OBSERVATION D'UN GROUPE D'ETUDIANTS

par Elisabeth KHALILI (Strasbourg)

Il s'agit d'une classe de préparation au CAPES, travaillant par groupes de deux ou trois.

Enoncé :

Montrer que l'ensemble des valeurs prises par un polynôme à coefficients entiers non constants ne peut être constitué uniquement de nombres premiers.

Cet exercice demande peu de connaissances, mais donne lieu à des "rectifications de tir" après le développement d'une idée principale.

Première étape :

Pour le polynôme à coefficients entiers, non constant,

$$P(x) = a_o + a_1 x + \dots + a_n x^n$$

l'idée d'écrire

$$P(a_o) = a_o \; (1 + a_1 + \dots + a_n a_o{}^{n-1})$$

a été rapidement trouvée (parfois après quelques essais de factorisation), sinon immédiatement.

Par contre, à ce stade, certains groupes ont considéré le problème comme résolu ; la nécessité de discuter les cas où $Q(a_o) = 1 + a_1 + \dots + a_n a_o{}^{n-1}$ est nul, égal à + 1 ou à – 1, et les cas où $a_o = O, + 1$ ou -1, ne s'est généralement pas imposée immédiatement.

Rectification de tir :

- Dans les cas $Q(a_o) = O, + 1$ ou -1 (et a_o différent de O, + 1 et – 1), il suffit pour conclure de considérer
  $P(ka_o) = a_o(1 + ka_1 + \dots + a_n k^n a_o{}^{n-1})$

  pour un entier k convenable.
- Dans, le cas $a_o = O$, on se ramène au cas général en écrivant (si $a_1 \neq O$)
  $P(x) = x(a_1 + \dots + a_n x^{n-1})$.
- Dans les cas $a_o = +1$ ou -1, le polynome $R(x) = P(x + c)$, pour un entier c quelconque, prend les mêmes valeurs que P.
  Il suffit de choisir c tel que $R(O) = P(c)$ diffère de O, de + 1 et de – 1 pour être ramené au cas général.

Suivant les groupes, les différents cas à discuter ont paru d'une difficulté inégale. L'ignorance du théorème de d'Alembert (le nombre de racines réelles d'un polynome à coefficients réels de degré n est au plus n) a souvent été un obstacle dans la partie "rectification de tir".