UN EXEMPLE D'OBSERVATION D'ELEVES CHERCHANT UN PROBLEME

par Nicole BOPP (Strasbourg)

Il s'agit ici d'étudiants préparant le CAPES et qui travaillaient par groupe de deux ou trois.

Quelques indications supplémentaires ont été fournies par l'observation d'individus isolés (des assistants) cherchant ce problème.

Enoncé :

Existe-t-il dans le plan un ensemble fini S tel que tout point de S soit à la distance 1 de exactement n points de S ? ($n \in N$)

Attitude 1 : **Bricolage.**

Les étudiants ont tout de suite regardé ce qui se passe pour $n = 1, 2, 3$ car ils avaient été bien "*programmés*" par l'étude d'autres problèmes.

Ils n'ont pas essayé d'aborder le problème directement dans sa généralité.

Attitude 2 : **"En faire le moins possible"**.

Beaucoup d'entre eux se seraient contentés d'une seule solution pour n = 1 ou 2 si l'observateur — insuffisamment neutre — ne les avait poussés à en chercher d'autres.

Ils ont alors trouvé sans difficultés pour

n = 1 un couple ou une constellation de couples

n = 2 les sommets d'un triangle équilatéral

les sommets d'un carré

ou de tout polyèdre régulier.

La recherche dans le cas n = 3 a été très longue et a suscité un assez grand découragement chez un certain nombre d'élèves.

Attitude 3 : **Utilisation du triangle trouvé dans le cas n = 2**

Idée perdue : c'est une idée intéressante mais qui, aboutissant à un échec, passerait inaperçue dans la rédaction d'un problème.

Idée perdue a : certains ont fait le raisonnement suivant :

Puis-je rajouter un point à S_2 (vérifiant la propriété pour n = 2) pour obtenir S_3 ?

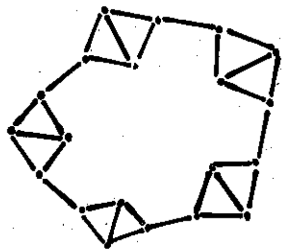
Oui, dans l'espace, j'obtiendrais un tétraèdre.

Zut, si je le raplatis dans le plan, je perds la propriété cherchée.

Cette idée aurait pu être fructueuse appliquée au cube, mais elle avait été oubliée.

Idée perdue b : à partir du triangle, les élèves ont fabriqué un losange et ont essayé longuement de regrouper des losanges.

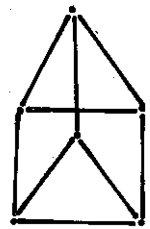
C'est ainsi que certains ont eu l'idée de faire une chaîne qui se ferme.



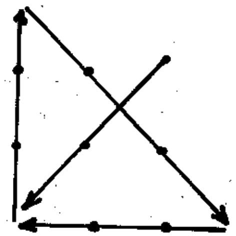
Malheureusement cette méthode élégante ne prêtait pas à généralisation.

c Personne n'a dessiné la figure suivante pourtant fort simple.

La raison en est classique :



Les élèves ne voulant pas "compliquer" leur figure se sont posés comme *condition implicite* : ne pas rajouter de points tels que les segments se coupent. Puis ils ont complètement oublié s'être donné arbitrairement cette condition.

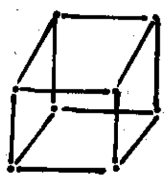


C'est pour la même raison que l'exercice suivant est difficile à trouver : tracer une ligne brisée continue à 4 segments passant par les neufs points ci-contre.
Les élèves se donnent la condition implicite "ne pas sortir du carré".

Attitude 4 : **Utilisation du carré trouvé dans le cas n = 2.**

Certains ont dessiné le cube (vu dans le plan ou dans l'espace suivant les cas) parfois sans même voir que cela donnait une solution dans le cas n = 3.

Il faut donc se garder de l'attitude consistant à dire à un élève —mais vous avez trouvé ! — au vu de ses dessins alors qu'il n'a pas reconnu encore avoir trouvé et qu'il lui reste en fait un seuil important à franchir.



Le seuil de la translation

a) Certains élèves ayant dessiné la figure 2 ont fini par voir qu'une translation permettait de trouver la solution.

b) Pour les autres, le professeur a dû donner un coup de pouce en leur indiquant qu'on pouvait trouver un ensemble S à 2^n éléments (on indiquerait à 3.2^{n-2} éléments si l'élève a dessiné la figure 1).

A partir de là on assiste à un dialogue dans les groupes :

— Comment démontrer une telle propriété ?

— Peut-être par récurrence ?

— Ah ! oui, on double le nombre de points.

— Peut-être pourrait-on prendre deux exemplaires de S_{n-1} pour obtenir S_n ?

— Comment ?

— En les mettant l'un au-dessus de l'autre.

— Mais on sort du plan.

— Il suffit de faire une translation — et *cette idée jaillit enfin.*

Remarque. Il n'est pas évident que dans ce problème le bricolage soit très utile et il est fort possible qu'une recherche "plus abstraite", dans le cas où n est quelconque, ait donné tout aussi vite la solution.

Attitude 5 : **Rectification de tir.**

Bien des élèves se satisfont alors de leur solution.

Mais il suffit que l'un des élèves du groupe ait un doute (un des points construits peut se trouver à la distance 1 de plus de n autres points de S) et pose la question explicitement pour qu'ils trouvent facilement qu'il n'y a qu'un nombre *fini* de translations à éliminer.

Le groupe a alors franchi le dernier *seuil* du problème.

OBSERVATION D'UN GROUPE D'ETUDIANTS

par Elisabeth KHALILI (Strasbourg)

Il s'agit d'une classe de préparation au CAPES, travaillant par groupes de deux ou trois.

Enoncé :

Montrer que l'ensemble des valeurs prises par un polynôme à coefficients entiers non constants ne peut être constitué uniquement de nombres premiers.

Cet exercice demande peu de connaissances, mais donne lieu à des "rectifications de tir" après le développement d'une idée principale.

Première étape :

Pour le polynôme à coefficients entiers, non constant,

$$P(x) = a_o + a_1 x + \dots + a_n x^n$$

l'idée d'écrire

$$P(a_o) = a_o\,(1 + a_1 + \dots + a_n a_o^{\,n-1})$$

a été rapidement trouvée (parfois après quelques essais de factorisation), sinon immédiatement.

Par contre, à ce stade, certains groupes ont considéré le problème comme résolu ; la nécessité de discuter les cas où $Q(a_o) = 1 + a_1 + \dots + a_n a_o^{\,n-1}$ est nul, égal à + 1 ou à — 1, et les cas où $a_o = O, + 1$ ou $- 1$, ne s'est généralement pas imposée immédiatement.

Rectification de tir :

- Dans les cas $Q(a_o) = O, + 1$ ou $- 1$ (et a_o différent de O, + 1 et — 1), il suffit pour conclure de considérer
$P(ka_o) = a_o(1 + ka_1 + \dots + a_n k^n a_o^{\,n-1})$

  pour un entier k convenable.
- Dans, le cas $a_o = O$, on se ramène au cas général en écrivant (si $a_1 \neq O$)
$P(x) = x(a_1 + \dots + a_n x^{n-1})$.
- Dans les cas $a_o = +1$ ou -1, le polynome $R(x) = P(x + c)$, pour un entier c quelconque, prend les mêmes valeurs que P.
Il suffit de choisir c tel que $R(O) = P(c)$ diffère de O, de + 1 et de — 1 pour être ramené au cas général.

Suivant les groupes, les différents cas à discuter ont paru d'une difficulté inégale. L'ignorance du théorème de d'Alembert (le nombre de racines réelles d'un polynome à coefficients réels de degré n est au plus n) a souvent été un obstacle dans la partie "rectification de tir".