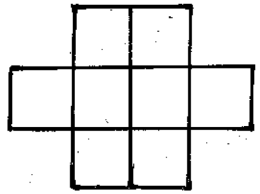
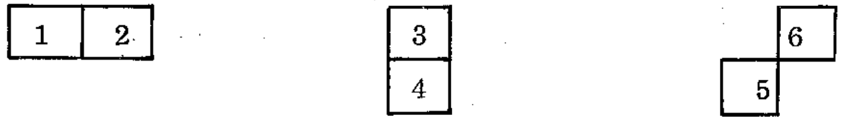
BANQUE DU PROBLEME

La Banque Du Problème, qui avait lancé à Albé une grande souscription nationale, vous ouvre ses coffres ...

I PROBLEMES POUR "PETITS"



- Placer les nombres de 1 à 8 dans les carrés ci-dessus, de manière à ce que deux nombres consécutifs ne soient pas l'un près de l'autre. Autrement dit, aucune des dispositions suivantes n'est permise :



- 7 5 8 1 3 2 8 8

  Quand les signes + et – sont disposés convenablement entre les chiffres, on doit obtenir un total de 100.

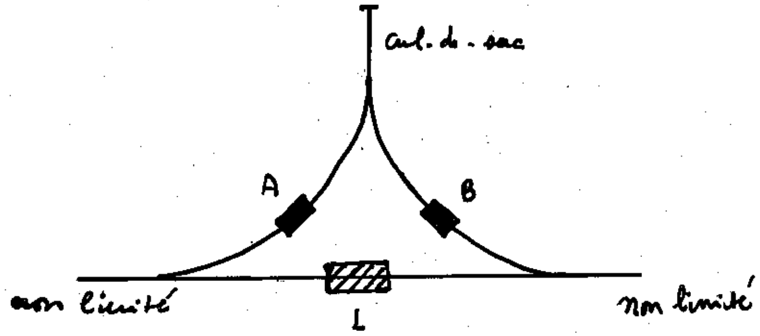
- Une compagnie de location de voitures propose trois formules à ses clients :

  50 francs par jour et 20 centimes au km.
  60 francs par jour et 15 centimes au km.
  80 francs par jour et 10 centimes au km.

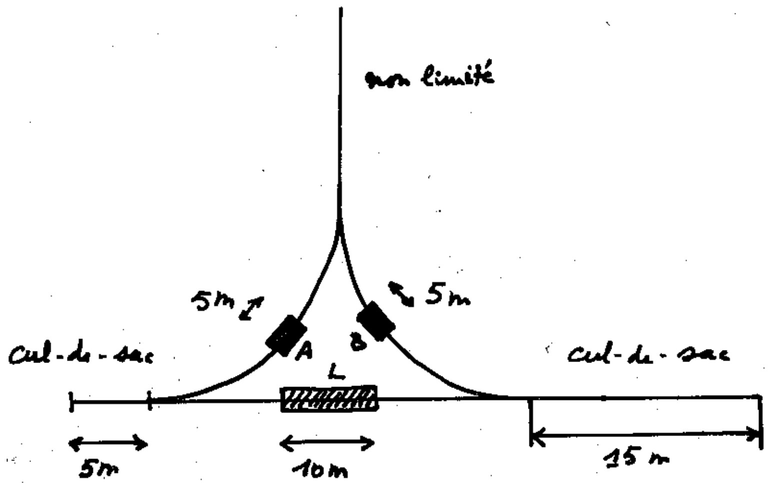
  Quelle est la meilleure formule (suivant les cas) ?

- Un enfant va à la foire faire du tir. Son père lui a payé 5 tirs. S'il fait mouche, il peut tirer 2 coups en plus. L'enfant ayant tiré 17 fois, combien de fois a-t-il fait mouche ?

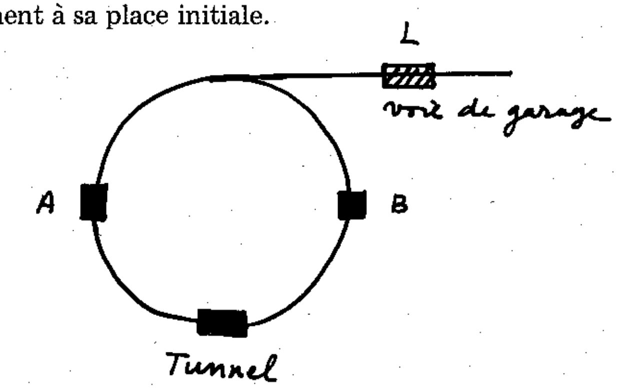
● Trois problèmes de manoeuvres



Le machiniste de la locomotive L a été chargé d'intervertir les wagons A et B. Le cul-de-sac ne peut contenir que la locomotive ou bien un wagon. Comment le conducteur peut-il procéder ?



Trouvez les manoeuvres successives permettant d'échanger les wagons A et B à l'aide de la locomotive L qui doit revenir finalement à sa place initiale.

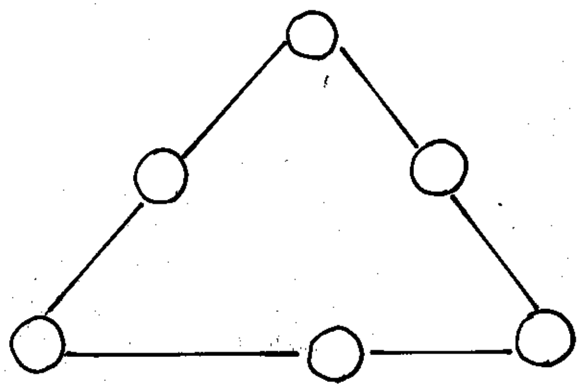


Echangez les wagons A et B à l'aide de la locomotive L qui doit regagner la voie de garage. Les wagons ne peuvent pas passer sous le tunnel. On ne peut pas tourner à gauche en sortant de la voie de garage.

● Une file de soldats de 50 mètres de long avance en ligne droite à vitesse constante. Un petit chien part du dernier soldat à vitesse constante, rattrape le premier et, toujours à la même vitesse, retourne au dernier. Ce dernier soldat a alors parcouru 50 mètres.

Quelle est la distance parcourue par le chien ?

● Placer 1, 2, 3, 4, 5, 6, de manière à ce que la somme sur chaque côté soit la même.



II PROBLEMES POUR "GRANDS"

- Existe-t-il une fonction numérique f définie sur $\mathbf{R}$, satisfaisant à

$$f(x) + f(1-x) = x\ ?$$

(Test d'élimination roumain)

- Construire le graphe de l'ensemble

$$1 \leqslant \big|\,|x+y| - |x-y|\,\big| \leqslant 2$$

(Epreuve de 1er échelon tchèque)

- Démontrer que

$$\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{8}\right)\left(1+\frac{1}{15}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right) < 2$$

(Epreuve de 1er échelon tchèque)

- Etude de l'ensemble des nombres

$$(1-x^n)^m$$

où x est un réel $0 < x < 1$, n, m des entiers naturels.

- Dans un ensemble à n éléments, on considère un système de 2^{n-1} parties, qui ont une intersection commune non vide, trois à trois.
Montrer que toutes ces parties ont un élément commun.

(KBAHT n° 1 - 1971 - p. 30)

- Résoudre l'équation

$$\cos x + \cos 7x + \cos 19x = 3$$

(Test d'élimination de l'équipe britannique)

- Le constructeur de la machine à calculer FADA vient de sortir un ordinateur peu cher qui ne peut réaliser qu'une opération : pour deux nombres a et b, il calcule instantanément, lorsqu'elle existe, l'expression :

$$a * b = 1 - \frac{a}{b}$$

Des clients prétendent qu'un tel ordinateur ne sert pas à grand' chose dans la pratique. Pourtant on peut l'utiliser pour effectuer les 4 opérations.

- Un problème de FRENKEL

Soit E le plan affine à neuf points, d'espace vectoriel sous-jacent $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.
Trouver les coniques non dégénérées différentes ayant même ensemble de points dans E.
Indications : On désigne par P l'espace projectif associé à E. Des coniques sont dites différentes lorsqu'elles diffèrent dans P.

On rappelle que toute conique non dégénérée est unicursale : Ici, il en résulte que, dans P, toute conique non dégénérée a en particulier la propriété de se composer de quatre points (à distance finie ou à l'infini).
L'intérêt de ce problème est d'illustrer la différence entre coniques et classes d'équations correspondantes, différence non apparente dans le plan affine réel.

- LE MORPION SOLITAIRE

Comme au jeu ordinaire de morpion, il s'agit de former des alignements de chaque fois cinq points situés en des noeuds consécutifs d'un quadrillage (horizontalement, verticalement ou en diagonale).
Mais, au jeu solitaire, on ne peut placer un point qu'à la condition de former un tel alignement. La partie s'arrête donc lorsqu'aucun coup ne permet de former d'alignement de cinq.

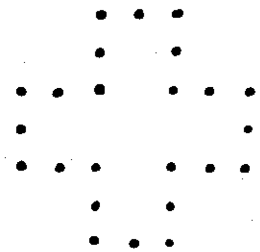


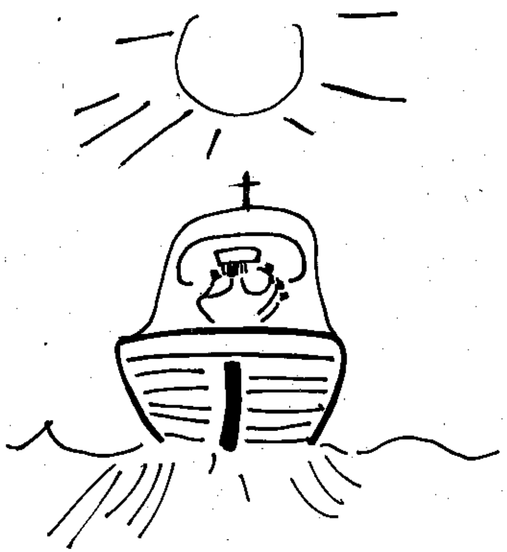
Figure initiale

Au départ, on se fixe un certain nombre de points, par exemple comme sur la figure ci-dessus.
Démontrer que la partie s'arrête forcément au bout d'un nombre fini de coups.

- NAVIGATION A VUE

Un navigateur part le matin au lever du soleil (à 6 h) d'un point A. Il navigue toute la journée à la vitesse de 20 noeuds (1 noeud correspond à 1852 m/h), sans rencontrer d'obstacle, en se dirigeant constamment vers le soleil.

1. A quel point B aboutit le navigateur à la tombée de la nuit (à 18 h.) ?



Aurait-il pu naviguer de manière plus économique (pénurie d'essence oblige ...) pour atteindre B, et comment aurait-il alors dû se diriger ?

2. Pour revenir le lendemain en A, quelle manière de se diriger utilisera le navigateur qui a passé la nuit au mouillage au point B ?

- Dans un hôpital militaire se trouvent des blessés dont une proportion α (resp. β, γ) a perdu un oeil (resp. une oreille, le nez). Trouver une fonction de α, β, γ à valeurs positives, non identiquement nulle, qui minore la proportion de blessés ayant perdu à la fois un oeil, une oreille et le nez.

(Lewis Caroll)

- Deux joueurs A et B jouent au jeu suivant : on donne l'ensemble des nombres $\{1,2, \ldots 1024\}$. Le joueur A raye 512 nombres de la liste, le joueur B en raye 256 parmi les restants, A 128 puis B 64, etc. (toujours la moitié).
Lorsque A joue pour la dernière fois, il reste 4 nombres. Il en raye 2 et reçoit en gain une somme de roubles égale à la différence des nombres restants et payée par B.
Comment doit jouer A (resp. B) pour essayer de gagner le plus (resp. de perdre le moins) ?

(32ème Olympiade fédérale de Moscou
cf. KBAHT n° 1 - 1971 - p. 39)

- Dans un bal, aucun garçon n'a dansé avec toutes les filles, mais chaque fille a dansé avec au moins un garçon.
Démontrer qu'il existe deux couples $g\,f$ et $g'f'$ qui ont dansé ensemble sans que $g\,f'$ et $g'f$ aient dansé ensemble.

(Concours Putnam - 1965 - U.S.A.
cf. American Mathematical Monthly)

- Sur chacun des 99 cartons d'un jeu, on inscrit des entiers strictement compris entre 0 et 99. Ces entiers ne sont pas nécessairement différents. On remarque que la somme des nombres inscrits sur toute partie de ce jeu de cartes n'est jamais divisible par 100. Prouver que ces nombres sont égaux.

(Epreuve de sélection britannique
FIST - 1973)

- On donne 7 segments de longueurs comprises entre 1 et 10. Montrer que l'on peut toujours trouver 3 d'entre eux qui forment un triangle (non aplati).

- On donne dans $\mathbf{Z}^2$ cinq points distincts. Montrer qu'il existe un segment dont les extrémités sont deux de ces points et dont le milieu appartient à $\mathbf{Z}^2$.

(Eliminatoire 1er degré - Olympiades polonaises)

- Dans un carré de côté 1, on dessine une ligne polygonale de longueur supérieure ou égale à 1000. Montrer qu'il existe un segment parallèle à un côté du carré qui rencontre la ligne polygonale en 354 points au moins.

(Olympiades fédérales - Bundeswettbewerb - 1970-1971)

- Soit S l'aire d'un pentagone convexe et Σ l'aire du pentagone dont les sommets sont les milieux du précédent.
Montrer que $\frac{S}{2} \leqslant \Sigma \leqslant \frac{3}{4} S$.

(Variante d'un sujet proposé par KBAHT - Glaeser)

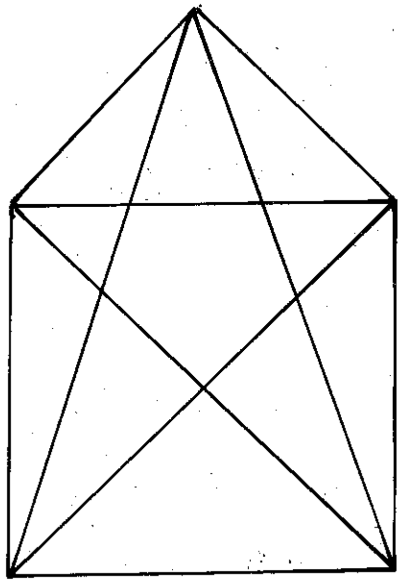
- Soit P_1 un polyèdre convexe à 9 sommets $a_1, a_2, \ldots, a_9$ et soit P_i le polyèdre déduit de P_1 par la translation $a_1 a_i$.
Montrer qu'au moins deux des polyèdres P_i $(i = 1,2,\ldots,9)$ ont un point intérieur commun.

(13ème Olympiade internationale - 1971)

● Si les frontières de 2 rectangles isométriques se coupent en huit points distincts, alors l'aire de l'intersection dépasse la moitié de l'aire de chacun des deux rectangles.

(KBAHT n° 11 - 1970 - Olympiades fédérales)

● Combien y a-t-il de triangles ?



● Le problème de Mikusinsky
Solution de Conway et Croft
Partitionner une sphère de sorte que les classes d'équivalence soient des arcs de grands cercles semi-ouverts isométriques entre eux.

(Proceedings of the Cambridge Philosophical Society
1964 - Tome 60)

● On place un nombre positif ou nul sur chaque case d'un échiquier $m \times n$. On suppose que la somme des termes de toute croix (réunion d'une ligne et d'une colonne) est supérieure ou égale à a. Quelle est la plus petite somme possible de tous les nombres placés sur l'échiquier ?

(Bundeswettbewerb - 1ère ronde - 1971-1972)

Quelle est la limite lorsque n tend vers l'infini, de :

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{\alpha}{n} \\ -\frac{\alpha}{n} & 1 \end{pmatrix}^n \qquad \text{pour } \alpha \text{ réel ?}$$

(Mme Pérot - Strasbourg)

● Etude des images possibles de $\mathbf{R}^2$ par des polynomes à coefficients réels.

(KBAHT)

● Démontrer que si

$$P(x) = a_0 x^7 + a_1 x^6 + \ldots + a_7$$

à coefficients dans **Z** prend les valeurs + 1 ou − 1 en 7 valeurs distinctes entières, alors P(x) est irréductible dans **Z** [x].

(Préolympiades - Mai 1971 - La Havane - Cuba)

● Existe-t-il une ligne polygonale fermée de 1973 (respectivement 1974) côtés telle que chaque côté est coupé par exactement un côté (en un point qui n'est pas un sommet ...) ?

(Préolympiades)

● Peut-on décomposer l'unité en une somme de 1971 inverses d'entiers tous distincts ?

(KBAHT)

● Dans R^3 muni du produit scalaire habituel, peut-on trouver 5 vecteurs (V_i) $1 \leqslant i \leqslant 5$ tels que

$$\forall i \forall j \quad i \neq j \Rightarrow V_i \cdot V_j < 0$$

(Généralisation à R^n avec $n + 2$ vecteurs).

(I.R.E.M. de Nancy)

● Dans R^3 muni du produit scalaire habituel, peut-on trouver 4 vecteurs (V_i) $1 \leqslant i \leqslant 4$ tels que

$\|V_i\| = 1$ et que $V_i \cdot V_j$ soit constant pour tous les couples (i,j) $i \neq j$?

(Généralisation à $\mathbf{R}^n$ avec $n + 1$ vecteurs).

(I.R.E.M. de Nancy)

- **Tour de Hanoï**

  On dispose de 3 piquets sur l'un d'eux sont empilés n disques de diamètres allant en décroissant vers le haut.

  Règle du jeu :
  On peut bouger un disque s'il est en haut d'une pile et on peut le reposer sur un piquet en respectant l'ordre croissant des diamètres.

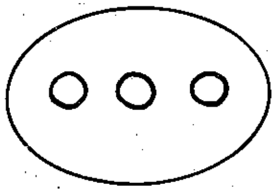
  But :
  Par déplacements successifs empiler les n disques sur un des deux autres piquets.

  Problème :
  Trouver un algorithme *non récursif* et *déterministe* pour résoudre ce problème.

  (I.R.E.M. de Nancy)

- Peut-on tracer cette figure d'un seul coup de crayon ?

  (I.R.E.M. de Rennes)



"Il n'y a que le bon sens qui mène à rien" (E. Renan)

- Jeu de probabilités

  Le jeu se joue à deux personnes. On donne un à un 10 nombres compris entre 0 et 1 aux deux joueurs, ces nombres étant tirés au hasard suivant une loi de probabilité uniforme sur [0,1].
  Chaque joueur doit choisir un de ces dix nombres sans évidemment connaître les suivants et sans connaître le nombre éventuellement choisi par l'autre joueur.
  Le joueur qui gagne est celui qui a choisi le plus grand nombre.
  Quelle doit être la stratégie d'un joueur ?
  Réalisation pratique : la suite des dix nombres peut être donnée par le numéro minéralogique des 10 premières voitures passant sur une route pas trop fréquentée . (9914 QL 54 → 0,9914)).

- Je bois 1/6 d'une tasse de café noir ; je complète avec du lait et je mélange ; je bois alors 1/3 du mélange ; je recomplète avec du lait et enfin je bois le reste. Ai-je bu plus de café que de lait ? (Au départ la tasse était pleine de café).

- Dans une boîte cubique d'arête unité, sont enfermées 2001 mouches. Montrer qu'il existe à tout moment une boule sphérique de rayon $\frac{1}{11}$ où se trouvent 3 mouches.

- Un rameur, qui rame à une vitesse parfaitement constante, remonte une rivière qui coule à une vitesse parfaitement constante. En passant sous un pont, il perd son chapeau. Il s'en aperçoit 1/2 heure plus tard, fait demi-tour et retrouve son chapeau à 1 km en aval du pont. Quelle est la vitesse du courant ?

- On peint les faces d'un cube en bois puis on découpe ce cube en 1000 cubes égaux, à l'aide de traits de scie parallèles aux faces. Combien y a-t-il de petits cubes qui ont au moins une face enduite de peinture ?

- On considère que la terre est une sphère parfaite de circonférence 40 000 km. On entoure l'équateur par une corde de 40 000 001 mètres qui est partout à la même distance du sol. Une puce peut-elle passer entre la terre et la corde ?

- On peint une partie de la surface d'une sphère. L'aire de la partie est inférieure aux 7/15 de l'aire de la sphère. Montrer qu'il existe deux points diamétralement opposés non peints.

- On donne six points du plan dont trois quelconques ne sont pas alignés.

  Chacun des 15 segments les joignant 2 à 2 est colorié en vert ou en rouge.
  Montrer qu'il existe un (deux ?) triangles coloriés de la même couleur parmi les 20 triangles dont les sommets sont les points donnés.

- Soit p un entier naturel. Existe-t-il des fonctions numériques $f_i : R \to R$ et $g_i : R \to R$ pour tout i de 1 à p telles que :

$$(\forall x)(\forall y) \quad |x - y| = \sum_{i=1}^{p} f_i(x)\, g_i(y) \ ?$$

- On casse un spaghetti en 3. Quelle est la probabilité qu'on puisse former un triangle avec les 3 morceaux ?

  (I.R.E.M. de Basse-Normandie)

- Trouver un nombre de 2 chiffres qui est la somme des carrés de ses chiffres.

- Trouver un nombre de 3 chiffres qui est la somme des cubes de ses chiffres.

- On calcule $f : \mathbb{N} - \{0\} \to \mathbb{N} - \{0\}$ pour la formule de récurrence
  $f(1) = 1$
  $f(2k) = f(k)$
  $f(2k + 1) = f(3k + 2)$
  A-t-on $f(n) = 1$?
  Remarque : la solution est inconnue !

- Quelle est la figure formée par un tétraèdre régulier et son symétrique par rapport à son centre de gravité ? Quelle est l'intersection de ces deux tétraèdres ?