HEURISTIQUE ET METHODOLOGIE MATHEMATIQUE

Guy HIRSCH (Bruxelles)

Je voudrais tout d'abord préciser ici le sens que je désire attribuer au terme "méthodologie", sens qui sera assez différent de celui qu'utilise mon collègue Glaeser. Je crois en effet qu'il y a plus qu'une simple nuance entre l'heuristique et la méthodologie, et plus particulièrement la méthodologie mathématique, mais je ne

suis pas volontiers disposé à ramener la méthodologie, comme Glaeser, à un niveau à peine supérieur à celui de l'application de recettes de cuisine. En faveur de mon interprétation de ce terme, je peux invoquer non seulement l'existence d'un enseignement de la méthodologie mathématique, mais encore et surtout le fait que la méthodologie des sciences est mentionnée dans le nom d'une des Unions Internationales fonctionnant sous l'égide de l'U.N.E.S.C.O. (D'une manière plus précise, il s'agit de la *Division de Logique, de Méthodologie et de Philosophie des Sciences* de l'U.I.H.P.S.).

Il est bien clair que la méthodologie ici peut donc être autre chose que l'étude de recettes à appliquer presque machinalement. (Faute d'un autre terme convenable, je proposerais de qualifier de "procédologie" cette application de procédés "tout faits" et je n'en dirai évidemment pas grand'chose). En particulier, la méthodologie mathématique me paraît présenter quelques aspects dignes d'intérêt, que je voudrais souligner dans les lignes qui suivent. Avant toute autre chose, il conviendra peut-être d'indiquer en quoi je la distingue de l'heuristique au sens de Glaeser, et c'est sans doute grâce au texte même de celui-ci que nous le ferons le plus facilement : alors que, comme le fait remarquer Glaeser, le comportement des singes (tel qu'il a par exemple été décrit par Köhler) nous donne d'abondants renseignements sur les démarches heuristiques, le comportement des mathématiciens (et je prends ici ce terme dans un sens fort large) se distingue de celui des singes sous plusieurs aspects. Ce sont donc précisément ces aspects, qui ne se retrouvent pas facilement dans l'observation des chimpanzés, que je voudrais souligner ici, en en tirant aussi quelques conclusions.

A côté de ces règles générales que nous trouverons dans le comportement des mathématiciens, nous constatons aussi que la conception des mathématiques et de leurs méthodes a évolué au cours du temps (ainsi qu'en atteste par exemple l'exclamation, qui a eu un certain retentissement, d'un grand mathématicien contemporain : "A bas Euclide !"), ce qui nous montre qu'un mathématicien qui a joui pendant plusieurs siècles d'une autorité presque absolue peut à un moment donné être contesté. Cette remarque nous incite donc à examiner aussi les enseignements apportés par l'histoire des mathématiques ; cette histoire, bien entendu, devant

en particulier nous montrer comment et aussi pourquoi des points de vue nouveaux s'introduisent en mathématique.

A mes yeux, d'ailleurs, l'étude de l'histoire des mathématiques et celle de la méthodologie mathématique sont étroitement liées. Il est certes possible, mais pas très intéressant (même si c'est malheureusement ce que nous apportent, pour les deux derniers siècles au moins, la plupart des ouvrages consacrés à l'histoire des mathématiques (1)), de faire une histoire des mathématiques où les aspects biographiques, voire même anecdotiques, l'emportent de loin sur la considération de l'évolution des méthodes et des conceptions des mathématiques ; mais renoncer à examiner cette évolution, en la replaçant dans le cadre historique qui l'explique, c'est amputer la méthodologie mathématique d'une partie essentielle de sa substance.

S'il est sans doute oiseux ou téméraire de prétendre définir la mathématique, je voudrais cependant, et dans la mesure où c'est nécessaire pour mieux préciser notre objet, essayer de décrire ce que nous entendrons par là. Rappelons tout d'abord que la mathématique est une activité mentale destinée à apporter une réponse à une question (celle-ci pouvant trouver son origine dans la vie quotidienne — calcul d'une somme à payer, par exemple —, dans la technique — étude de la résistance d'un pont, entre autres — ou enfin dans la mathématique elle-même : la conjecture de Riemann est-elle démontrable ?). Je dirai alors qu'il y a *traitement mathématique* d'information lorsque de l'information (provenant en général de l'extérieur, mais pas nécessairement) est traitée de manière efficace (c'est-à-dire en nous rapprochant d'une réponse aux questions évoquées ci-dessus, les réponses ainsi obtenues n'étant ni contradictoires ni vides de sens) par des processus mentaux qui dépassent le simple bon sens et qui ont une portée plus générale que ce qui est requis pour donner la réponse à la question originale. (Dans la plupart des sciences utilisant les mathématiques, ce processus n'est en général pas clairement

(1) Parmi les quelques rares exceptions notables, il faut citer, évidemment l'*Histoire des Mathématiques* de BOURBAKI, qui ne couvre cependant qu'une partie des mathématiques et dont, de plus, les différents chapitres ne s'adressent pas toujours à une même classe de lecteurs. Un autre ouvrage conçu du point de vue du mathématicien est celui de Morris KLINE, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times* (New-York 1972) qui n'est cependant pas exempt de lacunes ou de défauts pour ce qui concerne les développements des cent dernières années ; le lecteur désireux d'en savoir davantage à ce sujet pourra consulter le compte rendu publié dans le Bulletin de la Société Mathématique de Belgique, 26 (1974), p. 287-298.

dissocié de l'apport extérieur d'information, et des connaissances théoriques de physique, de chimie, de physiologie, etc. sont invoquées au milieu de développements mathématiques ; bien entendu, il serait possible de rassembler au départ ces connaissances techniques, et de les séparer ainsi du traitement mathématique, mais les utilisateurs des mathématiques n'ont guère de raisons de procéder ainsi, dans la plupart des cas, puisque ce sont toujours les interprétations dans leur propre science qui les intéressent tandis que la mise en oeuvre de méthodes mathématiques leur apparaît plutôt comme un mal nécessaire que comme un objet de réflexion).

Je crois que la mathématique va bientôt s'étendre à des domaines qui lui ont échappé jusqu'à présent, et je désire pour cette raison en donner une description qui couvrira davantage que ce qui est déjà reconnu comme mathématique. Au sens large que je souhaite lui donner ici, la mathématique sera la science qui a pour objet le "traitement mathématique de l'information", et en particulier l'élaboration des méthodes nécessaires pour ce traitement ainsi que la réflexion sur ces méthodes elles-mêmes.

Cette définition a un caractère assez relatif et subjectif, puisque les limites du simple bon sens dépendent des individus et de leur niveau de culture ; mais il ne me paraît pas incorrect d'appeler mathématiques certaines démarches de l'enfant ou de l'homme primitif qui pour un civilisé adulte ressortissent au simple bon sens. D'autre part, en exigeant que la méthode mathématique soit plus générale que ne le demande le problème immédiat, nous excluons des problèmes parfois ardues mais particuliers, comme les problèmes de jeux d'échecs. Observons enfin, car ce n'est pas sans intérêt du point de vue méthodologique, qu'un langage abstrait n'est pas du tout indispensable, et que certains problèmes (combinatoires, par exemple) peuvent être traités par des méthodes qui ont les caractères essentiels des mathématiques, même si on accepte de s'exprimer dans un langage concret.

Un exemple très simple permet d'illustrer ce qui vient d'être dit : l'introduction des nombres abstraits est sans doute, historiquement, la première mise en oeuvre d'un traitement mathématique, car la notion de nombre "abstrait" et sa manipulation n'étaient certainement pas à la portée du simple bon sens de l'homme primitif, l'emploi des nombres (par le calcul arithmétique

élémentaire) donnait la réponse à des questions (sans qu'il fût nécessaire de compter des objets) et enfin la méthode était générale, puisque les calculs s'appliqueraient à un très grand nombre de situations et d'objets qui n'avaient même pas été imaginés lors de la création de la méthode.

C'est probablement par leur caractère de généralité que les méthodes mathématiques se distinguent le plus nettement de l'heuristique proprement dite. S'il est vrai que le comportement des singes doit être une révélation pour les démarches heuristiques, il convient de remarquer que, lorsque le singe aura réussi, grâce à son ingéniosité, à s'emparer de la banane qui se trouvait initialement hors de sa portée, il se contentera de manger la banane ainsi acquise. Placé dans une situation analogue, le mathématicien, avant de manger sa banane, réfléchira au problème qu'il vient de résoudre et aux méthodes qu'il a mises en jeu, en s'efforçant de voir comment il aurait pu les adapter à des données différentes.

[Bien entendu, lorsque nous parlons ici du mathématicien, nous entendons décrire de cette façon une tournure d'esprit qui, loin d'être exclusivement celle du mathématicien professionnel, se trouve à des degrés divers chez tous les hommes, mais est sans doute particulièrement mise en évidence chez les mathématiciens. Et il n'est peut-être pas téméraire d'affirmer que si le singe, et même le primate, doit encore toujours se contenter de manger les bananes tandis que l'homme peut (entre autres choses) les produire, c'est précisément parce que l'esprit plus mathématique de l'*homo sapiens*, plutôt que de manger les bananes après les avoir obtenues, préférerait parfois réfléchir au sujet de ces bananes et de quelques autres problèmes analogues ...]

On a proposé de donner une description cursive de l'heuristique en disant qu'on a fait de l'heuristique quand on dit "Eureka !" (et je proposerais de caractériser la "procédologie" ou méthodologie au sens de Glaeser en disant que quand on en a fait on soupire bruyamment "Ouf !"). Pour la méthodologie, au sens où je l'entends ici, on peut dire que ses adeptes s'exclament "Hé, hé !" lorsqu'ils entreprennent de réfléchir aux manières de résoudre le problème qu'ils considèrent.

Il n'est point besoin d'aller chercher bien loin des exemples tout à fait typiques de ce comportement de "méthodologie mathématique"; nous en avons vu ici même au cours de ce Colloque,

lorsque la description des problèmes que les chercheurs de l'I.R.E.M. de Montpellier avaient posés à leurs "cobayes" a été accueillie par des questions et suggestions concernant des propositions de généralisations dans diverses directions ! J'en ai rencontré récemment un remarquable exemple historique (cité et discuté par A. Koyré) (2) chez Descartes. Beeckman avait compris l'aspect physique du problème de la chute des corps, mais ses connaissances mathématiques ne lui permettaient pas d'en formuler la loi : c'est pourquoi il demanda l'aide de Descartes pour calculer l'espace parcouru ; Descartes lui fournit la solution, mais, en même temps, et sans que Beeckman (qui ne s'intéressait qu'au problème physique) y ait fait la moindre allusion, Descartes donna aussi la loi (s'exprimant en fonction du cube au lieu du carré) correspondant au cas où la force attractive croîtrait proportionnellement au temps. Nous avons visiblement ici un exemple de la tendance des mathématiciens à placer leur problème dans le cadre d'une méthode générale (chez Descartes, ici, une attraction pouvant dépendre du temps au lieu d'être constante). Ces entretiens Beeckman-Descartes présentent d'ailleurs un intérêt particulier à cause des erreurs qu'ils contiennent de part et d'autre, mais c'est là une autre histoire qui ne nous concerne pas ici.

Ce souci de généralité prend en mathématiques une forme particulièrement remarquable et féconde, sur laquelle on n'a pas suffisamment attiré l'attention. En présence de questions difficiles ou même simplement lorsque des résultats et des méthodes se présentent avec des aspects plutôt disparates, le mathématicien va se poser des problèmes nouveaux qui n'apparaissent pas comme des prolongements logiques des questions initiales ; il introduira ce qu'on pourrait appeler une dimension de plus, traitant maintenant des problèmes d'une autre nature que ceux qu'il considérait d'abord, faisant voir ceux-ci en quelque sorte du dehors et donnant alors, par une certaine particularisation, les réponses aux questions initiales. De ce processus, qui se manifeste même à petite échelle dans les réflexions de chaque chercheur aux prises avec quelque problème, on peut donner de nombreux exemples empruntés à l'histoire des mathématiques ; j'en citerai quelques-uns, pour leur importance historique, méthodologique ou pratique.

(2) *Etudes Galiléennes*, vol. II. *La loi de la chute des corps. Descartes et Galilée* (Paris, 1939). Voir pages 99 à 106.

Jusqu'au premier tiers du 19^e siècle, les algébristes s'occupaient de la détermination des racines d'équations données, ou encore, et notamment lorsque cela s'avérait trop difficile, de l'approximation de ces racines (avec, par exemple, le nombre des racines positives, etc.). Il s'agissait toujours de problèmes concernant un individu mathématique bien déterminé (ici une équation donnée). Avec Galois, le point de vue devient maintenant différent, puisque, en étudiant les équations dont la solution s'exprime au moyen de radicaux, on apporte des relations entre des propriétés de classes d'équations et non plus des équations individuelles. La théorie des équations se trouve ainsi placée dans une lumière nouvelle, mais en même temps, la mathématique elle-même s'enrichit, avec la notion de groupe introduite par Galois, d'un premier exemple de ces structures algébriques dont le rôle allait devenir de plus en plus grand dans la mathématique moderne.

Cette même théorie des groupes intervient aussi dans le deuxième exemple que je désire évoquer ici : par son *Programme d'Erlangen*, Felix Klein proposait de substituer à la considération des figures de la géométrie classique l'étude des propriétés qui sont invariantes pour certains groupes de transformations ; ici encore nous voyons substituer à des êtres individuels (les figures de la géométrie d'Euclide) l'étude des relations entre des classes de propriétés. Ce point de vue nouveau, dont le germe se trouve peut-être déjà dans les recherches de Möbius (qui était bien empêché de l'exprimer de façon satisfaisante, puisqu'il ne disposait pas des notions de groupe et de sous-groupe, qui sont à la base de cette hiérarchie des géométries), allait déborder du cadre de la géométrie qui lui avait donné naissance et conduisit notamment à la théorie des espaces homogènes, dans lesquels la notion d'espace n'apparaît qu'après celle des groupes eux-mêmes.

Enfin, le dernier exemple est peut-être le plus intéressant par toutes ses implications méthodologiques, que je ne peux évidemment qu'effleurer ici : je veux parler de la théorie des fonctions généralisées ou *distributions*. On y rencontre à la fois des exemples de notions inadmissibles pour les mathématiques établies, mais utilisées avec profit et efficacité (par les physiciens : voir la "fonction" δ de Dirac !), l'abandon de certaines propriétés des fonctions (celle de *valeur* en chaque point) au profit d'une propriété (une valeur, ou produit scalaire, ou intégrale, sur des fonctions appartenant à un ensemble convenablement choisi) qui permettent

par exemple d'attribuer une dérivée (elle-même, en général, une distribution) à toute fonction généralisée et rendent superflues tout un ensemble de conditions qui devaient être vérifiées a posteriori lors de la résolution d'équations différentielles ou aux dérivées partielles.

Dans toute l'évolution de la mathématique, nous voyons comment ces notions nouvelles, introduites pour l'étude de problèmes déjà posés mais ayant une portée beaucoup plus grande, débouchent à leur tour sur de nouveaux problèmes, et je voudrais citer ici quelques lignes de MORDELL (3) qui décrivent clairement cette situation : The solution of a problem frequently requires new ideas and new methods. The generalization it suggests, its consideration from a different point of view or its rephrasing may lead to a new problem of far greater significance than the original one which may turn out to be only a very special case of a general theorem. Sometimes it seems almost incredible what striking and far-reaching fundamental developments have arisen in directions which seem very remote indeed from the problem from which they arose.

Assez souvent, comme le montrent certains des exemples cités, et c'est là une des caractéristiques des méthodes mathématiques, cette généralisation se présente comme un changement complet de point de vue, et les questions que l'on étudiait se présentent alors, non pas comme de simples cas particuliers d'un problème général, mais bien plutôt comme une des facettes d'un problème d'un type tout différent. Cet aspect fort remarquable n'a cependant guère retenu l'attention de la plupart des observateurs qui ont voulu étudier la psychologie de l'invention chez le mathématicien. On en trouve la preuve dans l'emploi fort généralisé de l'image du labyrinthe dans leurs descriptions, et dans l'usage de termes comme trajet, cheminement ou carrefour. Mais l'histoire des mathématiques montre que le mathématicien peut déjouer les prévisions de celui qui a bâti le labyrinthe ou de ceux qui ont pu en repérer les carrefours, car, comme Icare (mais plus prudent ou plus raisonnable que lui, car il se garde bien de s'élever à des hauteurs inconsidérées) il s'échappera du labyrinthe en empruntant une dimension nouvelle.

(3) Some aspects of Davenport's work by L.J. MORDELL, *Acta Arithmetica*, XVIII (1971).

Je dois concéder cependant que ces retournements de la situation, qui rendent impossible de prévoir l'évolution de la mathématique, ne ressortissent sans doute pas à ce qu'on peut appeler l'heuristique au sens restreint, mais seulement à ce que j'ai décrit ici comme méthodologie mathématique. L'heuristique, au sens qu'on donne le plus souvent à ce mot, et particulièrement lorsqu'il s'agit de l'heuristique descriptive, s'attache de préférence à la résolution de problèmes bien précis, situés, fût-ce de façon plus ou moins tacite, dans le cadre d'un ensemble de problèmes et de méthodes déjà assez bien déterminés. Le temps limité empêchera le plus souvent le sujet de faire déboucher le problème posé sur ces thèmes nouveaux et imprévus qui sont justement, comme nous l'avons fait remarquer, à l'origine des progrès les plus féconds et les plus remarquables de la mathématique. On peut dire que l'heuristique au sens strict concerne l'aspect local ou tactique de la recherche mathématique, tandis que la méthodologie est plutôt comparable à une stratégie, à caractère global, pour laquelle l'arsenal des moyens à mettre en oeuvre est en principe illimité. Si l'on veut établir une hiérarchie entre ces diverses façons de comprendre l'activité de recherche mathématique, l'échelon le plus bas sera occupé par la "procédologie", ou méthodologie au sens que lui donne Glaeser, au-dessus de laquelle se placera l'heuristique proprement dite, tandis que la méthodologie, comprenant les précédentes comme cas particuliers ou comme aspects momentanés, prendra la position supérieure.

A ce niveau aussi s'estompera quelque peu la distinction entre heuristique normative et heuristique descriptive car, dans une recherche d'une certaine durée, l'heuristique descriptive débouche directement sur une heuristique normative, puisqu'elle correspond à une recherche qui progresse et dont les étapes méritent donc d'être retenues.

Cela nous autorise à mentionner ici quelques remarques qui peuvent être ajoutées aux principes énoncés par POLYA dans divers livres et particulièrement dans "How to solve it" (Princeton, 1946). Il y a tout d'abord dans les notations mathématiques et dans l'expression mathématique correcte ce qu'on pourrait appeler, en s'inspirant du titre d'un livre de Georges Bachelard (4), "la valeur inductive des mathématiques". Par exemple, en essayant de démontrer un théorème conjecturé, on pourrait constater que

(4) *La valeur inductive de la Relativité*, Paris 1929.

l'énoncé en question ne se laisse pas mettre convenablement sous une forme intrinsèque, ou symétrique, ou homogène, ce qui obligera à modifier l'énoncé hypothétique pour le remplacer par une version correcte du théorème et, en même temps, apportera souvent quelque indication conduisant à sa démonstration. Il ne faut cependant pas perdre de vue que cette formulation rigoureuse et précise peut aussi avoir pour effet de bloquer l'intuition et de rendre ainsi beaucoup plus malaisée la démarche de la pensée. Je veux en donner ici un exemple simple qui pourra d'ailleurs intéresser, par sa nature même, les géomètres et ceux qui enseignent la géométrie. Lorsqu'on donne un système d'axiomes pour une géométrie projective (ou affine) "rudimentaire" (c'est-à-dire sans les axiomes de Desargues ou de Pappus-Pascal), mais reposant uniquement sur les axiomes d'incidence des droites et des points, ce système est presque toujours non auto-dual, parce qu'on exige l'existence de quatre points dont trois quelconques ne sont pas colinéaires, tandis que l'exigence analogue concernant des droites non-concourantes n'est pas formulée. (Si on l'ajoutait au système d'axiomes, celui-ci deviendrait redondant parce que la proposition concernant les droites est une conséquence de celle qui concerne les points). On peut cependant donner un système d'axiomes complètement auto-dual (5), et on peut en énoncer l'axiome-clef sous la forme générale suivante : "Il existe deux éléments de première espèce et deux éléments de seconde espèce tels que les éléments de première espèce et les éléments de deuxième espèce ne sont pas incidents, et que l'élément de première espèce incident aux deux éléments de seconde espèce est incident à l'élément de seconde espèce incident aux deux éléments de première espèce ...". En acceptant de renoncer aux termes généraux de relation d'incidence et d'éléments de première ou de seconde espèce, et en parlant de points d'intersection et de droites passant par des points, c'est-à-dire en utilisant un langage en partie dépouillé de la grande symétrie qui existe entre points et droites, le lecteur verra plus facilement ce que l'axiome postule ... Pour que sa recherche soit féconde, le mathématicien doit donc maintenir un constant équilibre entre une vision plus ou moins intuitive, facile à mémoriser, à manier et à exploiter, mais souvent incomplète, ou insuffisamment rigoureuse, d'une part, et de l'autre une expression

(5) On le trouve dans *A Survey of Geometry*, vol. 1 (Boston 1969) par Howard EVES. Il y est énoncé sous une forme plus intuitive que celle qui est donnée, à dessein, ci-dessus.

précise et mathématiquement irréprochable. C'est peut-être là d'ailleurs ce qui caractérise les meilleurs mathématiciens, qui sont capables d'effectuer à tout moment ces aller-retour entre une image plus ou moins floue qui sert de support familier à leur activité et les exigences rigoureuses entraînées par les définitions mathématiques qui empêchent la pensée de s'égarer sur des voies illusives.

La nécessité ou la possibilité de maintenir la pensée fermement dans une voie déterminée peut parfois, à elle seule, permettre de découvrir la solution d'un problème : les difficultés que rencontrent les non-initiés sont seulement la conséquence de démarches mal assurées, qui défont, en partie du moins, ce qui avait déjà été fait. Fort instructif à ce point de vue est le vieux problème du loup, de la chèvre et du chou : il suffit de savoir qu'une solution existe et de se rappeler à chaque pas que l'objectif souhaité est la traversée dans un sens déterminé et qu'il ne faut pas revenir à un état déjà obtenu antérieurement ; alors (modulo l'évidente symétrie entre le chou et le loup), la solution s'obtient de façon automatique. Des exemples analogues sont fournis par les problèmes de mesure d'une certaine quantité de liquide au moyen de cruches dont la capacité est connue : leur solution, pour ceux qui ignorent la théorie des congruences arithmétiques, est presque toujours marquée par des retours en arrière qui ramènent à une situation qu'on avait déjà rencontrée.

Ces remarques débouchent sur un problème assez général, dont la solution n'est pas encore à notre portée, à mon avis : c'est celui de la progression de l'information au cours d'une recherche ou d'une démonstration mathématique. Il exige évidemment, au préalable, une définition convenable de la quantité d'information, applicable aux mathématiques, et dont nous ne disposons pas encore aujourd'hui (6). La théorie de l'information, à laquelle on doit un certain nombre de résultats intéressants, a été édifiée par des ingénieurs télégraphistes pour qui les messages à transmettre étaient évidemment exprimés dans un langage précis et bien connu ; le problème de l'origine de cette information ne les concernait pas, et la théorie classique est beaucoup trop rigide

(6) C'est ce que reconnaît par exemple Léon Brillouin qui, après avoir estimé d'abord que le contenu d'information de la mathématique devait être nul ou infini, écrivait plus tard (*Scientific Uncertainty and Information*, New-York 1964) "the whole problem of an information theory applicable to pure mathematics remains wide open".

pour se plier à l'étude d'information qui n'est pas encore présentée dans un langage précis.

Un progrès dans ce domaine permettra vraisemblablement un traitement mathématique efficace de quelques parties des sciences dites "humaines", psychologie, sociologie ou même biologie dont les lois, quand elles peuvent être appelées ainsi, ont tout au plus un caractère vague ou fragmentaire. (C'est évidemment se leurrer que de compter sur les méthodes statistiques pour fournir des réponses à des questions qu'on est incapable de formuler). Une description adéquate, et suffisamment souple, de l'information, permettant d'exprimer notamment les processus qui entrent en jeu dans les résumés et les analogies, devrait expliquer par exemple le fonctionnement de la mémoire, de la reconnaissance des formes et des structures, voir même de la constitution d'organes et de l'évolution chez les êtres vivants.

Ce n'est pas ici le lieu de développer davantage cette thèse, mais il est permis d'espérer que les prochaines décennies verront s'étendre de façon notable le domaine accessible à la mathématisation. D'une part, presque toutes les disciplines scientifiques et leurs applications exigent aujourd'hui une certaine formation mathématique. (Que celle-ci soit le plus souvent dirigée vers l'usage de l'analyse statistique, qui n'a sans doute qu'un rôle extrêmement modeste à jouer dans la mathématisation des sciences, n'est heureusement pas très important ici, car l'accès aux méthodes statistiques présuppose, en principe, une certaine culture mathématique qui devrait donc progressivement toucher un nombre de plus en plus grand de scientifiques.) D'autre part, les mathématiques dites "modernes" se caractérisent (lorsqu'elles sont enseignées convenablement, bien entendu) par une réflexion sur les propriétés et sur les raisons d'être des structures et des théories mathématiques. Ici encore, il n'est pas déraisonnable d'espérer que de bons esprits, convenablement entraînés à cette gymnastique intellectuelle, seront capables de reconnaître quelques structures sous-jacentes à leurs préoccupations habituelles et (éventuellement avec l'aide de collègues mathématiciens) d'en décrire les propriétés essentielles nécessaires à une étude mathématique.

Je voudrais ici essayer de dissiper un préjugé assez répandu, même chez des mathématiciens professionnels, qui pensent qu'un élargissement du domaine mathématisable (comme je l'ai écrit au début de cet article, j'entends par là l'utilisation de techniques à la

fois abstraites et générales) ne peut se faire que par une complication croissante des théories mathématiques. Or, l'histoire des mathématiques nous fournit un remarquable exemple de reconnaissance d'un type de structure, et en même temps de mathématisation de vastes domaines de la science, obtenus simplement par la combinaison judicieuse de quelques idées fort simples. Il s'agit de la notion de fonction, qui a atteint son plein développement (pour ce qui nous concerne ici) à la fin du 17^{ème} siècle, avec Newton et Leibniz. (Qu'il ait fallu attendre Dirichlet, au milieu du 19^{ème} siècle, pour obtenir une définition tout à fait satisfaisante pour les mathématiciens est une autre histoire, qui ressortit à l'histoire des mathématiques proprement dites.)

Il est bien connu que la mathématique grecque (à une exception près, chez Archimède, tout à la fin de l'époque classique) a un caractère statique (peut-être dû à l'influence inhibante exercée par les paradoxes de Zénon et la philosophie éléate ?). Les processus impliquant des mouvements ou des suites d'opérations (comme l'antanèrese) sont autant que possible éliminés des mathématiques, il n'est pas question de variables ou de variations, et la notion de fonction ne pouvait donc trouver aucune place dans la mathématique grecque, même s'il est évident que celle de dépendance devait être depuis longtemps déjà familière au bon sens. Il en résulte par exemple que là où nous pouvons formuler un résultat, comme une quadrature par exemple, au moyen d'une fonction, les mathématiciens grecs sont contraints d'exprimer l'égalité entre deux figures dont la seconde est bien connue. (La quadrature du segment de parabole chez Archimède conduit à la construction d'un triangle de même aire.)

Les progrès de la mécanique, et particulièrement de la mécanique céleste, vont déboucher sur l'idée de fonction, puisqu'il s'agit d'exprimer certaines variables (l'espace parcouru, ou la vitesse) en fonction d'autres variables (le temps ou l'espace). Mais cette idée intuitivement simple est encore fort difficile à mathématiser au début du 17^{ème} siècle, et c'est encore seulement sous la forme d'égalité ou, tout au plus, de proportionnalité, qu'elle se trouve chez Kepler (voir la loi des aires qui sert à décrire la vitesse des planètes sur leur orbite!) ou même chez Galilée. S. Bochner (7) attribue à l'existence de tables (trigonométriques, ou de logarithmes) un rôle dans l'émergence de la notion mathéma-

(7) *The Role of Mathematics in the Rise of Science*, Princeton 1966.

tique de fonction, mais, pour ma part, je pense que l'avènement d'une notation algébrique (avec Viète, notamment) et aussi de la géométrie analytique chez Fermat et chez Descartes, exprimant, même sans l'avoir cherché, la valeur d'une des variables chaque fois qu'on attribue une valeur à l'autre, doit avoir très puissamment contribué à placer la notion de fonction parmi les principales préoccupations des mathématiciens. Jusque là, bien entendu, on ne s'est pas encore élevé bien haut au-dessus du niveau du simple bon sens, mais les aspects techniques mathématiques qui se concrétisent dans le calcul différentiel et intégral, en apportant des notions précises comme celles d'accélération, vont permettre non seulement des prévisions valables, mais encore et surtout l'expression de lois (telles que les lois de Newton) qui seraient à peu près inaccessibles au bon sens sans l'aide des mathématiques.

Cet exemple montre qu'il n'est peut-être pas téméraire d'espérer qu'une collaboration de plus en plus étroite entre mathématiciens et scientifiques en général permettra aux méthodes mathématiques (prises dans le sens large que j'ai défendu, et qui ne signifie donc pas seulement, tant s'en faut, une application des techniques qui sont aujourd'hui familières aux mathématiciens) d'envahir des régions de plus en plus étendues de l'activité humaine.

Quelques lecteurs se demanderont peut-être ici si cette perspective est à craindre ou à espérer. Sans vouloir entamer maintenant une longue discussion qui ne serait pas à sa place, je rappellerai seulement que M. Moles a souligné dans son exposé que la mathématique est un luxe de la pensée. Ce luxe s'étend peut-être aussi au-delà de la pensée, et j'aimerais terminer par quelques brèves considérations sur un thème de réflexion qui était devenu actuel lorsque de lourdes menaces pesaient sur les sources d'énergie disponibles pour notre civilisation. Indépendamment de tout jugement de valeur qu'on pourrait porter sur l'utilisation des ressources naturelles, on peut constater que les nations, qu'elles soient développées ou en voie de développement, souhaitent atteindre un haut niveau de prospérité matérielle, et que leurs gouvernements s'efforcent de leur donner satisfaction. Nous constatons que parmi les pays qui jouissent actuellement de cette prospérité, on en trouve qui n'ont guère de matières premières, qui ont souffert de crises économiques profondes après 1929, qui ont été dévastés par une ou deux guerres entraînant parfois des pertes

considérables en vies humaines ou en équipement, qui ont perdu des colonies, etc. . Il est assez curieux de constater (il suffit pour cela de rendre visite à une bibliothèque bien équipée) qu'à peu de choses près, ces pays qui ont maintenu ou repris relativement vite un haut niveau de développement sont aussi les pays où paraissent de nombreux périodiques mathématiques d'un bon niveau scientifique. Vouloir rechercher quelles explications peuvent être données à cette remarquable corrélation prendrait beaucoup trop de place, tout en nous entraînant dans des voies trop incertaines, mais je pense pouvoir conclure en disant que, dans notre société, le rôle direct et indirect des mathématiques, avec tout ce que cela comporte nécessairement comme aspects heuristiques, est sans doute beaucoup plus grand que ce qu'un examen superficiel laisserait croire.