coin inférieur droit de la cabine du bas ?



141 _____

Les longueurs des côtés d'un triangle sont en progression arithmétique de raison r . L'aire de ce triangle est A . Déterminer en fonction de A et r les longueurs des côtés de ce triangle et la mesure de ses angles.

142 _____

Concernant un triangle, on donne les informations suivantes :

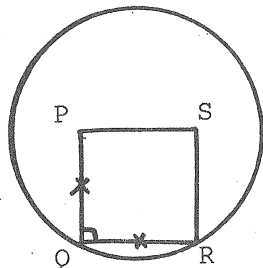
- R est le rayon du cercle circonscrit
- c est la longueur d'un des côtés
- le rapport $\frac{a}{b}$ est connu (a et b sont les longueurs des 2 autres côtés)

Déterminer les 3 longueurs de ses côtés et la mesure de chacun de ses angles.

143 _____

Déterminer le nombre maximum de points qui se trouvent dans un cercle ou sur sa circonférence tels que la distance entre deux quelconques des points soit supérieur ou égale au rayon.

144



Un carré PQRS de 1 m de côté est placé dans un cercle de rayon 1 m comme indiqué sur la figure. On déplace le carré comme suit: Le carré pivote autour de R dans le sens des aiguilles d'une montre jusqu'à ce que S touche le cercle, puis de la même façon pivote autour de S et ainsi de suite jusqu'à ce qu'un côté ait repris la place initiale de QR.

Quelle est la longueur, en mètres, de la courbe décrite par P ?

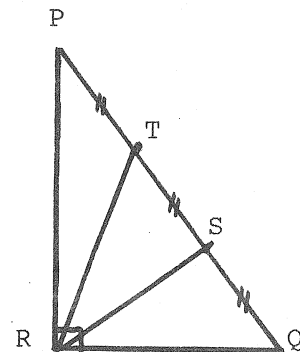
145

Dans le triangle PRQ rectangle en R, on sait

que $PT = TS = QS$

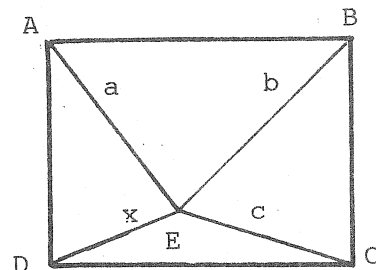
$RS = 7$ cm et $RT = 9$ cm

Quelle est la longueur de ST ?



146 _____

E est un point quelconque intérieur au rectangle ABCD.
Exprimer la longueur x en fonction de a , b , c .



147 _____

Un cercle de centre O passe par les sommets A et C d'un triangle ABC et recoupe AB et BC en K et N respectivement. Les cercles circonscrits aux triangles ABC et KBN se coupent exactement en 2 points distincts B et M. Que peut-on dire de l'angle OMB ?

148 _____

Soit (Γ) un cercle de centre O.

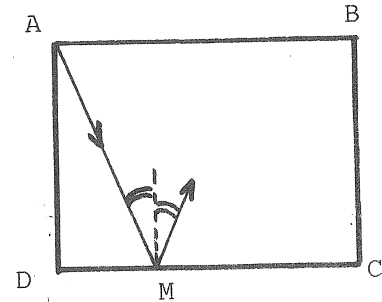
On construit un quadrilatère convexe ABCD tel que O appartienne à AB et que les trois côtés BC, CD et DA soient tangents à (Γ) . Comparer AB et $AD + CB$.

149

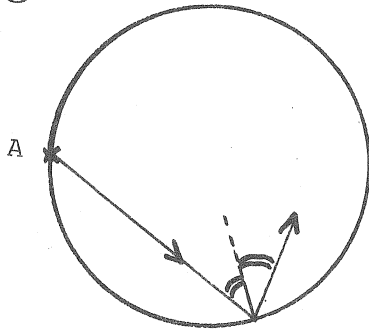
Soit ABCD un billard rectangulaire.

Une boule est lancée de A.

Pour quelles positions de M sur DC les 4 premiers rebonds ont-ils lieu dans l'ordre sur DC, CB, BA et AD ?



150

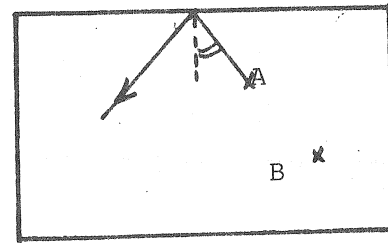


151

Un billard est rectangulaire.

Construire la trajectoire permettant d'aller de A à B après 3 rebonds.

Une boule est lancée de A dans un billard circulaire. Comment faire pour que le troisième rebond ait lieu en A ?



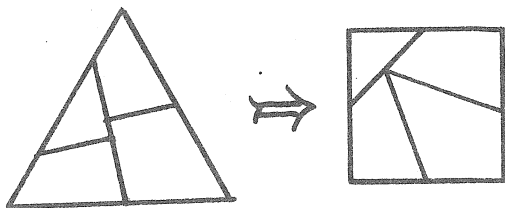
152 _____

Relativement à un repère cartésien du plan on donne 5 points, tous distincts, à coordonnées entières. Est-il toujours possible de trouver deux points distincts tels que le milieu de ces deux points ait des coordonnées entières ?

153 _____

On considère dans le plan $3n$ points. peut-on toujours les grouper 3 par 3 de manière à former n triangles deux à deux disjoints.

154 _____



Reconstituer le patron de ce puzzle.
En réaliser une maquette.

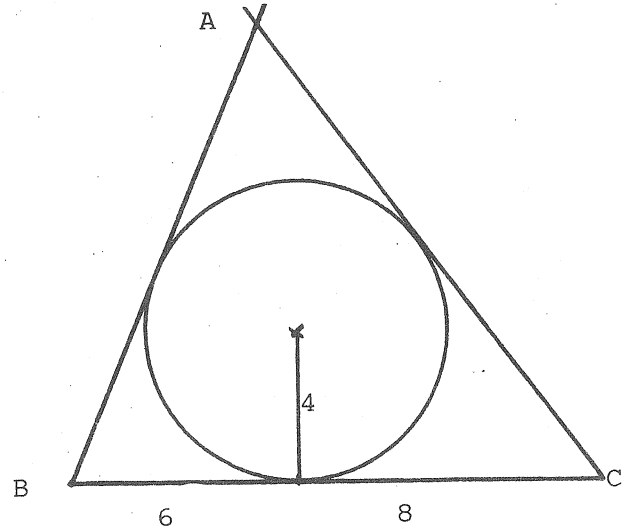
155. _____

Déterminer dans $\mathbb{R}^2$ l'ensemble des couples (x,y) tels que

$$1 \leq ||x + y| - |x - y|| \leq 2$$

156. _____

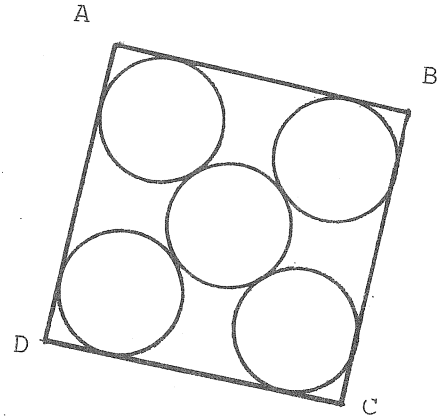
Quelles sont les longueurs des côtés
AB et AC du triangle ABC ?



157 _____

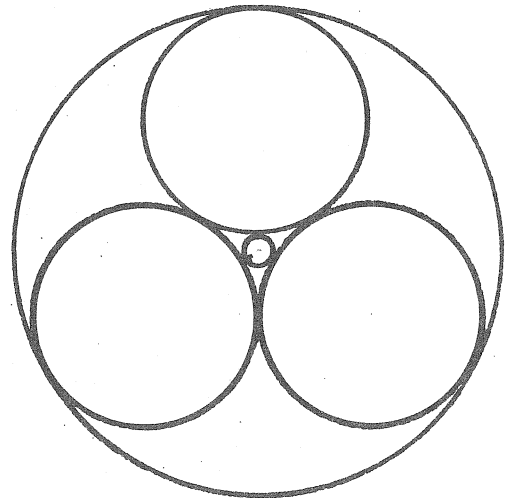
ABCD est un carré de côté a .

Quel est le rayon commun aux 5 cercles?



158 _____

On donne trois cercles de rayon 1
deux à deux tangents. Quels sont les
rayons des deux cercles tangents aux 3 ?



159 _____

Est-il toujours possible de tracer un cercle à l'intérieur duquel se trouvent exactement n points à coordonnées entières ? (n étant un entier naturel).

160 _____

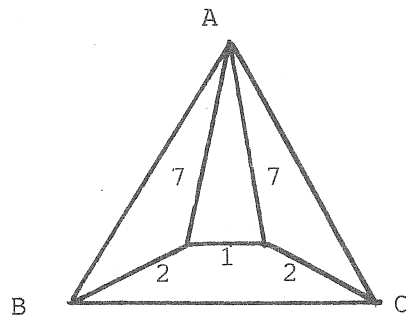
Déterminer l'ensemble des points A du globe terrestre tels qu'en partant de A, en se déplaçant d'abord de 1000 km vers le sud, puis de 1000 km vers l'est et enfin de 1000 km vers le nord, on se retrouve au point A.

161 _____

Un dessinateur dispose pour seuls instruments d'un double-décimètre de très bonne qualité et d'un crayon. Sur sa feuille de dessin sont marqués deux points A et B dont la distance peut être évaluée grossièrement entre 50 et 70 cm. Comment peut-il se débrouiller avec ce matériel pour tracer le segment de droite A,B et le mesurer avec la précision que lui permet son double-décimètre ?

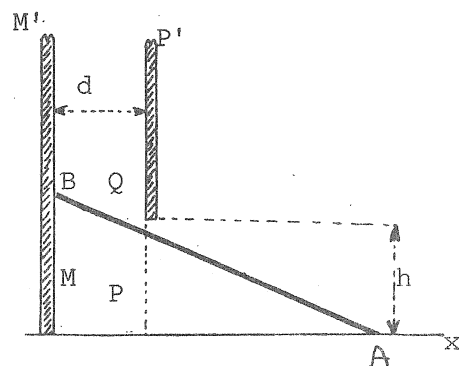
162 _____

Déterminer la longueur du côté du triangle équilatéral ABC.



163 _____

On veut introduire dans une cheminée d'usine cylindrique - en coupe diamétrale $MM'PP'$ - de diamètre intérieur d , une poutre AB de longueur l et de section négligeable, par une porte PQ donnant sur un sol horizontal Mx . Quelle doit être la hauteur h minimum de la porte PQ pour que cela soit possible ?

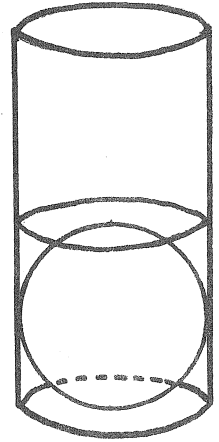
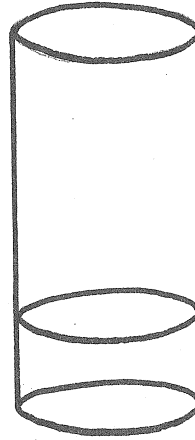


164 _____

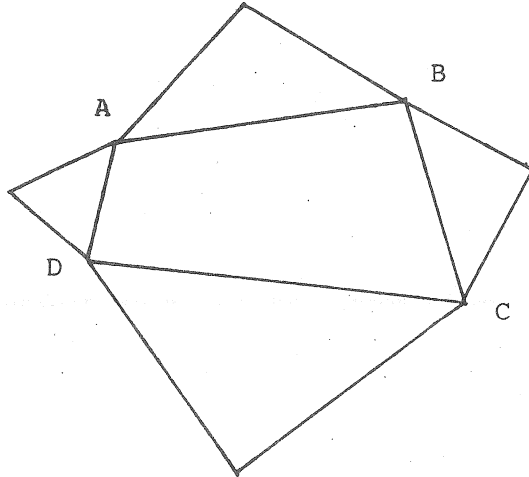
100 points sont répartis dans 1 carré de 1 cm de côté. Est-il toujours possible de tracer un chemin (obtenu sans lever le crayon) passant par tous ces points et de longueur inférieure ou égale à 10 cm ?

165 _____

Quel est le volume d'eau contenu dans ce cylindre de rayon 10 cm, si l'eau recouvre exactement une boule de rayon 10 cm qui repose au fond du cylindre ?



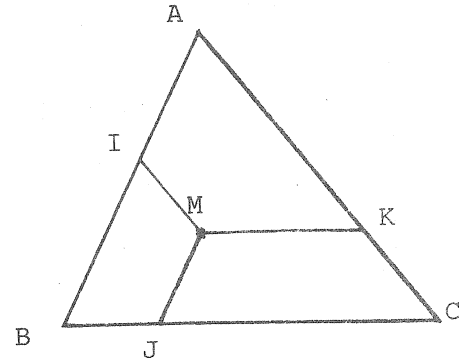
166 _____



On veut construire une pyramide de base ABCD. Pour cela on réalise un patron (voir ci-contre). A quelles conditions sur les triangles peut-on construire la pyramide par pliage le long de AB, BC, CD et DA ?

167 _____

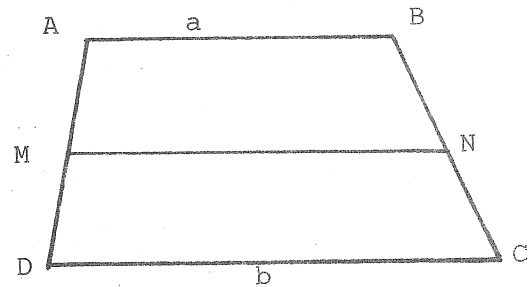
Déterminer le point M tel que les trapèzes $MIJB$, $MJCK$ et $MKAI$ aient la même aire ?



168 _____

Un trapèze $ABCD$ est coupé par une parallèle MN à AB et CD , telle que
aire $ABNM$ = aire $MNCD$.

Quelle est la longueur de MN en fonction de a et b ?



ANALYSE

169 _____

Etudier la suite $U_n = \frac{1}{n \sin n}$ pour $n > 0$

170 _____

a_0 est un réel tel que $0 < a_0 < \pi$. On pose $a_{n+1} = \sin a_n$.
Etudier la suite $\sqrt[n]{a_n}$.

171 _____

$x \in [0, 1]$. Quelle est la valeur maximum de

$$\left(\log_{10} \left(\frac{99\,999x + 1}{1\,000} \right) \right)^2 \quad ?$$

172 _____

Combien de solutions à $\cos x + \log x = 0$?

173 _____

$\sin x = k$ et $\pi/2 < x < \pi$. Que vaut $\operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{2})$?

174 _____

Pour quels entiers n , $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ est-il entier ?

175 _____

Pour quelles valeurs entières de n et de m , $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{m}$ est-il entier ?

176 _____

Existe-t-il n tel que $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} > 100$?
Quel est le plus petit ?

177 _____

Quelle est la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie
pour tout x , $x^2 f(x) + f(1-x) = 2x - x^4$?

178 _____

Trouver tous les polynômes $P(x)$ à coefficients réels qui vérifient

$$P(x) P(x+1) = P(x^2 + x + 1)$$

179 _____

Déterminer $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) f(y) - f(xy) = x + y$ pour tout x et y .

180 _____

α est un réel, P un entier positif.

Existe-t-il des fonctions f telles que la suite $U_0 = \alpha$

$$U_{n+1} = f(U_n) \quad \text{pour } n \geq 0$$

soit périodique de période α . ?

181 _____

Trouver les bijections continues f de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ telles que $f(2x - f(x)) = x$ pour tout $x \in [0, 1]$.

182 _____

f est continue et dérivable sur $[a, b]$ et $f'_d(a) = f'_g(b) = 0$

Par le point $(a, f(a))$ peut-on mener une tangente à la courbe représentative de f ?

183 _____

Trouver toutes les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifient :

$|x - y| < |y - z|$ entraîne $|f(x) - f(y)| < |f(y) - f(z)|$ pour tout x, y, z .

184 _____

Si f et g sont deux fonctions périodiques, la fonction $f + g$ est-elle périodique ?

185 _____

f est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que pour tout n

$$f(n+1) > f(f(n)) .$$

Que peut-on dire de f ?

186 _____

Donner plusieurs fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que pour tout x

$$f(3x) = 2f(x)$$

187 _____

u et $v \in]0, 1[$. Quelle est la plus petite valeur de $\frac{u+v}{uv(1-uv)}$?

188 _____

Comparer $\cos(\sin x)$ et $\sin(\cos x)$

189 _____

Déterminer les fonctions indéfiniment dérivables $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy$$

190 _____

Un fil élastique de longueur initiale 1 m s'allonge de 1 m à chaque seconde.
Un escargot part de l'une de ses extrémités à la vitesse constante de 1 mm/s
à l'instant initial $t = 0$.
Atteindra-t-il l'autre extrémité ? Au bout de combien de temps ?

191 _____

Existe-t-il une fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telle que $(f \circ f)(x) = e^x$?
Même problème avec $\sin x$?, $\log x$?, etc...

192 _____

Quelles sont les fonctions f de $[0, 1]$ vers $[0, 1]$ telles que pour tout x et tout y $|f(x) - f(y)| \geq |x - y|$?

193 _____

Trouver les parties de $\mathbb{R}^+$ stables pour la loi

$$(x, y) \rightarrow |x - y|$$

194 _____

On sait que $\operatorname{tg} A = \frac{2rs}{r^2 - s^2}$ où $0 < A < \pi/2$ et $r > s > 0$

Quelle est la valeur de $\cos A$?

195 _____

Trouver les quadruplets (a, b, c, d) de nombres réels positifs tels que

$$a + c = b + d = a + b = c + d = 1$$

et que

$a + b + c + d$ soit le plus petit possible

196 _____

Le quotient de deux entiers inférieurs à 1 000 est 0,6786389 (résultat obtenu avec une calculatrice).

Quels sont ces deux entiers ?

197 _____

Combien de solution(s) à $x = e^{ae^{ax}}$ où a est un réel strictement négatif ?

198 _____

Calculer $e^x + e^{x^2} + \dots + e^{x^n}$

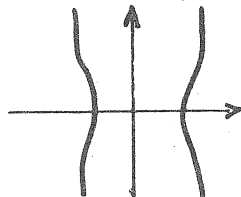
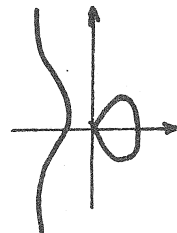
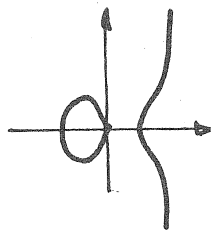
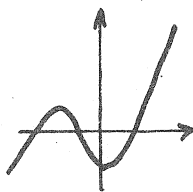
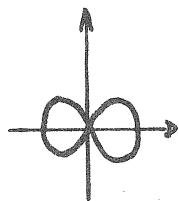
199 _____

Pour quelles valeurs de n , $\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$ est-il rationnel ?

200 _____

Quel est le dessin qui représente le mieux la courbe d'équation

$$y^2 = x(x^2 - 1) \quad ?$$



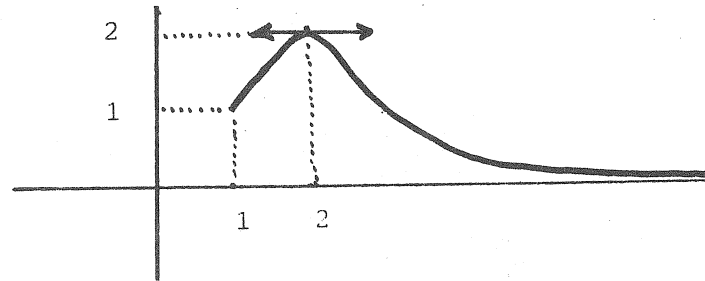
201 _____

Donner un majorant de $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2}$

202 _____

$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ où $P(x)$ et $Q(x)$ sont deux fonctions polynomes.

Donner un exemple d'une fonction f admettant pour graphe :



203 _____

Ensemble des valeurs prises par

$$\frac{x}{x+y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x} \quad \text{lorsque } x, y, z \text{ sont des réels positifs.}$$

204 _____

p et q sont deux nombres de $[0, 1]$

Que peut-on dire de $p + q - pq$?

205 _____

Trouver 4 entiers a, b, c, d , tels que l'ensemble

$$\{|a-b|, |a-c|, |a-d|, |b-c|, |b-d|, |c-d|\}$$

soit l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

DENOMBREMENTS PROBABILITES

206

Une réception réunit 13 couples. En arrivant, chaque invité serre la main à un certain nombre d'autres personnes. Personne ne serre la main de son conjoint. Pendant la réception, une dame demande à chacune des autres personnes le nombre de mains qu'elle a serrées. Elle obtient des résultats tous différents. Combien le mari de cette dame a-t-il serré de mains ?

207

On suppose qu'il y a n hommes et n femmes autour d'une table ronde. De combien de façons peuvent-ils s'asseoir en respectant l'alternance ?

208 _____

Combien faut-il mettre de raisins dans un kg de pâte pour que, en mangeant une part de gâteau de 50 g on ait au moins 9 chances sur 10 de manger du raisin ?

209 _____

Quel est le nombre de permutations de $\{a, b, c, d, e, f\}$ qui ne laissent aucun élément invariant ?

210 _____

On peut monter un escalier marche par marche ou deux marches par deux marches, ou de beaucoup d'autres façons. De combien de façons peut-on monter un escalier de 13 marches ?

211 _____

De combien de manières différentes peut-on former 3 équipes de football (11 joueurs) avec 33 garçons ?

212 _____

Combien de grilles de loto dois-je remplir pour être sûr d'en avoir au moins une gagnante ? (on gagne à partir de 3 n°s exacts sur 6).

213 _____

On considère l'ensemble des entiers $1, 2, 3, \dots, n$. Combien admet-il de parties à p éléments ne contenant aucune paire d'entiers consécutifs ?

214 _____

De combien de façons différentes peut-on choisir 3 entiers distincts compris entre 1 et 30, bornes comprises, de sorte que leur somme soit multiple de 3 ?

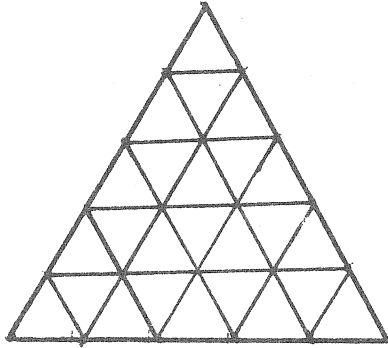
215 _____

De combien de façons peut-on écrire 75 comme la somme de n entiers consécutifs ($n > 1$) ?

216 _____

Un match de tennis doit opposer deux joueurs dont les noms sont tirés au sort parmi N joueurs dont n français. Après le tirage et avant que les noms ne soient annoncés un journaliste demande si un français jouera. L'organisateur répond positivement. Quelle est la probabilité pour que les deux joueurs soient français ?

217 _____



Combien de parallélogrammes dans
cette figure ?

218 _____

Soit un bâton que l'on coupe en deux endroits choisis au hasard. Quelle est
la probabilité pour que les 3 tronçons puissent former un triangle ?

219

Trois arbitres dans un concours de talent doivent donner leurs opinions en public sur les 3 artistes A, B, C par ordre de préférence. De combien de façons peuvent-ils voter afin que 2 soient d'accord sur l'ordre de préférence et le troisième d'un avis opposé ?

220

On a n objets de n poids différents. En combien de pesées au mieux, peut-on espérer les classer du plus lourd au plus léger ?

ALGEBRE

(2 2 1) _____

On observe que

$$6^2 - 5^2 = 11$$

$$56^2 - 45^2 = 1111$$

$$556^2 - 445^2 = 111111$$

$$5556^2 - 4445^2 = 11111111$$

Peut-on généraliser ?

(2 2 2) _____

Examiner

$$1 = 1$$

$$3 + 5 = 8$$

$$7 + 9 + 11 = 27$$

$$13 + 15 + 17 + 19 = 64$$

Pouvez-vous écrire un théorème ?

(2 2 3) _____

L'un de ces nombres est-il un carré d'un nombre entier ?

11

111

1111

11111

(2 2 4) _____

Soit $S = \{1, 2, 3, \dots, n\}$

Pour quels entiers n peut-on réaliser une partition de S en deux sous-ensembles tels que la somme des éléments de chacun de ces deux sous-ensembles soit la même ?

(225) _____

Les nombres triangulaires sont les entiers T_n de la forme $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Quel est le plus grand entier que l'on ne puisse pas écrire comme une somme de nombres triangulaires tous distincts ?

(226) _____

Les nombres triangulaires sont les entiers T_n de la forme $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Quels sont les nombres triangulaires qui sont des carrés ?

(227) _____

Avec des pions de 17 et 18 points, j'ai obtenu un score de 351 points.

Combien ai-je de pions de chaque type ?

(228) _____

Dans une classe de 35 élèves la moyenne des filles est 12, celle des garçons 9,5 et la moyenne générale de 10,5.

Retrouvez le nombre de filles et de garçons.

(229) _____

Je marche toujours du même pas et d'ordinaire il me faut 12 min pour franchir un kilomètre. Lorsque je parcours un tapis roulant dans le bon sens je mets 1 min 20 s et dans le mauvais sens 12 min.

Quelle est la longueur de ce tapis roulant ?

(230) _____

Le produit de 4 entiers consécutifs peut-il être le carré d'un nombre entier ?

(231) _____

Trouver 10 nombres entiers dont les sommes 2 à 2 soient des carrés.

(232) _____

Trouver les entiers n tels que $1^2 + 2^2 + \dots + n^2$ soit un carré.

(233) _____

Pour quelles valeurs de n $\sum_{k=0}^n k!$ est-il un carré ?

(234) _____

Existe-t-il une caractérisation des entiers qui s'écrivent comme somme de 2 carrés ?

(235) _____

Peut-on vérifier simplement que $\sqrt{2}$ n'est pas décimal ?

(236) _____

Trouver les 24 premières décimales de $\sqrt{2}$.

(237) _____

Comparer $\frac{665\ 857}{470\ 832}$ et $\sqrt{2}$.

(238) _____

$\sqrt{2} + \sqrt{3}$ est-il rationnel ?

(239) _____

Peut-on trouver $\frac{p}{q}$ où p et q sont entiers inférieurs à 1 000 tels que
 $\left| \frac{p}{q} - \sqrt{2} \right| < \left| \frac{816}{577} - \sqrt{2} \right|$?

(240) _____

Quel est le nombre maximum de chiffres identiques par lequel peut se terminer l'écriture décimale du carré d'un nombre entier ?

(241) _____

Quel est le chiffre des dizaines de 3^{1986} ?

(242) _____

Quels sont les deux derniers chiffres de 2^{222} ?

(243) _____

Déterminer le dernier chiffre des nombres $2^{2^n} + 1$ ($n \in \mathbb{N}$)

(244) _____

Combien faut-il écrire de chiffres pour écrire tous les nombres de 1 à N ?

(245) _____

Soit $a = 0,1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12\ 13\ \dots$ Déterminer 8 a.

(246) _____

Effectuer $a + b$;

$a = 0,888 \dots$

$b = 0,12345678910111213 \dots$

(247) _____

$A = 12,303003000300003 \dots$

Calculer A^2

(248) _____

Le nombre 1986 peut s'écrire de plusieurs façons comme la somme d'entiers positifs. Trouver les sommes dont le produit des termes est maximum.

(249) _____

Trouver un nombre entier qui s'écrit dans le système décimal uniquement avec des 2 et qui est divisible par 1986.

(250) _____

a, b, c, d, e, f, g, h, x sont des entiers tous distincts tels que
 $(x-a)(x-b) \dots (x-h) = (1986)^2$
Calculer x en fonction de a, b, c, d, e, f, g, h.

(251) _____

Est-il possible de choisir les signes + ou - devant chacun des termes de façon à avoir l'égalité

$$\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm \dots \pm 97 \pm 98 \pm 99 \pm 100 = 1986$$

(252) _____

Existe-t-il une puissance de 2 dont l'écriture décimale commence par 1986 ?

(253) _____

x, y, z sont des entiers positifs.

Combien de solutions à $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{1986}$?

(254) _____

Parmi les nombres 1, 2, 3... 1986. Quel est celui qui a le plus grand nombre de diviseurs ?

(255) _____

n étant un nombre entier, existe-t-il n nombres entiers distincts $x_1, x_2, \dots, x_n$ tels que $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} = 1$?

(256) _____

On écrit $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^{1986}$ dans le système décimal.

Déterminer les deux chiffres qui se trouvent de part et d'autre de la virgule.

(257) _____

On donne la suite de nombres 1, 8, 25, 169, 1296

Quel est le sixième terme de cette suite ? Pourquoi ?

(258) _____

On considère la suite

0, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

Le produit de deux termes de cette suite peut-il être un terme de cette suite ?

(259) _____

On considère la suite

1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4,

Quel est le millionième terme ?

(260) _____

Trouver toutes les suites des 3 entiers consécutifs dont la somme des cubes est le carré d'un entier

$$\text{ex : } 1^3 + 2^3 + 3^3 = 6^2$$

(261) _____

Quel est le coefficient de x^{97} dans le développement de
 $(x-1)(x-2)(x-3) \dots x(x-100)$?

(262) _____

x est un réel positif tel que $(x + \frac{1}{x})^2 = 7$. Que vaut $x^3 + \frac{1}{x^3}$?

(263) _____

Déterminer un polynôme à coefficients entiers admettant $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ pour racine.

264 _____

Trouver un polynôme à coefficients entiers admettant $\sqrt{2} + \sqrt[2]{3}$ pour racine.

265 _____

Quelles relations existe-t-il entre les racines des deux polynomes

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^4$$

$$Q(x) = a_n + a_n + x + \dots + a_0x^4 \quad ?$$

266 _____

Donner un algorithme pour calculer $\sqrt[5]{a}$?

267 _____

$N = 0,999\dots99$ Quels sont les 200 premiers chiffres de $\sqrt{N}$?
100 "9"

268 _____

Les nombres $A = \sqrt{5} + \sqrt{22 + 2\sqrt{5}}$ et

$$B = \sqrt{11 + 2\sqrt{29}} + \sqrt{16 - 2\sqrt{29} + 2\sqrt{55 - 10\sqrt{29}}}$$

sont-ils égaux ?

269 _____

$1981 = 13^3 - 6^3$. Quelle est la prochaine année dont le millésime est somme ou différence de deux cubes ?

270 _____

Jesuis imprimeur ; j'ai un stock de calendriers invendus. Dans combien d'années pourrai-je les revendre en changeant seulement le millésime ?

Combien de calendriers différents dois-je imprimer ?

271 _____

Est-il possible de trouver un entier positif n tel que l'on puisse placer tous les naturels de l'an sur un cercle de telle sorte que la différence entre deux nombres voisins soit au maximum 2 ?

272 _____

Quels sont les entiers égaux à la somme des factorielles de ses chiffres ?

273 _____

Quelle est la plus petite puissance de G dont l'écriture en base 10 commence par 9 ?

274 _____

On dispose d'une calculatrice ne sachant effectuer sur les réels que l'opération : $a * b = 1 - \frac{a}{b}$

Peut-on à l'aide de cette calculatrice effectuer les 4 opérations élémentaires classiques ?

275

En partant de 5 et en utilisant les applications

$$f : x \mapsto 2x$$

$$g : x \mapsto x - 3 \quad , \text{quels sont les entiers que l'on peut}$$

atteindre.

276

Déterminer A , sous-ensemble de $\mathbb{N}$, tel que

$$f : A \times A \rightarrow \mathbb{N}$$

soit bijective

$$(a,b) \mapsto a + 2b$$

277 _____

$[x]$ est la partie entière de x .

Résoudre l'équation $[\sqrt[3]{1}] + [\sqrt[3]{2}] + \dots + [\sqrt[3]{n}] = 3n$

278 _____

$N = 1\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 001$

est-il premier ?

279 _____

Y-a-t-il des nombres premiers dans la suite

$10001 ; 1\ 0001\ 0001 ; 1\ 0001\ 0001\ 0001, \dots ?$

280 _____

$2^{147} - 1$ est-il premier ?

281 _____

Quel est le nombre de paires (p, q) constituées de nombres premiers positifs distincts tels que p divise $q^2 - q$ et p divise $p^2 + p$?

282 _____

P_1 et P_2 sont deux nombres premiers consécutifs

Soit Q tel que $P_1 + P_2 = 2Q$. Q peut-il être premier ?

283 _____

Deux nombres premiers sont "jumeaux" si leur différence est égale à 2.

Que pouvez-vous dire du naturel encadré par 2 nombres premiers "jumeaux" ?

284 _____

Quel est le reste de la division de 7^{1987} par 100 ?

285 _____

$7^{1980} 1990 - 3^{80} 90$ est-il divisible par 10 ?

286 _____

Donner un critère de divisibilité par 13

287 _____

Résoudre le système $x_1 x_2 = 1$

$$x_2 x_3 = 2$$

$$\vdots$$

$$x_n x_1 = n$$

288 _____

Ecrire la fraction $\frac{37}{13}$ sous la forme

$$2 + \frac{1}{x + \frac{1}{y + \frac{1}{z}}}$$

289 _____

$\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sont 2 rationnels tels que $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$

Construire un rationnel $\frac{p}{q}$ tel que $\frac{a}{b} < \left(\frac{p}{q}\right)^2 < \frac{c}{d}$

290 _____

Log $5/2$ est-il rationnel ?

291 _____

Existe-t-il un entier n tel que

$$\frac{1}{5^n} (3 + 4i)^n = 1 \quad (i^2 = -1) \quad ?$$

292 _____

L'ensemble des décimaux x tels que $3x < 1$ possède-t-il un plus grand élément décimal ?

293 _____

Trouver tous les entiers a et b tels que $2^a - 5^b = 3$

294

On considère les entiers $a_1, a_2, \dots, a_{2n+1}$

$b_1, b_2, \dots, b_{2n+1}$ désignent les mêmes nombres dans un autre ordre

Le nombre $E = (a_1 \pm b_1) (a_2 \pm b_2) \dots \times (a_{2n+1} \pm b_{2n+1})$

a-t-il une parité bien définie ?

295

Pour quels entiers $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ le nombre de diviseurs de n est-il entier impair ?

296

Les figures ci-dessous sont construites de la manière suivante :

- la première ligne est formée uniquement de 1 et de (-1)
- en dessous de deux nombres consécutifs, on écrit leur produit
- on recommence jusqu'à tomber sur un seul nombre

1	(-1)	1	1	1	1	(-1)	1	(-1)
	(-1)	(-1)	1		1	(-1)	(-1)	(-1)
		1	(-1)		(-1)		1	1
		(-1)			(-1)		1	
							(-1)	

Comment faut-il choisir la première ligne pour que le nombre de 1 écrit soit égal au nombre de (-1) ?

297 _____

Quel est le plus grand entier positif qui ne puisse pas s'écrire $15a + 21b + 35c$ avec a, b, c entiers positifs ?

298 _____

$[x]$ est la partie entière de x .

Déterminer les $x \in \mathbb{N}$ qui vérifient $[\sqrt[3]{x}]$ divise x .

299 _____

Existe-t-il des entiers a, b, c non nuls tels que $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} = 0$?



