IMAGE MENTALE

par Pierre JULLIEN

Dans cette rédaction, j'ai suivi au mieux le désordre de mon exposé, mais j'ai dû renoncer à rendre le dialogue, qui souvent s'était instauré. Que ceux qui étaient présents m'en excusent.

Le titre que j'ai donné à G. Glaeser lorsqu'il m'a invité est : image mentale. Ce titre est peut-être mal choisi, car l'objet de ce qui suit est plutôt : *comment appréhende-t-on les objets mathématiques.* C'est l'ébauche d'une réflexion personnelle (n'ayant pas lu grand' chose sur le sujet et n'ayant pas encore eu l'occasion d'en discuter avec d'autres collègues). Je soulèverai certainement plus de questions que je n'apporterai de réponses.

Chacun appréhende les objets mathématiques de sa manière propre et il est très difficile de comprendre comment autrui *sent* les choses. C'est là l'idée de base, dont nous pourrions faire un axiome de départ.

A priori, il y a deux manières d'appréhender les objets mathématiques : la manière *implicite*, c'est-à-dire interne (c'est là que nous parlerons d'*image mentale*) et la manière *explicite*, par le discours, par l'écriture, par les schémas. Il est évidemment plus aisé d'observer la deuxième manière (notamment comment se transmet la mathématique).

En dehors des cours oraux, la mathématique se transmet essentiellement par l'écriture et malheureusement par une écriture, qui a pris des habitudes : les auteurs se croient obligés d'écrire dans un certain style plus ou moins conventionnel. De ce fait, ils ne transmettent qu'une *petite partie* de ce qu'ils ont à dire, de ce qu'ils ont en eux. Il y a certainement là une réflexion à mener et des progrès à faire. On ne peut que regretter que la mathématique soit exposée de manière déductive (quasiment à l'exclusion de toute autre manière) de telle sorte que les idées créatrices ont disparu du texte final, ce qui oblige le lecteur à redécouvrir le cheminement de l'auteur (si il y arrive). Certes je ne propose pas d'abandonner l'exposé déductif, mais je souhaite que parallèlement il y ait d'autres modes d'exposition.

Dans beaucoup de cours et de manuels, lorsqu'on aborde un nouvel être mathématique, on le fait au travers d'une définition. On crée un mot nouveau et, à partir de là, il s'agit de se créer un concept de manière interne. A moins d'être un *petit génie*, la définition seule ne permet pas de se faire une idée d'un concept nouveau. D'autant plus que bien souvent la définition est donnée sans redondance. Un concept nouveau se crée à partir d'exemples et c'est la richesse des premiers exemples donnés, qui fera que le concept va être correctement assimilé ou pas. Des exemples du genre : "en particulier l'ensemble vide répond à la définition" me paraissent tuer dès le départ la création d'une bonne image mentale par un phénomène de blocage psychologique. On a un mot, mais on n'y a rien accroché. Pour que se crée d'emblée une image mentale à peu près propre, il est nécessaire que les premiers exemples soient *simples* et cependant *assez riches* pour contenir en germe tout ce qu'il y a de général dans le concept introduit.

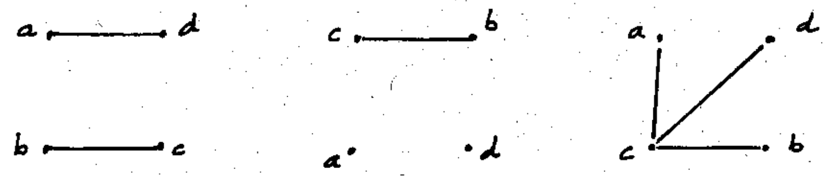
De toute manière, on ne peut créer un concept à partir de rien. On n'introduira le mot "groupe", que lorsque la nécessité s'en fera sentir, c'est-à-dire lorsqu'on aura suffisamment rencontré de groupes (sans l'avoir dit) et qu'il y a lieu de rassembler sous une même idée des êtres apparamment différents mais analogues. Il s'agira de faire la liste des exemples connus et de présenter quelques exemples nouveaux. A ce moment seulement on donnera une définition et quelques contre-exemples.

En ce qui concerne les images explicites, je pense qu'un aspect de la bonne mathématique est la découverte des bonnes écritures. C'est-à-dire des écritures qui véhiculent au mieux les idées de base et qui en quelque sorte sont des expressions matérielles des concepts en jeu, auxquels à la limite elles se substituent, tant est forte notre envie de manipuler des objets concrets.

Evidemment le choix des écritures varie avec les buts poursuivis. Il n'y a pas d'écriture universelle, ni une meilleure écriture pour un concept donné. Il y a une évolution des écritures fonction du niveau d'appréhension du concept en jeu et du problème à résoudre.

A titre d'illustration, voici un exemple vécu. A un groupe de normaliens, j'avais fait comprendre (un peu) le concept d'isomorphisme de deux relations et me proposais de mettre en évidence le concept de *type de relation* (pour un ensemble bien déterminé de relations, j'appelle *type* une classe d'isomorphie). L'ensemble des relations choisi est celui des relations symétriques et sans boucle sur quatre objets a, b, c, d. Je représente les objets par des points, disposés par commodité aux sommets d'un carré, et une relation

en les joignant par certains traits sans flèche. Par exemple :



Pour une relation, je demande de trouver toutes les relations isomorphes et d'en schématiser le type. Mon but non avoué est d'expliciter toutes les relations de l'ensemble choisi (il y en a 64), de les regrouper par types (il y en a 11) et de comprendre pourquoi chaque type a un nombre d'éléments (1, 3, 4, 6 ou 12) diviseur de 12.

Nous voilà coincés ! Je m'aperçois que les normaliens ne me suivent pas, au niveau du langage, de la schématisation. Ils ne voient pas clairement que ce sont là :

deux représentations de la même relation,
ou là :

deux représentations d'un même type.

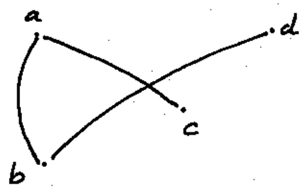
Que faire ? Je propose de distinguer les objets abstraits : relations et types, de leurs représentations. Nous convenons de manipuler quatre sortes d'objets : les schèmes, les cadres, les relations, les types.

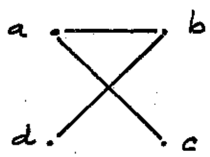
Un *schème* (au sens où on l'entend ici) est un dessin constitué des quatre sommets d'un même carré élémentaire de la feuille de papier quadrillé, étiquetés par les lettres a, b, c, d éventuellement reliés par des traits rectilignes.

Un *cadre* est un dessin constitué des quatre sommets d'un même carré élémentaire de la feuille de papier quadrillé, éventuellement reliés par des traits rectilignes. Autrement dit, un cadre peut s'obtenir à partir d'un schème en effaçant les étiquettes des sommets.

Il y a une application naturelle γ de l'ensemble des schèmes dans l'ensemble des cadres. On parlera du cadre d'un schème.

Une *relation* est un être abstrait représentable par des schèmes, mais peut être aussi de toute autre manière. Par exemple, le dessin ci-dessous, qui n'est pas un schème, peut tout comme la liste (ab, ac, bd) représenter la relation que représente le schème





Il y a une application naturelle ρ de l'ensemble des schèmes dans l'ensemble des relations. On parlera de la relation d'un schème (et non pas du schème d'une relation !).

Un *type* est un ensemble de relations isomorphes, c'est un être abstrait représentable par des cadres, ou de toute autre manière, par exemple par un de ses éléments, un schème.

Il y a deux applications naturelles g et r de l'ensemble des cadres et de l'ensemble des relations dans l'ensemble des types. On parlera du type d'un cadre, du type d'une relation.

Œla se résume dans le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\text{représentations :} & \text{Schèmes} \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\rho"'] \arrow[dr, "\tau"] & \text{Cadres} \arrow[d, "g"] \\
\text{êtres mathématiques :} & \text{Relations} \arrow[r, "r"] & \text{Types}
\end{tikzcd}$$

On constate que $r \circ \rho = g \circ \gamma$. C'est-à-dire qu'il y a une application τ de l'ensemble des schèmes dans l'ensemble des types, telle que le type d'un schème est tout aussi bien le type de la relation de ce schème, que le type de son cadre.

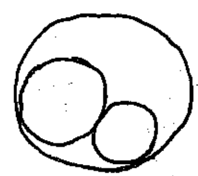
Remarquons, en passant, que ce diagramme reflète une situation combinatoire assez riche. L'application γ est équilibrée en ce

sens que deux cadres quelconques ont des images inverses de même cardinal (24 ici). Il en est de même de l'application ρ et il est facile pour les équivalences associées à ces deux applications de mettre en évidence des systèmes de représentants distincts.

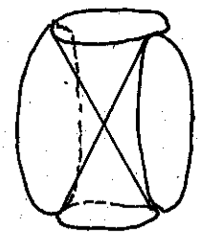
D'avoir *distingué* pour un instant *les objets de leurs représentations* a permis une meilleure compréhension des concepts d'application et de type et d'aborder la suite de l'étude. On peut se permettre la confusion entre l'objet et sa représentation à partir du moment où on domine suffisamment le concept en jeu. C'est-à-dire qu'à la lecture d'un dessin ce n'est pas le dessin qui est perçu, mais l'être qu'il représente. Ce n'était initialement pas le cas chez les normaliens. Malheureusement, on n'appréhende les objets que par les représentations que l'on en fait. D'où l'importance pour transmettre un concept d'en proposer diverses représentations avant de s'arrêter à celle que l'on juge la plus commode.

Venons-en aux difficultés à manipuler un objet mathématique abstrait que l'on n'a pas totalement intégré. Lorsque l'image mentale est insuffisante, il se produit des erreurs. Voici un exemple :

Il s'agissait de cônes de révolution de sommet O tangents deux à deux. J'avais fait le transfert suivant : remplacer un cône de révolution par sa trace sur la sphère unité ; ainsi pour des cônes tangents, j'aurai des cercles tangents. Il me suffisait de regarder d'un côté puisqu'il y avait symétrie par rapport à O et finalement sur ma feuille de papier, je faisais le dessin ci-contre, tant est forte l'envie d'avoir une représentation imagée.



Grosso modo, j'avais pris pour image mentale d'un cône de révolution l'image que j'avais d'un cercle dans le plan. Cette image est nettement insuffisante et je suis passé à côté du fait qu'il existe des cônes de révolution bitangents.



Je n'avais, bien sûr, jamais vu de cercles bitangents dans le plan !

Insistons sur le fait que lors de l'élaboration d'une image mentale, il y a bien souvent un *phénomène de transfert*, c'est-à-dire accrochage de faits nouveaux à des faits déjà connus. Evidemment un transfert pur et simple n'est valable que dans la mesure où il n'y a *ni perte, ni supplément d'information.* Dans l'exemple cité, il y a eu perte d'information au moment où j'ai substitué à l'image d'un cône l'image d'un cercle. C'est là la source des erreurs ultérieures. Au point de vue du comportement, c'est le fait de décider d'une telle substitution qui est très important.

Pour juger du degré de complexité d'un être mathématique, il me paraît intéressant de regarder du côté de l'informatique, car là on est amené à matérialiser les objets mathématiques. Comment sera engrangée une relation binaire ? Ce sera un tableau booléen à deux arguments. Comment sera engrangée une application ? Ce sera une procédure. C'est-à-dire un sous-programme qui, lors de son activation, permet d'obtenir l'image de x à partir de x .

Exemple :

x $\mapsto$ si x est pair alors x+2 sinon si x = 1 alors O sinon x − 2

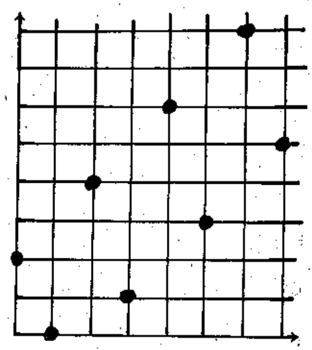
On constate là, qu'au niveau de la manipulation, une application n'est pas une relation. Cependant, on continue à enseigner qu'une application est une relation fonctionnelle. Evidemment ce point de vue est esthétique et rassurant pour l'esprit, mais il est tout à fait en contradiction avec notre comportement profond. La réflexion sur la manière dont on traite les objets mathématiques au point de vue informatique doit amener à une réflexion sur la manière d'introduire ces concepts dans l'enseignement mathématique.

Pour ma part, les concepts d'application et de relation s'appliquent à des objectifs tout à fait différents et je me refuse à enseigner qu'une application est une relation particulière. Au contraire à la limite une relation est une application à valeurs dans $\{$ VRAI, FAUX $\}$, autrement dit, une relation est une application particulière. De ce fait, je considère que le concept d'application est premier par rapport au concept de relation.

Revenons à l'application donnée en exemple ci-dessus. Quelle est votre première réaction à son égard, sans savoir à priori ce que vous devez en faire ? Vous cherchez à l'appréhender un peu mieux que par sa seule définition, de manière plus globale, par une représentation, par une image mentale.

Voici quelques représentations standard :

0 $\longmapsto$ 2
1 $\longmapsto$ 0
2 $\longmapsto$ 4
3 $\longmapsto$ 1
4 $\longmapsto$ 6
5 $\longmapsto$ 3
.
.
.



Il serait intéressant que chacun d'entre nous puisse raconter ce qui se passe dans sa tête. Voici ce qui se passe pour moi.

1er temps

2ème temps

3ème temps

Le résultat me paraît embrouillé. J'harmonise.

Voilà l'image mentale que j'ai construite. Attention ! Elle m'est personnelle, elle me satisfait. Peut-être ne convient-elle pas à d'autres ? Peu importe, ce n'est pas son but.

Evidemment le niveau d'élaboration de l'image mentale dépend des objectifs poursuivis. Cependant, il y a un niveau minimum d'enregistrement au dessous duquel il n'y a pas d'appréhension. (Lorsqu'on reçoit un dossier, si on n'y jette pas un coup d'oeil pour avoir une idée de son contenu avant de le mettre en réserve, autant le mettre directement dans la corbeille à papiers. En effet, il ne servirait à rien de le mettre en réserve en ignorant ce qu'il contient, car incapable de juger de son utilité on n'irait jamais le chercher). Chacun est juge de ce niveau minimum et de ses exigences. Le rôle du professeur est certainement de faire prendre conscience à ses élèves de ce phénomène en les aidant à *se fabriquer des images mentales satisfaisantes.*

Pour nous, en évoluant, notre expérience nous amène à satisfaire à moindre frais une plus grande exigence. Cependant, nous ne pouvons jamais dire que nous possédons à fond une certaine théorie. A tous les niveaux,la connaissance est subjective et il est difficile d'être soi-même conscient de la solidité de nos acquisitions. Ou bien on utilise un concept insuffisamment assimilé (je me souviens avoir fait une démonstration à coups d'ultrafiltres ... et m'être aperçu, trois jours après, qu'elle était fausse) ou inversement, on ne se sert jamais de certains outils, car on s'imagine ne pas les posséder suffisamment. Je pense que la discussion personnelle d'individu à individu est très profitable pour que chacun puisse éventuellement *modifier ses images mentales* en entrevoyant de quelle manière son interlocuteur sent les choses. Pour un même concept, l'image mentale ne doit pas être une seule image, mais une collection d'exemples et contre-exemples s'enchevêtrant les uns les autres. Cette collection s'enrichira au contact des autres.

Un collègue a soulevé le problème de n'introduire dans un même discours qu'un nombre restreint de concepts nouveaux. Je pense que tout le monde ici est d'accord avec sa proposition de ne pas dépasser par heure de cours trois sigles ou mots nouveaux. Evoquons un problème un peu voisin, celui de la complexité. Pour moi la complexité n'est que relative et n'apparaît que lors de l'élaboration des concepts, car à la limite lorsqu'un concept est totalement assimilé, le problème de sa complexité ne se pose plus. Un concept nouveau s'élabore à partir de concepts déjà acquis.
Imaginons que l'on possède les concepts d'entier et de multiplication dans les entiers, et qu'il s'agisse d'introduire le concept de multiple. Comment mesurer la complexité relative ? Je propose de se reporter à la définition formalisée :

a est multiple de b si et seulement si il existe k tel que $a = k\,b$.

Cette définition comprend essentiellement un quantificateur (existentiel).

Je crois que le niveau de complexité d'un concept γ par rapport à d'autres concepts α_i déjà assimilés est directement lié à

l'architecture de la formule choisie pour définir γ en fonction des α_i et principalement dans cette formule au nombre d'alternance entre les quantificateurs universels et les quantificateurs existentiels. C'est un non sens pédagogique que de présenter la continuité d'une application de **R** dans **R** par une formule contenant trois alternances de quantificateurs à des élèves chez qui les concepts de réel, d'application, de valeur absolue, de majoration ne sont pas suffisamment assimilés.