

## L'OBSERVATION CLINIQUE DES COMPORTEMENTS HEURISTIQUES

par Georges GLAESER

### I L'HEURISTIQUE DESCRIPTIVE.

La psychologie de la compréhension et de l'incompréhension est un des thèmes centraux de la recherche sur la pédagogie des mathématiques. Pour progresser dans cette étude, il est urgent de rassembler un grand nombre d'observations sur le comportement d'un individu confronté à un problème.

Pourtant la littérature sur ce sujet reste étonnamment fragmentaire. Plus exactement, les travaux systématiques portent surtout sur *l'heuristique normative* et sur la *méthodologie*.

*L'heuristique normative*, à laquelle est consacrée l'oeuvre pédagogique de Georges POLYA [12] [13] [14], vise à accumuler les conseils sur l'art de résoudre des problèmes. Elle ne s'intéresse donc principalement qu'à la recherche *efficace* et ne tire ses leçons que de l'analyse des démarches intellectuelles des individus doués.

Elle ne porte pas d'attention spéciale à l'étude des "blocages" qui entravent la découverte. Décrivant une recherche qui s'étend sur une longue durée, elle en biffe tous les temps morts ou nuisibles.

*La méthodologie* [2] essaie, à propos de certains types de problèmes, de transformer les idées originales de quelques pionniers en "recettes éprouvées" susceptibles d'être appliquées automatiquement. On a décrit des monographies sur les problèmes de construction géométrique, sur la façon de calculer les déterminants, sur la résolution des "problèmes" (sic) de baccalauréat"...

Ainsi la méthodologie apparaît comme le contraire de l'heuristique : celle-ci vise à l'invention d'idées neuves, celle-là fournit l'occasion de s'épargner des efforts d'imagination lorsque la marche à suivre est déjà codifiée.

Cependant, une recherche de solutions comporte souvent, entre quelques instants d'inspiration, des séquences triviales qui se traitent par des procédés standards. L'étude des problèmes-types est donc un outil indispensable pour un entraînement heuristique sérieux.

*L'heuristique descriptive* au contraire, est l'analyse du comportement de recherche indépendamment de son efficacité.

L'observation des chimpanzés de Köhler [7] ou même de débiles mentaux légers, fournit a priori des renseignements assez riches sur les mécanismes de découverte, ne serait-ce qu'en mettant en lumière les causes d'échecs.

L'objet de ce colloque est d'encourager des programmes de recherche systématique sur les démarches heuristiques. A partir d'observations isolées et diversifiées, on espère formuler des conjectures qui devront être soumises à un contrôle expérimental.

## II L'OBSERVATION CLINIQUE.

Le futur chercheur est d'emblée confronté à un triple choix : Quels sont les individus-cobayes qu'il convient de mettre en observation ? Quels sont les énoncés qu'il convient de leur proposer ? Sur quels aspects du comportement l'observateur doit-il faire porter son attention ?

### A — *Choix des cobayes.*

Les témoignages introspectifs de mathématiciens sur la genèse de leur découverte sont trop rares et insuffisamment détaillés pour suffire à nos besoins. [11] [5] [3] [18].

On peut borner ses observations à des individus très doués : nous avons plus d'une fois placé des collègues de l'Institut de Mathématique sur la sellette pour pouvoir les regarder travailler. Mais l'inconvénient majeur tient à ce que certaines séquences importantes s'effectuent à une grande rapidité, ce qui rend l'analyse du déroulement difficile.

Il semble que le meilleur terrain d'observation soit constitué par des élèves ou étudiants au-dessus de la moyenne, assez lents cependant pour ne pas brûler trop d'étapes, assez motivés pour accepter de persévérer dans la recherche d'un problème, ayant suffisamment d'entraînement et de connaissances pour ne pas buter sur les séquences triviales qui relèvent de la méthodologie. Enfin, ils doivent être capables, finalement, de surmonter quelques-unes des difficultés, en y mettant le temps.

L'observation d'un chercheur isolé est difficile, car il n'est pas aisé de l'interroger sur les sujets qu'il médite silencieusement : par

contre, une recherche par groupe de deux à quatre individus, habitués à communiquer entre eux, fournit beaucoup plus d'informations.

Les chercheurs de l'I.R.E.M. de Montpellier ont poussé très loin ce souci d'épier les moindres indices d'une découverte à l'état naissant.

### B — *Choix des énoncés.*

Il va sans dire que nous prenons le mot "problème" dans le sens du chapitre II de [6].

Pour l'observation heuristique, les exercices didactiques (les "drills", les exercices de routines) dont la solution devrait s'obtenir immédiatement, après un dressage approprié, n'offrent pas d'intérêt. La solution doit donner lieu à une recherche de grande durée : malheureusement, il est difficile d'observer des individus pendant plus de deux heures, et cette contrainte limite sérieusement les possibilités.

Il est souhaitable que le travail d'imagination pure ne vienne pas trop interférer avec l'évocation de connaissances techniques. On évitera les problèmes qui font appel à l'érudition ou même à des connaissances que le cobaye a acquis trop récemment ou trop superficiellement.

Le style des énoncés proposés aux Olympiades [17] semble particulièrement adapté à nos besoins (textes courts, problèmes difficiles, absence d'indication sur les résultats intermédiaires).

Cependant, on a reproché aux énoncés olympiques de cultiver la "devinette" sans portée générale. On peut remédier à ce défaut en collectionnant des énoncés de théorèmes importants classiques, à cause des limitations de programme, mais qui sortent du champ des connaissances des étudiants.

Par exemple, la découverte de la façon d'inscrire un pentagone régulier dans un cercle, à la règle et au compas, répond aujourd'hui en France à ces conditions. Par ce biais, les nostalgiques peuvent encore faire revivre quelques perles qui charmèrent leur enfance !

### C — *Méthodes d'observation.*

Il est important que les observateurs ne "soufflent" presque pas pendant que les cobayes "sèchent". Il s'agit de s'intéresser

davantage aux étudiants qu'aux mathématiques ! Il est parfois difficile de résister à relever la "solution sensationnelle" qui vous vient à l'esprit, pendant la contemplation d'une démarche heuristique particulièrement pénible.

Ainsi, si l'observateur aborde l'étude clinique sans aucune idée directrice, il risque de se lasser devant la durée des temps morts. En fait, il faut savoir ce que l'on désire vraiment noter.

L'observation devient plus fructueuse lorsqu'on dispose de modèles provisoires destinés à formuler des conjectures que l'observateur va pouvoir confirmer ou infirmer.

Le bilan des résultats obtenus à Strasbourg ces trois dernières années se résume en l'acquisition d'un vocabulaire spécial, de métaphores, pour désigner certains comportements et pour répertorier diverses phases d'une recherche. Ce codage est certainement encore très incomplet.

Voici quelques mots de notre vocabulaire, dont certains seront illustrés, sans doute, tout au long du colloque.

Bricolage. "Comprendre l'énoncé". "Comprendre le problème".

Franchissement d'un seuil favorable (resp. nocif).

Détour, rectification de tir, effritement d'un problème.

Opposition.

Reconnaissance de forme, transfert, changement de contexte, séparation en deux niveaux.

Libération (ou fixation) de variables.

Analyse à l'envers.

Nous espérons établir ultérieurement par retouches successives des *grilles d'observation* de plus en plus systématiques.

Rappelons qu'une grille est un questionnaire agencé pour permettre une notation aisée de tous les aspects systématiques d'une observation.

Cette technique, qui demande encore de nombreux perfectionnements, a été développée par le pédagogue belge Gilbert de Landsheere [8].

Certains inspecteurs belges utilisent systématiquement de telles grilles qui leur permettent de noter et de coder des centaines d'items sur le maître, les élèves, le message transmis.

Un des avantages de cette méthode est que l'observateur est tellement occupé par ce passionnant jeu de KIM, qu'il n'a vraiment

plus envie de parler, c'est-à-dire d'intervenir dans le déroulement (cf. la conférence de Edouard Bayer en octobre 1971 à l'Institut Pédagogique National, cité par DJS n° 38 — juin 1972).

Il reste à trouver les comportements types qui seront les items des grilles d'observation : autrement dit, il s'agit de se constituer un modèle provisoire, destiné à suggérer des conjectures qu'une observation scrupuleuse cherchera à confirmer ou à infirmer. Une source d'information sur le sujet est constituée par quelques théories contemporaines qui jettent quelque lumière sur le comportement de recherche.

### III LA CONCEPTION CYBERNETIQUE.

Elle envisage la démarche heuristique comme un échange d'information [16]. Cela peut surprendre quand on sait qu'un chercheur travaille souvent en solitaire. Mais il est séduisant d'interpréter certains monologues intérieurs comme des "dialogues avec soi-même". Le chercheur "se pose des questions", il "se répond". On est ainsi conduit à distinguer plusieurs personnages en un seul.

Par exemple, il est fréquent qu'en cherchant un problème d'arithmétique on trouve un nombre entier auxiliaire, et on s'interroge : "ce nombre est-il premier ?". Alors, un nouveau personnage entre en scène, l'*exécutant* numérique : le processus de réflexion heuristique noble s'interrompt pendant que l'exécutant applique mécaniquement le crible d'Érathostène. A la limite, on pourrait vraiment charger un aide subalterne d'exécuter cette opération, et au cours d'une séance d'observation heuristique, il est tout indiqué de décharger le cobaye de cette tâche en fournissant de tels renseignements à la demande, pour ne pas le fatiguer inutilement ( la fatigue essentielle provient des ruptures de centre d'intérêt dont il faut se détacher avant d'y revenir).

Une autre phase intéressante consiste en des *évoqueries lointaines* : le chercheur, trempant sa madeleine dans sa tasse de thé, se dit que la formule qu'il vient d'obtenir lui rappelle un livre qu'il a lu, il y a quinze ans, et qui doit se trouver en haut de la bibliothèque. Le dialogue avec soi-même consiste à localiser la source d'information et aller la consulter. Là encore, c'est une interruption dans le fil des idées : on peut imaginer que l'on demande un renseignement à un *archiviste* qui vous fournit une

photocopie du passage demandé. Ainsi, il y a lieu de préciser les diverses fonctions accomplies par les divers "personnages".

Un autre aspect cybernétique de la recherche a été envisagé par l'école du "Problem solving" [9]. Ces auteurs, ayant l'ordinateur en vue, se représentent un processus de recherche comme un cheminement dans un labyrinthe ou, plus sommairement, un arbre.

La recherche consisterait essentiellement à explorer un à un les divers chemins de l'arbre, en les testant l'un après l'autre. Mais cette méthodologie supprime pratiquement toute heuristique, en indiquant une marche à suivre.

En réalité, le chercheur n'envisage qu'un tout petit nombre de chemins intéressants ; pour ces auteurs, une *heuristique* serait une stratégie, une liste de critères qui guide le choix des bons cheminements. Le schéma de l'école du "Problem solving" ne paraît pas satisfaisant. Il néglige systématiquement les retours en arrière, les détours, les contre-sens et les sous-compréhensions. Enfin, un ordinateur épuise les branches d'un arbre, en ne manifestant aucune émotion. Au contraire, il est fréquent de voir des cobayes écrire la même formule ou dessiner la même figure : mais la situation est complètement différente selon que c'est fait d'une façon sceptique, désabusée ou délibérément optimiste.

Au cours du colloque on a signalé plusieurs fois le phénomène de la "*solution inaperçue*" : "le chercheur écrit la réponse sur son brouillon, bien avant d'avoir pris conscience du fait que son problème est résolu" (dans les observations de l'équipe de Montpellier, on présente un cas où il s'est passé 33 minutes entre ces deux événements ! ).

Les comparaisons avec l'ordinateur ont le défaut de négliger complètement l'environnement *affectif* de la recherche. Pourtant, l'euréka est vraiment un paroxysme qui ne peut se décrire en termes formalisés.

#### IV LA PSYCHOLOGIE DE LA FORME [4] [7]

Elle fournit la description d'un grand nombre de comportements heuristiques fondamentaux. Le livre de W. Köhler sur "L'intelligence du singe supérieur" est un ouvrage irremplaçable sur l'heuristique descriptive.

Les processus des plus importants sont la *reconnaissance de forme* : qui est la prise de conscience d'une structure dissimulée. Le *détour* a été très bien décrit par les gestaltistes. Le *transfert*, qui est le passage d'un contexte à un autre dans l'interprétation d'une situation (par exemple de l'algèbre à la géométrie ou l'optique ou la mécanique), est une opération heuristique de première importance.

On notera que du point de vue du logicien, la traduction mot à mot d'un problème, d'un langage dans un autre, ne modifie en rien le problème. Mais du point de vue heuristique, le stock des souvenirs, des associations d'idées potentielles peut varier considérablement. Lorsque les mathématiques sont rédigées d'une façon formelle, les rédacteurs éliminent du texte toute référence à ces transferts, évidemment inutiles du point de vue de la rigueur. Mais on ne comprend vraiment pas comment le résultat a pu être trouvé.

V LA CONCEPTION CATASTROPHIQUE [15] de la recherche s'intéresse surtout aux "coups de théâtre" des comportements heuristiques.

A chaque instant, le chercheur dispose d'un certain stock d'informations plus ou moins délimitées. C'est dans ce champ de recherche qu'il évolue en l'organisant ou le désorganisant : on a l'impression qu'il tourne en rond. Les progrès décisifs se traduisent par des modifications irréversibles du stock d'informations, grâce à l'apport d'idées neuves. Le processus de recherche apparaît ainsi comme une succession de *franchissements de seuils* (que A. Moles appelle des "micro-eurékas") entre lesquels n'apparaissent que des phases de consolidation ou de stagnation.

Ce schéma a été popularisé par Edward de Bono [1] qui a opposé la *pensée verticale* (usage méthodologique des techniques de l'algèbre ou de la logique) à la *pensée latérale* qui serait seule créative.

On peut observer des franchissements de seuils *favorables* et d'autres qui sont *nocifs* : tel progrès spectaculaire sur un point particulier peut inhiber la recherche de la suite du problème.

On peut franchir des seuils par des mécanismes très divers : le plus connu est l'*idée originale*, l'inspiration de génie, qui suggère soudain un rapprochement entre le problème posé et une situation

d'apparence très éloignée. Mais le bouleversement peut aussi intervenir grâce à une information venue de l'extérieur, dont la pertinence est immédiatement perçue et qui vient modifier substantiellement la situation.

Parmi les seuils les plus répandus figure la *compréhension de l'énoncé*, qui ne doit pas être confondue avec la *compréhension du problème*.

C'est au moment précis où le chercheur comprend qu'il ne comprend pas et qu'il s'écrie "Zut ! Que je peux bien être bête !" qu'apparaît la lueur d'intelligence.

L'allusion à la théorie des catastrophes est pour l'instant très prétentieuse. L'étude clinique ne peut, aujourd'hui, que collationner des faits et décrire un grand nombre de types de franchissements de seuils. Il est plausible qu'en présence d'une documentation plus riche, on sera en mesure d'utiliser les classifications que René Thom a proposées pour décrire les diverses singularités d'applications différentiables et qui sont à la base de la théorie.

Mais, avant d'en arriver là, il faudrait observer les faits plus systématiquement.

## VI LINGUISTIQUE.

Le mathématicien utilise constamment de nombreux langages, ayant des finalités diverses. L'habitude de ne laisser entrevoir dans l'activité mathématique que la partie émergée de l'iceberg — à savoir la rédaction définitive écrite dans un langage suffisamment formalisé — laisse dans l'ombre tous les autres modes d'exposition.

L'observation clinique de l'activité heuristique met en évidence toute une gamme de *langages heuristiques* dont le chercheur fait grand usage au cours des phases de la recherche, qui sont éliminés de la phase finale.

Ces langages doivent, sous peine d'inefficacité, être *assez précis* pour transmettre un peu d'informations, *assez vagues* pour laisser subsister une marge de manoeuvre du chercheur, qui peut ainsi se concentrer sur l'idée sans être victime des mots, être *assez évocateurs* pour suggérer de fructueuses analogies.

C'est ici qu'apparaît le rôle contemporain de la *géométrie*. Depuis longtemps, l'exposé "more geometrico" n'est plus le

modèle de la rigueur mathématique. En tant que science, la géométrie est morte : ce n'est qu'une branche de l'algèbre (et c'est dans un chapitre de l'Algèbre de Bourbaki qu'elle est incinérée). Mais en tant que langage heuristique, la géométrie est très vivante. Au contraire, elle envahit peu à peu toutes les mathématiques, de la géométrie des nombres à la géométrie des espaces fonctionnels.

L'emploi des *organigrammes* et des *schémas* peut s'apprécier, tant du point de vue du langage formalisé que du point de vue du langage heuristique. Les qualités d'un langage formalisé doivent être très différentes de celles d'un langage heuristique : dans le premier, c'est la *grammaire* qui joue le rôle prépondérant, dans le second, c'est le *style*.

Par exemple, le langage des organigrammes et des diagrammes sagittaux peut être formalisé. Mais alors, les dessins peuvent être considérablement déformés, jusqu'à devenir méconnaissables, sans cesser d'être corrects. Par contre, pour que le langage de ces diagrammes soit suggestif, il faudrait qu'il soit réalisé selon un ordonnancement esthétique qui permet, au premier coup d'oeil, de percevoir les analogies. Bref, à côté des règles de grammaire, il convient de respecter des règles de style.

Aucune règle de grammaire n'interdit d'appeler  $\alpha$  XL les milieux des côtés d'un triangle BUR. Mais le style suggère d'employer les notations A'B'C' et ABC. Les raisons de ce choix sont uniquement heuristiques : c'est ainsi que l'on mémorise aisément les informations.

L'observation des comportements heuristiques a montré comment un langage outrageusement incorrect, complété par des mimiques, pouvait incontestablement véhiculer des informations essentielles.

Inversement, si le chercheur s'astreint à écrire d'une façon pédante tous les quantificateurs au cours d'une recherche où la principale difficulté n'est pas d'ordre logique, son imagination est rapidement inhibée.

## VII CONCLUSION.

Cet exposé ne prétend être qu'un point de départ pour des recherches plus systématiques et plus rigoureuses. Une meilleure

compréhension de la psychologie de l'invention ne peut qu'entraîner des progrès, tant dans l'heuristique normative que dans la pratique pédagogique courante.

On observe fréquemment des professeurs qui, sans le savoir, empêchent leurs élèves de comprendre, par des interventions intempestives. Par exemple, en présence du phénomène déjà signalé de "solution inaperçue", le maître impatient peut considérer l'exercice comme terminé ; il néglige alors la phase de prise de conscience qui doit amener l'élève à comprendre qu'il a compris : le chercheur est frustré de son ultime effort.

Dans d'autres cas, le maître qui n'aurait pas compris l'utilité des langages heuristiques peut exiger une rigueur formelle dans l'expression à une phase de la recherche où le pédantisme est nuisible.

Ainsi, l'observation clinique des comportements heuristiques qui ressort de la recherche fondamentale doit comporter de nombreuses applications pratiques.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] E. de BONO. *La pensée latérale*. Dunod - Paris
- [2] G. GLAESER. *Méthodologie et heuristique*. Documents et recherches - Sciences n° 2 - Hatier - Paris
- [3] G. GLAESER. *Une petite aventure mathématique*. Bulletin de l'A.P.M.E.P. n° 281 - 1972
- [4] P. GUILLAUME. *La psychologie de la forme*. Flammarion - Bibliothèque scientifique - Paris 1937
- [5] J. HADAMARD. *Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine mathématique*. Blanchard - Paris 1959
- [6] I.R.E.M. de Strasbourg. *Le Livre du Problème*. (Fascicule 1 - Pédagogie de l'exercice et du problème)
- [7] W. KÖHLER. *L'intelligence des singes supérieurs*. Alcan - Paris 1927
- [8] G. de LANDSHEERE. *Les tests de connaissance*. Editest - Bruxelles 1965
- [9] A. NEWELL, J.C. SHAW et H. SIMON. *The process of creative thinking* (in *Contemporary to Creative thinking* - Atherton Press - New-York 1963 et Prentice-Hall - London)

- [10] P. OLERON. *Les activités intellectuelles*. P.U.F. - Paris 1972
- [11] H. POINCARÉ. *Science et méthode*. Flammarion - Paris
- [12] G. POLYA. *Comment poser et résoudre un problème*. Dunod - Paris 1957
- [13] G. POLYA. *Les mathématiques et le raisonnement plausible*. Gauthier Villars - Paris 1958
- [14] G. POLYA. *La découverte des mathématiques*. Dunod - Paris
- [15] R. THOM. *Stabilité structurelle et morphogénèse*. 1972 W.A. Benjamin, inc
- [16] N. WIENER. *The human use of human beings*. Anchorbooks - Doubleday 1954
- [17] YAGLOM. *Challenging mathematical problems with elementary solutions 1 et 2* Holden-day. San Francisco 1967
- [18] B.L. VANDER WAERDEN. *Einfall und Überlegung*. Birkhäuser - Basel 1973