mathématiques modernes et spectacle de la science

AXIOMATIQUE et ENSEIGNEMENT

(Réflexion sur l'enseignement de la géométrie)

par Rudolf BKOUCHE

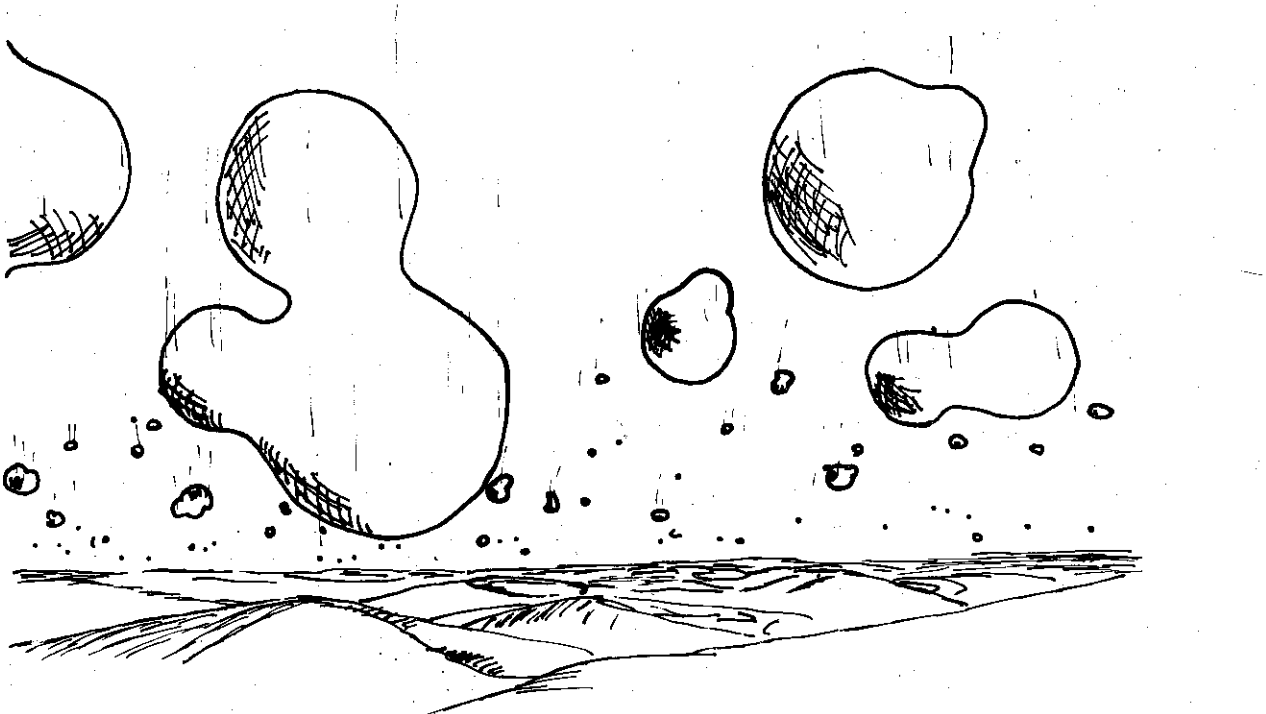
1. SUR LA METHODE AXIOMATIQUE

Il est bien connu que la commission "Lichnérowicz" a choisi la "méthode axiomatique" comme présentation de la géométrie dans l'enseignement secondaire: faut-il en déduire que les membres de la dite commission n'ont rien compris ni à l'enseignement ni à l'axiomatique, ou plutôt qu'ils ont vu l'axiomatique à travers un voile idéologique, l'axiomatique comme organisation du spectacle de la science, et non comme organisation de la connaissance scientifique.

On peut présenter la méthode axiomatique comme une méthode universelle qui permet d'introduire la rigueur d'un raisonnement sans faille, d'éliminer toute intuition et ramener ainsi les mathématiques à un simple langage: langage à la fois gratuit (puisque construit a priori à partir de ses propres règles, indépendant de toute réalité extérieure) et nécessaire (puisque langage privilégié de la science et par conséquent de la compréhension de la réalité). On réussit à obscurcir à la fois les mathématiques qui n'apparaissent plus que comme un langage artificiel et l'utilisation des mathématiques dans les autres sciences (comment un langage artificiel peut-il être un instrument de connaissance de la réalité) ?

La méthode axiomatique n'est pas née de l'esprit "abstrait" de quelques mathématiciens, elle s'est au contraire développée à partir des problèmes rencontrés par les mathématiciens au cours de leurs travaux (le postulat d'Euclide et les géométries non euclidiennes, la mise en forme de l'analyse avec les difficultés liées aux notions de limite et de continuité, les paradoxes de la théorie des ensembles), c'est à travers les difficultés posées par ces problèmes qu'on a ressenti le besoin d'une mise en ordre, la nécessité de séparer explicitement dans le discours mathématiques, concepts non définis et objets définis, axiomes et théorèmes, et c'est pour y répondre qu'on a inventé et développé les langages formalisés.

L'apport essentiel des premiers constructeurs d'axiomatique, et particulièrement de Hilbert, est d'avoir explicité le rôle du langage formalisé, explicité la distinction entre la construction formelle et la signification de cette construction (ou, comme on dit, la distinction entre la syntaxe et la sémantique). En construisant l'axiomatique de la géométrie euclidienne, Hilbert précise qu'il n'est point nécessaire de définir les concepts points, droites, plans, (cette définition n'a aucun sens du point de vue formel) mais qu'il est nécessaire d'expliciter toutes les relations admises "a priori" entre ces concepts, avant de commencer à démontrer des théorèmes et définir de nouveaux objets; on peut changer dans l'axiomatique hilbertienne les mots points, droites, plans en chaises, tables, armoires, sans rien changer au développement de la



théorie, cependant cette formalisation n'a de sens que par rapport à la situation mathématique qu'elle entend organiser, il ne peut être question d'en faire un système isolé, ce ne serait qu'une suite de phrases, correctement structurées peut-être, mais complètement vides de sens.

Il ne peut donc être question de commencer un enseignement de mathématiques par l'axiomatique, quand bien même cette axiomatique serait "simplifiée" pour être "comprise" par des élèves de 12 ans; l'axiomatique n'est pas un jeu gratuit, c'est une méthode et un instrument de connaissance, et comme tout instrument, son existence se justifie par ses objectifs. Instrument puissant d'organisation des connaissances, la méthode axiomatique peut, et même doit, jouer un rôle dans l'enseignement, mais ce rôle est essentiellement un rôle de synthèse et de clarification, il ne peut donc intervenir qu'à la fin; venu trop tôt, avant la pratique effective de la discipline enseignée, ce ne peut être qu'un obstacle supplémentaire. "Avant de pouvoir mettre de l'ordre dans un ensemble de connaissances, il faut déjà s'en être fait une idée informelle ou heuristique" [1], ceci n'exclut pas la pratique effective de méthodes déductives qu'il ne faut pas confondre avec la méthode axiomatique (cf. paragraphe 6).

2. SUR L'ENSEIGNEMENT DE LA GEOMETRIE

Dans un article antérieur sur le programme d'Erlangen [2], j'avais rappelé comment la distinction géométrie affine — géométrie métrique est reliée à la théorie des groupes et ne peut être comprise qu'à l'intérieur du rapport géométrie — théorie des groupes. La distinction a priori telle qu'elle est pratiquée dans l'enseignement actuel de la géométrie est donc tout à fait arbitraire et ne peut donc être comprise par l'élève (voire l'enseignant), quand bien même elle est "justifiée" par des manipulations "concrètes" qui ne sont qu'une illustration du discours mais n'expliquent rien.

En fait, le choix des premiers éléments de géométrie à enseigner n'est pas seulement un problème de mathématiques ou de pédagogie, il est lié à la signification et à la place de la Science (ou des sciences !) dans la Société. Mathématiquement, rien ne permet de privilégier la géométrie affine ou la géométrie métrique, on peut évidemment présenter une axiomatique a priori mais celle-ci n'a aucune justification autre que l'idée aussi fausse que répandue que le mathématicien est libre de ses constructions théoriques (fausse parce que à l'opposée de la pratique des mathématiciens). Si l'on ne peut trancher dans un débat sur le choix affine - métrique par des arguments mathématiques, on ne peut mieux trancher par des arguments pédagogiques, au sens où l'on entend trop souvent la pédagogie comme "l'art d'enseigner", indépendamment de ce que l'on enseigne (et qui en termes plus crus, s'appelle du bourrage de crâne), et qui amène à privilégier "ce qui passe le mieux auprès des élèves", les objectifs de l'enseignement étant oubliés (ou plutôt transformés); il faudrait d'abord savoir ce qui est "facile" pour l'élève, mais ceci est d'abord un problème de pratique sociale, il n'y a pas un "Elève" mais des élèves avec des histoires différentes, et donc des habitudes et des formations différentes, réagissant différemment devant le même enseignement; d'autre part, l'enseignement ne se réduit pas au "facile", à ce qui "passe"; s'il s'agit effectivement de donner des instruments de connaissances théoriques et pratiques, l'obstacle ce n'est pas la difficulté, mais c'est le formel, l'a priori, tout ce qui apparait à l'élève sans signification.

Il est donc nécessaire avant tout choix de préciser les objectifs, objectifs généraux (pourquoi enseigne-t-on les mathématiques) et objectifs à court terme (ce qu'un élève doit savoir à la fin d'un cycle d'études); il est tout aussi nécessaire de tenir compte des connaissances antérieures des élèves (scolaires ou extra-scolaires), même et surtout si celles-ci doivent être soumises à la critique, voire remises en cause.

Nous nous proposons de préciser tout ce qui vient d'être dit à travers l'enseignement de l'algèbre linéaire et son utilisation.

3. L'ENSEIGNEMENT DE L'ALGEBRE LINEAIRE

Ce qui frappe dans l'enseignement de l'algèbre linéaire, c'est d'une part, la facilité avec laquelle l'étudiant manie les définitions et propriétés générales, et d'autre part, la difficulté du même étudiant devant les problèmes où apparaît la linéarité (je pense essentiellement à la géométrie et à l'analyse, on pourrait en dire autant pour la physique ou tout autre domaine).

Il est facile de vérifier qu'une partie E d'un espace vectoriel F est un sous-espace vectoriel, qu'une application d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F est une application linéaire, mais les deux exercices ci-dessus ne sont pas des exercices de mathématiques, ils montrent seulement qu'un langage a été compris et qu'on sait l'utiliser dans des cas simples. La difficulté commence lorsqu'on utilise l'algèbre linéaire comme outil de travail (en géométrie, en analyse, en physique, ...), c'est-à-dire lorsque le concept "linéaire" n'apparaît plus comme une donnée en soi, mais comme exprimant un aspect de la géométrie, de l'analyse ou de la physique. Il y a là un problème profond et qui est encore loin d'être résolu.

Evidemment, il est facile de faire un cours d'algèbre linéaire, les exposés foisonnent, donnant la définition des espaces vectoriels, des applications linéaires et de leurs premières propriétés, l'axiomatique s'écrit aisément, et on se donne bonne conscience à peu de frais avec quelques exemples: géométrie élémentaire, polynome, fonctions numériques, et si on veut paraître plus savant, on peut parler de physique, de chimie, voire de sciences économiques; mais tous ces exemples n'apparaissent que comme illustration du concept (abstrait !) "linéaire". Après un cours d'algèbre linéaire, le concept "linéaire" apparaît à l'étudiant comme un concept de l'algèbre linéaire (ce qui est une tautologie et ne sert à rien), détaché de toute signification extérieure à ce chapitre; le coup des exemples n'est qu'une illustration: on se sert de situations extérieures (géométrie, analyse, etc...) pour exhiber un espace vectoriel ou une application linéaire, mais le rapport réel entre le "linéaire" et les situations extérieures est masqué; dans ces conditions, rien d'étonnant à ce que l'étudiant ne sache pas reconnaître le linéaire là où il apparaît, même s'il sait faire marcher la machine.

Pendant plusieurs années on a ainsi, dès la première année de l'Université, plaqué de l'algèbre linéaire à des étudiants ayant une formation secondaire dite "classique", où l'aspect linéaire était entièrement escamoté, ce qui interdisait toute compréhension du rapport algèbre linéaire - géométrie élémentaire (je ne parle même pas du caractère linéaire de l'analyse où la seule idée d'un espace vectoriel de fonctions semblait relever de la bizarrerie bien connue des mathématiciens). L'introduction de l'algèbre linéaire dans l'Enseignement Secondaire pouvait être un moyen de transformer cette situation en explicitant aussitôt que possible le caractère linéaire apparaissant en géométrie élémentaire, en algèbre (polynomes) ou en analyse (espace de fonctions), ce n'est pas cependant ce qui s'est passé. Sous prétexte que le linéaire est l'aspect unifiant diverses théories et que l'axiomatique (facile à écrire) de l'algèbre linéaire permet le déroulement quasi-automatique d'un certain nombre de théories mathématiques, c'est l'axiomatique de l'algèbre linéaire qu'on a mis en avant. Alors que le caractère linéaire est présenté sous une forme artificielle dans la classe de quatrième (géométrie affine) et complètement oublié en troisième (géométrie métrique), une présentation axiomatique "simple" est donnée en seconde, indépendamment des situations explicites (celles-ci données à titre d'exemples ne sont que des illustrations au sens donné ci-dessus), c'est après-coup seulement qu'on prend la peine de faire de la géométrie; quant au programme de première, c'est essentiellement l'étude des formes quadratiques avec, toujours comme illustration, la géométrie métrique. Il s'agit ici d'un renversement complet, l'accent a été mis essentiellement sur une méthode, isolée de tout objectif, même si certains exemples apparaissent à l'occasion comme illustrations et applications. Dans ces conditions, l'axiomatique de l'algèbre linéaire peut être connue des élèves, elle est inutile parce que isolée, coupée de ses racines (géométriques ou physiques) et, heureusement, oubliée dès que possible.

Ce renversement a cependant marqué les enseignants, de formation pourtant traditionnelle, qui, oubliant leur propre pratique mathématique, voient dans la méthode axiomatique une méthode universelle exclusive de tout autre. C'est ainsi que lorsque j'ai proposé à des enseignants de seconde, de commencer par la géométrie (géométrie plane, vecteurs, produits scalaires) avant de faire un exposé systématique de l'algèbre linéaire, on m'a répondu "C'est impossible, comment peut-on parler de vecteurs du plan avant d'avoir défini ce qu'est un espace vectoriel". Ainsi la place privilégiée accordée aux structures abstraites a pour conséquences l'impossibilité de les mettre en évidence là où elles apparaissent; ceci aboutit à un appauvrissement des mathématiques, ce qu'on appelle "la mathématique" devenant un simple langage qu'on illustre par des exemples plus ou moins nombreux, mais ce langage a perdu toute signification. Ainsi la géométrie de Première n'est qu'une illustration de la théorie des formes quadratiques, les rapports réels distance - forme quadratique, angle - forme bilinéaire ayant été complètement ignoré, puisque la distance est simplement défini en terme de forme quadratique, l'angle en terme de forme bilinéaire. Le programme le dit explicitement [3].

"Les matrices du type $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ avec $a^2 + b^2 = 1$ forment un groupe commutatif: groupe des rotations vectorielles", autrement dit, pour l'élève de Première (et pour l'enseignant !) une rotation, c'est tout simplement une matrice. Bel exemple de confusion créée par un désir de trop grande rigueur ! Et comme me l'a dit un enseignant "En première c'est facile, une fois qu'on a défini la forme bilinéaire, ça va tout seul". Mais qu'est-ce qui va, et où ?

Un enseignement axiomatique de l'algèbre linéaire, coupé de toute pratique extérieure, devient alors un obstacle à la compréhension du concept de linéarité, et à son utilisation en géométrie et en physique. Loin de jouer le rôle de clarification qu'on doit attendre d'elle, l'axiomatique est ainsi un élément de confusion. Il faut donc remettre totalement en cause la conception actuelle de l'enseignement des mathématiques du moins si l'on considère que l'un des objectifs de l'enseignement des mathématiques consiste à donner à l'élève ou à l'étudiant les moyens d'acquérir des connaissances, et non, comme on le fait actuellement, de lui montrer le spectacle des mathématiques (cf. paragraphe 7).

Pour revenir à la géométrie, il ne faut pas oublier que la géométrie est d'abord une science physique, et que c'est le premier exemple (et pendant longtemps ce fut le seul !) d'une théorie physique complètement mathématisé.

4. GEOMETRIE ET PHYSIQUE

A juste titre, les physiciens se plaignent de l'enseignement actuel des mathématiques, mais la difficulté de liaison entre mathématique et physique, qui existe tout autant dans l'enseignement supérieur, n'est pas purement instrumentaliste comme de nombreux physiciens aiment à le dire (à la limite le physicien peut définir l'instrument mathématique dont il a besoin (produit scalaire, champ de vecteurs, potentiel) et admettre des théorèmes (formule de Stockes), ce qui n'est pas du tout manquer à la rigueur mathématique, voire même donner des pseudo-démonstrations qui permettent de comprendre la signification d'un théorème, comme les traditionnelles démonstrations fausses du théorème de Gauss en électrostatique). L'obstacle essentiel, c'est que les objets mathématiques, définis d'une façon purement formelle, sont impropres à représenter autre chose qu'eux-mêmes. Pour en revenir à la géométrie où c'est le plus flagrant, la réduction de la géométrie à un chapitre d'algèbre linéaire la coupe totalement de la réalité physique dont elle est issue, et devient un obstacle à la reconnaissance du caractère linéaire de la géométrie physique. Contrairement à la doctrine officielle de l'enseignement, une distance n'est pas une forme quadratique, une rotation n'est pas une matrice orthogonale et la présentation actuelle est un obstacle à la compréhension par l'élève ou l'étudiant des rapports réels entre objets physiques, objets mathématiques et représentation de ces objets.

On a dit, et Bourbaki en porte une part de responsabilités [4] que la géométrie élémentaire était une science dépassée; il est peut-être nécessaire d'expliciter la signification de cette phrase et de la replacer dans son contexte. En tant que théorie mathématique, la géométrie élémentaire est devenue un chapitre de l'algèbre linéaire, c'est-à-dire que tous les théorèmes usuels de la géométrie élémentaire s'obtiennent par des méthodes d'algèbre linéaire une fois mises en place les données (espace ponctuel euclidien de dimension 2 ou 3 sur le corps des réels); aucun nouveau résultat profond ne peut apparaître et dans ces conditions, le mathématicien, dont l'objectif est moins l'étude des structures que la structuration des objets qu'il étudie, n'a plus grand chose à faire; en ce sens, la géométrie élémentaire est une science achevée. Cependant, ce point de vue est partiel, et lorsqu'il s'agit d'enseignement, peut être la source d'erreurs fondamentales, et ceci pour deux raisons essentielles.

La première raison, extramathématique, c'est que la géométrie élémentaire est aussi la théorie physique de l'espace dans lequel nous vivons et qu'elle est donc nécessaire comme instrument de connaissance de cet espace, on ne peut envisager sans elle un enseignement de la physique et de la chimie (même si ultérieurement cette structure est remise en cause: théories quantiques, relativité); négliger l'enseignement de la géométrie élémentaire, science physique, revient donc à bloquer toute possibilité de connaissance scientifique (connaissance étant pris dans son sens dynamique: l'acte de connaître).

La seconde raison est d'ordre mathématique. Les mathématiques sont une science expérimentale [5] dont le développement, loin d'être gratuit et soumis aux caprices des mathématiciens, se fait à partir des problèmes, problèmes externes (posés par la physique, la chimie, etc...) ou problèmes créés de la dynamique interne (fonction zeta, géométrie algébrique) encore qu'il ne soit pas toujours aisé de distinguer entre causes externes et dynamique interne (équations aux dérivées partielles, représentation des groupes). Il est donc nécessaire que dans l'enseignement des mathématiques cet aspect apparaisse, non sous la forme artificielle de problèmes "intéressants" mais sans signification pour l'élève, mais à partir de la pratique prémathématique de l'élève, ici il s'agit essentiellement de la pratique de l'espace et des formes. La géométrie élémentaire est alors le chemin qui conduit de cette pratique prémathématique aux méthodes axiomatiques rigoureuses, à travers cet instrument essentiel à l'exploration et à la structuration de l'espace physique, qu'est l'algèbre linéaire.

5. L'ALGEBRE LINEAIRE, OUTIL D'EXPLORATION ET DE STRUCTURATION DU REEL

L'algèbre linéaire de la géométrie élémentaire, c'est essentiellement le calcul vectoriel et la théorie des transformations.

Le calcul vectoriel n'est pas l'étude d'un espace vectoriel "abstrait", c'est l'étude des opérations que l'on peut faire dans l'ensemble des vecteurs de l'espace, un vecteur étant défini comme une classe d'équipollence de segments de droite orientés: au sens le plus traditionnel, on dit que deux segments de droites orientés (vecteurs liés dans une terminologie ancienne) sont équipollents s'ils ont même direction, même sens et même longueur. L'ensemble des vecteurs est évidemment muni d'une métrique, et c'est pour étudier les propriétés métriques qu'on introduit le produit scalaire. La structure d'espace vectoriel muni d'une forme bilinéaire symétrique définie positive apparaît ainsi de façon naturelle (et non formelle); on est passé d'objets définis de façon intuitive à des représentations mathématiques sur lesquelles on peut opérer (par le calcul ou le raisonnement déductif).

Dans la théorie des transformations, il s'agit d'abord d'étudier des transformations issues de la pratique prémathématique, et correspondant à des notions physique connues, à savoir les déplacements et les symétries, puis les homothéties et les similitudes; c'est à partir de la représentation vectorielle de ces transformations qu'on peut dégager la notion générale de transformation linéaire. C'est seulement à ce moment qu'on peut, et qu'on doit, mettre en évidence la distinction entre propriétés métriques et propriétés affines de l'espace, prélude à la relation géométrie - théorie des groupes et au programme d'Erlangen. Toute l'algèbre linéaire en dimension 2 et 3 telle qu'elle est développée dans [6] peut être exposée dans ce cadre, bien plus riche que le cadre formel des programmes actuels.

On objectera qu'il y a un cercle vicieux dans la construction de la géométrie élémentaire proposée ci-dessus, la notion de longueur (qui intervient au début) est définie à partir des déplacements (la longueur d'un segment reste invariante dans un déplacement du segment [7]), et d'autre part un déplacement est défini comme une transformation conservant la longueur. En fait, il n'y a aucun cercle vicieux, d'une part la géométrie élémentaire est une théorie physique, c'est-à-dire que les notions de longueur et de déplacement ont leurs significations intuitives et ce qu'il est important d'expliciter c'est la relation entre ces deux notions, d'autre part, cette démarche expérimentale est analogue à celle du programme d'Erlangen, dans lequel la dialectique géométrie-théorie des groupes importe plus que l'antériorité relative de la géométrie par rapport à la théorie des groupes (ou vice-versa). En outre, c'est par une réflexion a postériori sur la difficulté de définition des notions premières de la géométrie, qu'on pourra montrer l'utilité et la nécessité de la méthode axiomatique, en explicitant la construction formelle de la géométrie à partir de l'algèbre linéaire.

Parallèlement à l'enseignement de la géométrie élémentaire, c'est par une pratique affective du linéaire dans les divers domaines où il apparaît (polynomes, dérivées, intégrales, variables aléatoires) qu'on peut arriver à unifier les divers aspects du concept "linéaire" et permettre ainsi la construction axiomatique de l'algèbre linéaire. Réciproquement cette construction axiomatique, utilisant le langage de la géométrie élémentaire et lui donnant une nouvelle signification va permettre une "visualisation" des théories linéaires plus complexes qui apparaissent dans divers domaines des mathématiques [4] . Ainsi apparaît un autre rôle de l'algèbre linéaire, rôle non mathématique au sens strict, mais cependant utile dans la compréhension des phénomènes mathématiques, à savoir un moyen de connaissance intuitive des objets mathématiques (ici ceux qui relèvent du linéaire; pour d'autres objets, non linéaires, ce rôle est joué par la "géométrie" algébrique, analytique, ou différentielle suivant la nature de ces objets). A titre d'exemple, il n'est pas sans intérêt de remarquer, au niveau de la classe terminale, que l'écart quadratique moyen définit un produit scalaire sur l'espace des variables aléatoires et que deux variables aléatoires indépendantes sont orthogonales.

6. METHODE DEDUCTIVE ET METHODE AXIOMATIQUE

Une autre confusion introduite dans la mythologie des mathématiques modernes, c'est la confusion entre méthode axiomatique et méthode déductive, ce qui est une absurdité. La méthode axiomatique est une reconstruction globale, tandis que la méthode déductive permet, dans un contexte bien localisé, d'obtenir de nouvelles propositions à partir de propositions admises et de règles de démonstration.

La méthode déductive est loin d'être propre aux seules mathématiques, la physique et l'enseignement de la physique font largement usage de cette méthode (c'est uniquement mon incompétence qui me limite à la physique, il serait intéressant d'expliciter l'utilisation de la méthode déductive dans d'autres domaines).

Lorsque l'on a explicité les notions physiques (à partir de l'observation et de l'expérience) et les lois expérimentales, c'est la méthode déductive qui permet d'énoncer des théorèmes et de résoudre des problèmes. Un cours de physique n'est pas une liste de résultats empiriques, ce n'est pas non plus une construction axiomatique. Pourtant cette possibilité de reconstruction axiomatique existe, ainsi on sait reconstruire l'électromagnétisme à partir des équations de Maxwell et ce point de vue est utilisé en physique théorique et en physique mathématique, mais il ne viendrait à personne (du moins on peut l'espérer) de dire qu'on peut enseigner l'électromagnétisme en énonçant d'abord les équations de Maxwell (même illustrées par quelques expériences) et qu'ensuite toutes les lois de l'électromagnétisme se déduisent aisément; l'enseignement des équations de Maxwell n'intervient qu'à l'Université devant des étudiants qui ont déjà des connaissances sur l'électromagnétisme, et l'axiomatique vient encore plus tard.

La situation est la même en mathématique, on peut pratiquer la méthode déductive dans un enseignement non axiomatique, le problème étant de bien poser ce que l'on admet et d'expliciter les règles de la démonstration (évidemment cette explication est liée à la pratique de la démonstration, il ne peut être question d'une quelconque théorie de la démonstration). Une des critiques essentielles que l'on pouvait faire à l'enseignement d'avant la réforme était justement cette non explication, le flou des propriétés admises et les pseudo-démonstrations où s'entremêlaient méthode déductive et vérification expérimentale, dont le modèle étaient les fameux cas d'égalité des triangles. Mais le remplacement actuel par une explicitation incompréhensible ne vaut pas mieux; une explicitation incompréhensible parce que sans signification pour celui qui la reçoit n'a aucune raison d'être, c'est là une critique essentielle de l'enseignement des mathématiques post-réforme.

Un des arguments des défenseurs de la réforme, c'est la nécessité de la rigueur et de la précision du langage, ce qui est juste, mais cette nécessité n'est pas a priori; c'est la pratique mathématique (et non l'intervention autoritaire d'un maître ou d'un livre), ce sont les difficultés réelles rencontrées dans cette pratique (et non les difficultés surajoutées d'un langage imposé) qui montre cette nécessité; en ce sens les démonstrations fausses sont quelquefois plus intuitives que celles imposées a priori. Ceci n'est pas un simple problème pédagogique (comment faire passer la rigueur), on se détermine en fonction des objectifs que l'on s'est donné: faut-il faire prendre conscience à l'élève de cette nécessité de rigueur (et du même coup du danger du manque de rigueur) ou bien se contente-t-on de donner le spectacle de la rigueur, de la machinerie mathématique qui tourne bien, en espérant que quelques élèves "doués" auront appris quelque chose, les autres (la majorité) étant dégoûtés ou admirateurs béats (ce qui revient au même).

7. EN GUISE DE CONCLUSION

Il n'est pas question de présenter un quelconque programme. L'objet de cet article est d'abord de dénoncer à travers quelques points précis la conception antiscientifique et dogmatique de l'enseignement actuel.

On a beaucoup parlé d'enfants doués pour les études abstraites et d'enfants plus tournés vers les activités concrètes (et sous-entendu, moins doués que les premiers), la Réforme Haby ne s'est pas privée d'utiliser cette distinction qui convient tout à fait à ses objectifs. A travers toute cette distinction abstrait-concret, on oublie (consciemment ou non !) que l'abstraction n'est pas une donnée a priori mais que c'est un processus: on n'abstrait pas gratuitement, mais parce que c'est un moyen de connaissance et de compréhension de situations bien précises. C'est le processus dialectique d'abstraction et de "concrétisation" qui est le fondement de l'activité scientifique, et en particulier de l'activité mathématique. L'ignorer revient à présenter l'activité scientifique comme une simple accumulation de faits et d'énoncés et à transformer l'enseignement scientifique en le spectacle de ces faits et énoncés. C'est en ce sens qu'au début de cet article je parlais de l'axiomatique (à travers la commission Lichnérowicz) comme l'organisation du spectacle de la Science. A travers l'enseignement actuel, les élèves voient des mathématiques, entendent un discours mathématique rigoureux, mais tout ceci n'a aucune signification et dans ces conditions la majorité d'entre eux n'apprennent rien sinon quelques recettes, ne retiennent rien sinon l'impression d'inaccessibilité de la Science qu'on leur montre. C'est en ce sens que les mathématiques deviennent le nouvel instrument de sélection [8].

C'est pourquoi il ne peut être question de réfléchir sur les possibilités d'amélioration des programmes actuels. Toute réflexion sur l'enseignement des mathématiques doit être d'abord une réflexion sur ses objectifs, objectifs internes (à l'intérieur de l'école) et objectifs externes (à l'extérieur de l'école), c'est-à-dire une réflexion politique.

L'alternative est la suivante: l'enseignement scientifique est-il l'instrument qui permet aux élèves d'acquérir les moyens de connaissances, ou bien est-il l'organisation du spectacle de la Science. Dans la société actuelle, c'est le spectacle qui est à l'ordre du jour, spectacle du même ordre que celui de la vulgarisation scientifique-spectacle décrite par Roqueplo [9], mais qui est beaucoup plus subtil; alors qu'une certaine vulgarisation scientifique se présente ouvertement comme spectacle (cf. les articles habituels de la presse sur l'espace, le cancer, les greffes, etc...), l'Ecole se présente comme l'appareil de transmission des connaissances; l'élimination par l'Ecole de la grande majorité qui n'a plus accès à ses connaissances (qu'on présente par ailleurs comme indispensables) est la forme moderne de l'obscurantisme. L'obscurantisme par l'Ecole, voilà qui peut paraître paradoxal et qui fera grincer bien des dents. C'est pourtant tout à fait normal. En même temps que l'idéologie scientiste exhalte la Science et la Technologie, l'Ecole, à travers un enseignement qui organise le spectacle de la Science tout en la rendant inaccessible à la grande masse, véhicule l'obscurantisme sous ces deux formes extrêmes: l'admiration et l'acceptation de la "Société Technologique" (ce qu'on appelle aussi d'un terme significatif, la "foi" en la Science entretenue par les "miracles" de la Science, comme disent les média), ou le refus et le retour à l'irrationnel; ces deux attitudes ont d'ailleurs le même effet: la maîtrise de la Science et de la Technologie est réservée à la classe dominante dont elle reste une composante essentielle du pouvoir.

L'entreprise de démystification de ce qu'on appelle les mathématiques modernes, sans concession aucune, est d'abord un moyen de lutte contre cet obscurantisme.

[1] Mario Bunge — Philosophie de la physique — Le Seuil.

[2] Rudolf Bkouche — Du programme d'Erlangen au programme de géométrie des Lycées et Collèges. Histoire d'une trahison. IREM de LILLE.

[3] Bulletin Officiel de l'Education Nationale. Arrêté du 19 mars 1970 — Programme de Première.

[4] Nicolas Bourbaki — Histoire des Mathématiques. (Formes quadratiques — Géométrie élémentaire) HERMANN.

[5] Pierre Raymond — Le passage au matérialisme. F. Maspero.

[6] J. Dieudonné — Algèbre linéaire et Géométrie élémentaire — HERMANN.

[7] Bernard Victori — La longueur au CAP — IREM de LILLE.

[8] Pierre Samuel — Mathématiques - Latin - Sélection des élites — in Pourquoi la Mathématique ? Collection 10/18.
Rudolf Bkouche — A propos de l'enseignement des mathématiques modernes in Autocritique de la Science. Le Seuil.

[9] Roqueplo — Le partage du savoir. Le Seuil.