PSYCHOLOGIE DE LA DECOUVERTE DANS LE DOMAINE MATHEMATIQUE

par A. MOLES

L'enseignement mathématique se veut de plus en plus actif. Il cherche en cela à appliquer la remarque que les *êtres de raison* se fixent d'autant mieux dans l'esprit qu'ils sont plus une secrétion de notre propre activité mentale et par là, parties intégrantes de notre esprit raisonnant ; non plus insertions ou blocs surajoutés, mais produits de liens intimes avec notre être et ses connaissances. D'où l'accent, mis récemment par tous ceux qui de près ou de loin s'intéressent à la manière d'apprendre, sur cette partie de la psychologie appelée "heuristique" qui traite de la manière dont s'effectue la "découverte", la réalisation d'une forme nouvelle, l'invention, en vue de l'appliquer à l'enseignement même des mathématiques par des méthodes actives.

Il s'agit de savoir quel pourcentage, quelle part d'invention provoquée, encadrée, guidée, peut être introduite dans le processus global d'apprentissage.

Certes les processus mentaux que décrit l'heuristique dépendent largement du domaine dans lequel ils s'exercent, mais c'est un des premiers résultats de cette science que de montrer qu'ils en dépendent beaucoup moins qu'on aurait pu le croire à priori. Le praticien croit souvent que mentalité et comportement du mathématicien, de l'artiste, du chimiste sont fondamentalement distincts : ce n'est pas le cas, il n'existe qu'*une* seule science qui exemplifie l'existence de mêmes "méthodes de découvertes" ou de ces chemins parcourus par la pensée pour parvenir à un but, ces "systèmes d'opérations extériorisables qui font mieux que l'esprit le travail de l'esprit" (Valéry).

Les processus mentaux dépendent certes de ce qui est présent dans le champ de conscience, de l'environnement phénoménal de celui qui les exerce. *Mais*, et c'est un des résultats de l'heuristique, ils n'en dépendent pas autant qu'on le pense généralement.

Les *mécanismes de l'esprit sont plus ou moins indépendants de l'objet* sur lequel ils s'exercent. Il existe, en d'autres termes, des *processus mentaux identiques dans des domaines différents*, à la condition d'avoir réduit les problèmes à un "stade canonique", celui où précisément l'esprit est confronté avec un assemblage d'éléments du champ de conscience et, à partir de ce moment, agit de façon autonome en se dégageant des facteurs psychologiques liés à la "Nature des choses". Ce qui est important, c'est que ce mouvement d'abstraction de l'esprit n'est pas identique à ce qu'on appelle l'abstraction formelle, en particulier celle de la pensée mathématique, nous l'appellerons "abstraction phénoménologique".

Par ailleurs, et c'est un deuxième résultat de l'heuristique, ces régularités dans la démarche de l'esprit peuvent être décrites, cataloguées et situées les unes par rapport aux autres ; c'est ce que l'on appellera les *méthodes de découverte*. D'où l'idée d'étudier, de décrire ces mécanismes et de les enseigner, tantôt par des exemples passifs, tantôt par des pratiques en donnant à celui qui doit apprendre, l'occasion d'exercer une activité inventive dûment préparée. Les individus y réussissent plus ou moins bien, ils manifestent plus ou moins d'aptitude à imaginer des solutions à un problème, et il apparaît qu'un enseignement comme celui de la mathématique doit tenir compte d'une différenciation des individus en fonction de leurs aptitudes et de leurs buts.

L'unicité des processus de la pensée créatrice, cette relative indépendance par rapport à l'objet, n'apparaît donc qu'à la condition que l'on remonte à l'étape où précisément la pensée réduit la diversité de l'Univers à une *situation commune*.

En fait, c'est précisément à ce niveau que l'heuristique déterminera des *images mentales*, largement "illogiques", faiblement consistantes mais *prégnantes* au sens de la théorie de la forme et qui, par leur équivoque et leur imprécision même, appellent un travail de l'esprit pour résoudre les ambiguïtés. Elle attire entre autres l'attention sur les trois concepts de *Niveau*, de *Rigueur*, de *Distance d'ordre*.

Ainsi le psychologue découvre qu'il existe différents niveaux de spontanéité et de rigueur de la pensée qui se rangent par degré :

– niveau de *logique*
– niveau de la non-contradiction "*infralogique*"
– niveau de l'*expérience de la nature physique* (Erfahrung der Natur).

On pourrait, au titre d'une métaphore utile, déclarer que l'homme dispose d'un cerveau à couches successives, depuis le plus "biologique", le plus ancien, le plus rudimentaire, responsable de la sensibilité, de l'activité, de la spontanéité, du réflexe, jusqu'à des couches "de luxe", récentes acquisitions de l'évolution, dont la pensée logique, la cohérence, la rigueur, l'emboîtement, la largeur et la précision du champ de conscience seront les produits. A l'opposé, le "cerveau primaire" ou biologique, centré sur lui-même, sur l'intégrité de la personne, aura des facultés extrêmement rudimentaires, mais fortes, immédiates, spontanées : "C'est *bon* pour moi ou c'est *mauvais* pour moi", "C'est *grand* ou c'est *petit*", "C'est moi qui *agis* ou c'est moi qui *subis*" seraient les types de questions et de valeurs qui orienteront cette pensée spontanée, sous-jacente à un cerveau analytique.

Dans cette perspective, *la mathématique est un luxe de la pensée.* Le processus heuristique fondamental consistera à partir de la pensée brute, "biologique", imparfaite, toute chargée de valeurs et de connotations arbitraires, et à en faire un produit raffiné, de monter peu à peu les niveaux de la rigueur vers le luxe suprême de la logique formelle.

Il y a corrélativement plusieurs niveaux de procédés de l'esprit, c'est-à-dire de démarches régulièrement observables :

– *idée de recette* : elle repose sur la maîtrise parfaitement éprouvée d'un processus qui a réussi : "il y a une formule à appliquer". C'est très souvent ce que beaucoup d'*applicateurs* des mathématiques recherchent ; par exemple la formule donnant le rayon de courbure d'une courbe $\frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}$, ou une bonne partie du contenu des formulaires de mathématiques à l'usage des ingénieurs, que d'ailleurs les mathématiciens eux-mêmes recopient et mémorisent.
– *idée d'algorithme* : suivre une séquence d'opérations dont on ne connaîtra la valeur et le résultat qu'à la fin de la séquence, mais

qui occupe l'esprit pendant tout le temps de sa réalisation. Exemple : le développement d'une intégration par parties, ou d'une division de polynomes sont des séquences d'opérations parfaitement prévisibles a priori.

— *idée de méthode* : identification d'un trajet dans un labyrinthe, ou d'une orientation par rapport à des valeurs. Exemple : recherche du développement d'une somme de carrés à partir de quelques aspects d'une forme mémorisée.

— *les attitudes d'esprit* ou les grandes méthodes
Exemple : — examen des différentes parties d'une figure
— recensement des résultats déjà trouvés
— listing de cas analogues
— recherche d'ensembles de combinaisons "possibles"
— augmenter, diminuer, ajouter, retrancher, multiplier, intégrer un item ou un élément culturel *quelconque* sans savoir ce qui sera valide dans ces opérations.

La Psychologie reste une science imparfaite, elle n'est capable que de proposer des concepts, peut-être importants, mais imprécis par nature. Elle s'exprime volontiers avec pertinence en images, en métaphores récurrentes ; labyrinthes, trajets, parcours, détournements, barrières, vecteurs, buts, cheminements, etc., sont parmi ses termes favoris ; ce sont là souvent des métaphores de l'espace (Matoré). Nous utiliserons ici quelques unes de ces images.

Tout d'abord l'ensemble de la connaissance, qu'elle soit d'ordre mathématique, celle des relations abstraites entre éléments de physique, se décomposera toujours en deux aspects :

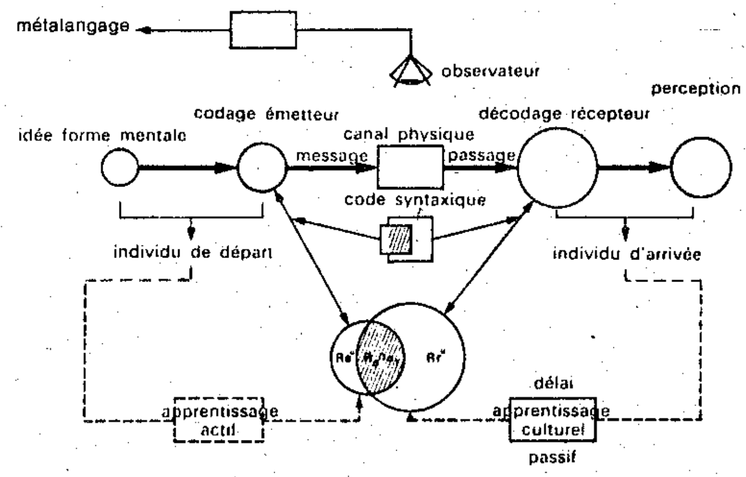
1 — la *science établie* à chaque instant : il est intéressant de la comparer à un vaste mur de livres, la bibliothèque universelle de ce qui est connu, qui certes change à chaque époque et dont chaque sujet ne "possède" vraiment qu'une petite partie ;

2 — le *processus de la science en train de se faire*, lieu de cheminement, labyrinthe dans le champ des "possibles". Ici le champ est l'imaginable où l'être évolue, butte contre des "impossibilités" reconnues à chaque instant, erre et revient en arrière.

L'acte scientifique, c'est la possibilité d'"appliquer" au sens topologique (à l'intérieur d'un domaine réduit) ce trajet vers le domaine de la science établie, écrite ou qu'il serait possible d'écrire, de mettre en forme. Ceci implique deux styles de comportements selon qu'on se situe plus ou moins dans l'un ou dans l'autre des deux plans de "ce qui est" ou de "ce qu'on fait" : l'opération de φ α ν̃ τ α σ ι α, imagination créatrice, qui se passe dans le plan horizontal pour *créer une forme*, et l'opération de μ ι μ η σ ι s, opération de mise en forme, de réduction critique, vérification, retour vers la cohérence universelle.

THEORIE DE LA COMMUNICATION ET DIDACTIQUE

Le schéma général de la communication met un peu de clarté dans l'ensemble de ce processus, en assimilant le "discours mathématique" à un message émis par un créateur qui code des formes mentales, transmis en un texte pour fournir à un décodeur des signes employés selon certaines règles en vue de construire une perception dont la plus ou moins grande fidélité à la forme mentale est un critère de valeur.



La situation fondamentale de communication.

Il implique par exemple que pour une bonne assimilation d'un message, le répertoire de signes de l'émetteur soit contenu dans le répertoire du récepteur. Il implique aussi que le *débit d'information* doive être limité : 5 à 8 éléments binaires par seconde est en pratique une limite supérieure. Dans l'explication des règles de l'enseignement, on retrouve ici le principe pédagogique : pas plus de trois notions nouvelles par heure qui est une application concrète de cette idée.

La théorie de la communication pédagogique va plus loin : elle indique par exemple que non seulement les éléments du répertoire de l'émetteur (le professeur) doivent être inclus à l'intérieur du répertoire du récepteur (l'élève) et que pour les termes "nouveaux" le débit de ceux-ci doit être strictement limité, mais plus encore, que la "température informationnelle de l'émetteur" (pente de la courbe dite de Zipf, de répartition de l'utilisation des mots "rares") doit se rapprocher de celle du récepteur, pour assurer la meilleure communication globale entre élève et professeur.

Ce schéma propose en outre l'idée de *Learning actif* qui remplace ou s'ajoute au *Learning passif*, au lieu de travailler sur la perception ou l'intelligence des formes ou relations, on cherchera à faire fabriquer de telles relations.

L'idée même de communication suggère alors une série de notions :

— taux de redondance
— débit de complexité ou d'information fournie dans une démonstration
— niveau d'abstraction
— coût de codage, coût de transfert, coût de rigueur, coût d'évidence.

Ce concept régulateur de *coût* a un très grand nombre d'applications en pédagogie : ainsi le coût généralisé d'échange (coût de codage + coût de transfert + coût de décodage + coût de perception-intégration) devrait être inférieur au bénéfice retiré de l'opération, pour que le récepteur entre dans le processus. Ceci amène à la notion :

coût de la démonstration = bénéfice d'évidence donnée au départ + coût rhétorique de démonstration + coût de rigueur.

Enfin le concept de *risque*, c'est-à-dire la probabilité subjective de se trouver contredit, au stade final de déroulement d'une pensée est un des caractères psychologiques essentiels de l'heuristique.

Examinons les critères d'application par l'esprit des différents processus heuristiques. Il y a :

1 — *le type de but poursuivi* :
Exemple :
— "connaître" au sens documentaire
— mémoriser au sens d'avoir présent sans effort dans le champ de conscience
— maîtriser en vue des applications
— être apte à dominer la structure logique (c'est-à-dire à redémontrer ou reconstituer une démonstration)
— inventer soi-même.

2 — *le degré d'évidence fourni* :
Quelle est la "quantité d'évidence" avec laquelle un individu, dans une situation donnée, peut connaître un résultat, un fragment du discours mathématique, c'est-à-dire le rendre solidaire de tout le reste du monde, en saisir la nécessité ? On notera que ceci implique un certain coût de codage, nous l'appellerons ici *coût d'évidence*, somme des coûts intellectuels élémentaires des opérations à effectuer pour parvenir à la *sensation* de plénitude de l'évidence.

3 — *la volonté de rigueur* :
Ne rien accepter comme vrai qui ne puisse être démontré sans faille à l'intérieur d'une chaîne. C'est certainement à ce dernier titre que la divergence s'établit le plus nettement entre les différents types d'individus soumis à l'enseignement mathématique.

Les uns estiment que leur formation mathématique doit avoir pour rôle de leur rendre le plus grand nombre possible de choses évidentes, dans les relations entre les êtres de pensée, de façon plus ou moins intuitive et immédiate, d'éliminer la démonstration au profit d'une simple monstration, de voir dans son ensemble la figure et ses propriétés, d'accepter le plus de choses possibles pour vraies à l'intérieur d'un univers délibérément restreint. Ce seront les mathématiques de l'ingénieur, de l'applicateur, du statisticien, de l'économiste pour lequel il est par exemple *plus facile* de déclarer que toutes les fonctions imaginables sont monotones, continues et possèdent une dérivée, et que d'ailleurs, s'il y en a d'autres, ce sont des *exceptions* hors programme, en se reposant donc sur un concept de *fréquence d'usage dans un champ donné.*

Les autres estiment au contraire que la fonction des mathématiques est précisément de démontrer ou de définir objectivement tout l'ensemble de ce qu'il est possible d'imaginer, et par des généralisations successives et des cas limites (idée de tératologie mathématique) d'étendre le royaume de la rigueur et de la logique aussi loin et aussi profondément qu'il est possible. C'est vraisemblablement parmi eux que se recrutent les véritables mathématiciens, mais dans un enseignement général, le nombre de ceux-ci est si restreint qu'on peut se demander s'ils ne méritent pas d'être *ségrégés* dans un enseignement particulier.

Les étapes du processus créateur ou de l'élaboration du discours mathématique

L'observation de multiples types de découverte ou d'invention propose de façon récurrente l'existence d'une série d'*étapes* psychologiques, nettement caractérisées, qui quelquefois s'enchevêtrent ou se recoupent, mais qu'il est presque toujours possible de distinguer :

1 — *Assimilation du connu*

a) par soi
b) ou par les autres

C'est la construction, à l'intérieur de l'esprit, d'un *champ de connaissances* assimilées de façon passive, ou intuitive ; c'est le stade de la "documentation", de l'enrichissement du *champ de conscience* non seulement de tout ce qui est perçu, mais de tout ce qui est connu. L'individu s'efforce tout simplement de connaître le monde dans lequel il est et d'en percevoir le détail dans le domaine particulier qui l'intéresse. C'est donc *à la fin* de ce processus que se propose un "gap", un "manque" dans le savoir, un *problème.* Rappelons qu'on appelle "problématique" l'ensemble des questions qui se posent à propos d'un item accompagné de l'ensemble des règles auxquelles doivent obéir les réponses trouvées à ces questions, que l'on appellera "solutions".

2 — *Incubation*

Il y a donc un mécontentement de ce qui existe dans le "champ de conscience", qui établit le contact permanent avec le problème ; il y a une insatisfaction croissante par rapport à l'ensemble des formes mentales qui sont présentes dans ce champ de conscience spécialisé que ce chercheur porte avec lui. Les psychologues voient dans cette étape l'un des points essentiels, celui de l'*émergence d'une forme "ouverte"* que l'esprit tend à fermer, d'un manque dans une séquence, manque qui entraîne une activation spécifique de l'esprit. Il y a concentration dans un jeu permanent de l'esprit avec le centre de la forme et sa périphérie. L'incubation est une sorte de mobilisation de l'esprit et de la nature ; elle est une distorsion systématique du monde au profit du problème, une récupération de tous les éléments du champ de vision en vue de la clôture de la forme. "A quoi cela pourrait-il me servir ? " est la question que se pose l'individu à propos de tout nouvel élément présenté à son champ de conscience. Elle comporte entre autres un jeu permanent d'aller et retour entre le "centre" et la "périphérie" du champ de conscience où s'accumulent les matériaux (Shifting).

3 — *L'illumination*

Etape souvent très brève, processus fortement ressenti d'une *fermeture de la forme*, concept de plénitude et de certitude, souvent trompeur d'ailleurs, mais provisoirement convaincant, satisfaisant pour l'esprit. C'est l'Euréka dont parle Glaeser, souvent en une série de petites étapes avec des retours successifs à un point antérieur. L'illumination prépare et hausse l'esprit vers un stade ultérieur, où interviendra la volonté de la cohérence logique, ce que nous appelions le *besoin de rigueur*, qui va reprendre en charge le processus, l'élément ou la forme nouvelle pour le soumettre à une analyse de *critères de validité* ou à un contrôle de *possibilités d'emboîtement.* Souvent celui-ci sera défaillant, auquel cas l'illumination était un faux éclair et on reprendra à un point précédent. Une des illuminations les plus fréquentes en mathématiques est l'émergence d'analogie, de la ressemblance d'une forme, de son identité avec une forme déjà connue, identification qui entraîne que s'attacheront à la forme Y inconnue toutes les séries de propriétés et déductions déjà attachées à la forme C connue.

4 — *La vérification*, étape où l'esprit a l'impression d'avancer, d'effectuer une démarche dans un champ, d'effectuer une série d'actions, de *construire* en assemblant des éléments sous la domination d'un algorithme quelconque qu'il sait déjà posséder. Citons à ce titre les développements de polynômes à l'intérieur d'une parenthèse, les manipulations algébriques, etc., avec pour chaque étape un jugement : savoir si on s'est éloigné ou rapproché du "but", c'est-à-dire de la forme finale "close".

5 — Enfin, la cinquième étape serait celle de la *mise en forme*, polissage, formulation dans laquelle l'esprit revient sur tout l'ensemble du processus, en élimine des errements, des éléments non strictement utiles, réduit, met en forme, corrige dans des actions localisées, agréablement facultatives, et découvre souvent, par un processus que l'on peut appeler *fourmillement*, une quantité d'éléments annexes, de courts-circuits dans la séquence initiale.
La formulation est en fait le contact pris par l'esprit individuel avec un autre individu potentiel, le récepteur, le professeur, l'utilisateur, plus simplement cet "autre" qui est provisoirement le représentant des normes, ici principalement des normes logiques, auquel *je* dois me conformer pour faire accepter universellement *mon discours*.

Le discours mathématique comme chaîne ou comme réseau ?

La pensée mathématique est le modèle de la pensée discursive cohérente, elle va se réduire finalement et de toutes façons à un *discours linéaire*, séquentiel, ordonné, qui est cohérent vis-à-vis de lui-même, c'est-à-dire non contradictoire entre une partie et une autre, et cohérent vis-à-vis du domaine extérieur, c'est-à-dire de tout autre discours mathématique possible. En d'autres termes, il prétend à la cohérence universelle et c'est peut-être ce qui le spécifie vis-à-vis d'autres discours scientifiques qui se contentent d'une validité limitée dans un certain champ. On peut parler, à chaque propos de type de sciences, d'une *distance de cohérence*, c'est-à-dire d'une *distance moyenne* mesurée en nombre d'éléments de la chaîne *au bout de laquelle une contradiction* peut surgir, et être *tolérée* sans être rédhibitoire pour les opérations qu'on en veut faire.

Ce discours se présente donc comme linéaire possédant un début et une fin clairement indiqués. Il s'explore en principe au long de la page typographique et se coule dans le modèle de l'écriture ou du discours oral. L'un des buts de la mathématique est souvent de ramener à ce codage linéaire les éléments et les rapports d'une figure géométrique située dans un espace à 2, 3 ou n dimensions.

On peut légitimement se demander si cette affirmation de linéarité n'entraîne aucune discussion. La présentation d'une figure, l'évidence d'une disposition d'éléments juxtaposés, l'évidence démonstrative d'un diagramme à 3 dimensions tel qu'une ogive de Galton plus ou moins déformée, sont-ils exclus *de jure* de la mathématique tant qu'ils n'ont pas été réduits à des formulations au moins symboliques sur une ligne de papier ? Ceci prêterait interrogation pour le psychologue et le philosophe. Un grand nombre de civilisations ont accepté le "Voyez" comme l'étape finale d'un raisonnement mathématique (Inde / Chine, etc.) et on devra s'interroger (plus qu'on ne l'a fait) pour savoir si, dans toute cette part de l'enseignement des mathématiques et de l'inventivité qui est notre propos, il n'y a pas dans la figure une façon de satisfaire les exigences conjointes de l'évidence et de la rigueur. Par exemple, le "carré magique" comme solution *en soi* est-il à rejeter au rang des "résultats" purs ? Notons au passage que la notation matricielle et toutes ses formes condensées, les systèmes d'équation et les structures internes de formules correspondent à des mises en cause, minimes mais fréquentes, de cette linéarité du discours mathématique.

Dans l'expérience immédiate, ce discours se présente la plupart du temps comme une chaîne constituée de maillons inégaux quant à leur "*grosseur*" (ce serait leur visibilité dans le champ de consience), leur *longueur* (ce serait le temps qu'il faut à l'esprit pour les assimiler), leur *force de liaison*, c'est-à-dire l'élasticité plus ou moins grande du lien qui les rattache l'une à l'autre, et un certain nombre d'autres caractéristiques telles que, par exemple, leurs *systèmes d'enclenchement* de chacun des maillons les uns par rapport aux autres (fitting). Ces maillons sont les étapes de la solution d'un problème, d'une démonstration, et l'invention reposera sur le discernement de certains maillons de la chaîne, sans nécessairement en posséder la totalité. Les étapes seront tantôt des "actes de l'esprit" au sens des speech acts d'Austin, tantôt simplement des notions ou concepts, tantôt des "blocs" plus complexes, tels que des formules, enfin quelquefois plus simplement des grandeurs algébriques. Le corpus de la mathématique comporte l'élaboration de notions et la mise de ces notions à l'intérieur de séquences.

Or, le processus séquentiel qui est suggéré par la linéarité de la pensée écrite, paraît contradictoire à la nature de la pensée scientifique tout court. Il s'agit en toute rigueur d'un *réseau maillé* et l'être, dans son premier contact avec la logique, découvre vite cette idée de cohérence interne qui fait qu'un élément est toujours supporté par plusieurs autres. Ainsi donc la chaîne aux multiples mailles de la monstration ou de la démonstration n'est qu'un *trajet particulier* à l'intérieur du réseau, ceci implique entre autres que la *rupture d'un des maillons ne met nullement en danger la solidité de l'ensemble.*

Il semble bien, d'après les études sur l'enseignement programmé et la science des labyrinthes, que les mailles se trouvent valorisées par l'intermédiaire du nombre de *passages totaux* p_{ij} situé entre i et j ; un élément de chaîne est valorisé et stéréotypé par le nombre de passages par ce maillon. Une connaissance *statistique* du champ des connaissances reposera sur cette idée de fréquence de passage, comme une phénoménologie statistique du domaine de connaissance.

Sur le prix de l'évidence

La notion d'évidence n'est pas *contrainte*, comme le voudrait la logique formelle, mais *accord* de l'individu avec le reste de l'univers, exception, vision, elle est autonome, *selbstverständlich* (chose qui se comprend d'elle-même).

"L'évidence n'est pas intrusion dans la conscience d'une réalité, qui lui serait totalement étrangère, son corrélatif n'est pas la vérité, mais l'objectivité." Husserl.

La monstration, la démonstration, l'exemple sont des outils de construction de l'évidence. La rhétorique se sert de l'évidence, quelquefois fallacieuse, puisque celle-ci est perception et non contrainte. Or, chacune de ces opérations représente, comme le montrent bien les théories des communications, une sorte de coût pour l'esprit, et celui-ci évolue dans le champ des possibles en

suivant un trajet de moindre coût, comme l'ont bien mis en évidence des études sur la psychologie des solutions dans les labyrinthes (Tolman).

On pourra donc appeler légitimement *coût de l'évidence* l'ensemble des efforts qui doivent être faits pour faire passer une phrase mathématique au niveau de l'accord spontané et irréfutable de l'être. Ce sera le coût de la démonstration, ou de l'invention en mathématique, pour le créateur, le coût d'effort pour l'enseigner. Il y a là un principe régulateur de la démarche de l'esprit dans la création ou dans la consommation mathématique.

Les facultés de l'esprit utilisées dans le raisonnement sont analysées par le psychologue en une série de facteurs qui appartiennent à ces concepts imprécis ("fuzzy concepts") de Moles et Zadeh qui font la matière des sciences de l'esprit (Geisteswissenschaften). Quelles que soient les critiques que le psychologue lui-même soit conduit à faire à ces facteurs, elles se groupent autour de pôles d'aptitudes plus ou moins inégalement répartis ches les individus.

Sont entre autres assez bien discernables :

— *la capacité d'abstraction*, celle de raisonner sur des êtres ou des concepts de plus en plus éloignés du réel visible et immédiat. Le mathématicien se situant par définition à un niveau déjà très élevé d'abstraction dans son propre langage (algèbre).

— *la capacité de déduction logique*, ce qu'on appelle volontiers la mécanique du raisonnement ou du calcul algébrique qui est l'aptitude à enclencher des fragments ou des opérations sans erreur et sans déformation les uns au bout des autres.

— *le sentiment de cohérence* ou d'intégration, souvent corrélé fortement au précédent et qui signifie essentiellement la perception d'un désaccord ou d'un illogisme à deux points de plus en plus distants d'une chaîne logique. On le rattachera au concept d'ordre à grande distance.

— *la largeur du champ de conscience*, aptitude à percevoir simultanément un grand nombre d'objets distincts mis à égale portée du regard ou de l'intelligence.

— *l'imagination* ou l'aptitude à proposer un grand nombre d'items diversifiés et à les faire venir sur le devant de la scène de l'esprit.

— *la ténacité*, capacité de suivre jusqu'à son terme l'exécution d'une tâche qu'on s'est imposée soi-même, quels que soient les résultats négatifs des étapes de cette tâche.

— *l'aptitude combinatoire* assez bien corrélée dans la notion de champ de conscience qui est la volonté pour l'esprit d'essayer une série de combinaisons qui couvrent un champ des possibles à partir de l'énonciation des éléments divers de cette combinaison (listing).

Les psychologues sont capables, en principe, de distinguer à l'intérieur d'un test la contribution relative de chacun de ces facteurs et d'énoncer par là des profils intellectuels utilisables. L'heuristique proprement dite rajoute volontiers à l'ensemble de ces facteurs intellectuels une notion qu'elle appelle *créativité.* Nous la définirons ainsi :

La créativité est l'aptitude d'un esprit à réorganiser les éléments du champ de conscience d'une façon originale et susceptible de donner lieu à des opérations dans un quelconque champ opératoire.

Cette définition implique donc l'*existence de deux champs* :

a) *champ de conscience* lui-même constitué par la somme de deux termes :
   - champ de perception (ce qui est effectivement présent dans mon champ de perception ou de vision)
   - connaissances, produits de la mémoire (remémoration) qui sont appelés par mon esprit.

b) *champ opératoire*, celui dans lequel je me sens capable d'agir.

Elle admet que le champ était déjà organisé, que la tâche créatrice consiste à briser cette organisation (principe de recodification de Wertheimer) pour en reconstruire une autre dont la valeur sera mesurée entre autres par son degré d'originalité (ou complexité, ou taux d'information) : il y aurait donc une mesure de cette réorganisation. Mais cette forme nouvelle est soumise à une *contrainte du possible* ($\mu\iota\mu\eta\sigma\iota s$). C'est l'idée d'*opérationnalisme* (Bridgman), capacité d'induire une "action" de l'individu dans le champ opératoire.

Sur le principe d'autorité

Une certaine formation mathématique a donné souvent à la démonstration une trop grande valeur, attribuant à la *rigueur* une importance que le sujet ne possédait pas. Il existe dans le champ de l'esprit une hiérarchisation spontanée de *valeur* des différents éléments de la chaîne du discours qui distingue spontanément les "résultats" et la façon d'y parvenir. *La rigueur doit être une volonté et non une condition.* Il ne devrait y avoir un appel de l'individu à la rigueur qu'à partir de ce qu'il sait déjà ; en fait, la rigueur appartient au luxe de l'esprit. Ce que l'individu désire dans la plupart des cas et tout d'abord, c'est l'*évidence* et la *maîtrise.* L'esprit créateur est parfaitement disposé, dans une mesure raisonnable, à préférer la *compréhension* d'un théorème qui n'est pas au centre de ses préoccupations et de ses conséquences, de façon volontiers intuitive, ou la *manière d'appliquer* une formule que de se charger du poids de sa démonstration, dans la mesure où le théorème ne lui paraît pas invraisemblable. "Avoir plus de soin de la certitude que de l'évidence et de convaincre l'esprit plutôt que de l'éclairer" est le premier défaut dénoncé par la logique de Port Royal.

La notion de vraisemblance, ou de plausibilité, dit Polya, est, semble-t-il, plus importante que celle de rigueur, dans la vie mathématique courante. On peut noter ici que l'idée d'autorité peut être légitimement considérée comme un mécanisme progressif et surtout *itératif* d'acceptation provisoire pour lequel l'individu sait qu'il le remettra en question, un jour, plus tard, à l'époque où *il en éprouvera le besoin*, et ce qu'il demande, c'est que lui soient *laissées ouvertes* les voies d'accès à cette démonstration au jour où il le désirera. Mais pour l'instant il n'en a cure, son désir se situe ailleurs. "Ce qu'on ne sait que par des démonstrations qui ne sont pas fondées sur des raisons matérielles s'échappe aisément et se retrouve difficilement quand il nous est une fois sorti de la mémoire, parce que notre esprit ne nous fournit point de voie pour le retrouver" (Logique de Port Royal, 4ème partie).

L'acceptation du principe d'autorité se présente donc non pas comme un *déni* de l'essence de la découverte mathématique, mais tout au contraire comme une stratégie d'*humilité provisoire* permettant de sérier les difficultés. Il ne se situe pas en conflit avec la *créativité*, mais comme un outil de celle-ci.

Quelques principes d'une heuristique :

a) Un *couple* de deux opposés est plus clair que l'ensemble des deux concepts séparés. Ainsi, on complètera la proposition d'appartenance par celle de non appartenance. On présentera donc les objets par exemples d'oppositions, si besoin est, on leur inventera des symétriques artificiels, quitte à les abandonner quand ils ont joué leur rôle. Les êtres doivent être complétés par leurs antinomies.

b) Idée de *listing* comme répertoire exhaustif d'un ensemble d'éléments possibles qui reporte le jugement vers l'opération : "$\in$ (?)" ou "$\in$", et constituera une fertilisation imaginaire de l'esprit en proposant un procédé pour élargir le champ de conscience par le jeu des *compléments*, et le microplaisir de la collection.

c) La *méthode étymologique* ou de *retraduction*
Pour prendre un exemple du rôle de l'étymologie, on accepte le vocabulaire comme une évocation, une métaphore, où le langage mathématique est prélevé largement dans le langage commun (anneaux, filtres, racine, exponentiel). Il y a à cet égard deux politiques, l'une de dire "ne confondons pas, c'est tout différent" (c'est le purisme mathématique), l'autre va dire "mais oui, c'est bien cela, c'est bien de là que vient ce terme" et de montrer *en quoi* un être mathématique se dérive progressivement du terme *banal* en prenant un sens de plus en plus spécialisé, en y rajoutant des couches de rigueur.

d) La *méthode de l'avocat* : chacun soutient un point de vue contradictoire et se borne à présenter les meilleurs arguments *en faveur de sa* thèse.

e) La *tératologie* : recherche systématique des exemples extravagants.
Exemple : "les foyers d'une ellipse sont les cercles de rayon nul tangents deux fois à l'ellipse et dont la corde des contacts est la directrice", afin de provoquer la curiosité active de l'esprit, dans un mouvement de refus $\rightleftarrows$ acceptation.

f) La *connaissance par l'exception* qui, en montrant le cas excepté, développe dialectiquement, puisqu'elle est l'exception, l'idée de l'item régulier.

g) Un *autre principe régulateur* sera le *principe de plausibilité de Polya*, largement inspiré de la logique du probable de Reichenbach : les conclusions d'une inférence plausible varient d'une façon monotone quand l'une de ses prémisses varie de façon monotone.

L'ensemble des remarques ci-dessus conduit à des propositions pratiques du psychologue de l'heuristique, dans le cadre mathématique il suggèrera par exemple tout d'abord de recenser :

- recettes
- méthodes
- procédés
- attitudes d'esprit
- valeurs

avec des séries d'exemples et une recodification de chacun de ces niveaux de démarche de l'esprit, suffisamment claire pour être rendue évidente à travers d'autres exemples.

Un effort ultérieur de hiérarchisation de ces artifices groupera ceux-ci en fonction de caractères psychologiques tels que :

- la largeur du champ de conscience en se contentant d'une estimation empirique
- le degré de rigueur reposant sur un jugement qui n'est pas arbitraire
- le taux de risque, notion très importante en créativité, c'est-à-dire la probabilité confusément ressentie de ne rien affirmer de stupide ou de tautologique comme conséquence d'une démarche entreprise et poursuivie selon un algorithme
- le coût de la démarche, c'est-à-dire la longueur de la chaîne d'énonciation qu'elle entraîne à partir d'un déclenchement initial
- l'originalité de la démarche, autre sentiment subjectif de surprise de l'esprit devant sa propre production, qui prépare on inhibe la démarche suivante.

Tous ces critères ont un aspect fortement arbitraire, en tout cas mal définissables en termes rigoureux, et si l'on peut soupçonner qu'en certains cas ils soient réductibles à une quelconque "mesure", à tout le moins à une estimation sur une échelle, le psychologue est bien incapable actuellement de fournir ces échelles. Ce serait pourtant une erreur, trop commise par un positivisme intransigeant, que de refuser ces critères sous prétexte qu'ils sont mal formulés et impossibles à quantifier. L'esprit humain les ressent d'une façon plus ou moins intuitive, c'est précisément la tâche de l'heuristique d'essayer de passer de cette intuition à des valeurs opérationnelles.

C'est à la suite de ce recensement et de cette analyse démonstrative que se proposera une stratégie de la *redécouverte* ou de la *microdécouverte* qui peut servir de base à une *didactique active* des mathématiques. "Réduisez les programmes, enseignez les méthodes" disait G. Berger.

Celle-ci cherchera à favoriser le jeu des mises en situation de redécouverte, à constituer son discours, c'est-à-dire ici son programme, de série de *formes ouvertes* proposées dans le champ de conscience et de mettre à portée immédiate de ce champ (domaine de *shifting*) les outils ou éléments permettant de les clore.

Nous conclurons avec Leibniz :

"Il y a une chose plus belle que les plus belles découvertes, c'est la connaissance de la façon selon laquelle on les fait".

BIBLIOGRAPHIE

AN. — *Logique de Port Royal*, T IV
AYER A.J. — *Language, Truth and Logic*, Dover
FAUCHEUX C. et MOSCOVICI S. — *Etudes sur la créativité des groupes*, Bulletin du CERP, 1960, t. IX, n° 1, 11-22
HADAMARD J. — *Psychology of invention in the mathematical field*, Dover, T 102
LANGER S.K. — *Symbolic Logic*, Dover, S 164
MOLES A. — *La création scientifique*, Kister, Genève, 1959
MOLES A. — *Créativité et méthodes d'innovation*, Mame Fayard, 1969
POINCARE H. — *La science et l'hypothèse*, Flammarion
POINCARE H. — *Science et méthode*, Flammarion, 1909
POLYA G. — *Les mathématiques et le raisonnement plausible*, Gauthier Villars, 1958
POLYA G. — *Comment poser et résoudre un problème*, Dunod
RIBOT Th. — *Essai sur l'imagination créative*, Alcan, 1900
THOMSON G. — *The psychology of Thinking*, Pelican, 1965
WERTHEIMER M. — *Productive Thinking*, Harper, 1948.