

LA PRATIQUE DU PROBLEME OUVERT



SOMMAIRE

INTRODUCTION	p. 3
PREMIERE PARTIE:	p. 5
Des problèmes ouverts ... Pour qui ? Pourquoi ?	
* "Les problèmes ouverts" et les autres.	
* Quelques commentaires sur la définition du problème ouvert.	
* Pourquoi proposer des problèmes ouverts dans nos classes ?	
* Chronique d'une expérimentation d'un problème ouvert dans une classe de quatrième.	
* Ce que nous avons constaté en expérimentant des problèmes ouverts dans nos classes.	
* Conclusions.	
DEUXIEME PARTIE:	p. 25
Buts de la pratique du problème ouvert et place de cette pratique par rapport au programme.	
TROISIEME PARTIE:	p. 29
Le rôle du professeur dans une séance de problème ouvert.	
QUATRIEME PARTIE:	p. 35
Influence de la pratique du problème ouvert sur notre "enseignement traditionnel".	
CINQUIEME PARTIE:	p. 39
Quelques conseils pour expérimenter des problèmes ouverts dans nos classes.	
SIXIEME PARTIE:	p. 43
Rapports d'expérimentation	
SEPTIEME PARTIE:	p. 61
D'autres problèmes ouverts expérimentables dans nos classes.	
Grille de Rapport d'expérimentation de problèmes ouverts	p. 67



INTRODUCTION

Depuis longtemps, on a conscience du fait que le choix des problèmes que l'on pose en mathématiques, et le rôle qu'on leur fait jouer dans l'enseignement sont liés aux conceptions, souvent non explicites, que l'on a des mathématiques, de la relation au savoir en général et de la relation entre enseignant et enseigné (Voir [1]).

La publication qui suit est consacrée pour l'essentiel à la description d'une pratique pédagogique, que nous avons appelée pratique du "problème ouvert". Cette pratique a été élaborée et expérimentée dans le cadre de l'IREM de LYON depuis quatre années. Elle a fait l'objet d'une présentation lors du Colloque National sur le problème organisé par notre équipe à Lyon en 1982 et qui a réuni cent cinquante participants (voir [2]).

Le but de cette pratique est de placer les élèves dans une situation d'apprentissage qui les amène à

chercher - essayer - conjecturer - découvrir - prouver

et ceci, dans un cadre où ils découvrent ces différentes étapes par leur propre initiative.

Nous espérons aussi que cette pratique pourra être une réponse possible au désir de nombreux collègues de changer leur enseignement, de motiver les élèves, de retrouver l'enthousiasme. Le terrain du collège nous a semblé prioritaire car, d'une part, c'est là que la demande de changement de la part des enseignants est la plus forte et d'autre part, c'est dès la sixième qu'il faut initier l'élève à l'aventure du problème et déclencher chez lui un comportement de recherche.

Mais la pratique du problème ouvert peut aussi être utilisée en second cycle et l'a été effectivement, cependant nous ne disposons pas à ce niveau d'une expérience aussi large.

La présentation globale de l'activité que nous proposons fait l'objet de la première partie de cette publication, intitulée "Des problèmes ouverts ? Pour qui ? Pourquoi ?" Cette première partie reprend, avec quelques modifications, le contenu d'un article paru dans la revue "Petit x" (numéro 2)*.

* La revue "Petit x" , consacrée à l'enseignement dans les collèges, est publiée par l'I.R.E.M. de GRENOBLE (IREM de GRENOBLE - B.P. 41 - 38402 Saint Martin d'Hères Cedex).

Les parties suivantes reprennent, avec plus de détails, un certain nombre de points déjà abordés dans la première partie. Elles visent aussi à répondre aux questions que se posent, nous l'avons constaté par notre expérience à l'IREM de LYON, les enseignants désireux d'utiliser dans leur classe des problèmes ouverts. Il y a donc certaines redites entre ces parties et la première, mais il ne nous a pas semblé gênant de revenir sur des points qui nous semblent fondamentaux.

Les sujets abordés sont:

- * Le rapport entre les problèmes ouverts et la contrainte du programme, (2ème partie)
- * Le rôle du professeur pendant une séance de problème ouvert, (3ème partie)
- * L'influence de cette pratique sur notre enseignement, (4ème partie)
- * Des conseils pratiques pour organiser une séance, (5ème partie)

En outre, on trouvera des comptes rendus d'expérimentation dans la 6ème partie.

Nous souhaitons que la lecture de cette publication vous incitera à pratiquer le "problème ouvert" dans vos classes et à nous faire part de vos expériences. Notons que les classes où s'est déroulée l'expérience sont des classes "courantes", c'est-à-dire n'appartenant ni à un établissement expérimental, ni à un établissement réputé pour son bon niveau, et que l'activité était proposée par l'enseignant. L'expérience est donc reproductible sans conditions particulières.

Vous trouverez à la septième partie d'autres énoncés de problèmes ouverts directement utilisables dans le premier cycle.

Si vous désirez nous faire part de vos rapports d'expérimentation, vous trouverez également, page 63, une grille pour faciliter la rédaction de ces rapports.

Enfin, nous vous signalons que l'IREM de LYON publie régulièrement une "feuille à problèmes" dans laquelle vous trouverez, entre autres, d'autres énoncés de problèmes ouverts et des rapports d'expérimentation. (Abonnement gratuit en envoyant vos coordonnées à l'IREM de LYON).

L'équipe sur le problème de l'IREM de LYON:

Gilbert ARSAC, Université Lyon 1
 Gilles GERMAIN, Université Lyon 1
 Michel MANTE, Collège Jean Vilar - Villeurbanne
 Dominique PICHOD, Psychosociologue

Ont en outre participé à cette équipe les années précédentes:

Alain BOUVIER, Université Lyon 1
 Michel GONNARD, Lycée Colbert - Lyon 8ème
 Marie-Claude PONTILLE, Lycée Brossolette - Villeurbanne

PREMIERE PARTIE

DES PROBLEMES OUVERTS POUR QUI ? POURQUOI ?

“LES PROBLEMES OUVERTS” ET LES AUTRES ...

Le travail fait sur “le problème dans l’enseignement” à l’IREM de LYON se définit par comparaison avec des travaux analogues mais visant des buts différents :

- * “l’enseignement par le problème” qui vise à faire acquérir certaines notions mathématiques au moyen de problèmes choisis à cet effet (soit problèmes d’application, soit même problèmes de découverte visant à introduire une notion nouvelle);
- * l’initiation à la modélisation qui vise à entraîner les élèves à transformer un problème concret en problème mathématique. L’accent est mis sur la transformation du problème concret en problème abstrait, souvent facile à résoudre (voir tous les problèmes de modèles mathématiques pour des jeux).

Dans notre définition du “problème ouvert” se trouve plus ou moins explicitement exprimé un but différent, que l’on peut formuler ainsi: *placer les élèves dans la situation la plus typique de l’activité de recherche mathématique c’est-à-dire affronter un problème dont l’énoncé les place, toutes proportions gardées, dans la situation du chercheur.*

L’ “enseignement par le problème” sous-entend que les mathématiques sont une science constituée, à laquelle on s’initie sous la conduite d’un maître (ou d’un livre).

L’initiation à la modélisation sous-entend que les mathématiques sont un outil pour résoudre des problèmes pas nécessairement mathématiques (mathématiques au service de la physique, de la biologie, de l’économie, etc...).

La pratique que nous proposons considère les mathématiques comme une science vivante qui a son développement propre et sa logique propre.

Naturellement, ces trois points de vue ont leur part de vérité et il nous semble souhaitable qu’ils coexistent dans l’enseignement, cependant, si l’on interroge les élèves, et même les enseignants, on constate souvent que seuls les deux premiers sont pris en compte et transmis (en général implicitement). Par exemple, les élèves (et les professeurs) n’arrivent pas à imaginer en quoi peut bien consister la recherche en mathématiques (Reste-t-il des choses à trouver ? Les professeurs ne sauraient-ils pas tout ?). Beaucoup pensent que les mathématiques se sont développées uniquement à partir des applications (ce qui est historiquement faux, y compris à l’époque contemporaine). Enfin la recherche d’un problème se résume trop souvent à trouver le chapitre du cours d’où il est extrait.

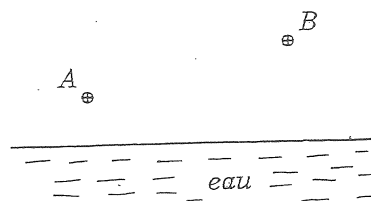
Venons-en maintenant à une tentative de définition du "problème ouvert" que le lecteur attend ... La version que nous en donnons ci-dessous tient compte des remarques faites par certains participants au "Colloque sur le Problème" et des réflexions ultérieures de l'équipe.

Nous appelons *problème ouvert* un problème qui possède les caractéristiques suivantes:

- * énoncé court;
- * l'énoncé n'induit ni la méthode, ni la solution (pas de question intermédiaire ni de problème du genre "montrer que"). En aucun cas cette solution ne doit se réduire à l'utilisation ou l'application immédiate des résultats présentés en cours;
- * le problème se trouve dans un domaine conceptuel avec lequel les élèves ont assez de familiarité. Ainsi peuvent-ils prendre facilement "possession" de la situation et s'engager dans des essais, des conjectures, de projets de résolution.

En voici quelques exemples:

- 1.- Toto part de A, prend de l'eau et va en B.
Peux-tu lui tracer le chemin le plus court ?



- 2.- Peux-tu trouver deux entiers naturels distincts a et b tels que

$$1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \quad ?$$

Peux-tu trouver trois entiers naturels distincts a , b et c tels que:

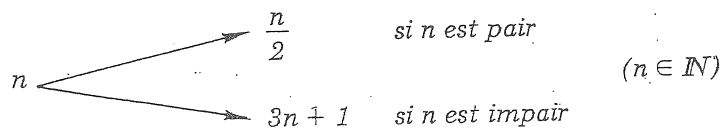
$$1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \quad ?$$

Peux-tu trouver quatre entiers naturels distincts a , b , c et d tels que:

$$1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \quad ?$$

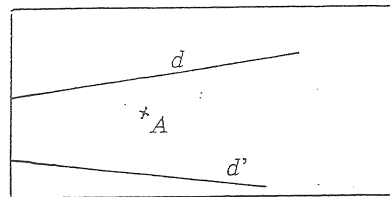
Continue.

- 3.- Etudier la chaîne:

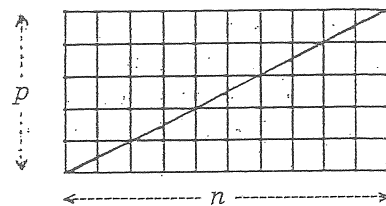


- 4.- Comment tracer la droite passant par A et par l'intersection de d et d' ?

Malheureusement, le point d'intersection de ces deux droites se situe à l'extérieur de la feuille.



- 5.- Peux-tu déterminer en fonction de n et p, le nombre de carrés que traverse la diagonale ?



- 6.- Etant donné trois nombres positifs est-il toujours possible de construire un triangle dont les côtés ont pour mesure ces trois nombres ?
Si ce n'est pas toujours possible, quelle(s) condition(s) doivent vérifier ces nombres pour que ce soit possible.

Avant de commenter certains de ces exemples, notons tout de suite que notre définition du problème ouvert n'est que relativement originale; on trouvera des définitions analogues ailleurs, par exemple dans "Le Livre du Problème", [3] de l'IREM de Strasbourg où ce qui est appelé "problème" est voisin de ce que nous appelons "problème ouvert" et où une classification plus fine est proposée. On trouvera aussi un brillant compte rendu d'une séance de "problème ouvert" devant deux cents personnes, menée par S. LANG, dans [4] et [5].

En fait nous nous différencions du "Livre du Problème" en ce que nous proposons une pratique systématique du "problème ouvert" en classe alors que, pour les auteurs de cet ouvrage (page 20):

"La recherche de problèmes n'est pas une activité scolaire compatible avec des horaires stricts, réalisée en temps limité ...

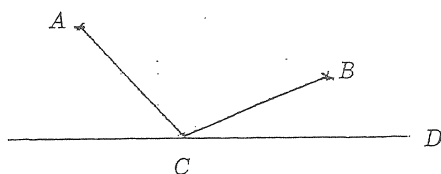
Il s'agit donc d'une activité libre, à laquelle on se livre par goût d'une façon désintéressée. On comparera le statut du problème, dans l'enseignement des mathématiques, à la lecture des œuvres littéraires, ne figurant pas au programme, dans l'enseignement du français.

Le maître sèmera, de temps en temps, des idées de problèmes dans l'espoir de récolter un comportement de recherche. Mais lorsque l'Inspecteur viendra passer vingt minutes dans la classe, il n'apercevra pas ce qui germe dans la tête des enfants, et il ne pourra juger si l'initiative du professeur est sur le point de porter ses fruits. Ainsi, s'agit-il aussi pour le maître d'une activité gratuite, à laquelle il n'est pas réglementairement astreint."

QUELQUES COMMENTAIRES SUR LA DEFINITION DU PROBLEME OUVERT

Remarquons tout d'abord que certaines des contraintes imposées dans la définition sont visiblement liées à la situation d'enseignement: il en est ainsi de la brièveté de l'énoncé et du choix du domaine conceptuel.

D'autre part, un même problème peut, suivant son énoncé, et suivant le moment où on le pose, conduire à un problème "ouvert" ou "fermé" ou donner lieu à un problème de modélisation préalable. Considérons par exemple le problème numéro 1, bien classique du point de vue mathématique:



On donne une droite D et deux points A et B situés dans un même demi-plan par rapport à D . Existe-t-il un point C de D tel que le trajet ACB soit minimum ?

Cet énoncé, auquel on peut donner éventuellement une forme plus concrète, peut constituer un problème ouvert dans les classes de quatrième ou troisième. Mais il donnera évidemment lieu à un problème "fermé" si l'on transforme la fin de l'énoncé sous la forme:

"Montrer que le trajet ACB est minimum quand C est à l'intersection de D avec la droite joignant B au symétrique de A par rapport à D ."

ou si l'on rajoute: *"Penser à la symétrie" !*

Il donnera également lieu à un problème fermé s'il est proposé après un cours sur la symétrie. Cet énoncé peut aussi servir à la modélisation d'une situation d'optique géométrique (réflexion de la lumière, principe de Maupertuis).

De même, la frontière entre problème ouvert et problème de découverte n'est pas toujours nette. Ainsi l'énoncé numéro 6 peut servir aux deux usages:

"Etant donné trois nombres positifs, existe-t-il un triangle dont les côtés aient pour mesure ces trois nombres ?"

Cet exemple montre aussi qu'une situation mathématique très classique peut donner lieu à un problème ouvert.

Enfin, l'attitude et le rôle du professeur pendant la recherche du problème sont essentiels pour que celui-ci reste ouvert du point de vue des élèves. Cette attitude est décrite et commentée à la fin de cette première partie et dans les parties 3 et 5 de cette publication.

POURQUOI PROPOSER DES PROBLÈMES OUVERTS DANS NOS CLASSES ?

Avant de décrire une séance de recherche de problèmes ouverts, nous allons préciser ici les objectifs que nous visons à travers cette pratique. Ces objectifs seront repris et détaillés dans les deuxième et troisième parties.

Si l'on examine les problèmes proposés dans nos classes, il semble que ce sont essentiellement des problèmes dont l'objectif est d'apprendre à l'élève à utiliser des outils mathématiques que le professeur lui a donnés. Sans négliger leur intérêt, il nous semble dommage de réduire l'enseignement des mathématiques à ce seul aspect. En effet, ces outils deviennent bien souvent une fin en eux-mêmes et les mathématiques sont alors perçues comme une science abstraite et essentiellement déductive. Ce qui, nous semble-t-il, diminue considérablement la portée éducative de leur enseignement.

Nous pensons qu'un autre aspect des mathématiques est trop souvent absent de notre enseignement, c'est l'aspect *expérimental et inductif*. La pratique de problèmes ouverts peut permettre de retrouver cet aspect des mathématiques en permettant à l'élève de mettre en route ce que nous appelons *une démarche scientifique* c'est-à-dire en lui permettant *d'essayer, de conjecturer, de tester, de prouver**. En ce sens nous sommes en parfait accord avec les auteurs du livre sur le problème [3] :

“L'éducation mathématique développe occasionnellement la mémoire, la minutie, le sens pratique, les facultés d'abstraction, etc... Mais le plus important est de cultiver l'intelligence qui est l'aptitude à faire face à des situations nouvelles et à saisir des relations. C'est la recherche de “problèmes” qui est donc l'activité mathématique la plus importante.

Contrairement aux exercices d'exposition, le contenu mathématique importe peu dans un problème. L'important est de susciter un élan de curiosité et de déclencher un comportement de recherche.

Cependant, notre système d'enseignement méconnaît gravement cet aspect. Nombreux sont les étudiants qui sortent brillamment diplômés de nos Universités sans avoir vraiment résolu un seul problème de leur vie: il ne leur est jamais arrivé d'être obsédés par une question pendant plusieurs semaines, d'avoir lentement pris conscience de la nature des difficultés, et d'aboutir, à la suite d'un long processus, à une illumination qui dévoile la réponse.”

A noter que cette conception des mathématiques comme science expérimentale est tellement occultée dans notre enseignement, et dans celui que nous avons reçu, que pour un certain nombre de professeurs de mathématiques, essayer, bricoler ce n'est pas faire des mathématiques ! “Faire des mathématiques, c'est faire des démonstrations !” (sic).

Un deuxième objectif peut être atteint à travers cette pratique: en effet, comme nous le verrons plus loin, le rôle du professeur et le statut du problème dans cette pratique changent, il y a en quelque sorte une rupture du contrat didactique. Cette rupture nous permet alors, à nous enseignants, de prendre du recul par rapport à notre pratique traditionnelle, en somme de faire *“un pas de côté” par rapport à cette pratique.*

* Voir à ce propos “La Mystification Mathématique” d'Alain BOUVIER, (Hermann).

Enfin, un dernier objectif visé est de permettre aux enseignants *de retrouver le plaisir de faire des mathématiques !* Car il faut bien reconnaître qu'après dix ou quinze ans, ou plus, passés à enseigner dans un lycée, collège ou LEP, nous avons l'impression de ne plus avoir fait de mathématiques depuis longtemps. Or les problèmes ouverts que nous proposons à nos élèves sont aussi des problèmes pour nous, beaucoup d'entre nous avons eu énormément de plaisir à les chercher et c'est ce plaisir qui nous a incités à les proposer à nos élèves.

CHRONIQUE D'UNE EXPERIMENTATION D'UN PROBLEME OUVERT DANS UNE CLASSE DE QUATRIEME

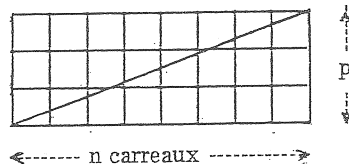
Cette chronique est rédigée par l'enseignant qui a proposé ce problème*. La classe est une classe de quatrième d'un établissement depuis classé en ZEP.

1.- Mise en route de l'expérimentation

J'ai présenté à mes élèves six problèmes (voir l'énoncé de ces problèmes page 6), en notant leur énoncé sur une grande feuille (1 m $\times$ 1,50m) qui a été affichée en classe.

Leurs réactions ont été très diverses: au début, ils ont trouvé tous ces problèmes très simples (dans leur esprit, énoncé court = problème facile !), puis chacun a essayé de proposer des solutions. Entre autre pour l'exercice 1, "tous les chemins sont égaux !". Certains ont essayé de noter les énoncés sur leur brouillon. Finalement, je leur ai proposé de photocopier ces énoncés et d'organiser une séance de recherche la semaine suivante du problème numéro 5, dont on rappelle l'énoncé ci-dessous.

Peux-tu déterminer en fonction de n et p , le nombre de carreaux que traverse la diagonale ?



A noter que j'ai eu beaucoup de mal à les arracher à ces problèmes pour revenir à des choses plus traditionnelles.

2.- Première séance

Quatre ou cinq jours plus tard, nous avons consacré une séance d'une heure pour chercher en classe ce problème 5.

* Cette chronique a été rédigée en 1982. Depuis j'ai modifié la manière de présenter ces problèmes à mes élèves et la gestion de la mise en commun. (Voir à ce propos les parties 3 et 5).

Au cours de cette première séance, comme d'ailleurs pour les autres séances, les élèves ont cherché par groupes de deux ou individuellement.

Des questions ont été proposées concernant l'énoncé:

- "Que signifie en fonction de n et p ?"

Je leur ai répondu qu'il fallait qu'ils trouvent une formule donnant directement le nombre de carreaux traversés, dans tracer le rectangle, uniquement à l'aide de n et p .

- "Et si la diagonale passe par un nœud du quadrillage, comment compte-t-on le nombre de carreaux traversés ?".

Après ces questions, les élèves ont fait des essais avec des feuilles quadrillées.

Certains au début traçaient leurs rectangles à main levée mais en comparant leurs résultats avec leurs camarades, ils se sont rendus compte que pour faire un décompte correct des carreaux, il fallait faire une figure précise: la figure n'est plus faite pour le prof, mais pour eux !

Rapidement (10 à 15 minutes après le début de la séance), des solutions me sont proposées par pratiquement tous les groupes. Mais il faut noter que ces "solutions" sont établies à partir de deux, voir souvent d'un seul exemple ! Ces deux exemples ou cet exemple suffisent à convaincre totalement mes élèves: ils estiment alors que le problème est résolu, ils posent leur crayon avec un grand sourire de satisfaction !

Exemples de ces solutions: (pour plus de simplicité, j'appellerai N le nombre de carreaux traversés).

- ♦ $N = n$. Ce groupe a fait deux essais avec $(n, p) = (8, 4)$ et $(6, 3)$.
- ♦ $N = n + p - 1$ Plusieurs fois proposé avec $(n, p) = (7, 4)$; $(5, 3)$; ...
- ♦ Voici une autre conjecture trouvée après 35 minutes de recherche:

- si n est pair:

$$\text{si } p \geq \frac{n}{2} \quad \text{alors } N = \frac{n}{2} + p$$

$$\text{si } p < \frac{n}{2} \quad \text{alors } N = \frac{n}{2} + 1$$

- si n est impair, alors $N = \frac{n}{2} + 0,5 + p - 1$

J'essaie d'aider alors mes élèves à être davantage critiques face à leurs conjectures en essayant de soulever en eux un doute face à leur "solution": soit en leur demandant s'ils sont absolument sûrs de leur résultat, soit en leur proposant un contre-exemple.

Exemple de dialogue professeur-élèves:

- Ça y est on a trouvé le nombre de carreaux traversés, c'est n .
- Avez-vous essayé avec 9 et 6 ?

Les élèves essaient et constatent ...

- Mince notre truc ne marche pas !

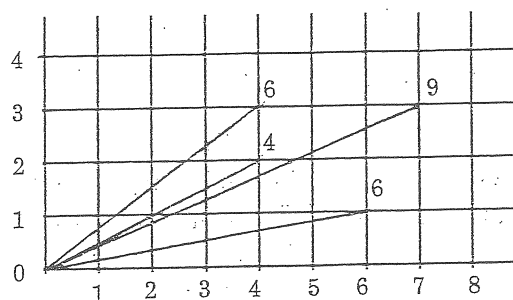
Le contre-exemple les convainc sans problème et ils se mettent à faire de nouveaux essais.

L'activité en classe est intense. Tous cherchent.

Certains élèves commencent à s'organiser.

Un groupe fait un tableau à double entrée pour rassembler les résultats de ses essais.

$\begin{smallmatrix} n \\ p \end{smallmatrix}$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2		2	4	4
3			3	6
4				4



Une élève utilise le repère ci-dessus pour faire plus rapidement des essais.

Je suis moins souvent sollicité par les élèves qui commencent à devenir davantage critiques face à leurs conjectures. Au bout d'une heure toutes les conjectures proposées par les élèves se sont avérées fausses. Je propose alors d'organiser une nouvelle séance une semaine plus tard, les élèves étant bien sûr invités à continuer leurs recherches chez eux s'ils le désirent.

3.- Deuxième séance

Au bout de la nouvelle séance, les élèves ont de la peine à faire le bilan de leurs recherches de la séance précédente: beaucoup ont perdu leur brouillon ou n'en retrouvent qu'une partie, peu ont noté leurs conjectures. J'en profite alors pour leur faire sentir la nécessité d'apprendre à rédiger leurs conjectures ou découvertes. Cette rédaction a pour but de leur permettre de faire un bilan de leur recherche et donc de ne pas repartir à zéro lorsqu'ils recherchent le problème quelque temps plus tard et de pouvoir communiquer leurs conjectures ou résultats à leurs camarades.

La motivation semble un peu tomber dans certains groupes car les élèves ne trouvent pas la formule qui "marche tout le temps". Il y a toujours un exemple qui "ne va pas".

Je vais alors auprès de ces groupes pour faire avec eux le bilan de leur recherche et surtout pour leur indiquer qu'après tout, ils ne sont peut-être pas obligés de trouver "la bonne formule" mais qu'un résultat qui ne "marche" pas tout le temps peut être intéressant à condition de préciser dans quels cas il est valable !

Exemple de dialogue professeur-élèves:

- Alors où en êtes-vous ?
- Bof ! ... On avait trouvé que le nombre de carreaux traversés est n mais ça ne marche pas avec $n = 9$ et $p = 6$.
- Bien. Mais quels sont les exemples qui vous ont conduits à établir cette formule ?
- $n = 8$; $p = 4$ et $n = 9$; $p = 3$.

- Il serait peut-être intéressant de trouver pour quelles valeurs de n et p cette formule est valable.

Les élèves sont alors surpris car je les guide sur une piste qui ne semble plus être en rapport direct avec le problème de départ. Mais d'un autre côté, ils se sentent motivés pour reprendre leur recherche car ils se rendent compte que leur formule "n'est pas si ridicule que ça" !

De nouvelles conjectures commencent alors à apparaître:

- "Si n est le double de p , alors $N = n$ "
- "Si n est un multiple de p , alors $N = n$ "
- "Si n est pair et p impair, alors $N = n + p - 1$ "
- "Si p est un nombre premier, alors $N = n + p - 1$ ".

Un groupe s'intéresse au nombre de nœuds traversés.

Je suis vraiment étonné par les découvertes de mes élèves. Je leur propose alors pour le prochain cours, une séance de mise en commun des résultats.

4.- Mise en commun des conjectures

Cette fois-ci les brouillons ont été gardés.

Chaque groupe propose ses conjectures. Je les note au tableau. Les autres groupes essayent évidemment de prouver à l'aide de contre-exemples qu'elles sont fausses ! En fait, on s'aperçoit que, pour les élèves la distinction entre vrai ou faux n'est pas claire.

Certains pensent pouvoir nier la formule $N = n + p - 2$ quand n est impair et p pair avec l'exemple $n = 5$ et $p = 6$.

Si une conjecture est reconnue comme fausse par la classe, je l'efface.

Finalement trois conjectures "résistent" à toute attaque:

- si n est un multiple de p , alors $N = n$;
- si p est un nombre premier non diviseur de n , alors $N = n + p - 1$;
- $N = n + p - 1 +$ le nombre de nœuds.

Je sens alors la nécessité de leur donner le résultat. Je n'ai pas pensé que je pouvais adapter une démonstration à des quatrièmes. Cela est peut-être possible ?

$N = n + p - \text{pgcd}(n, p)$.

Je suis alors surpris par la réaction de mes élèves.

- Ah mince, c'était facile !
- Comment n'y ai-je pas pensé ?

Beaucoup s'attendaient à une formule très compliquée. Chacun essaie de lui-même de vérifier cette formule avec un ou deux exemples. Un rappel a été évidemment nécessaire sur la notion de pgcd.

Puis un élève a alors posé la question suivante:

- Mais alors, nos formules sont fausses ou pas ?

45 minutes ont alors été consacrées à étudier cette question pour les deux premières conjectures.

CE QUE NOUS AVONS CONSTATE EN EXPERIMENTANT DES PROBLEMES OUVERTS DANS NOS CLASSES.

D'autres problèmes faisant partie de la liste des six problèmes cités en page 6 ont été expérimentés par une dizaine de collègues dans le premier et le second cycle.

Certains collègues ont proposé cette liste en devoir à la maison (les élèves devant chercher un certain nombre d'exercices au choix de cette liste). D'autre ont proposé ce travail en classe, les élèves travaillant en groupes plus ou moins structurés; dans certaines classes, le professeur imposait un problème, ce travail se prolongeant, soit par un bilan écrit que devait faire l'élève à la maison, soit par des nouvelles séances de travail en groupes à la fin desquelles était fait un bilan des recherches.

Il y a donc eu une grande diversité dans la manière de proposer ce travail.

A partir des comptes rendus que nous avons reçu, nous avons fait un certain nombre de constatations.

1.- Conséquences des différentes consignes données aux élèves

Le fait de proposer ces problèmes de différentes manières nous a amenés à faire les constatations suivantes.

Il semble que, si la majeure partie du travail de recherche se passe à la maison, cette expérimentation est beaucoup "appauvrie" (tout particulièrement dans le premier cycle):

- il y a appauvrissement pour l'enseignant qui ne voit pas l'élève chercher (nous verrons plus loin l'intérêt de cette observation);
- il y a appauvrissement pour l'élève qui risque rapidement de se décourager.

Proposer, même en classe, tous les exercices simultanément n'incite pas l'élève à une recherche approfondie (il papillonne d'un problème à l'autre).

Demander aux élèves de faire, après une heure de recherche en classe, un compte-rendu écrit de leurs découvertes ou de leurs conjectures, n'est pas simple surtout pour un élève du premier cycle. Nos élèves, en effet, sont trop habitués à ne rédiger que ce qu'ils pensent être un résultat définitif et "juste". Des résultats partiels ou des études de cas particuliers ne sont pas pris en compte dans la notation traditionnelle de la production de l'élève devant un problème classique.

En fait, il y a ici une rupture du contrat didactique entre cette activité et l'usage habituel du problème en classe. Le problème n'est pas ici un outil d'évaluation.

2.- Au début de cette expérimentation, les élèves sont désorientés

- * Tout d'abord par la forme de l'énoncé (Cf. la définition du problème ouvert).
- * Parce que rapidement, ils se rendent compte qu'ils ne voient pas de méthode à utiliser (d'habitude la ou les méthodes sont sous-entendues dans l'énoncé des problèmes classiques et plus encore dans les exercices d'application). Aussi, l'enseignant est vite submergé par de nombreuses questions:

- Faut-il tracer des triangles ? Des parallélogrammes ?
- Est-ce que je peux faire comme ça ?
- Est-ce qu'il y a une solution ?

Cette dernière question est pour eux un grand sujet d'inquiétude. C'est un des symptômes de la rupture du contrat didactique: dans les problèmes classiques, cette question ne se pose pas, car la plupart du temps la solution apparaît dans l'énoncé: "Montrer que ...".

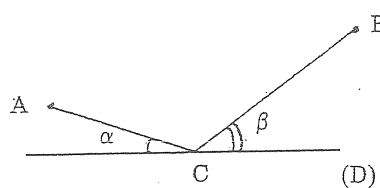
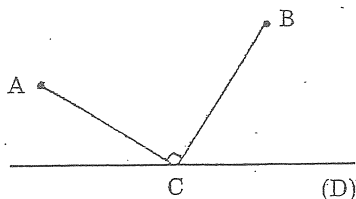
A noter leur étonnement lorsqu'on leur dit que pour l'exercice 3, il n'y a pas, à ce jour, de résultat démontré. Réaction d'une élève suite à cette remarque:

- "Alors nous, on ne risque pas de démontrer quelque chose dans cet exercice et si on ne peut rien démontrer à quoi ça sert de le chercher ?"
- (élève de troisième)

* Les élèves sont aussi désorientés car ils pensent qu'il faut trouver un résultat et que, ne pas le trouver, c'est un échec. D'où le découragement que l'on peut parfois noter. C'est peut-être l'occasion, pour l'enseignant, de faire prendre conscience aux élèves que dans la recherche d'un problème de maths, les résultats partiels (étude de cas particuliers) sont intéressants ainsi que la résolution de problèmes annexes.

Par exemple, pour l'exercice 1, de nombreux problèmes annexes ont été posés par les élèves et souvent résolus:

- Comment trouver un point d'une droite équidistant de deux autres points ?
(Classe de quatrième).
- Comment trouver un point C de (D) tel que $\text{mes}(\text{ACB}) = 90^\circ$?
(Classe de quatrième).



- Comment construire un point C de (D) tel que $\alpha = \beta$?
(Classes de quatrième et troisième).
- Comment tracer un cercle passant par deux points, tangents à une droite donnée ?
(Classes de quatrième et troisième).

Pour l'exercice 2:

- Peut-on trouver un entier a tel que $0,3 = \frac{1}{a}$?
(Classe de quatrième).
- Comment trouver des entiers dont la somme de certains de leurs diviseurs est égale à eux-mêmes ?
(Classe de quatrième).

3.- Dans un premier temps, nos élèves ne sont pas du tout critiques face à leurs conjectures.

Comme nous l'avons vu plus haut, au cours des premières séances de ce genre de problèmes, les élèves du premier cycle, après avoir établi une conjecture, sont satisfaits. Ils ne cherchent pas à faire d'autres essais en vue d'une vérification. Au début de l'expérimentation, les élèves gardent les réflexes qu'ils ont face aux problèmes traditionnels: il faut fournir une réponse, et le plus rapidement possible, même s'ils sont conscients que leurs réponses n'ont pas de sens: "on ne sait jamais !". (A noter que ces réflexes ne sont pas propres aux mathématiques).

Comme nous l'avons précisé antérieurement, il semble important que l'enseignant amène ses élèves à être critiques face à leurs conjectures, soit lorsque les élèves lui demandent de valider leurs résultats en leur retournant la question: "Et vous, êtes-vous sûr de votre résultat ?"; soit en leur proposant des contre-exemples (pour les conjectures fausses).

Ainsi par exemple: pour l'exercice 1, très vite les élèves pensent au point C équidistant de A et B et arrêtent toute recherche, satisfaits. A ce moment-là, le professeur peut les inviter à tester leur conjecture à l'aide d'autres essais.

Exemple de dialogue professeur-élèves:

- As-tu vérifié la longueur du parcours correspondant à ce point ? (On donne bien sûr le point convenable que l'on détermine à vue d'œil).
- Ah mince, mon truc ne marche pas !

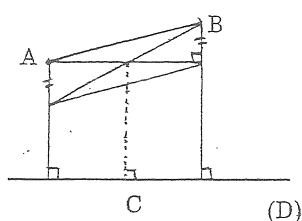
A noter, et ceci semble important, qu'au bout de deux ou trois séances en classe, les élèves sont beaucoup plus critiques à l'égard de leur conjecture.

4.- Nos élèves nous ont souvent étonnés (dans le bon sens du terme)

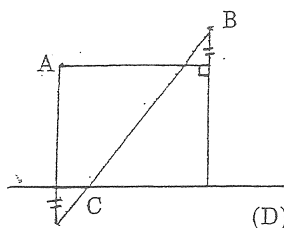
Ce qui va suivre peut être une réponse à un certain nombre de collègues qui, en voyant ces exercices, ont tout de suite estimé que leurs élèves étaient trop faibles pour en tirer profit.

- * Nous avons été étonnés par des moments d'intense motivation de la part des élèves, certains collègues parlent "d'activité fébrile". Les élèves continuent de chercher ces problèmes même pendant les cours plus "traditionnels". Ils provoquent chez eux de grandes discussions (nous avons des réactions de certains parents d'élèves dans ce sens).
- * Nous sommes aussi étonnés par la ténacité de certains élèves qui ne sont pas toujours les meilleurs.
- * Les élèves nous ont étonnés par leur grande imagination (tout particulièrement dans le premier cycle). Cette imagination étant bien partagée entre tous les élèves. A noter que dans le second cycle, des collègues ont constaté que face à ce genre de problèmes, les élèves essaient directement de mathématiser la situation, et s'ils n'y parviennent pas, restent "secs". L'idée de faire des essais ne leur vient pas à l'esprit.

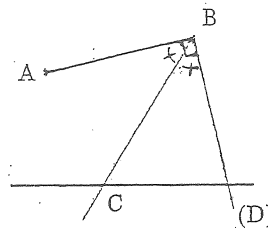
Voici quelques exemples illustrant la grande imagination de nos élèves du premier cycle. Dans une classe de quatrième de 24 élèves, nous avons relevé dix conjectures différentes pour l'exercice 1. En voici quelques exemples:



(D)



(D)



(D)

Pour l'exercice 4, nous avons relevé huit conjectures différentes.

- * Nous avons tous été étonnés par les résultats trouvés par certains élèves, résultats ou méthodes auxquels nous n'avions pas pensé.

A noter que ce sont souvent de bons élèves qui proposent ces résultats. Les élèves faibles quant à eux font des essais, émettent des conjectures souvent intéressantes, mais ils ne vont guère plus loin.

- En quatrième, six élèves ont résolu le *problème 4* au bout d'une heure de recherche en classe. Trois ont démontré que sa construction était valable.
- Pour le *problème 2*, un élève de quatrième, après deux heures de recherche, a trouvé une méthode permettant de passer d'un rang au rang suivant:

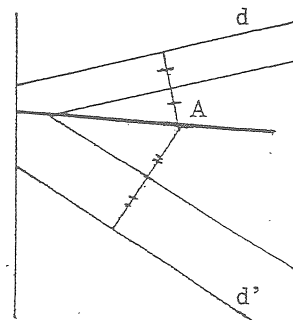
Il part de $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$ et il constate ensuite que:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6+1} + \frac{1}{2 \times 3 \times (6+1)} = 1 \dots$$

Cet élève à qui son professeur demandait comment il avait fait pour trouver ce résultat expliqua:

"Je sais que $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$, il faut maintenant que j'ajoute une nouvelle fraction au premier membre de l'égalité donc il faut diminuer l'un des termes, je prends le dernier $\frac{1}{6}$ et pour le diminuer, j'augmente son dénominateur de 1 (!); pour construire la quatrième fraction, j'ai fait le produit des nombres trouvés 2, 3 et 7 (!) ".

- Des élèves de troisième constatent qu'ils peuvent passer d'un rang au rang suivant en gardant $\frac{1}{2}$ et en multipliant par 2 les dénominateurs de l'étape précédente.
- Voici une méthode proposée par des élèves de troisième pour résoudre le *problème 4*.



- Pour le *problème 1*, un élève de seconde écrit la longueur du trajet en fonction de x et d :

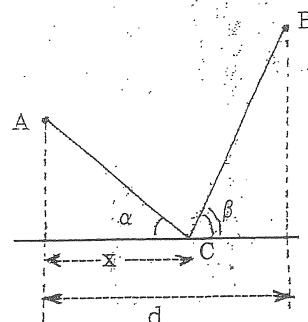
$$\text{trajet} = x \left(\frac{1}{\cos \alpha} - \frac{1}{\cos \beta} \right) + \frac{d}{\cos \beta}$$

et conclut:

“pour que la somme $(CA + CB)$ soit minimum, il faut que

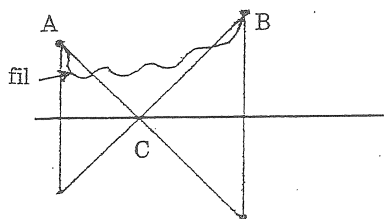
$$\frac{1}{\cos \alpha} - \frac{1}{\cos \beta} = 0 \quad \text{car} \quad \frac{d}{\cos \beta} > 0$$

donc $\alpha = \beta$ ”.



- Nous avons été étonnés par certains travaux d'élèves:

- * Pour essayer de justifier la construction du point de l'exercice 1, un élève de quatrième fait une construction avec du carton et un fil.



La longueur du fil est égale à $AC + CB$.

- * Pour le *problème 3*, un élève de troisième constate que l'on peut remplacer " $n \mapsto 3n + 1$ " par " $n \mapsto \frac{3n + 1}{2}$ " pour aller plus vite.

5.- La mise en commun des conjectures joue un rôle fondamental

Cette mise en commun peut se dérouler de la manière suivante: chaque groupe présente ses résultats (souvent partiels), ses conjectures, en les écrivant simultanément au tableau. Chaque groupe est alors invité à demander des explications aux auteurs de ces conjectures si elles ne sont pas assez claires et ensuite à les critiquer. Un dialogue, ou plutôt une tentative de dialogue (car les élèves ne sont pas habitués à cette forme de débat) s'instaure. Les élèves comprennent rapidement que ce n'est pas celui qui crie le plus fort qui a raison, mais que si l'on veut contester une conjecture, il faut apporter un contre-exemple, et si l'on veut convaincre les autres qu'une conjecture est vraie, il faut apporter une preuve.

6.- Il semble qu'il ne faut pas poser n'importe quel problème aux élèves (surtout dans le premier cycle). On risque de créer une situation de blocage face à ce genre d'exercice, blocages analogues à ceux que l'on rencontre au niveau des démonstrations en quatrième et troisième.

Il nous semble qu'il y a trois dangers à éviter:

- * Proposer des problèmes dont les solutions sont trop élaborées, par exemple le problème de Napoléon : "Recherche du centre d'un cercle uniquement avec un compas".

Cela ne signifie pas qu'en proposant un problème ouvert à nos élèves, nous devons nous attendre à ce que la moitié de la classe le résolve ! Non bien sûr, ainsi pour l'exercice 5, sur trois classes du premier cycle dans lesquelles il a été testé, aucun élève n'a trouvé le résultat mais lorsqu'on leur donne la formule ils sont surpris par sa simplicité.

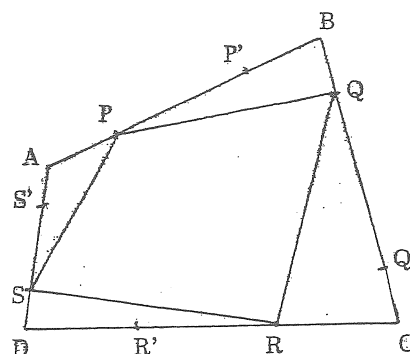
- * Proposer des problèmes dont les essais nécessitent un important travail.

Par exemple:

$PQRS$ est un quadrilatère convexe inscrit dans un quadrilatère convexe $ABCD$ (voir figure).

$P'Q'R'S'$ est un quadrilatère convexe inscrit dans le quadrilatère $ABCD$ tel que P', Q', R', S' sont les symétriques respectifs de P, Q, R, S par rapport au milieu des côtés AB, BC, CD et DA .

Quels sont les quadrilatères $ABCD$ tels que les aires de $PQRS$ et $P'Q'R'S'$ soient égales ?



Dans ce genre de problème, l'élève ne pourra pas faire suffisamment d'essais afin d'élaborer des conjectures. Il va donc se décourager très vite.

- * Proposer un problème pour lequel les conjectures immédiates émises par les élèves correspondent à la solution (pour plus de détails sur ce point voir la troisième partie page 33).

7.- Notation

Il nous semble impossible de noter les recherches des élèves, car, qui mérite le plus de points ? celui qui résout le problème au bout de trente minutes ou celui qui, au bout de deux heures de recherche n'a pas trouvé la solution mais a résolu un certain nombre de problèmes annexes ?

D'autres part, si l'on introduit une notation dans ce genre de travail, on risque de dénaturer la situation problème dans la mesure où l'objectif final de l'élève ne sera plus: résoudre ce problème pour lui-même, mais résoudre ce problème pour avoir une bonne note.

CONCLUSIONS

Comme nous l'avons constaté, au cours de ces recherches en classe de problèmes ouverts il y a rupture du contrat didactique concernant le rôle de problème dans la classe, dans la mesure où l'objectif premier de la situation problème n'est plus de faire fonctionner une notion mathématique précise, ou d'évaluer l'élève, mais de lui permettre de mettre en route une démarche scientifique véritable.

- * *Ceci entraîne donc des changements dans le rôle du professeur, et par voie de conséquence dans les relations professeur-élèves.*

Trop souvent, dans une situation didactique traditionnelle, le professeur est celui qui sait, celui qui tranche s'il y a débat, celui qui évalue, et même celui qui juge.

Dans une recherche de problème ouvert, le rôle du professeur doit être différent; il va de groupe en groupe pour s'informer de l'état des recherches, ce qui incite les élèves à faire le bilan de leur recherche (dans une activité traditionnelle, les élèves ont-ils souvent la possibilité de s'exprimer ?). Aux groupes bloqués, il propose une piste de recherche en fonction des recherches effectuées par le groupe. Ces pistes proposées ne conduisent pas forcément à la solution, elles peuvent inciter les élèves à aller plus loin dans la voie originale dans laquelle ils se sont engagés, même si le professeur pense qu'elle ne conduira pas à la solution.

C'est l'occasion de faire comprendre aux élèves que dans ce genre de problème, trouver "le bon résultat" n'est pas forcément l'unique objectif; résoudre le problème dans des cas particuliers, ou se poser et résoudre des problèmes annexes sont aussi des objectifs de cette recherche. Il incite les élèves satisfaits de leurs conjectures à les tester par de nouveaux essais ou encore à essayer de produire une preuve, il propose d'essayer des contre-exemples pour les conjectures fausses, surtout il encourage les pistes de recherche originale (auxquelles il n'a peut-être pas pensé), il valorise les résultats ou conjectures trouvées.

Bref, plutôt que de juger le travail produit, il aide les élèves à évoluer, à se dépasser. Dans cette situation didactique particulière, nous découvrons nos élèves sous un autre aspect.

- * Tout d'abord nous découvrons certains élèves: "Tiens, je n'aurai jamais cru cet élève capable de faire ça !". "Je n'aurais pas cru celui-là capable de s'accrocher comme ça sur ce problème".
- * En dialoguant avec les groupes, on met en évidence le décalage qui existe entre le sens précis que l'on donne aux termes mathématiques que l'on utilise et les sens que donnent les élèves à ces mêmes termes.

Voici un exemple parmi beaucoup d'autres: pour le problème numéro 6 (page 7) un élève rédige ainsi sa conjecture: eptième partie) un élève rédige ainsi sa conjecture: "Si la somme des deux plus petits nombres n'est pas égale au plus grand nombre, ça ne marche pas". Après discussion avec cet élève, le professeur découvre que le terme "n'est pas égale" signifiait pour l'élève non pas "est différent de" mais "n'est pas supérieure ou égale à".

- * Cette discussion permet de mettre en évidence l'implicite que véhicule notre enseignement et tout particulièrement nos énoncés de problèmes.
 - Pour le *problème 1*, un élève propose une construction qui ne convient que pour sa figure. Il ne pense pas à faire varier A et B.
 - Pour le *problème 5*, aucun élève d'une classe ne pense à faire des essais avec $n = p$. Leur professeur leur proposant de le faire, les élèves estiment que ce n'est pas possible !
- * Cette situation permet aussi de révéler des difficultés que rencontrent certains élèves (difficultés difficilement détectables dans une situation traditionnelle). Ainsi, par exemple, à la fin d'une séance de bilan de recherche du *problème 1*, un professeur fait au tableau la démonstration. Tous les élèves semblent convaincus lorsqu'un élève intervient: "Oui, d'accord, sur la figure que vous avez faite au tableau, vous avez démontré que le point qui convenait est bien le point C, mais qu'en est-il sur ma figure ?".
- * La pratique de problème ouvert dans nos classes influence toute notre manière d'enseigner (voir quatrième partie).

■ *Quelles sont les conséquences pour les élèves de ces changements ?*

L'élève découvre peu à peu qu'il a droit à l'erreur, en conséquence il cherche moins à donner "la réponse que le professeur attend", l'élève est plus spontané, il peut donc davantage donner libre cours à son imagination.

Cette activité développe aussi son esprit d'initiative, son sens critique, en somme son intelligence.

D'autre part, les séances de mise en commun jouent un rôle social important:

- ♦ L'élève apprend qu'il est nécessaire d'utiliser un langage précis, non pour faire plaisir au professeur (celui-ci généralement le comprend même si ses phrases sont peu claires: "L'idée y est") mais pour être compris par ses camarades.
- ♦ L'élève peu à peu sent la nécessité d'une preuve: la preuve devenant nécessaire pour lui, car pour certaines conjectures on ne trouve pas d'exemples qui les contredisent, et malgré cela un doute persiste: "A-t-on essayé tous les points pour l'exercice 1 ?".

"Le dessin est-il suffisamment précis pour qu'on soit sûr de notre conjecture pour l'exercice 5".

L'élève ressent alors qu'une preuve est nécessaire pour qu'il se convainque lui-même et qu'il convainque ses camarades.

Enfin dans ce genre d'activité, tous font quelque chose, c'est le moment où jamais de valoriser le travail de certains élèves faibles qui ont peut-être l'impression pour la première fois depuis longtemps de faire quelque chose en mathématiques.

■ *Mais la mise en route de ces recherches de problèmes ouverts en classe n'est pas sans soulever des difficultés.*

- Une première objection qui nous est souvent formulée est la suivante: "Comment vais-je finir le programme si je propose souvent des recherches de problèmes ouverts en classe ?". Nous répondons en détail à cette objection dans la deuxième partie.

Mais cet argument n'est-il pas parfois un alibi pour ne pas se lancer dans ce genre d'expérimentation ?

- Comme nous l'avons vu dans l'introduction, notre conception des mathématiques joue un rôle fondamental dans notre manière de les enseigner. Proposer des problèmes ouverts à nos élèves sous-entend que pour nous les mathématiques ne sont pas "un produit fini qu'il faut que nos élèves connaissent, analysent et sachent reproduire, mais au contraire une science active qui se crée" [1].

Seulement notre conception des mathématiques dépend bien sûr de la formation que nous avons reçue et tout particulièrement de notre formation universitaire car celle-ci est essentiellement centrée sur une mathématique déductive qui incite l'étudiant à reproduire ce que le professeur lui enseigne, ce qui conduit à une attitude passive et conformiste.

Or "l'initiation à la recherche de problème va à l'encontre de certains préjugés "moraux". La curiosité (abusivement confondue avec l'indiscrétion) est souvent considérée comme un défaut car il ne faut pas chercher à comprendre. Nombreux sont ceux qui se sentent coupables lorsqu'ils "sèchent" longtemps sur un problème; ils ont à tort l'impression de perdre leur temps". [3]

Beaucoup d'entre nous qui expérimentons ces problèmes ouverts avons été en présence pour la première fois avec ce genre de problèmes bien longtemps après la fin de nos études !

Or comme nous le disions plus haut, il nous paraît indispensable, pour tirer un maximum de profit de ces expérimentations, de nous placer nous-mêmes en situation de recherche.

En somme, il nous paraît important que dans la formation même des futurs professeurs de mathématiques, une place soit faite à ce que nous serions tentés d'appeler l'activité mathématique par excellence, à savoir "la résolution de problème".

- Voici enfin une réflexion que nous entendons souvent: "Dans les examens, on évalue les élèves, non pas à partir de problèmes ouverts, mais à partir de problèmes de problèmes classiques, aussi je préfère entraîner mes élèves à résoudre ce genre de problème".

Il est clair que l'activité de recherche de problèmes ouverts a un impact sur l'activité plus traditionnelle mais une question se pose à laquelle nous ne pouvons pas encore répondre: "Après un certain nombre de séances de recherche de problèmes ouverts, nos élèves sont-ils "plus performants" face aux problèmes classiques ?".

A partir de ces expérimentations, d'autres questions se posent:

CONCERNANT L'ACTIVITE DES ELEVES:

- * Quelles sont les méthodes de recherche utilisées par nos élèves pour résoudre des problèmes ouverts ? Ces méthodes varient-elles suivant le niveau des élèves ?
- * Pour un problème donné, les conjectures proposées reviennent-elles dans un ordre chronologique précis ?

- * Quels sont les erreurs commises par nos élèves au cours de ces recherches ? Quels obstacles rencontrent-ils ?
- * En fonction du niveau socio-culturel de nos élèves, note-t-on des différences de comportement face à ces problèmes ?
- * Comment les élèves ressentent-ils la différence entre un problème ouvert et un problème classique ?
- * A quel moment se produit une baisse de motivation de l'élève ?
- * Les élèves acceptent bien les contre-exemples. Mais comment vivent-ils un contre-exemple ? Comment redémarrent-ils leur recherche ?

CONCERNANT LE CHOIX DU PROBLÈME

- * N'y a-t-il pas des problèmes que les élèves s'approprient plus facilement que d'autres ? Lesquels ? Pourquoi ?

Gilbert ARSAC et Michel MANTE

BIBLIOGRAPHIE

- [1] *"Rôle des problèmes dans l'éducation mathématique"*.
Michèle PELLERÉY, dans "Mathématique et Pédagogie", numéro 16. (1978).
- [2] *Actes du Colloque de Lyon sur "Le Problème dans l'Enseignement"*. Mai 1982.
- [3] *"Le livre du problème"*. Volume 1. IREM de Strasbourg. Editions CEDIC (1976).
- [4] *"Une activité vivante: faire des mathématiques"*.
Serge LANG, dans "Revue du Palais de la Découverte", numéro 104, (1983).
- [5] *"Que fait un mathématicien pur et pourquoi ?"*
Serge LANG, dans "Revue du Palais de la Découverte", numéro 94, (1982).

DEUXIEME PARTIE

BUTS DE LA PRATIQUE DU PROBLEME OUVERT ET PLACE DE CETTE PRATIQUE PAR RAPPORT AU PROGRAMME.

Le but essentiel de la recherche de problèmes ouverts est de faire pratiquer par les élèves ce que nous appelons une démarche scientifique, c'est-à-dire :

CHERCHER - ESSAYER - CONJECTURER - DECOUVRIR - PROUVER.

Notre objectif est de mettre les élèves dans une situation d'apprentissage qui leur permette une telle démarche. Nous pensons en effet avec POLYA :

“Que si l'éducation mathématique ne contribue pas au développement de l'intelligence, alors elle est évidemment incomplète, et que l'intelligence est essentiellement l'aptitude à résoudre des problèmes: les problèmes de tous les jours, les problèmes personnels, les problèmes sociaux, les problèmes scientifiques, toutes sortes de problèmes. L'élève développe son intelligence en se confrontant à des problèmes et il apprend à les résoudre en les résolvant.”

Parmi tous les types de problèmes possibles que nous offrent les mathématiques, le problème ouvert et l'utilisation que nous en préconisons nous paraît bien permettre aux élèves de *chercher, essayer, conjecturer, découvrir, prouver.*

Et le programme ? Comment vais-je arriver à *faire le programme* si je consacre du temps à une telle activité ? Cette question, nous nous la posons face à toute innovation dans nos classes, même si nous sommes convaincus que les objectifs de cette innovation sont essentiels. Mais que signifie être d'accord avec une innovation si on ne la pratique pas ? *“Ca n'a pas de sens de dire qu'on est entièrement d'accord avec une théorie mais qu'on n'en voit pas la moindre application personnelle”* dit FOUCAMBERT, intervenant à l'Université d'Eté organisée par la Mission Académique de Lyon en juillet 1983.

Un autre but de la pratique du problème ouvert dans la classe est de permettre à l'enseignant de faire un pas de côté par rapport à sa pratique, en se posant d'une manière concrète les questions: Que signifie pour moi faire le programme ? Quelles activités pour mes élèves, dans quels buts ?

Tout se passe comme si la seule référence que l'enseignant considère comme la norme à laquelle il doit se soumettre était contenue dans “le programme”. Or chaque “programme” est accompagné “d'instructions officielles” ou de “commentaires”. Les uns et les autres replacent l'enseignement des mathématiques dans le projet éducatif, le programme étant un moyen ou un support pour développer des habiletés intellectuelles chez

l'élève (ou des processus mentaux). En prenant "le programme" comme fin en soi, on tend à favoriser une accumulation de connaissances et de résultats et à oublier les finalités de l'enseignement des mathématiques.

Dans les objectifs de l'enseignement des mathématiques au collège (circulaire n° 77157 du 29 avril 1977) qui accompagnent les programmes, on peut lire entre autres:

L'enseignement mathématiques doit notamment:

- * *cultiver les qualités d'observation et d'analyse* (identifier, par exemple, les éléments simples qui interviennent dans une situation donnée plus ou moins complexe et distinguer les relations qui les unissent).
- * *développer de façon constructive l'esprit critique de l'élève*, lui montrer par exemple les incertitudes que comporte une induction non contrôlée.
- * *stimuler l'imagination* (induire, généraliser, concevoir une méthode, trouver des exemples pour illustrer une propriété ou des contre-exemples pour infirmer une proposition, ...);
- * *habituer l'élève à s'exprimer clairement avec un vocabulaire simple mais dans un langage précis* (décrire un objet mathématique, formuler une hypothèse, énoncer une définition ou une propriété, exposer une démonstration, ...).

Nous pensons que la situation d'apprentissage "recherche de problèmes ouverts"* est un moyen d'atteindre les objectifs cités ci-dessus. De plus, elle est sous-tendue par notre conception de la connaissance et de l'apprentissage qui est celle du Québécois André PARE:

"L'école ne peut plus se contenter d'avoir les mêmes objectifs qu'autrefois. La transmission d'une connaissance toute faite est une chose du passé. Le caractère mobile et fluctuant des connaissances et des emplois amène à l'idée que l'acquisition des méthodes est plus utile que l'accumulation des connaissances. Apprendre c'est essentiellement changer, se transformer et devenir autre; c'est construire à l'intérieur de soi des modèles qui représentent la réalité et permettent d'agir avec plus d'efficacité.

Quelqu'un qui apprend des mathématiques, de la géométrie par exemple, doit le sentir dans sa vie. C'est toute l'appréhension du monde qui est touchée. Il perçoit et analyse le réel d'une autre façon."

* Voir la Cinquième Partie.

** André PARE, "Créativité et Pédagogie ouverte", (3 volumes). Edition NHP - diffusion Vuibert - Paris.

En définitive:

“Ce qui importe à l’homme libre, ce n’est pas d’apprendre plus mais de comprendre mieux, afin de mieux vivre; ce n’est pas de posséder plus, mais d’être davantage, de développer une à une les potentialités de son être.” A. WATTS (1971).

Gilles GERMAIN

TROISIEME PARTIE

LE ROLE DU PROFESSEUR DANS UNE SEANCE DE PROBLEME OUVERT.

La dénomination de "problème ouvert" rencontre un succès certain, nous avons essayé de la définir dans la première partie, mais cette définition qui porte sur le type de contenu mathématique et sur la forme de l'énoncé risque de masquer le rôle essentiel de l'enseignant dans une séance de recherche de problème ouvert. Avec une certaine redondance, on pourrait dire que ce que nous proposons, c'est une "pratique de recherche ouverte de problèmes ouverts".

La recherche reste ouverte, le problème reste ouvert, seulement si l'enseignant veille à adopter une attitude ne fermant pas la situation. Ceci n'est pas toujours facile car cette pratique rompt par certains côtés avec la pratique habituelle, ce qui surprend les élèves et surtout peut troubler l'enseignant. Nous pensons que tous ceux qui sont un jour décidé d'expérimenter une situation pédagogique vraiment nouvelle, ont ressenti ce trouble.

Innover, n'est-ce pas prendre le risque de dérégler ce qui au fond ne marchait pas si mal, de perturber un déroulement qui finalement était prévisible et maîtrisé ?

Une condition nécessaire et souvent suffisante de réussite de l'innovation est l'enthousiasme. Comme disait un collègue, et ceci est rassurant, "au fond les innovations réussissent toujours, car celui qui innove y croit". La foi du néophyte est si contagieuse qu'elle peut transpercer certaines cuirasses d'indifférence, revitaliser certains élèves dont on a parfois l'impression qu'ils ont tout vu, tout entendu, n'espèrent plus rien ... Donc, si vous y croyez, ayez confiance.

Mais comment y croire ? On sait que d'après Pascal, à force de faire brûler des cierges, on peut arriver à avoir la foi. Nous vous proposons un procédé plus en rapport avec le but visé : commencez par chercher des problèmes ouverts vous-mêmes avant d'en faire chercher à vos élèves. C'est d'ailleurs la première démarche que nous proposons à l'IREM de Lyon lors des stages sur la pratique du problème ouvert. Si vous enseignez les mathématiques, c'est en général que vous avez un certain goût pour cette matière, et parfois vous regrettez peut-être de "ne plus faire de maths". Chercher des problèmes ouverts, c'est souvent retrouver le plaisir de faire des maths, ou, pour certains, le découvrir puisque malheureusement, même les études universitaires ne donnent pas toujours l'occasion de sortir des problèmes fermés (du style : "en utilisant les résultats du 1.a) et du 2.c), démontrez que ...").

Un proverbe lyonnais dit que "tout le monde ne peut pas être de Lyon, il en faut ben d'un peu partout"; si donc vous ne pouvez pas fréquenter les stages lyonnais, ceci n'est pas grave, cherchez des problèmes tout seul ou, beaucoup mieux, avec quelques collègues*, car la pratique que vous allez proposer à vos élèves est une pratique de recherche en groupe où l'on échange conjectures et contre-exemples, où l'on discute preuves et réfutations, et où l'on s'amuse (eh oui ...).

Quand vous serez convaincus qu'il est vraiment intéressant de chercher des problèmes ouverts, vous aurez d'autres sujets d'inquiétude: Ces problèmes sont difficiles, mes élèves sauront-ils faire ?, Ne vont-ils pas me proposer des solutions dont je ne saurai dire si elles sont justes ou fausses ? Ne vont-ils pas tout simplement déclarer que "ça ne les intéresse absolument pas" ? (dans certaines classes, ils sont moins polis, ...), en un mot, que va-t-il se passer ?

Pour vous rassurer avant la séance, rappelez-vous que vous pouvez très bien choisir un des problèmes déjà expérimentés que nous proposons, que ces problèmes ont pour la plupart été essayés dans différents collèges et que, dans ces expériences, un des phénomènes les plus frappants est l'activité de tous les élèves, y compris des élèves habituellement considérés comme faibles. Quant à la question, "Pourrai-je faire face à toutes les propositions de solutions ?", elle est plus profonde et plus intéressante. Rappelez-vous que l'un des buts de l'activité "problème ouvert" est de restituer aux mathématiques leur statut de science vivante, où il reste des zones à explorer parce que *personne ne sait tout*, il est donc important que le professeur fasse prendre conscience aux élèves de ceci, leur explique que lui-même ne sait pas tout. Il n'est pas grave, mais bénéfique, que le professeur ne sache pas répondre tout de suite à certaines questions et le dise franchement. Dans la situation de problème ouvert, n'ayons pas peur de répondre "Tiens, je n'avais pas pensé à ça; essayons ensemble de voir si c'est juste"; ou même "eh bien, réfléchissez-y, voyez si vous êtes bien sûrs; je vais y penser aussi et nous comparerons nos résultats !!". Même lorsque le professeur sait, il est préférable qu'il permette à l'élève de découvrir lui-même la réponse.

Cette situation nous a amené à ce qui se passe pendant la séance, c'est ce dont nous allons parler maintenant. L'attitude de l'enseignant est alors commandée par le but à atteindre: mettre les élèves en situation de "chercher, essayer, conjecturer, découvrir, prouver" (Cf, deuxième partie, page 25).

Il est tout d'abord essentiel de se retirer de l'esprit (ce n'est pas facile) l'idée que le but de la séance est "qu'ils trouvent la bonne solution". Bien sûr, il est normal de souhaiter en arriver là, mais ce n'est qu'un but second, le but premier est bien de susciter chez tous les élèves le type d'activité résumé par la phrase citée plus haut. Ajoutons que

beaucoup de problèmes ont plusieurs solutions et qu'il est très fréquent que les élèves proposent des solutions auxquelles le professeur n'avait pas pensé.

Le rôle du professeur est donc celui d'un animateur de la recherche de la classe. Que le mot d'animateur ne vous fasse pas peur, il ne s'agit pas de prendre modèle sur un chef scout ou un animateur de jeux télévisés, mais bien d'un travail de professeur de mathématiques. En fait, il signifie que le professeur, circulant de groupe en groupe, sans en oublier aucun, répond aux questions, mais en évitant de fermer le problème, ce qui l'amène souvent à répondre à une question par une autre et à en poser lui-même, tout ceci ayant pour but de maintenir l'activité de recherche. Une autre caractéristique de son attitude est qu'il pratique une pédagogie de l'encouragement. Pour lui, il ne s'agit pas seulement de juger si un résultat est "juste" ou "faux" mais surtout de faire découvrir par les élèves comment ce résultat, même partiellement erroné, peut les faire progresser dans leur recherche. Ils apprennent ainsi expérimentalement qu'il est normal de ne pas "trouver" du premier coup, mais que les tâtonnements ont leur valeur.

Un exemple fera peut-être mieux comprendre comment "fonctionne" cette démarche. Dans le problème du décompte du nombre de carreaux traversés par la diagonale d'un rectangle (*problème numéro 5*), le résultat est $n + p - \text{pgcd}(n, p)$. L'expérience montre que l'une des conjectures les plus rapidement et les plus fréquemment proposées est " $n + p - 1$ quand n et p sont impairs". Ceci provient du fait que les "petits" nombres impairs (3, 5, 7, 9, 11, 13, ...) sont "souvent" premiers deux à deux. Cette conjecture, faussée en toute généralité, est cependant un pas en avant vers la solution puisqu'elle prend déjà en compte les propriétés de divisibilité de n et p . Pour amener les élèves à progresser à partir de ce premier pas, il suffira souvent:

- * de prendre en compte positivement leur résultat: vérifier avec eux que cela marche bien dans les cas qu'ils ont considérés mais qu'effectivement, ça ne marche pas dans un certain nombre de cas, le plus simple étant 3 et 9,
- * de relancer la recherche par une question, souvent la simple question suivante, très peu directive, suffit: "Quelles valeurs de n et p avez-vous essayées ?". En général, s'ensuit un dialogue entre les élèves (les groupes sont de 2, 3 ou 4) dans lequel apparaît souvent l'idée d'essayer 3 et 9 ou l'idée d'essayer n impair et p pair ... Sinon le professeur ira jusqu'à suggérer l'étude de tels cas.

Mais attention ! Le constat que la formule proposée échoue pour $n = 9$, $p = 3$ ne doit pas s'en tenir au fait que la formule est fausse. La question qui nous intéresse est la suivante: *Dans quel cas est-elle vraie ?* Cette question utilise la formule $n + p - 1$ comme un acquit permettant de progresser dans la recherche.

Si la classe a mordu au problème, si vous avez pris soin de laisser par vos interventions la situation et le problème ouverts, vous serez récompensés par une activité intense, voire fébrile, de tous les élèves, par des conjectures originales, parfois par la solution de problèmes autres que celui que vous aviez proposé.

Et maintenant, comment terminer ? Tout ceci ne peut pas durer éternellement (il y a les horaires, le programme ou une baisse d'activité de la classe, voir cinquième partie, page 40, 6) et de plus, vous voulez aussi susciter le débat entre les groupes, la contradiction entre conjectures et contre-exemples, preuves et réfutation. De petits échanges de ce type ont déjà eu lieu à l'intérieur des groupes ou entre groupes. Il s'agit maintenant d'organiser ceci à l'échelle de la classe toute entière, c'est le moment de la "mise en commun" (cf page xx), mais *tout le problème est de faire de ce débat une nécessité ressentie par la classe et non un exercice imposé par le prof.* Pour beaucoup d'élèves, la démonstration est chose difficile, dont la nécessité leur échappe, il s'agit de les amener à prendre conscience de cette nécessité et à y répondre à leur niveau.

Dans cette deuxième partie, la situation exige beaucoup d'initiatives de la part de l'enseignant et nous sommes nous-mêmes hésitants quant au détail de la marche à suivre. Précisons plus concrètement le but à atteindre: passer les conjectures au feu de la critique, réfuter certaines par des contre-exemples, apporter des preuves convaincantes à l'appui de celles qui semblent être vraies.

Examinons d'abord une conduite du professeur qui le mènera sûrement à l'échec, tout au moins suivant les critères que nous avons choisis: vous avez repéré un groupe (il s'agit en général de ceux qui sont bons élèves habituellement) qui est pratiquement arrivé à une solution. Vous l'envoyez au tableau, il expose sa solution. Vous faites remarquer qu' "il manque quelque chose", un autre élève ou le groupe au tableau s'écrit "il manque une démonstration". Cette démonstration est fournie par le groupe ou par vous-même et l'activité, ce qui est normal, s'arrête là. Eh bien, souvent, à notre avis, cette fin est un échec, ce qui se matérialise pour l'observateur par la constatation suivante: l'activité de l'ensemble de la classe, qui caractérisait la phase de recherche, cesse brutalement dès que le groupe est au tableau, beaucoup ne se sentent plus concernés, à tous les sens du mot, "ce n'est plus leur problème". Essayons d'analyser ce qui s'est passé.

Passons sur les problèmes que peut poser le retour au tableau des meilleurs, en suscitant chez certains un sentiment de découragement car "ce sont toujours les mêmes qui trouvent" et ils se retrouvent ainsi dans une situation d'échec dont ils avaient peut-être eu l'impression de sortir. Le phénomène essentiel est plutôt que seule une solution presque parfaite a été montrée, alors que d'autres solutions qui représentaient une étape intéressante vers la solution, sur lesquelles leurs auteurs avaient travaillé, sont restées dans l'ombre. Maintenant, elles apparaissent presque comme des échecs. En outre, la nécessité d'une démonstration est imposée par le professeur, non ressentie par la classe. On pourrait résumer la situation en disant que les élèves ont en fait la sensation d'une normalisation, d'une reprise en main par le professeur.

Par contraste avec ce qui précède, on peut maintenant fixer les buts de l'organisation du débat qui va être proposé à la classe:

- * Parvenir à ce que toutes les conjectures, tous les résultats partiels soient exposés (on peut faire écrire simultanément par chaque groupe ses résultats ou conjectures au tableau).
- * Parvenir à faire éliminer par la classe, au moyen de contre-exemples fournis par les élèves, les conjectures fausses et ceci sans pour autant oublier de mettre en relief le côté positif de ces conjectures partielles.
- * Parvenir à ce que, pour toutes les conjectures exactes, la classe, après avoir constaté l'absence de contre-exemples, arrive par le débat à une démonstration convaincante pour tous. Il ne faut pas oublier ici que, en sixième ou cinquième, on peut admettre des "preuves" qui sont convaincantes pour cet âge, sans être nécessairement des démonstrations complètes au sens mathématique du terme. En voici un exemple (inégalité du triangle). En cinquième est proposé aux élèves le problème suivant, qui pour eux est vraiment ouvert: (problème 6)

Etant donné trois longueurs, peut-on construire un triangle tel que ses côtés aient pour longueur précisément les trois longueurs données ?

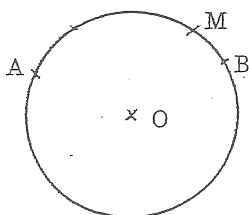
En général, certains élèves arrivent à la conjecture correcte: la plus grande des trois longueurs, soit a , doit être inférieure à la somme $b + c$ des deux autres. La preuve qu'ils proposent revient en général à montrer au tableau avec un compas qu'alors des cercles ayant leurs centres à distance a et de rayons b et c se coupent effectivement. Une telle "démonstration" convainc parfaitement la classe et nous semble ce que l'on peut espérer de mieux pour des élèves de cet âge (cf. page 43, sixième partie, rapport d'expérimentation numéro 1).

Dans cette séance de débat, que nous appelons de mise en commun, vous pourrez donc déployer votre talent pédagogique pour arriver aux buts rappelés ci-dessus. Cependant, il arrive que cette séance soit un échec (c'est-à-dire que la chute d'activité des élèves se produise dès son début) sans que cet échec puisse être imputé au professeur, l'échec peut aussi provenir du problème lui-même (sans parler des causes d'échec extra-mathématiques telles que la fatigue des élèves à certains moments de la semaine ou du trimestre). Ceci se produira certainement, par exemple, si la solution du problème paraît, à tort ou à raison, trop évidente aux élèves pour nécessiter une démonstration. Inutile alors d'insister: on ne fait pas boire un âne qui n'a pas soif.

A titre d'exemple, comparons les deux problèmes suivants (énoncés abrégé):

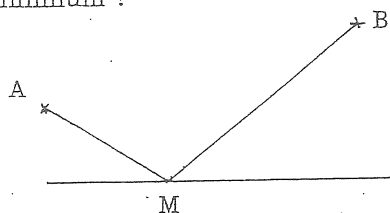
Problème α

Où placer M sur l'arc AB pour que $MA + MB$ soit maximum ?



Problème β

Où placer M sur D pour que $MA + MB$ soit minimum ?



La réponse au problème α est: placer M au milieu de AB. La réponse au problème β est: placer M au point d'intersection de D avec la droite joignant B au symétrique A' de A par rapport à D.

Le problème α risque d'être très peu fructueux car les enfants conjecturent tout de suite que le milieu est solution et n'ont nullement besoin de preuve pour être convaincus de l'exactitude de cette conjecture. Dans le problème β , au contraire, la conjecture du milieu (des projections de A et B sur D) apparaît et est réfutable. Ceci pique la curiosité, et rend méfiant même vis-à-vis de la conjecture exacte. La nécessité d'une démonstration peut alors se faire sentir (cf. page 45, sixième partie, rapport d'expérimentation numéro 2).

Concluons: nous vous avons proposé une description détaillée de ce que nous entendons par une recherche de problème ouvert. Cette description peut paraître très directive. En fait, ce n'est que parce que nous essayons de décrire avec le minimum d'ambiguïté une pratique qui n'est pas évidente par elle-même à la seule lecture des énoncés de problèmes ouverts.

En suivant pas à pas notre description, vous pourrez, pensons-nous, commencer à utiliser l'activité "problème ouvert" sans risquer trop d'échecs. Ensuite, vous mettrez peut-être au point une variante plus personnelle, ou mieux adaptée à votre type d'établissement (LEP par exemple), de cette activité.

Faites-nous part de vos expériences, envoyez-nous vos énoncés (les plus simples sont souvent les meilleurs), ceci nourrira d'expériences concrètes la "feuille à problèmes" que nous publions (cf. page 4).

Gilbert ARSAC

QUATRIEME PARTIE

INFLUENCE DE LA PRATIQUE DU PROBLEME OUVERT SUR NOTRE "ENSEIGNEMENT TRADITIONNEL".

Nous avons, pour beaucoup d'entre nous*, commencé à pratiquer des problèmes ouverts dans nos classes pour "essayer autre chose" ou pour faire partager à nos élèves le plaisir que nous avions eu à chercher certains problèmes. Au début de nos expérimentations nous n'avions pas une idée très précise de ce que nous cherchions. Puis après quelques problèmes ouverts, nous avons constaté que cette pratique influençait notre pratique traditionnelle: nous n'enseignions plus tout à fait de la même façon et cela nous a amené à nous poser des questions sur notre enseignement traditionnel: "Pourquoi des problèmes ouverts?", "En quoi cette pratique est-elle différente de notre pratique habituelle?", "Notre rôle est-il le même dans ces deux pratiques?", ...

Avant d'aborder l'influence des problèmes ouverts sur notre enseignement, nous allons rapidement préciser ce qu'on appelle "pratique traditionnelle". Lorsque nous interrogeons des collègues sur leur pratique, nous avons l'impression qu'il y a schématiquement deux pratiques pédagogiques en math, le cours magistral: définition, théorème, exercices d'application, et une pratique plus centrée sur des exercices d'exposition, une synthèse, et des exercices d'application.

Ces deux pratiques, quoique différentes, sous tendent généralement le même rapport au savoir: il existe un savoir objectif, une vérité absolue sur lesquels l'élève n'a pas de prise. Le professeur détient ce savoir et doit le transmettre à ses élèves. Les élèves eux, doivent apprendre à reproduire et utiliser ce savoir.

** La pratique du problème ouvert nous a fait prendre conscience de l'existence d'un autre rapport au savoir: un savoir que l'élève peut se construire en fonction de situations-problèmes qui lui sont proposées, un savoir qui n'est pas détenu exclusivement par le professeur. En effet, dans la pratique du problème ouvert, le professeur n'est plus celui qui sait tout. Notre expérience nous a montré que des élèves nous proposent des conjectures dont nous ne savons pas immédiatement si elles sont vraies ou fausses. Des problèmes annexes soulevés par nos élèves nous ont souvent laissés perplexes, et puis nous constatons souvent que dans le premier temps de la recherche: essais - conjectures, nous ne sommes guère plus performants que certains de nos élèves.*

Mais il n'est pas facile d'avouer que l'on ne sait pas tout: tout d'abord parce que pour l'institution (administration, parents d'élèves), mais aussi pour les élèves, nous sommes celui qui doit tout savoir, celui qui connaît la réponse à toutes les questions: "Si vous ne savez pas, alors qui saura?". D'autre part, il n'est pas

* Nous parlons ici d'une quinzaine de collègues qui expérimentent régulièrement des problèmes ouverts.

facile aussi pour nous d'accepter de descendre du piedestal où nous placent les élèves. On peut avoir l'impression de perdre du pouvoir. Et puis n'a-t-on pas souvent tendance à penser que "ne pas savoir" ou "ne pas savoir-faire" est le signe du mauvais élève ou du mauvais professeur !

Cette prise de conscience de l'existence de ce nouveau rapport au savoir a des répercussions sur notre pratique traditionnelle. Ces répercussions ne sont pas faciles à décrire et à évaluer: il est difficile d'être acteur et observateur !

En voici tout de même quelques-unes assez concrètes:

- Comme dans les séances de recherche de problèmes ouverts, nous perdons l'habitude de répondre aux questions du genre: "Est-ce que c'est juste ?". Nous essayons d'amener les élèves à évaluer leurs résultats.
- Devant une erreur, autant que possible nous amenons l'élève à découvrir la contradiction qu'elle engendre, plutôt que de la rectifier.
- Nous sommes peut-être plus attentifs aux solutions inattendues proposées par nos élèves.
- Nous présentons certaines notions très classiques sous forme de problèmes ouverts. Il est possible, par exemple, avant de donner aux élèves de quatrième la méthode pour additionner deux fractions de leur demander "brutalement" d'écrire sous forme d'une fraction le résultat de la somme $\frac{2}{5} + \frac{3}{4}$ et de leur demander ensuite d'élaborer eux-mêmes une méthode pour additionner deux fractions. Ce travail semble possible pour beaucoup de notions.

* *La pratique du problème ouvert nous amène aussi à nous interroger sur les erreurs de nos élèves.* En effet, dans cette activité, les élèves sont plus libres d'essayer, de s'exprimer, aussi nous voyons apparaître des erreurs que l'on aurait tendance à qualifier d' "énormes". Ces erreurs, nous ne les soupçonnons pas dans l'activité traditionnelle car l'élève sait qu'il y a "certaines choses qu'il ne faut pas faire, ou pas dire" (sinon ça fait hurler le prof !), bien qu'il ne sache pas toujours pourquoi il ne faut pas les faire ou les dire !

* *L'activité recherche de problème ouvert ne fait pas partie explicitement du contenu des programmes,* aussi cette activité nous amène inévitablement à des questions du genre: "Qu'est-ce que c'est faire le programme ?", "Pour qui faisons-nous le programme ?", "Quel est le but du programme ?".

Un Canadien en visite en France, à qui l'on demandait de comparer l'enseignement en France et au Canada répondit (sans désir de blesser personne), "Vous, vous suivez le programme, nous, nous suivons l'élève" !

Pour nous il n'est pas question de supprimer les contenus des programmes. Mais dans cette période où les connaissances s'accroissent à une vitesse vertigineuse, et où beaucoup d'entre elles sont dépassées très rapidement, il nous semble important de nous interroger sur la finalité du contenu des programmes (Voir deuxième partie).

* *La recherche collective de problème ouvert nous a amené aussi à nous poser des questions sur la notion de rigueur et à beaucoup relativiser cette notion. En effet au cours de ces recherches entre professeurs, les débats du genre:*

- “Mais tu n’as rien démontré !”,
- “Mais si, pour moi, c’est fini.”

ne sont pas rares.

* *Enfin, cette pratique a permis à beaucoup d’entre nous de retrouver le plaisir de faire des mathématiques. Car après dix ou quinze ans d’enseignement en Lycée, collège ou LEP, on a souvent l’impression de ne plus avoir fait de mathématiques depuis longtemps. Et ce plaisir retrouvé a certainement une influence sur notre enseignement, mais cette influence est difficilement évaluable.*

Ces changements que nous avons essayés de décrire ne sont pas forcément tous des conséquences immédiates de la pratique de problèmes ouverts. Certains d’entre vous en lisant ce texte peuvent penser, fort justement, qu’ils n’ont pas attendu de proposer des problèmes ouverts dans leur classe pour se poser les questions précédentes. D’autre part, nous n’avons pas tous été sensibles à tous ces changements. Mais ce que nous pouvons tous dire c’est que la pratique du problème ouvert nous a permis de faire “un pas de côté” par rapport à notre pratique traditionnelle.

Michel MANTE

CINQUIEME PARTIE

QUELQUES "CONSEILS" POUR EXPERIMENTER DES PROBLEMES OUVERTS DANS NOS CLASSES.

Cette partie du document est destinée à répondre à des questions soulevées par beaucoup de collègues qui sont intéressés par cette pratique, mais qui se demandent comment organiser et gérer les séances de recherche de problèmes ouverts.

Ce qui suit n'a pas valeur de vérité, mais ce sont seulement des conseils !

- 1) C'est en commençant par chercher à résoudre des problèmes ouverts, et disons-le à nous passionner pour ces recherches, que nous avons été amenés à proposer ces problèmes à nos élèves.

Comme premier conseil nous sommes tentés de dire: commençons par chercher des problèmes ouverts avant d'en proposer à nos élèves (attention ! ils ne se résolvent pas en cinq minutes). L'enthousiasme est communicatif et puis nous n'en apprécieront que mieux les conjectures ou résultats de nos élèves.

- 2) *Combien proposons-nous de problèmes ouverts dans nos classes ?*

Comme nous l'écrivons plus haut, l'expérimentation de problèmes ouverts dans nos classes n'est pas pour nous une pédagogie nouvelle qui vise à remplacer votre pédagogie "traditionnelle", mais c'est plutôt un outil pédagogique supplémentaire. Cependant, l'utilisation de cet outil n'est pas neutre et elle a des conséquences sur notre pratique "traditionnelle" comme nous venons de le voir.

En moyenne, nous organisons une dizaine de séances de problèmes ouverts, réparties régulièrement dans l'année. Certains problèmes sont expérimentables en une séance de cinquante cinq minutes (par exemple pour le *problème numéro 6*), mais la plupart d'entre eux nécessitent une heure et demie, ou deux séances de cinquante cinq minutes.

- 3) *Comment présenter ces problèmes à nos élèves ?*

Nous voudrions tout d'abord insister sur la nécessité d'une telle présentation. Cette activité est en rupture avec l'activité traditionnelle. Aussi, avant de proposer de tels problèmes à nos élèves, il nous semble important de leur expliquer les raisons pour lesquelles on leur demande de chercher ces problèmes. Ce qui nous oblige à réfléchir sur les raisons de cette pratique.

Sans présentation de notre part, certains élèves considèrent cette activité comme marginale ou récréative. D'ailleurs dans ces cas, la réaction de certaines classes ne se fait pas attendre: "Mais à quoi ça sert ?", "Ca ne fait pas partie du programme!", "On perd notre temps!".

Certains d'entre nous présentons ces problèmes dès notre premier contact avec les élèves, au moment où nous présentons le programme et nos méthodes de travail.

4) *A quel moment proposer ces problèmes ?*

Autant que possible nous évitons de poser un de ces problèmes suite à l'introduction d'une notion nouvelle qui peut être utilisée pour le résoudre.

Par exemple, nous évitons de proposer le *problème numéro 1* après la leçon sur la symétrie.

Par contre, certains de ces problèmes peuvent servir à introduire une notion nouvelle: par exemple le *problème numéro 17* pour introduire le PPCM, le *problème numéro 2* pour introduire l'addition des fractions.

5) *Quel est notre rôle au cours de cette recherche ?*

Comme nous l'avons vu plus haut, le rôle du professeur dans cette pratique change, ce changement est tout particulièrement sensible au niveau de ses interventions. Voici un tableau, certes un peu schématique, mais qui permet de mieux cerner ce changement.

(Voir tableau page 42).

6) *A quel moment organiser la séance de mise en commun des conjectures ?*

Généralement nous l'organisons lorsque nous pensons que beaucoup de conjectures trouvées méritent d'être discutées, ou lorsque nous constatons que beaucoup d'élèves estiment avoir fini ou sont découragés.

D'autres collègues organisent cette mise en commun à la fin de chaque séance. Cette séance de mise en commun n'est pas toujours simple à gérer: les élèves ne comprennent pas spontanément que ce n'est pas celui qui crie le plus fort qui a raison ... Cette séance est l'occasion d'organiser un dialogue entre les élèves, le professeur doit seulement favoriser le dialogue. Mais ici encore, nous évitons de trancher s'il y a débat entre les élèves.

7) *Mes élèves ne travaillent que s'ils sont notés, comment noter ce travail ?*

Etes-vous vraiment sûrs que vos élèves ne travaillent que pour une note ? Au cours du stage organisé sur la pratique du problème ouvert en 1983 à l'IREM de Lyon, nous avons invité une dizaine de collègues à la fin de l'année scolaire à demander à leurs élèves s'ils souhaiteraient être notés pour ce travail de recherche. La réponse avait été pratiquement unanime: non !

D'autre part, comme nous le disions précédemment, noter ce travail risque de le dénaturer. Mais, ne pas noter ne signifie pas ne pas évaluer: sur ce point, il reste un travail important à faire: ne serait-il pas possible, par exemple, de définir des critères d'évaluation avec les élèves ?

Pour le moment, cette évaluation est totalement subjective et ne joue qu'en faveur de l'élève: il est arrivé à certains d'entre nous de défendre, au cours d'un conseil de classe, des élèves que nous avions "découverts" au cours de séances de recherche de problèmes ouverts.

- 8) *J'ai une classe de 35 élèves, est-ce que je peux pratiquer avec eux des problèmes ouverts ?*

Il est clair qu'il est préférable dans ce cas d'expérimenter ces problèmes en demi-groupe. Nous avons expérimenté des problèmes dans des classes de 28 élèves. En Collège, il est possible d'utiliser les heures de soutien pour faire chercher ces problèmes.

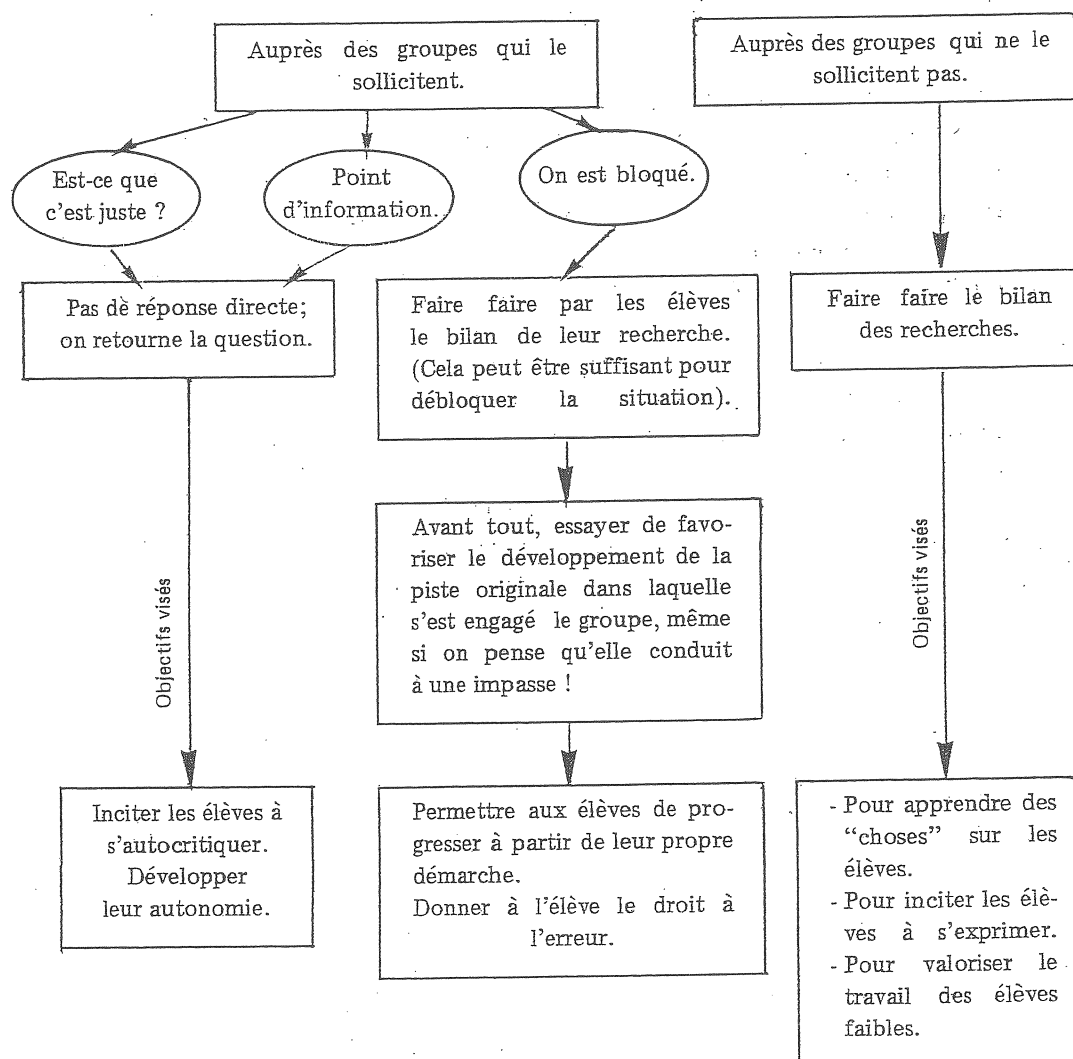
- 9) *Mes classes sont trop hétérogènes.*

Il nous semble que cette activité se prête bien à des classes hétérogènes. Chacun peut faire quelque chose. Certes, comme nous le précisons plus haut, ce sont généralement les "bons" élèves qui découvrent les résultats les plus "pertinents", mais les élèves faibles font des essais et réussissent à conjecturer. Donc tous font quelque chose, et chacun à son rythme.

Nous espérons que ces quelques conseils vont vous permettre de vous lancer dans cette pratique. Sachez que nous-mêmes, après deux ou trois ans de pratique, c'est toujours avec un petit peu d'appréhension que nous proposons un problème ouvert à nos élèves car on ne sait jamais exactement comment les choses vont tourner. Au cours d'un stage une collègue nous disait: "Pour un cours traditionnel, j'ai l'impression que le scénario est écrit d'avance, ce n'est pas le cas d'une recherche de problème ouvert en classe."

Michel MANTE

INTERVENTIONS DU PROFESSEUR



SIXIEME PARTIE

RAPPORTS D'EXPERIMENTATION

1. - Michel MANTE, professeur au Collège Jean Vilar - Villeurbanne (Collège ZEP).

ENONCE:

Est-il toujours possible, étant donné trois nombres décimaux, de tracer un triangle dont les mesures (en cm par exemple) de ses côtés soient ces trois nombres ?

Si ce n'est pas toujours possible, quelle condition doivent vérifier ces trois nombres pour qu'il soit possible de tracer ce triangle ?

CONDITIONS DANS LESQUELLES CE PROBLEME A ETE PROPOSE:

Ce problème a été proposé à deux classes de quatrième, l'un d'un bon niveau, l'autre d'un niveau moyen.

L'énoncé a été donné aux élèves sur une feuille polycopiée, les élèves étant invités à faire leurs essais et à écrire leur condition sur cette feuille.

Le travail a été entièrement réalisé en classe en une heure, les élèves étant autorisés à discuter entre eux.

DEROULEMENT DE LA SEANCE:

Je lis l'énoncé aux élèves; ils sont surpris:

- par l'énoncé court,
- par la grande place blanche qui reste sur la feuille en-dessous de l'énoncé,
- par la deuxième phrase de l'énoncé: "si ce n'est pas toujours possible", car personne ne pense que ça puisse être impossible.

Une intense discussion a alors lieu entre les élèves. De cette discussion ressort une question: "mais quels nombres faut-il prendre ?". A noter qu'au bout de cinq minutes, une élève ne s'était toujours pas décidée à choisir trois nombres décimaux: "j'hésite !" m'a-t-elle dit !

Deux élèves ont commencé à tracer les triangles et à noter ensuite les mesures obtenues.

Finalement toute la classe comprend qu'il faut faire des essais en commençant par prendre trois nombres au hasard; à noter quelques problèmes d'organisation chez certains élèves qui ne notent pas les nombres choisis.

Au bout de deux ou trois essais, les élèves ne comprennent toujours pas l'intérêt du problème: "mais ça marche tout le temps !".

Mais rapidement (15 à 20 minutes) le bruit commence à circuler que pour certains nombres, il n'est pas possible de construire le triangle et au bout de 30 minutes, tous les élèves ont trouvé un triplet qui ne permettait pas la construction du triangle.

A ce moment-là, deux questions reviennent très souvent: "Qu'est-ce qu'il faut faire ?" et "Que veut dire trouver une condition ?".

J'essaie de leur expliquer qu'il faut qu'ils trouvent une méthode leur permettant, connaissant les trois nombres, de *prévoir* s'il est possible ou non de tracer le triangle. Je finis de les convaincre en proposant à des élèves de me donner trois nombres décimaux. Je leur dis alors immédiatement s'il est possible ou pas de construire le triangle. Ils sont assez impressionnés: "Il y a un truc !" et tous se remettent au travail.

A noter leurs difficultés à rédiger leur condition. Un élève me dit même: "Je peux vous l'expliquer mais je n'arrive pas à l'écrire".

15 minutes avant la fin de l'heure, j'organise une *séance de bilan*: chacun propose à l'ensemble de la classe la condition qu'il a trouvée. Ces conditions sont notées au tableau.

Voici quelques conditions trouvées:

- (1) Les deux plus petits nombres doivent être plus grands que la moitié du plus grand.
- (2) Il faut que les nombres ne soient pas trop éloignés les uns des autres. Si on prend un petit nombre et un grand nombre, ça ne marche pas.
- (3) La somme des deux plus petits nombres doit être supérieure au plus grand.

Une discussion s'établit entre les élèves: rapidement tous sont d'accord pour rejeter la condition (2) car les mots "trop éloignés", "grand", "petit" ne sont pas assez précis.

Les auteurs de la condition (1) sont invités à expliquer à leurs camarades leur condition.

Un problème se pose alors, concernant le rapport entre les conditions (1) et (3): à partir d'exemples, on constate que finalement si la condition (1) est vérifiée alors le triangle est réalisable mais qu'il peut être aussi réalisable sans que cette condition soit vérifiée.

Un élève ayant trouvé la condition (3) essaie de la justifier en précisant qu'il faut tout d'abord tracer le côté le plus long et ensuite avec le compas on cherche le troisième sommet; on "voit" alors qu'il faut que la condition (3) soit réalisée pour que les deux arcs de cercle se coupent. Tout le monde est vaincu !

Un dernier problème est soulevé: "Que se passe-t-il si la somme est égale au plus grand côté ?".

CONCLUSION:

- Ce travail a beaucoup intéressé les élèves.
- Beaucoup ont trouvé des conditions. Je n'ai pas trouvé de différence sensible entre mes deux classes.
- Les élèves sentent à travers ce genre d'exercice la nécessité qu'il y a à rédiger clairement leur solution: Ces solutions doivent être communiquées à leurs camarades et pas seulement au prof.
- Ce travail a permis de faire entrevoir aux élèves la différence entre une condition nécessaire et une condition suffisante (au cours de la discussion au sujet du rapport entre les conditions (1) et (3)), bien que cette différence n'ait pas été clairement explicitée.

2. - Annie PEIX, professeur au Collège les Iris - Villeurbanne

Mon établissement n'est pas classé en ZEP.

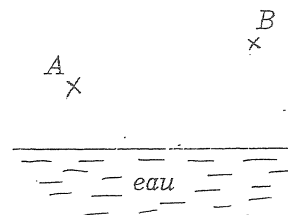
Milieu social: assez mélangé, pourcentage d'étrangers non négligeable, profession des parents: surtout des ouvriers, employés, artisans, peu de cadres.

Classe de Troisième sympathique, mais pas très courageuse et d'un niveau assez faible.

ENONCE:

Toto part de A, prend de l'eau et va en B.

Pourrais-tu lui tracer le chemin le plus court ?



CONDITIONS DE TRAVAIL

Travail en classe.

Possibilité de travail en groupe (2) et d'échanges.

Trois séances en tout, dont la première seulement a duré une heure.

DEROULEMENT DES SEANCES:

* Réactions face à l'énoncé:

Souvent, incompréhension face à l'énoncé; beaucoup sont désarmés; "que faut-il faire ?"; Je trouve que les essais se font moins spontanément qu'en Cinquième, que plus d'élèves restent bloqués au départ. Cependant, après quelques instants, les essais commencent et certains sont décrits de façon très détaillée.

* Méthodes de recherche

Au cours de la première séance (1 heure) - essais et mesures.

Au bout d'un moment, la liste des conjectures est écrite au tableau. Certaines des conjectures sont alors éliminées à l'aide de contre-exemples. Certains élèves se découragent, au bout d'une heure, ils pensent que ce n'est pas possible de trouver une solution qui convienne pour tous les cas de figure.

J'ai même la question: "Mais vous savez, vous, Madame, s'il y a une solution ?" ... Réponse: (ils cherchent depuis pas mal de temps ...) , "oui, pour ce problème là, je sais. Mais cela ne m'ennuierait pas du tout de vous poser un problème dont je ne sache pas du tout s'il a une solution. Nous chercherions ensemble".

En fin de première séance, une liste des conjectures est au tableau. Parmi elles, aucune n'est bonne, mais je ne leur dis pas. Je ramasse les feuillets.

La question de l'unicité de la solution, posée plusieurs fois, reste ouverte. Plusieurs pensent qu'il n'y a pas nécessairement un seul chemin. Cela ne les préoccupe pas de trancher sur ce point pour l'instant.

Deuxième séance (moins d'une heure)

Au début, toutes les conjectures sont écrites au tableau. Petit à petit, elles sont toutes infirmées par des contre-exemples.

Je demande alors si ce problème ne leur fait pas penser à un autre qui lui serait semblable ou analogue.

Un élève pense alors au trajet de la lumière qui arrive sur un miroir. D'où l'idée d'angles égaux: mais le problème ne leur est visiblement pas très bien connu et ils ont du mal à formuler correctement une condition.

D'autres (deux), par ailleurs, se mettent à tracer les symétriques de A et B par rapport à la ligne de l'eau.

Au bout d'un moment, la conjecture correcte est écrite au tableau (sous les deux formes). Je demande: "Si vous avez trouvé un procédé, comment s'en convaincre ? Comment en convaincre les autres ? et le professeur ?".

Réponses: - Faire d'autres dessins.
- Faire une démonstration.

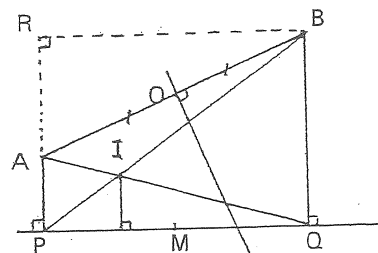
On arrête la recherche. D'un commun accord, il est décidé que les élèves rechercheront à la maison une démonstration pour la séance suivante.

Troisième séance (trois jours plus tard),

Un élève expose au tableau sa démonstration (à l'aide des symétriques). Il manque quelques précisions, mais l'essentiel du plan de raisonnement y est. On met au point une rédaction correcte au tableau. Personne n'ayant su voir le lien avec la solution des angles égaux (incidence et réflexion), je donne rapidement quelques explications. Peu d'élèves ont mis au point une démonstration correcte, mais je pense que tous en ont ressenti la nécessité.

* Conjectures proposées par les élèves:

- On trace la perpendiculaire à $[AB]$ en son milieu O .
- Il faut que l'angle $\widehat{AMB}$ soit le plus grand possible.
- On trace les perpendiculaires à la ligne de l'eau en partant de A et de B et on cherche le milieu de $[PQ]$.
- On trace AQ et BP , leur intersection I et on projette I sur la ligne de l'eau.
- Il faut que $\widehat{AMB} = 90^\circ$.
- On trace $BR \perp AP$. Du milieu de $[PQ]$ on soustrait la distance AR . (C'est assez élaboré!).
- On trace le rectangle $PRBQ$ et on projette le point de rencontre des diagonales.
- Certains élèves donnent un "encadrement": deux points-limite entre lesquels se situerait celui correspondant au chemin le plus court.
- Au cours de la deuxième séance, la conjecture correspondant à la construction des symétriques est écrite au tableau, ainsi que celle concernant les angles égaux.



* Problèmes soulevés:

- Construction de M tel que $\widehat{AMB} = 90^\circ$ (non résolu).
- Construction d'un point correspondant à deux angles égaux (incidence et réflexion): non résolu par les élèves.

CONCLUSION

- * *Principales notions utilisées:* médiatrice d'un segment, symétrie autour d'une droite, inégalité triangulaire - lien avec la phrase "le plus court chemin d'un point à un autre, c'est tout droit". Comparaison d'angles, travail sur les égalités ($\alpha + \beta = 180^\circ$ et $\gamma + \beta = 180^\circ$ entraîne $\alpha = \beta$).
- * *Oui, la nécessité d'une preuve* est apparue; je pense qu'elle peut venir, à condition de prendre suffisamment de temps de recherche en classe. Plus les conjectures sont nombreuses, ainsi que les contre-exemples, et plus cette idée a de chance de surgir dans l'esprit des élèves.
- * *Notion "nouvelle"*, pas vraiment, encore que l'inégalité triangulaire sous une forme clairement explicitée n'ait pas eu l'air d'être connue.

- * Au niveau des essais, tous semblent croire à leur chance de trouver, la distinction entre "bons" et "mauvais" disparaît. L'activité déployée, l'intérêt porté à la recherche, sont devenus indépendants de la réussite habituelle en mathématique. Les différences réapparaissent au moment de rédiger une preuve. Cependant, l'intérêt subsiste la plupart du temps.

J'ai l'occasion d'expliquer les deux sortes de problèmes que l'on peut rencontrer en mathématique:

- les problèmes "démontrez que ..."
 - les problèmes pour lesquels on n'a pas d'idée sur l'existence de la solution ni la forme qu'elle peut prendre.
- On discute un peu pour comparer les différentes formes d'activités à déployer dans les deux cas.

Je propose de redonner de temps en temps un problème ouvert. L'un des élèves (parmi les plus faibles habituellement) dit: "C'est plus intéressant".

3. - Martine PHILIPPON, professeur au Collège de Thoissey (01).

ENONCE:

Choisis un nombre de trois chiffres. Inscris encore une fois le même nombre à côté: tu obtiens un nombre de six chiffres formé de deux groupes identiques de trois chiffres.

Divise ce nombre par 7 (tu n'auras pas de reste !).

Puis divise le quotient obtenu par 11, puis le nouveau quotient obtenu par 13 (tu n'auras jamais de reste !).

Compare le quotient final obtenu avec le nombre de trois chiffres choisi au départ.

Peux-tu expliquer le résultat ?

CONDITIONS DANS LESQUELLES CE PROBLEME A ETE PROPOSE:

Ce problème a été proposé dans deux classes de cinquième. Travail en une heure. Classe complète. Dix minutes de travail individuel imposées, puis travail en groupe avec les voisins. Certains élèves ont travaillé seuls toute l'heure.

DEROULEMENT DE LA SEANCE:

Certains posent immédiatement des questions sans même avoir lu entièrement l'énoncé. Je n'ai pas voulu répondre à ces questions; j'ai demandé de relire l'énoncé. Les questions posées étaient surtout du type: "Est-ce que j'ai bien compris ?" (ils avaient besoin d'être rassurés).

- Chaque élève, sauf un (depuis passé en CPA), a bien compris, seul, ce qu'il fallait faire. Plusieurs élèves considèrent qu'ils ont fini après avoir effectué les calculs sur un exemple. Ils sautent la seule question: "Peux-tu expliquer ?".
- Difficultés rencontrées: erreurs de calcul.
- Plusieurs se sont demandé si traiter un seul exemple suffisait. Ils ont finalement essayé avec d'autres nombres.
- Nombreux sont ceux qui ont cherché des nombres "qui ne marcheraient pas". Exemples: 100 100 ou 333 333 ...
- Certains ont émis des conjectures:

- "Ça ne marche" que lorsque le nombre de trois chiffres est multiple de 7.
- "Ça doit marcher" avec $5 - 11 - 17$
 $3 - 5 - 17$

Ils essaient: - des nombres premiers consécutifs

$$\begin{array}{ccccccc} 7 & & & 11 & & & 13 \\ & & \underbrace{\quad\quad} & & \underbrace{\quad\quad} & & \\ & & + 4 & & + 2 & & \end{array}$$

- 13 - 11 - 7 à la place de 7 - 11 - 13 .

- Très vite, certains ont trouvé une relation entre les observations faites et le fait que $7 \times 11 \times 13 = 1001$. Ils voient l'importance des deux zéros qui amènent le décalage et se posent la question: "1001 est-il premier ?" ...

Certains ont calculé 132×1001 ou $132132 : 1001$.

- Interventions du professeur:

Beaucoup de questions pour me demander s'ils pouvaient J'ai donné toutes les "autorisations" sans jamais intervenir moi-même. J'ai eu à reposer le problème: il faut chercher une explication.

Notions utilisées:

- d'abord le calcul numérique
- la compréhension de la division
- la notion de diviseur d'un nombre naturel
- $1001 = 1000 + 1$; $a(1000 + 1) = a000 + 1$

Notions nouvelles: aucune, mais j'avais choisi un problème assez "fermé".

Attitude des élèves:

Tout le monde a cherché, seul ou en groupe (importance du caractère).

Des élèves moyens qui s'ennuient souvent, ont été très actifs.

Les "mauvais" ont beaucoup calculé, sans dépasser ce stade.

Ceux qui ont trouvé 1001 sont:

- soit des bons élèves actifs;
- soit un élève redoublant, réussissant correctement en mathématiques, mais mal jugé par les autres collègues.

Dans les deux classes (une "bonne" et une "future CPPN" pour 40 % d'après certains collègues) l'intérêt a été le même.

L'exercice

$$\begin{array}{cccc} & \square & \square & \square \\ + & \triangle & \triangle & \triangle \\ + & \circ & \circ & \circ \\ \hline \triangle & \square & \square & \circ \end{array}$$

qui suivait a été fait volontairement par certains (peu scolaires).

D'autres ont posé le problème de 7 - 11 - 13 à leurs parents.

4. - Ce rapport est rédigé par un des observateurs (G. Arsac, G. Germain, M. Mante, D. Pichod) que Gérard GUY, professeur au Collège de Thoissey (01), avait invité dans sa classe de Quatrième, pour suivre les recherches de ses élèves sur le problème suivant:

ENONCE:

n est un naturel non nul.

S est l'ensemble des naturels: $S = \{1, 2, 3, \dots, n\}$.

On désire trouver deux parties A et B de S telles que: la somme des éléments de A soit égale à la somme des éléments de B .

Attention, de plus il faut que:

- * A et B ne soient pas vides
- * A et B n'aient pas d'éléments communs
- * tous les éléments de S soient utilisés.

Voici un exemple: $n = 7$

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$A = \{1, 2, 5, 6\}$$

$$B = \{3, 4, 7\}$$

$$1 + 2 + 5 + 6 = 3 + 4 + 7$$

Tu vois que pour $n = 7$, il est possible de trouver A et B .

Pour quels naturels n cela est-il possible ?

Cette recherche a duré une heure et vingt minutes. Les élèves travaillent par groupe de deux. Une seule question concernant l'énoncé est posée: "Pour S , faut-il toujours partir de 1 ?".

Nous sommes surpris par la rapidité avec laquelle les élèves s'approprient le problème: tous les groupes font des essais (certains ont vérifié au préalable que l'exemple donné était juste !). A noter que beaucoup d'élèves font des essais systématiques. Par contre, dans une classe de troisième, située en ZEP, où ce problème a été expérimenté, les élèves faisaient des essais avec des nombres souvent pris au hasard et toujours supérieurs à 7. Mais dans ces deux classes, nous avons constaté que pratiquement aucun élève ne fait des essais avec $n = 2$ ou $n = 3$. A un groupe qui faisait des essais systématiques, mais seulement à partir de 4, nous avons demandé pourquoi il ne commençait pas à 2, les élèves nous ont alors répondu que c'était "trop petit" !

Voici une autre réaction qui nous a surpris: un élève commence ses essais par $n = 4$, $n = 10$ et $n = 20$. A la question, pourquoi ces nombres ? Il nous a répondu: "Ce sont des chiffres qui se multiplient bien" !!

Beaucoup de groupes rassemblent leurs résultats dans des tableaux. Au bout de quarante minutes, la majorité des groupes a conjecturé qu'il faut que la somme des termes de S soit divisible par 2.

Un autre groupe constate que: "Ca marche avec deux nombres puis ça ne marche pas avec les deux suivants ...":

$$\underline{1} ; \underline{2} ; \underline{3} ; \underline{4} ; \dots$$

ça ne marche pas ça marche

Mais ils comprennent fort bien que ces conjectures ne répondent pas exactement à la question: on entend souvent: "Il faut trouver une règle avec n ".

SEANCE DE BILAN

Au bout d'une heure de recherche, Gérard propose à la classe de faire le bilan des conjectures trouvées.

- Un premier groupe passe au tableau pour proposer la conjecture suivante: "Il faut que la somme des éléments de S soit divisible par 2 et que le résultat soit un naturel". Une discussion a lieu concernant la pertinence de la fin de la phrase. Tout le monde semble d'accord sur cette conjecture.
- Un deuxième groupe propose alors: "Tous les multiples de 4". La réaction de la classe ne se fait pas attendre: "C'est faux, il y en a d'autres, par exemple 7".
- Un troisième groupe propose: "Tous les multiples de 8". Une discussion a lieu sur le rapport avec la conjecture précédente.

— Un quatrième groupe propose le tableau suivant:

1	11	21	...	Dans les colonnes marquées d'une croix, c'est
2	12	22		impossible pour les nombres qui ne se termi-
3	13	23		nent par 1 ; 2 ; 5 ; 6 ; 9 .
⋮	⋮	⋮		Dans les autres colonnes, c'est impossible
				pour les nombres qui se terminent par 3 ; 4 ;
10	20	30		7 ; 8 .
x		x		

“Ce sont des exemples”, conteste la classe.

Un élève estime que pour “9 c’est possible”. Vive discussion dans la classe.

Finalement, cet élève est invité à passer au tableau pour préciser les parties A et B qu’il a trouvé pour $n = 9$. Il s’aperçoit alors de son erreur.

— Un cinquième groupe propose: “Ca marche pour tous les multiples de 4 et les multiples de 4 moins 1”.

Murmures de doute de quelques élèves.

Une des auteurs de cette conjecture lance alors ce défi à la classe: “Si vous n’êtes pas d’accord, prouvez que c’est faux ! Vous n’avez qu’à trouver un contre-exemple !!!!...”

Gérard GUY intervient:

- “Est-ce une certitude ?”
- “Non”, répond la classe
- “Alors que faut-il faire ?”
- “Une démonstration” répondent certains élèves.

Ce qui entraîne des “mouvements” divers dans la classe, semblant indiquer qu’une démonstration c’est “quelque chose de difficile”.

Finalement, Gérard GUY propose comme travail de recherche à la maison de trouver une méthode permettant de construire les parties A et B pour les entiers n répondant à la question.

CONCLUSION

- * Ce problème a donné lieu à une grande activité de la part des élèves.
- * Les quatre observateurs que nous étions n’ont pas, semble-t-il, dérangé la classe.
- * L’activité de recherche de problème ouvert est très riche. Seul dans sa classe, on perd beaucoup d’informations: entre autre beaucoup de dialogues entre élèves nous échappent. Avoir des observateurs dans sa classe permet de récupérer une partie de cette information. Cela permet aussi au professeur d’avoir un retour de ses attitudes, de ses paroles, ce qui lui permet de prendre du recul par rapport à son enseignement.

5. - Yves GUICHARD, professeur au Collège Alain à Saint Fons.

L’énoncé suivant a été proposé à une classe de 27 élèves de quatrième.

ENONCE:

Peux-tu trouver deux entiers naturels distincts a et b tels que:

$$1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \quad ?$$

Peux-tu trouver trois entiers naturels distincts a , b et c tels que:

$$1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \quad ?$$

Peux-tu trouver quatre entiers naturels distincts a , b , c et d tels que:

$$1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \quad ?$$

Continue...

Chaque élève dispose d'une feuille en haut de laquelle figure l'énoncé et d'une calculatrice. Le travail s'est fait au cours de trois séances de cinquante minutes. Les élèves conservent leur place habituelle dans la classe, mais ils peuvent travailler seuls ou par groupes de deux ou plus, les groupes étant formés en fonction du voisinage.

A la fin des deux premières séances, un temps d'une dizaine de minutes a été réservé à "faire le point" des recherches. La troisième séance a été en grande partie une séance de bilan. Ce travail s'est fait avant l'étude des fractions, mais après des révisions de calculs dans ID.

A la suite du travail en classe, chaque élève devait rédiger, à la maison, un compte-rendu de la séance de bilan.

Réactions face à l'énoncé:

Plusieurs questions ont été posées:

"Que signifie $\frac{1}{a}$?"

" $\frac{1}{a}$ peut-il être entier ?"

"Que signifie: continue"

On a précisé que $\frac{1}{a} = 1 : a$. Une discussion a permis de répondre aux deux autres questions. Puis la recherche a commencé.

Les élèves n'ont pas tous commencé par la première question.

Ils ont eu beaucoup de difficultés pour trouver une réponse à la deuxième question. Plusieurs solutions ont été trouvées rapidement à la troisième question. Le travail sur ce problème a permis une approche de l'étude des fractions (en particulier addition, comparaison, approximation).

Méthodes utilisées par les élèves

Certains élèves ont essayé d'ajouter plusieurs écritures décimales obtenues par division. D'autres se sont limités aux nombres décimaux.

Plusieurs ont calculé tous les $\frac{1}{n}$ pour $n = 1$ jusqu'à 10.

Certains élèves ont cherché des procédés pour passer d'une solution comportant n nombres à une solution comportant $n + 1$ nombres.

Voici quelques-uns des résultats trouvés:

- * "Ce n'est pas possible d'obtenir 1 avec deux naturels distincts, car en ajoutant les deux plus grands résultats, on n'obtiendra que $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 0,833 \dots$ car $1 : 2 = 0,5$ et $1 : 3 = 0,333 \dots$ ".

- * " $\frac{1}{1} = 1$ $\frac{1}{2} = 0,5$ $\frac{1}{3} = 0,333\dots$ $\frac{1}{4} = 0,25$ $\dots$ $\frac{1}{10} = 0,1$.

Plus le dénominateur est grand, plus le quotient est petit."

Ces deux résultats ont été pour la majorité des élèves la preuve qu'il n'y avait pas de solution pour deux entiers,

- * " $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{40} = 1$

Ici, je multiplie les dénominateurs par 2, le résultat sera forcément inférieur à 1. Le résultat de cette fraction serait 0,5 :

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{20} + \frac{1}{80} = 0,5$$

Alors on ajoute la fraction $\frac{1}{2} = 0,5$.

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{20} + \frac{1}{80} + \frac{1}{2} = 1$$

Après on continue."

- * "On a remarqué un autre moyen de trouver 1.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 1$$

On a cherché des équivalences à $\frac{1}{8}$ car il ne faut pas mettre deux fois le même

8 . Alors on a calculé $\frac{1}{8} = 0,125$ $\frac{1}{10} = 0,1$ $\frac{1}{40} = 0,025$ donc

$\frac{1}{8} = \frac{1}{10} + \frac{1}{40}$ donc notre opérateur sera $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{40} = 1$

On peut aussi décomposer: $\frac{1}{200} = 0,005$ $\frac{1}{50} = 0,002$ $\frac{1}{10} = 0,1$.

Donc $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{200} + \frac{1}{50} + \frac{1}{10}$."

Plusieurs problèmes ont été soulevés et ont été l'occasion de discussions au cours des temps de bilan:

- * "Est-ce que $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{2} = 1$? A-t-on $\frac{1}{3} = 0,3$?"

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0,3 + 0,2 + 0,5 = 1 \end{array}$$

- * "A-t-on $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$? (La calculatrice affichant 0,9999...).

Comment le prouver ?"

- * "En multipliant par un autre nombre que 2 les dénominateurs d'une solution peut-on obtenir une nouvelle solution ?"
- * Si on connaît une solution avec 4 nombres, peut-on trouver une solution avec 3 nombres en divisant les dénominateurs par 2 ?"

Pour cette dernière question on a constaté que cela ne marchait pas avec $\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{20} + \frac{1}{2}$ car $5 : 2$ n'est pas entier.

La séance de bilan s'est déroulée de la manière suivante: Un élève explique au tableau le résultat qu'il a trouvé (lui ou le groupe avec lequel il a travaillé). Une discussion s'engage alors avec les autres groupes.

Les interventions du professeur:

- * Au début, donner les consignes et répondre aux questions concernant l'énoncé.
- * Pendant le temps de recherche pour répondre aux questions individuelles ou des groupes.
- * Pendant le bilan, pour donner la parole aux différents groupes, reformuler certains résultats, amener les élèves à vérifier les propositions faites.

6. - Ce rapport est rédigé par un observateur invité par Gisèle CHAPIRON, professeur au Collège Honoré de Balzac à Vénissieux.

Classe de Sixième, de 22 élèves, d'un établissement non classé en Z.E.P., qui recrute ses élèves sur le huitième arrondissement de Lyon (milieu social: classes moyennes).

ENONCE:

Trouver les naturels dont la somme soit égale à 13 et dont le produit soit le plus grand possible.

Et pour d'autres nombres ?

CONDITIONS DE TRAVAIL

Une séance de une heure a été consacrée à la recherche, une autre de une heure (le lendemain) à la mise en commun.

Les élèves (22 présents) étant assis par table de deux, à leur place habituelle, travaillant en général avec leur voisin. Certains (2) travaillent seuls. Il y a un groupe de quatre en ce sens que deux tables voisines collaborent étroitement.

DEROULEMENT DE LA SEANCE DE RECHERCHE

Le professeur explique que la séance d'aujourd'hui va être consacrée à la recherche de l'exercice dont l'énoncé est écrit au tableau. En cours de rédaction au tableau elle a commenté l'énoncé à la fin du premier paragraphe: "J'ai pris en exemple 13, après on regardera ce qui se passe pour d'autres nombres".

La plupart des élèves commencent par recopier l'énoncé sur leur feuille ou leur cahier de brouillon.

Le hasard m'a placé près d'un groupe d'élèves plutôt faible. N'étant pas habitué aux sixièmes, j'écoute avec intérêt leurs réflexions face à l'énoncé. Ils rencontrent plusieurs difficultés:

- les mots somme et produit. Ils ne sont pas d'accord sur leur sens et le cherchent dans le cahier: "la somme c'est le résultat de l'addition", "le produit, c'est le résultat de la multiplication";
- La structure de l'énoncé: l'un se limite à chercher des naturels dont la somme est égale à 13, l'autre des naturels dont le produit est le plus grand possible ... Le lien entre les deux ne sera établi qu'après interaction avec d'autres groupes, avec le professeur. Le pronom relatif "dont" qui figure dans l'énoncé ne les met pas à l'aise.

Le reste de la classe démarre beaucoup plus vite en faisant des essais de décomposition de 13 en somme de deux naturels. Au bout de dix minutes, l'activité est bien partie, au bout de quinze minutes, l'idée d'un groupe de décomposer en somme de trois naturels se répand. Certains demandent confirmation au professeur du fait qu'on a le droit de faire cela.

Je relève quelques phrases du groupe dont j'ai parlé au début:

"Mais on peut rajouter des 0 tant qu'on veut."

"Mais 13×1 à qui on rajoute 0 égale 130."

"Non, c'est 13 à qui on rajoute 0 qui égale 130."

" $7 + 6 = 13$ ça fait 76 (pour le produit 7×6 ...) ."

"C'est quoi le naturel de $2 + 11$?"

Réponse "C'est 4" ($2 + 1 + 1$).

" $1 + 12 = 13$ somme 4, ça ne marche pas."

(Ce type d'erreur semble provenir du fait que peu de temps auparavant la classe a fait un exercice où l'on devait effectivement additionner les chiffres des nombres).

L'ensemble de la classe travaille, y compris les isolés. Certains font des essais systématiques: ils écrivent toutes les décompositions possibles en somme de deux nombres, puis de trois nombres, puis de quatre, ...

Au bout de 35 minutes, le résultat 108

(correspondant à $13 = 3 + 3 + 3 + 4 = 3 + 3 + 3 + 2 + 2$)

apparaît, il éclipse rapidement le 96 ($13 = 3 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2$).

Au bout de 45 minutes, "tout le monde" a trouvé 108, y compris "mon groupe" qui a rattrapé le train et est maintenant bien dans le bain. Il y a une forte conviction collective que c'est le bon résultat (personne n'a pu faire mieux). Le professeur annonce un bilan pour le lendemain. La fin de l'heure est consacrée à des recherches avec d'autres nombres que 13 ... La plupart essaient 14 (personne n'essaie avec un nombre plus petit que celui proposé par le professeur).

Le professeur a laissé la recherche se dérouler avec une grande spontanéité, n'intervenant que pour des groupes complètement bloqués, et laissant chacun aller au bout de ses idées, ou de ses erreurs.

Au bout d'une heure, les élèves sont contents et moi aussi, nous avons bien travaillé. Réflexion d'une élève en apprenant qu'on ne pourra pas continuer l'heure suivante: "Zut, pour une fois que je trouvais quelque chose en maths !".

DEROULEMENT DE LA SEANCE DE BILAN

Le professeur demande les élèves volontaires pour aller au tableau. Elle choisit S. (raisons de ce choix: S. élève habituellement plutôt mauvaise en mathématiques a besoin d'être valorisée).

S. déclare avoir trouvé pour le nombre 20.

Elle écrit: $20 = 3 + 5 + 5 + 4 + 3 = 20$ et $3 \times 5 \times 5 \times 4 \times 3 = 900$

Un autre élève a trouvé plus et va le marquer au tableau:

$$2 + 2 + \dots + 2 = 20 \quad \text{et} \quad 2 \times 2 \times \dots \times 2 = 1024$$

(Voix) "C'est pas intéressant" ... "Si" ... "On n'a pas interdit" (de ne mettre que des 2).

Le professeur fait remarquer qu'on ne peut pas être sûr d'avoir résolu le problème pour 20, puisque deux élèves seulement ont cherché et qu'il vaudrait mieux revenir à 13.

Après interrogation collective par le professeur, il semble que tout le monde a trouvé 108 pour produit maximum dans ce cas.

Un élève l'écrit au tableau:

$$13 = (3 + 3) + (3 + 4) \quad , \quad (3 \times 3) \times (3 \times 4) = 108$$

Le prof: "est-ce que tout le monde l'a écrit de cette façon-là ?"

(élèves) "Non, sans parenthèses".

(En fait, les parenthèses ont été étudiées peu avant, ce qui explique leur apparition ici).

Le prof: "Apparemment, on est sûrs que c'est ça, car vingt-deux l'ont trouvé, alors que pour 20, deux seulement avaient proposé des solutions."

Elle suggère d'essayer d'autres nombres:

pour 14, M. propose: $14 = 3 + 3 + 3 + 3 + 2$ (produit 162)

pour 16, $16 = 3 + 3 + 3 + 3 + 2 + 2$ (produit 324).

Le prof.: "As-tu cherché plusieurs décompositions ?"

M.: "Non, une seule".

Le prof. : "Es-tu sûr que ton résultat est le plus grand ?"

M.: "Non".

Autre résultat proposé: $20 = 3 + 3 + \dots + 3 + 2$ (produit 1458).

Le professeur essaie maintenant de faire découvrir le procédé général. Quelles remarques faire sur les cas étudiés ? Comment ferait-on pour le nombre 100 ?

Le rôle du 3 est vaguement perçu mais difficilement exprimé. Le professeur suggère de se limiter aux multiples de 3.

Exemple: 12. Tout de suite un élève propose $12 = 3 + 3 + 3 + 3$.

Cependant, à partir de cette étape, il y a rupture de l'activité, sans doute parce qu'on passe à un problème que les élèves ne se sont pas posé pendant l'heure de recherche: trouver un procédé général. Dans la suite, une minorité active va participer, parfois avec

enthousiasme, alors que d'autres décrochent, pas toujours définitivement: il y a des regains d'intérêt, voire d'enthousiasme. (Notons aussi que cette séance se déroule en fin de premier trimestre et que les élèves sont fatigués).

Je cite quelques dialogues:

Le prof, après avoir fait établir la règle pour les multiples de 3, demande:

"et les autres"

un élève: "on met quand même des 3, mais on rajoute des 2".

La règle finit par se dégager et le cas de 100 se traite:

"100 c'est 33 fois 3 plus 1";

"Non, il faut mettre 32 fois 3 plus 2 fois 2".

A noter que certains élèves sont arrivés à énoncer effectivement la règle pour un nombre dont le reste de la division par 3 est 1, et que ce débat a amené à revoir la signification du quotient et du reste d'une division.

La règle est ensuite éprouvée sur certains exemples.

Conclusion du professeur: "A-t-on trouvé le plus grand produit possible ? Je ne sais pas moi, si un jour vous trouvez mieux, vous viendrez me le dire."

Elle laisse ainsi les élèves au niveau de certitude qu'ils ont été capables d'atteindre, au moins pour certains cas, sans leur imposer sa certitude à elle. Il lui semble important de ne pas faire croire aux élèves en sixième qu'ils ont prouvé, alors qu'ils ont simplement constaté l'impossibilité pour eux de faire mieux sur ce problème, ceci afin de pouvoir plus tard en quatrième pouvoir peut-être faire ressentir plus facilement la nécessité d'une preuve.

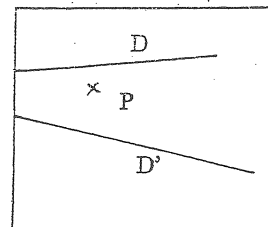
7. - Michel MANTE, professeur au Collège Jean Vilar - Villeurbanne

L'établissement est classé en Z.E.P. - Expérimentation faite dans une classe de troisième de 28 élèves.

Chaque élève reçoit une feuille sur laquelle sont tracées deux droites qui se coupent à l'extérieur de la feuille, et un point P.

L'énoncé du problème figure sur cette feuille:

"Rédige une méthode qui permette de tracer la droite qui passe par P et par le point d'intersection de ces deux droites, sans sortir de la feuille."



J'ai essayé de placer le point P de telle sorte que toutes les méthodes que je connaissais pour construire cette droite conviennent. J'ai aussi évité de placer P dans une position particulière.

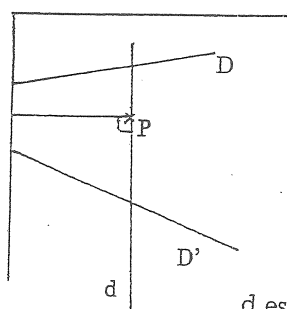
Après avoir remis l'énoncé aux élèves, je précise les consignes de travail:

- * Le travail peut se faire par groupe de 2 ou 4 (les élèves pouvant travailler avec leurs voisins de derrière, il n'y a pas de déplacement de table).
- * Il y aura à la fin du travail de recherche, une mise en commun au cours de laquelle les groupes qui le désireront, exposeront leurs résultats.

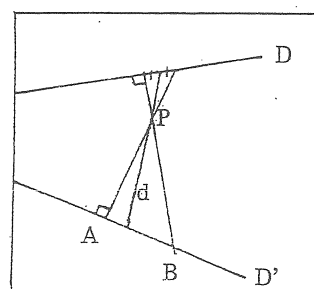
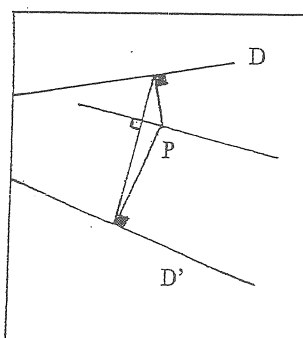
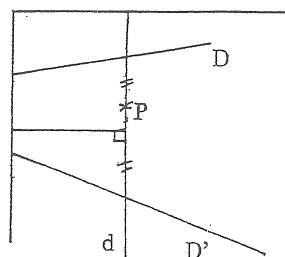
Les élèves ne sont pas surpris car ils ont déjà cherché des problèmes ouverts.

Ils se lancent rapidement dans des essais qui consistent à utiliser plus ou moins empiriquement leur connaissance de géométrie: ils tracent des perpendiculaires, des parallèles, des médiatrices, des parallélogrammes, ... A noter que le bord de la feuille joue aussi un rôle important.

Voici les premières constructions élaborées par les élèves:



d est parallèle au bord de la feuille.

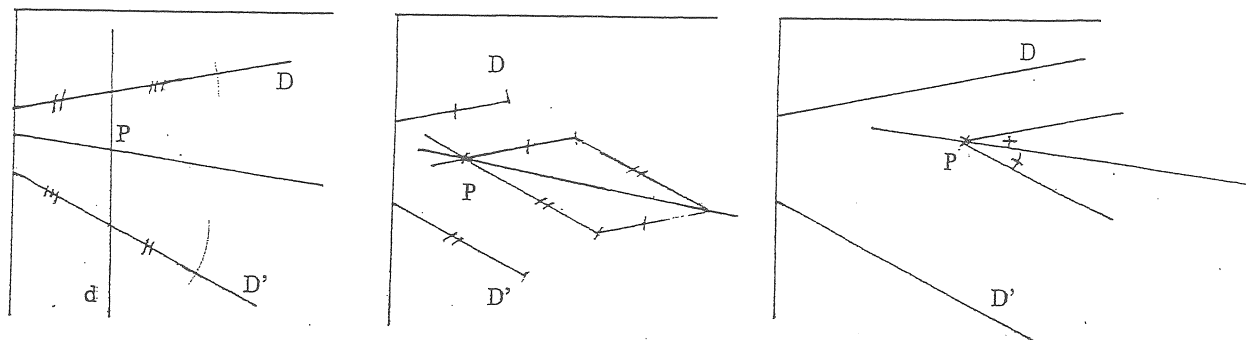


Le groupe abandonne cette conjecture car il se rend compte que la droite d ne passe pas par le milieu de $[AB]$.

Après ces constructions, les élèves vérifient leurs conjectures en prolongeant les droites sur une feuille supplémentaire. Ils se rendent compte que "ça ne marche pas".

Jusqu'à présent je n'ai fait qu'aller de groupe en groupe pour m'informer sur le travail des groupes.

Les constructions deviennent plus élaborées:



A noter qu'ici ce groupe d'élèves faibles s'est servi de la "longueur" des droites D et D' ! ...

Certaines constructions semblent marcher, tout au moins avec la figure que j'ai donnée. Les groupes m'appellent. Je leur demande dans un premier temps de rédiger un programme de construction de leur méthode en vue de sa communication aux autres. Beaucoup de groupe ont de grosses difficultés pour le faire.

A noter que certaines constructions sont très élaborées, je ne les ai pas précisées ici car les groupes eux-mêmes n'arrivaient pas à en retrouver le "fil".

Pour certaines conjectures, il y a des constructions totalement inutiles, par exemple des introductions de points qui ne servent jamais par la suite. Bien que je sache que ces conjectures sont fausses, je propose à ces groupes d'étudier ces redondances, ce travail me paraît riche pour les élèves.

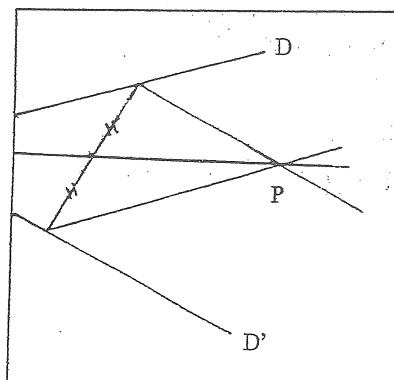
Ensuite je leur demande si leur construction marche quelque soit la position de P ?

A noter qu'un seul groupe part de la figure "finie" et essaie d'étudier une caractéristique de la droite cherchée, mais ils n'ont rien trouvé dans ce sens.

Un groupe pense qu'il suffit d'arriver à construire deux points alignés avec P , "la droite cherchée sera forcément celle qui passe par ces deux points" me disent les élèves.

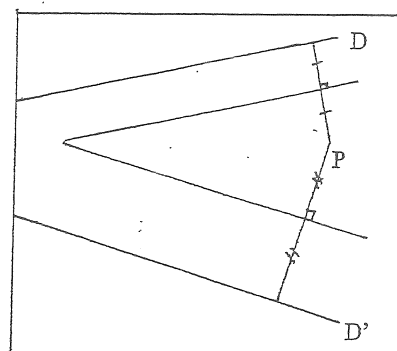
A la fin de l'heure, deux groupes ont trouvé la construction ci-contre et ont démontré qu'elle convenait.

(conjecture 1)



Un autre groupe propose cette construction:
Je propose à ces groupes une nouvelle figure pour laquelle leur construction ne convient pas.

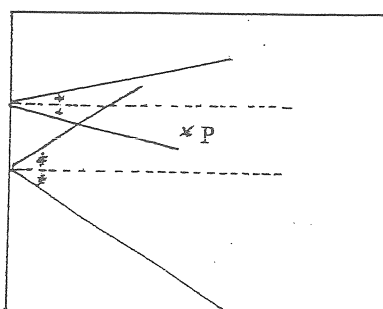
(conjecture 2)



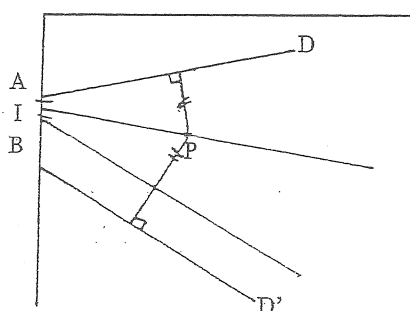
A la fin de l'heure, je propose à la classe, pour la prochaine séance, de continuer pendant une quinzaine de minutes les recherches puis ensuite de faire une mise en commun. Je les invite à conserver leur brouillon et leurs essais. Au début de la séance, des groupes n'ont que des figures et n'ont pas noté de programmes de construction. Ils ont alors de gros problèmes pour rédiger ces programmes.

Au bout d'une vingtaine de minutes, j'invite les groupes qui le désirent à proposer une solution à la classe. Quatre groupes se proposent, je divise le tableau en quatre parties. Les groupes notent simultanément leur programme de construction et l'accompagnent d'une figure. Les autres élèves lisent les programmes, relèvent les fautes d'orthographe ... Mais certains élèves continuent de chercher.

Je n'ai pas noté le texte des constructions mais voici en plus des deux solutions précédentes les deux autres constructions proposées:



(conjecture 3)



I est le milieu de $[AB]$

(conjecture 4)

On discute tout d'abord sur la forme des programmes de construction qui, dans l'ensemble sont compréhensibles.

J'invite alors la classe à débattre sur les deux dernières conjectures: chacun fait des essais à partir des programmes proposés. L'ensemble de la classe est d'accord pour convenir qu'ils ne répondent pas à la question.

Pour la conjecture (1), les essais semblent aller. Mais la classe estime ne pas être convaincue que "ça marche". L'un des auteurs de cette conjecture expose sa démonstration, tout le monde semble alors convaincu.

Pour la conjecture (2), il n'y a pas de démonstration: un des auteurs a essayé de prouver sa construction en expliquant qu'il a rattaché les droites proportionnellement de P , mais personne n'a été convaincu.

Conclusion:

- Ce problème m'apparaît comme très riche dans la mesure où il y a beaucoup de solutions possibles.
- Les élèves ont eu beaucoup de plaisir à chercher ce problème.

SEPTIEME PARTIE

D'AUTRES PROBLEMES OUVERTS EXPERIMENTABLES DANS NOS CLASSES.

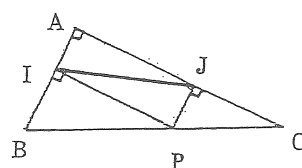
Nous voudrions faire deux remarques par rapport à cette liste.

- * Ces problèmes n'ont pas tous été expérimentés dans les classes. Notre expérience nous montre que certains problèmes sont plus riches que d'autres, dans le sens où ils entraînent une plus grande activité de recherche de la part des élèves. Mais à l'heure actuelle, il nous est difficile de véritablement prévoir la richesse d'un problème avant de l'expérimenter.
- * La rédaction de l'énoncé pour la plupart de ces problèmes doit être reprise et adaptée à vos classes. Cette rédaction, nous l'avons souvent constaté, joue un rôle très important sur l'orientation des recherches des élèves. Il nous semble souvent intéressant quand cela est possible de présenter ces énoncés sous la forme "Rédige une méthode qui permette de ...".

Les énoncés des six premiers problèmes figurent page 6 de ce document.

- 7.- On donne un triangle ABC rectangle en A .
Comment choisir P sur l'hypoténuse pour que
la longueur IJ soit minimum ?

(premier cycle)



- 8.- Quel est le chiffre des unités de 23^{1982} ?

(premier cycle)

- 9.- Soit trois droites concourantes, comment construire un (ou des) triangle(s) dont
elles sont médianes, médiatrices, hauteurs (et bissectrices) ?

(Problème figurant dans "Faire des maths" - Troisième. (A. DELEDICQ).

Editions CEDIC)

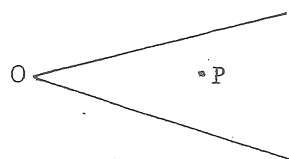
- 10.- Etant donné deux droites D_1 et D_2 et deux points A et B , construire M_1 sur D_1
et M_2 sur D_2 tels que:

$$\overrightarrow{AM_1} + \overrightarrow{AM_2} = \overrightarrow{AB}$$

- 11.- On donne deux demi-droites de même origine
 O et un point P .

Tracer une droite passant par P tel que le
triangle ainsi construit ait une aire minimum.

(classe de quatrième)



12.- Combien de carrés sur cette figure ?

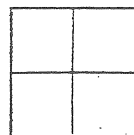
Cinq ! Où sont-ils ?

Combien y a-t-il de carrés sur un tableau

3×3 ? sur un tableau 4×4 ?

Combien de carrés sur un jeu d'échecs ?

(classe de sixième)



13.- En partant du naturel 5 et en utilisant les applications:

$$f : x \longmapsto 2x$$

$$g : x \longmapsto x - 3$$

Quels sont tous les naturels que l'on peut atteindre ?

Comment atteindre un naturel donné en un minimum de coups ?

(D'après P.C. Rosembloom et M. Glaymann)

14.- Peux-tu trouver deux entiers naturels a et b et tel que $2,6\overline{8} = \frac{a}{b}$?

Même question pour $3,5\overline{7}$; $6,3\overline{8}$; $5,4\overline{75}$.

Peux-tu trouver une méthode générale pour résoudre ce genre de problème ?

(à partir de la quatrième)

15.- Le nombre 23 peut s'écrire de plusieurs façons comme la somme d'entiers positifs.

Par exemple $23 = 11 + 5 + 7$.

Trouver parmi ces sommes, celle dont le produit des termes est maximum. Et avec

d'autres nombres ?

(à partir de la sixième)

16.- Soit n un entier naturel non nul; on considère l'ensemble $S_n = \{1, 2, \dots, n\}$.

On désire trouver deux parties A et B de S_n telles que:

* A et B forment une partition de S_n ;

* La somme des éléments de A est égale à la somme des éléments de B .

Déterminer l'ensemble des entiers naturels n pour lesquels cela soit possible.

Voici un exemple:

Pour $n = 7$ cela est possible, en effet $S_7 = \{1, 2, \dots, 7\}$

Prenons $A = \{1, 2, 5, 6\}$; $B = \{3, 4, 7\}$

On a bien $A \cup B = S$; $A \cap B = \emptyset$

et $1 + 2 + 5 + 6 = 3 + 4 + 7$.

(à partir de la cinquième)

17.- Problème du billard.

(à partir de la sixième)

Sur un quadrillage, on trace un rectangle de n carreaux sur p carreaux et on s'impose les règles suivantes:

* le point de départ est au sommet;

* on avance toujours en ligne droite en suivant une diagonale de chaque carré;

* quand on arrive au bord du rectangle, on rebondit à angle droit;

* on s'arrête quand on atteint un sommet du rectangle.

Trouve en fonction de n et p le nombre de carreaux traversés.

- 18.- ABC est un triangle, P et Q étant deux points fixes respectivement sur $[AB]$ et $[AC]$, trouver un point R de $[BC]$ tel que le triangle PQR ait un périmètre minimum.

(Ce problème présente tout particulièrement un intérêt pour les élèves qui ont déjà cherché le problème du "seau d'eau": sont-ils capables de transférer le résultat trouvé pour ce nouveau problème ?).

- 19.- ABC est un triangle et P un point fixe de $[AB]$. Trouver Q et R respectivement sur $[AC]$ et $[BC]$ pour que le triangle PQR ait un périmètre minimum.

- 20.- On dispose de trois disques. Un nombre est inscrit sur les deux faces de chaque disque. En lançant les disques en l'air et en additionnant les nombres obtenus, on a produit les 8 sommes suivantes: 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22. Sachant qu'au cours d'un lancer, on a obtenu (6) (7) (8), peut-on déterminer les nombres inscrits sur l'autre face de chacun des trois disques ?

Chercher les sommes obtenues en numérotant les disques avec d'autres nombres.

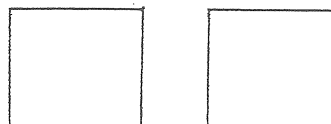
Peut-on produire 8 sommes qui sont des nombres consécutifs ?

Chercher pour deux disques.

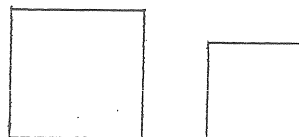
Y a-t-il une manière de numéroter les trois disques de tel sorte que chaque lancer donne des sommes différentes ?

- 21.- Voici deux carrés identiques.

Comment découper ces deux carrés pour en faire un seul ?



Même problème avec deux carrés inégaux.



(à partir du premier cycle)

- 22.- Chercher tous les patrons d'un cube (se munir de ciseaux).

Les patrons doivent être d'un seul morceau.

- 23.- Quel est l'ensemble des entiers qui sont somme d'au moins deux entiers consécutifs ?

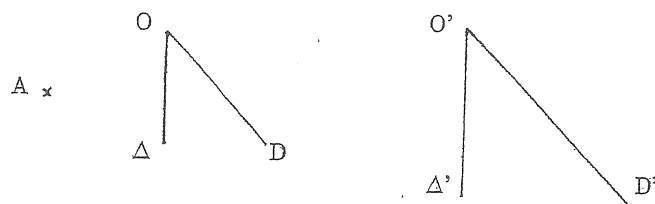
- 24.- Le quotient de deux entiers inférieurs à 1000 est 0.6786389 (à la machine). Quels sont ces deux entiers ?

- 25.- On peut monter un escalier marche par marche ou deux marches par deux marches ou de beaucoup d'autres façons.

De combien de façons peut-on monter un escalier de 13 marches ?

26.- (D, D') et (Δ, Δ') sont deux couples de droites parallèles.

Construire une droite passant par A, sécante à Δ , D , Δ' , D' en E, F, E', F' tels que $EF = E'F'$.



27.- Soit A, B, C, trois points non alignés.

Construire un point X de AC et un point Y différent du point A de AB tel que :

$$AX = XY = YB$$

28.- Combien faut-il écrire de chiffres pour écrire tous les nombres de 1 à N ?

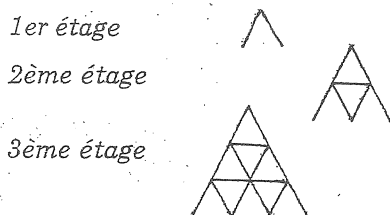
29.- Une médiane d'un triangle partage un triangle en deux triangles de même aire.

Comment découper l'un pour obtenir l'autre ?



30.- Au temps épique des Pionniers (aux USA) alors qu'on disposait d'autant de terres qu'on voulait, mais que, pour tout le reste, on souffrait d'une extrême pénurie, un homme du Middle West possédait d'innombrables hectares de la Prairie, mais seulement 100 mètres de fil de fer. Or, il voulait l'utiliser pour clôturer une parcelle, et se demandait quelle forme lui donner (évidemment pour avoir une parcelle d'aire maximum). (Math-jeunes)

31.- Combien faut-il de cartes pour réaliser un château de cartes de 47 étages ?



(Math-jeunes)

32.- On considère la suite 1 ; 2 ; 2 ; 3 ; 3 ; 3 ; 4 ; 4 ; 4 ; 4 ; 5 ; 5 ; 5 ; 5 ; 5 ; ...
(On a écrit une fois le "1"; deux fois le "2"; ...)
Quelle est le millionième terme de cette suite ?

33.- Soit G un point.

Tracer un triangle dont le centre de gravité est G.

- 34.- On place les entiers dans un tableau rectangulaire suivant la disposition suivante:

			1		
		2	3	4	
	5	6	7	8	9
10	11				

Une ligne est désignée par son premier nombre de gauche.

Une colonne est désignée par son premier nombre situé "en haut".

Quelle est la ligne et la colonne de 795 471 ?

(Rallye de Bretagne)

- 35.- Etant donné trois points A , B et C non alignés du plan, étudier l'ensemble E des points M de ce plan tels que la droite perpendiculaire en M à AM rencontre le segment $[BC]$.

(Rallye de Bretagne)

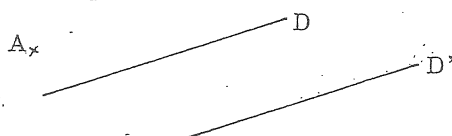
- 36.- On donne n points dans le plan.

Existe-t-il un plus petit disque qui les contient ?

Si oui, comment construire ce disque ?

(Le Petit Archimède)

- 37.- Comment en utilisant uniquement une règle non graduée, tracer la droite parallèle à D (et D') passant par A .

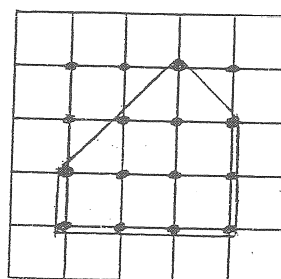


$D // D'$

- 38.- On dispose d'une tablette quadrillée. Des clous sont plantés à chaque nœud du quadrillage. On dispose d'un élastique à l'aide duquel on fait des polygones.

Peut-on prévoir l'aire d'un polygone en fonction du nombre de clous utilisés ?

(à partir de la sixième).



- 39.- Quel est le plus petit nombre total de multiplications, d'additions et de soustractions que l'on doit utiliser pour pouvoir calculer la valeur de tout polynôme $P(x)$ de degré n pour un réel x donné ?

(à partir de la cinquième)

GRILLE DE RAPPORT D'EXPERIMENTATION DE PROBLEMES OUVERTS

ETABLISSEMENT:

Classe:

Votre établissement est-il classé en ZEP ?

Si ce n'est pas le cas, dans quel milieu socio-culturel vos élèves sont-ils recrutés ?

I - Enoncé

II - Conditions dans lesquelles ce problème a été proposé.

(Nombre de séances, travail en groupe ou individuel, ...).

III - Déroulement de la ou des séances de recherche.

- 1) Réaction des élèves face à l'énoncé.
- 2) Méthodes de recherche utilisées par les élèves (entre autre, quelles difficultés ont-ils rencontrées, quelles questions ont été le plus souvent posées au cours de leurs recherches, ...).
- 3) Conjectures proposées par les élèves.
- 4) Problèmes annexes soulevés et éventuellement résolus par les élèves.
- 5) Résultats trouvés.
- 6) Interventions du professeur.
(Quand ? Comment ? Pourquoi ? A-t-il fallu relancer la motivation de certains groupes ? ...).
- 7) Y a-t-il eu une (ou plusieurs) séance(s) de bilan ? Déroulement.

IV - Conclusion

- 1) Quelles sont les principales notions mathématiques utilisées ?
- 2) La nécessité d'une preuve s'est-elle faite ressentir ?
- 3) La recherche de ces problèmes a-t-elle permis d'introduire des notions mathématiques nouvelles ?
- 4) Remarques particulières.
(Entre autres, "les bons" sont-ils restés "bons", "les faibles" sont-ils restés "faibles" ? Avez-vous une méthode pour évaluer ce genre de travail des élèves ? ...).

