IREM L-1372

NUMÉRO SPÉCIAL

BULLETIN INTER IREM

Compte-rendu du colloque organisé par l'I.R.E.M de Strasbourg à ALBE sur l'HEURISTIQUE

sommaire

Pierre Jullien : **Image mentale** 3
A. Moles : **Psychologie de la découverte dans le domaine mathématique** 11
Georges Glaeser : **L'observation clinique des comportements heuristiques** 29
Nicole Bopp : **Un exemple d'observation d'élèves cherchant un problème** 39
Elisabeth Khalili : **Observation d'un groupe d'étudiants** 42
P. Deschaseaux : **Jeu de mots** 44
G. Audibert, A. Bantegnie, N. Bertrand, L. Higounet, M. Janvier et Y. Vache : **Travail de recherche en heuristique à l'IREM de Montpellier** 52
Guy Hirsch : **Heuristique et méthodologie mathématique** 56
Compte rendu du groupe "manipulations dans l'enseignement secondaire" 70
Banque du problème 75
Liste des participants 87

Troisième année — Mars 1975
Edité par l'IREM de Lyon

ASSEMBLEE DES DIRECTEURS D'I.R.E.M.

Président : JULLIEN, IREM de Grenoble tél. (76) 87.45.61
29, rue des Eaux Claires 38100 Grenoble tél. (76) 21.01.75.

Vice-présidents :
GABORIEAU, IREM de Rennes tél. (99) 36.48.15
(99) 00.11.76
OVAERT, IREM de Nancy tél. (28) 27.38.99
REVUZ : IREM de Paris — Université de Paris 7 — tél. (1) 336.25.25 postes 53-83, 53-84, 53-85, 53-86
16, rue de Rome 78 Les Essarts le Roi tél. 483.60.55

Secrétaires :
BAREIL, IREM de Toulouse tél. (61) 52.14.14
7, rue des Pivoines 31400 Toulouse tél. (61) 52.74.33
BOROWCZYK, IREM de Poitiers tél. (49) 46.26.30
1, rue de Provence 86000 Poitiers.
GLAYMANN, IREM de Lyon tél. (78) 52.03.37
14, rue de Chavril 69110 Sainte-Foy tél. (78) 25.69.29

COMITE DE REDACTION DU BULLETIN

Directeur de la Publication : M. GLAYMANN
Directeur adjoint : A. MYX

J. Cl. FONTAINE	(Besançon)	M. BARDY	(Nancy)
P. LAILHEUGUE	(Bordeaux)	M. MERIGOT	(Nice)
M. BOCLE	(Brest)	M. MOULIS	(Orléans)
E. LEHMANN	(Caen)	F. GOUZOU	(Paris)
G. BRACQUEMOND	(Clermont-Ferrand)	Mlle WERQUIN	(Paris Nord)
A. BESSOT	(Grenoble)	J. FORT	(Poitiers)
M. LOUIS	(Lille)	Mme PERRIER	(Rennes)
D. FREDON	(Limoges)	M. CHOUCHAN	(Rouen)
D. PICHOD	(Lyon)	Mme LEITE-LOPES	(Strasbourg)
M. CAR	(Marseille)	H. BAREIL	(Toulouse)
M. ROUMIEU	(Montpellier)		

Le Directeur de la publication : Maurice GLAYMANN
Imprimerie Vaudrey — 74, avenue Jean Jaurès — 69007 Lyon

IMAGE MENTALE

par Pierre JULLIEN

Dans cette rédaction, j'ai suivi au mieux le désordre de mon exposé, mais j'ai dû renoncer à rendre le dialogue, qui souvent s'était instauré. Que ceux qui étaient présents m'en excusent.

Le titre que j'ai donné à G. Glaeser lorsqu'il m'a invité est : image mentale. Ce titre est peut-être mal choisi, car l'objet de ce qui suit est plutôt : *comment appréhende-t-on les objets mathématiques.* C'est l'ébauche d'une réflexion personnelle (n'ayant pas lu grand' chose sur le sujet et n'ayant pas encore eu l'occasion d'en discuter avec d'autres collègues). Je soulèverai certainement plus de questions que je n'apporterai de réponses.

Chacun appréhende les objets mathématiques de sa manière propre et il est très difficile de comprendre comment autrui *sent* les choses. C'est là l'idée de base, dont nous pourrions faire un axiome de départ.

A priori, il y a deux manières d'appréhender les objets mathématiques : la manière *implicite*, c'est-à-dire interne (c'est là que nous parlerons d'*image mentale*) et la manière *explicite*, par le discours, par l'écriture, par les schémas. Il est évidemment plus aisé d'observer la deuxième manière (notamment comment se transmet la mathématique).

En dehors des cours oraux, la mathématique se transmet essentiellement par l'écriture et malheureusement par une écriture, qui a pris des habitudes : les auteurs se croient obligés d'écrire dans un certain style plus ou moins conventionnel. De ce fait, ils ne transmettent qu'une *petite partie* de ce qu'ils ont à dire, de ce qu'ils ont en eux. Il y a certainement là une réflexion à mener et des progrès à faire. On ne peut que regretter que la mathématique soit exposée de manière déductive (quasiment à l'exclusion de toute autre manière) de telle sorte que les idées créatrices ont disparu du texte final, ce qui oblige le lecteur à redécouvrir le cheminement de l'auteur (si il y arrive). Certes je ne propose pas d'abandonner l'exposé déductif, mais je souhaite que parallèlement il y ait d'autres modes d'exposition.

Dans beaucoup de cours et de manuels, lorsqu'on aborde un nouvel être mathématique, on le fait au travers d'une définition. On crée un mot nouveau et, à partir de là, il s'agit de se créer un concept de manière interne. A moins d'être un *petit génie*, la définition seule ne permet pas de se faire une idée d'un concept

nouveau. D'autant plus que bien souvent la définition est donnée sans redondance. Un concept nouveau se crée à partir d'exemples et c'est la richesse des premiers exemples donnés, qui fera que le concept va être correctement assimilé ou pas. Des exemples du genre : "en particulier l'ensemble vide répond à la définition" me paraissent tuer dès le départ la création d'une bonne image mentale par un phénomène de blocage psychologique. On a un mot, mais on n'y a rien accroché. Pour que se crée d'emblée une image mentale à peu près propre, il est nécessaire que les premiers exemples soient *simples* et cependant *assez riches* pour contenir en germe tout ce qu'il y a de général dans le concept introduit.

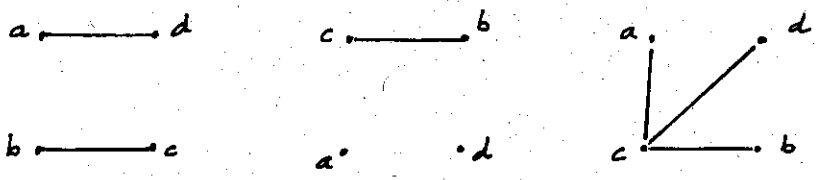
De toute manière, on ne peut créer un concept à partir de rien. On n'introduira le mot "groupe", que lorsque la nécessité s'en fera sentir, c'est-à-dire lorsqu'on aura suffisamment rencontré de groupes (sans l'avoir dit) et qu'il y a lieu de rassembler sous une même idée des êtres apparamment différents mais analogues. Il s'agira de faire la liste des exemples connus et de présenter quelques exemples nouveaux. A ce moment seulement on donnera une définition et quelques contre-exemples.

En ce qui concerne les images explicites, je pense qu'un aspect de la bonne mathématique est la découverte des bonnes écritures. C'est-à-dire des écritures qui véhiculent au mieux les idées de base et qui en quelque sorte sont des expressions matérielles des concepts en jeu, auxquels à la limite elles se substituent, tant est forte notre envie de manipuler des objets concrets.

Evidemment le choix des écritures varie avec les buts poursuivis. Il n'y a pas d'écriture universelle, ni une meilleure écriture pour un concept donné. Il y a une évolution des écritures fonction du niveau d'appréhension du concept en jeu et du problème à résoudre.

A titre d'illustration, voici un exemple vécu. A un groupe de normaliens, j'avais fait comprendre (un peu) le concept d'isomorphisme de deux relations et me proposais de mettre en évidence le concept de *type de relation* (pour un ensemble bien déterminé de relations, j'appelle *type* une classe d'isomorphie). L'ensemble des relations choisi est celui des relations symétriques et sans boucle sur quatre objets a, b, c, d. Je représente les objets par des points, disposés par commodité aux sommets d'un carré, et une relation

en les joignant par certains traits sans flèche. Par exemple :



Pour une relation, je demande de trouver toutes les relations isomorphes et d'en schématiser le type. Mon but non avoué est d'expliciter toutes les relations de l'ensemble choisi (il y en a 64), de les regrouper par types (il y en a 11) et de comprendre pourquoi chaque type a un nombre d'éléments (1, 3, 4, 6 ou 12) diviseur de 12.

Nous voilà coincés ! Je m'aperçois que les normaliens ne me suivent pas, au niveau du langage, de la schématisation. Ils ne voient pas clairement que ce sont là :

deux représentations de la même relation,
ou là :

deux représentations d'un même type.

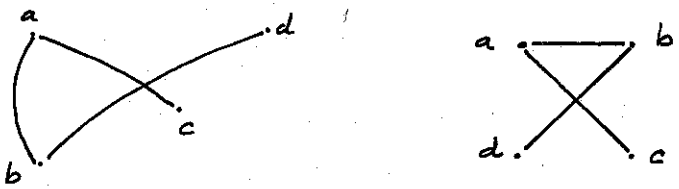
Que faire ? Je propose de distinguer les objets abstraits : relations et types, de leurs représentations. Nous convenons de manipuler quatre sortes d'objets : les schèmes, les cadres, les relations, les types.

Un *schème* (au sens où on l'entend ici) est un dessin constitué des quatre sommets d'un même carré élémentaire de la feuille de papier quadrillé, étiquetés par les lettres a, b, c, d éventuellement reliés par des traits rectilignes.

Un *cadre* est un dessin constitué des quatre sommets d'un même carré élémentaire de la feuille de papier quadrillé, éventuellement reliés par des traits rectilignes. Autrement dit, un cadre peut s'obtenir à partir d'un schème en effaçant les étiquettes des sommets.

Il y a une application naturelle γ de l'ensemble des schèmes dans l'ensemble des cadres. On parlera du cadre d'un schème.

Une *relation* est un être abstrait représentable par des schèmes, mais peut être aussi de toute autre manière. Par exemple, le dessin ci-dessous, qui n'est pas un schème, peut tout comme la liste (ab, ac, bd) représenter la relation que représente le schème



Il y a une application naturelle ρ de l'ensemble des schèmes dans l'ensemble des relations. On parlera de la relation d'un schème (et non pas du schème d'une relation !).

Un *type* est un ensemble de relations isomorphes, c'est un être abstrait représentable par des cadres, ou de toute autre manière, par exemple par un de ses éléments, un schème.

Il y a deux applications naturelles g et r de l'ensemble des cadres et de l'ensemble des relations dans l'ensemble des types. On parlera du type d'un cadre, du type d'une relation.

Cela se résume dans le diagramme suivant :

$$\begin{array}{lcccc} \text{représentations} & : \text{Schèmes} & \xrightarrow{\gamma} & \text{Cadres} & \\ & \rho \downarrow & \searrow^{\tau} & \downarrow g & \\ \text{êtres mathématiques} & : \text{Relations} & \xrightarrow{r} & \text{Types} & \end{array}$$

On constate que $r \circ \rho = g \circ \gamma$. C'est-à-dire qu'il y a une application τ de l'ensemble des schèmes dans l'ensemble des types, telle que le type d'un schème est tout aussi bien le type de la relation de ce schème, que le type de son cadre.

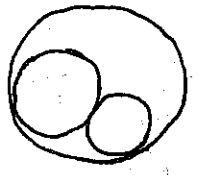
Remarquons, en passant, que ce diagramme reflète une situation combinatoire assez riche. L'application γ est équilibrée en ce

sens que deux cadres quelconques ont des images inverses de même cardinal (24 ici). Il en est de même de l'application ρ et il est facile pour les équivalences associées à ces deux applications de mettre en évidence des systèmes de représentants distincts.

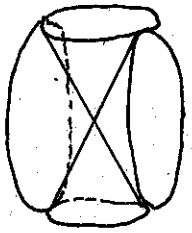
D'avoir *distingué* pour un instant *les objets de leurs représentations* a permis une meilleure compréhension des concepts d'application et de type et d'aborder la suite de l'étude. On peut se permettre la confusion entre l'objet et sa représentation à partir du moment où on domine suffisamment le concept en jeu. C'est-à-dire qu'à la lecture d'un dessin ce n'est pas le dessin qui est perçu, mais l'être qu'il représente. Ce n'était initialement pas le cas chez les normaliens. Malheureusement, on n'appréhende les objets que par les représentations que l'on en fait. D'où l'importance pour transmettre un concept d'en proposer diverses représentations avant de s'arrêter à celle que l'on juge la plus commode.

Venons-en aux difficultés à manipuler un objet mathématique abstrait que l'on n'a pas totalement intégré. Lorsque l'image mentale est insuffisante, il se produit des erreurs. Voici un exemple :

Il s'agissait de cônes de révolution de sommet O tangents deux à deux. J'avais fait le transfert suivant : remplacer un cône de révolution par sa trace sur la sphère unité ; ainsi pour des cônes tangents, j'aurai des cercles tangents. Il me suffisait de regarder d'un côté puisqu'il y avait symétrie par rapport à O et finalement sur ma feuille de papier, je faisais le dessin ci-contre, tant est forte l'envie d'avoir une représentation imagée.



Grosso modo, j'avais pris pour image mentale d'un cône de révolution l'image que j'avais d'un cercle dans le plan. Cette image est nettement insuffisante et je suis passé à côté du fait qu'il existe des cônes de révolution bitangents.



Je n'avais, bien sûr, jamais vu de cercles bitangents dans le plan !

Insistons sur le fait que lors de l'élaboration d'une image mentale, il y a bien souvent un *phénomène de transfert*, c'est-à-dire accrochage de faits nouveaux à des faits déjà connus. Evidemment un transfert pur et simple n'est valable que dans la mesure où il n'y a *ni perte, ni supplément d'information.* Dans l'exemple cité, il y a eu perte d'information au moment où j'ai substitué à l'image d'un cône l'image d'un cercle. C'est là la source des erreurs ultérieures. Au point de vue du comportement, c'est le fait de décider d'une telle substitution qui est très important.

Pour juger du degré de complexité d'un être mathématique, il me paraît intéressant de regarder du côté de l'informatique, car là on est amené à matérialiser les objets mathématiques. Comment sera engrangée une relation binaire ? Ce sera un tableau booléen à deux arguments. Comment sera engrangée une application ? Ce sera une procédure. C'est-à-dire un sous-programme qui, lors de son activation, permet d'obtenir l'image de x à partir de x .

Exemple :

$x \mapsto$ si x est pair alors x+2 sinon si $x = 1$ alors O sinon $x - 2$

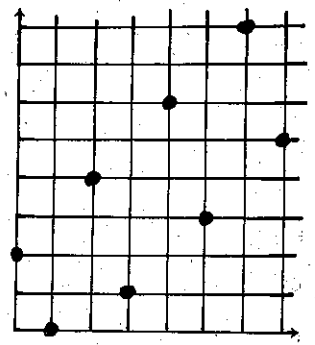
On constate là, qu'au niveau de la manipulation, une application n'est pas une relation. Cependant, on continue à enseigner qu'une application est une relation fonctionnelle. Evidemment ce point de vue est esthétique et rassurant pour l'esprit, mais il est tout à fait en contradiction avec notre comportement profond. La réflexion sur la manière dont on traite les objets mathématiques au point de vue informatique doit amener à une réflexion sur la manière d'introduire ces concepts dans l'enseignement mathématique.

Pour ma part, les concepts d'application et de relation s'appliquent à des objectifs tout à fait différents et je me refuse à enseigner qu'une application est une relation particulière. Au contraire à la limite une relation est une application à valeurs dans $\{$ VRAI, FAUX $\}$, autrement dit, une relation est une application particulière. De ce fait, je considère que le concept d'application est premier par rapport au concept de relation.

Revenons à l'application donnée en exemple ci-dessus. Quelle est votre première réaction à son égard, sans savoir à priori ce que vous devez en faire ? Vous cherchez à l'appréhender un peu mieux que par sa seule définition, de manière plus globale, par une représentation, par une image mentale.

Voici quelques représentations standard :

$0 \longmapsto 2$
$1 \longmapsto 0$
$2 \longmapsto 4$
$3 \longmapsto 1$
$4 \longmapsto 6$
$5 \longmapsto 3$
.
.
.



Il serait intéressant que chacun d'entre nous puisse raconter ce qui se passe dans sa tête. Voici ce qui se passe pour moi.

1er temps

2ème temps

3ème temps

Le résultat me paraît embrouillé. J'harmonise.

Voilà l'image mentale que j'ai construite. Attention ! Elle m'est personnelle, elle me satisfait. Peut-être ne convient-elle pas à d'autres ? Peu importe, ce n'est pas son but.

Evidemment le niveau d'élaboration de l'image mentale dépend des objectifs poursuivis. Cependant, il y a un niveau minimum d'enregistrement au dessous duquel il n'y a pas d'appréhension. (Lorsqu'on reçoit un dossier, si on n'y jette pas un coup d'oeil pour avoir une idée de son contenu avant de le mettre en réserve, autant le mettre directement dans la corbeille à papiers. En effet, il ne servirait à rien de le mettre en réserve en ignorant ce qu'il contient, car incapable de juger de son utilité on n'irait jamais

le chercher). Chacun est juge de ce niveau minimum et de ses exigences. Le rôle du professeur est certainement de faire prendre conscience à ses élèves de ce phénomène en les aidant à *se fabriquer des images mentales satisfaisantes.*

Pour nous, en évoluant, notre expérience nous amène à satisfaire à moindre frais une plus grande exigence. Cependant, nous ne pouvons jamais dire que nous possédons à fond une certaine théorie. A tous les niveaux,la connaissance est subjective et il est difficile d'être soi-même conscient de la solidité de nos acquisitions. Ou bien on utilise un concept insuffisamment assimilé (je me souviens avoir fait une démonstration à coups d'ultrafiltres ... et m'être aperçu, trois jours après, qu'elle était fausse) ou inversement, on ne se sert jamais de certains outils, car on s'imagine ne pas les posséder suffisamment. Je pense que la discussion personnelle d'individu à individu est très profitable pour que chacun puisse éventuellement *modifier ses images mentales* en entrevoyant de quelle manière son interlocuteur sent les choses. Pour un même concept, l'image mentale ne doit pas être une seule image, mais une collection d'exemples et contre-exemples s'enchevêtrant les uns les autres. Cette collection s'enrichira au contact des autres.

Un collègue a soulevé le problème de n'introduire dans un même discours qu'un nombre restreint de concepts nouveaux. Je pense que tout le monde ici est d'accord avec sa proposition de ne pas dépasser par heure de cours trois sigles ou mots nouveaux. Evoquons un problème un peu voisin, celui de la complexité. Pour moi la complexité n'est que relative et n'apparaît que lors de l'élaboration des concepts, car à la limite lorsqu'un concept est totalement assimilé, le problème de sa complexité ne se pose plus. Un concept nouveau s'élabore à partir de concepts déjà acquis. Imaginons que l'on possède les concepts d'entier et de multiplication dans les entiers, et qu'il s'agisse d'introduire le concept de multiple. Comment mesurer la complexité relative ? Je propose de se reporter à la définition formalisée :

a est multiple de b si et seulement si il existe k tel que $a = k\,b$.

Cette définition comprend essentiellement un quantificateur (existentiel).

Je crois que le niveau de complexité d'un concept γ par rapport à d'autres concepts α_i déjà assimilés est directement lié à

l'architecture de la formule choisie pour définir γ en fonction des α_i et principalement dans cette formule au nombre d'alternance entre les quantificateurs universels et les quantificateurs existentiels. C'est un non sens pédagogique que de présenter la continuité d'une application de **R** dans **R** par une formule contenant trois alternances de quantificateurs à des élèves chez qui les concepts de réel, d'application, de valeur absolue, de majoration ne sont pas suffisamment assimilés.

PSYCHOLOGIE DE LA DECOUVERTE DANS LE DOMAINE MATHEMATIQUE

par A. MOLES

L'enseignement mathématique se veut de plus en plus actif. Il cherche en cela à appliquer la remarque que les *êtres de raison* se fixent d'autant mieux dans l'esprit qu'ils sont plus une secrétion de notre propre activité mentale et par là, parties intégrantes de notre esprit raisonnant ; non plus insertions ou blocs surajoutés, mais produits de liens intimes avec notre être et ses connaissances. D'où l'accent, mis récemment par tous ceux qui de près ou de loin s'intéressent à la manière d'apprendre, sur cette partie de la psychologie appelée "heuristique" qui traite de la manière dont s'effectue la "découverte", la réalisation d'une forme nouvelle, l'invention, en vue de l'appliquer à l'enseignement même des mathématiques par des méthodes actives.

Il s'agit de savoir quel pourcentage, quelle part d'invention provoquée, encadrée, guidée, peut être introduite dans le processus global d'apprentissage.

Certes les processus mentaux que décrit l'heuristique dépendent largement du domaine dans lequel ils s'exercent, mais c'est un des premiers résultats de cette science que de montrer qu'ils en dépendent beaucoup moins qu'on aurait pu le croire à priori. Le praticien croit souvent que mentalité et comportement du mathématicien, de l'artiste, du chimiste sont fondamentalement distincts : ce n'est pas le cas, il n'existe qu'*une* seule science qui exemplifie l'existence de mêmes "méthodes de découvertes" ou de ces chemins parcourus par la pensée pour parvenir à un but, ces "systèmes d'opérations extériorisables qui font mieux que l'esprit le travail de l'esprit" (Valéry).

Les processus mentaux dépendent certes de ce qui est présent dans le champ de conscience, de l'environnement phénoménal de celui qui les exerce. *Mais*, et c'est un des résultats de l'heuristique, ils n'en dépendent pas autant qu'on le pense généralement.

Les *mécanismes de l'esprit sont plus ou moins indépendants de l'objet* sur lequel ils s'exercent. Il existe, en d'autres termes, des *processus mentaux identiques dans des domaines différents*, à la condition d'avoir réduit les problèmes à un "stade canonique", celui où précisément l'esprit est confronté avec un assemblage d'éléments du champ de conscience et, à partir de ce moment, agit de façon autonome en se dégageant des facteurs psychologiques liés à la "Nature des choses". Ce qui est important, c'est que ce mouvement d'abstraction de l'esprit n'est pas identique à ce qu'on appelle l'abstraction formelle, en particulier celle de la pensée mathématique, nous l'appellerons "abstraction phénoménologique".

Par ailleurs, et c'est un deuxième résultat de l'heuristique, ces régularités dans la démarche de l'esprit peuvent être décrites, cataloguées et situées les unes par rapport aux autres ; c'est ce que l'on appellera les *méthodes de découverte.* D'où l'idée d'étudier, de décrire ces mécanismes et de les enseigner, tantôt par des exemples passifs, tantôt par des pratiques en donnant à celui qui doit apprendre, l'occasion d'exercer une activité inventive dûment préparée. Les individus y réussissent plus ou moins bien, ils manifestent plus ou moins d'aptitude à imaginer des solutions à un problème, et il apparaît qu'un enseignement comme celui de la mathématique doit tenir compte d'une différenciation des individus en fonction de leurs aptitudes et de leurs buts.

L'unicité des processus de la pensée créatrice, cette relative indépendance par rapport à l'objet, n'apparaît donc qu'à la condition que l'on remonte à l'étape où précisément la pensée réduit la diversité de l'Univers à une *situation commune.*

En fait, c'est précisément à ce niveau que l'heuristique déterminera des *images mentales*, largement "illogiques", faiblement consistantes mais *prégnantes* au sens de la théorie de la forme et qui, par leur équivoque et leur imprécision même, appellent un travail de l'esprit pour résoudre les ambiguïtés. Elle attire entre autres l'attention sur les trois concepts de *Niveau*, de *Rigueur*, de *Distance d'ordre.*

Ainsi le psychologue découvre qu'il existe différents niveaux de spontanéité et de rigueur de la pensée qui se rangent par degré :

— niveau de *logique*
— niveau de la non-contradiction "*infralogique*"
— niveau de l'*expérience de la nature physique* (Erfahrung der Natur).

On pourrait, au titre d'une métaphore utile, déclarer que l'homme dispose d'un cerveau à couches successives, depuis le plus "biologique", le plus ancien, le plus rudimentaire, responsable de la sensibilité, de l'activité, de la spontanéité, du réflexe, jusqu'à des couches "de luxe", récentes acquisitions de l'évolution, dont la pensée logique, la cohérence, la rigueur, l'emboîtement, la largeur et la précision du champ de conscience seront les produits. A l'opposé, le "cerveau primaire" ou biologique, centré sur lui-même, sur l'intégrité de la personne, aura des facultés extrêmement rudimentaires, mais fortes, immédiates, spontanées : "C'est *bon* pour moi ou c'est *mauvais* pour moi", "C'est *grand* ou c'est *petit*", "C'est moi qui *agis* ou c'est moi qui *subis*" seraient les types de questions et de valeurs qui orienteront cette pensée spontanée, sous-jacente à un cerveau analytique.

Dans cette perspective, *la mathématique est un luxe de la pensée.* Le processus heuristique fondamental consistera à partir de la pensée brute, "biologique", imparfaite, toute chargée de valeurs et de connotations arbitraires, et à en faire un produit raffiné, de monter peu à peu les niveaux de la rigueur vers le luxe suprême de la logique formelle.

Il y a corrélativement plusieurs niveaux de procédés de l'esprit, c'est-à-dire de démarches régulièrement observables :

— *idée de recette* : elle repose sur la maîtrise parfaitement éprouvée d'un processus qui a réussi : "il y a une formule à appliquer". C'est très souvent ce que beaucoup d'*applicateurs* des mathématiques recherchent ; par exemple la formule donnant le rayon de courbure d'une courbe $\frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}$, ou une bonne partie du contenu des formulaires de mathématiques à l'usage des ingénieurs, que d'ailleurs les mathématiciens eux-mêmes recopient et mémorisent.
— *idée d'algorithme* : suivre une séquence d'opérations dont on ne connaîtra la valeur et le résultat qu'à la fin de la séquence, mais

qui occupe l'esprit pendant tout le temps de sa réalisation. Exemple : le développement d'une intégration par parties, ou d'une division de polynomes sont des séquences d'opérations parfaitement prévisibles a priori.

— *idée de méthode* : identification d'un trajet dans un labyrinthe, ou d'une orientation par rapport à des valeurs. Exemple : recherche du développement d'une somme de carrés à partir de quelques aspects d'une forme mémorisée.

— *les attitudes d'esprit* ou les grandes méthodes
Exemple : — examen des différentes parties d'une figure
— recensement des résultats déjà trouvés
— listing de cas analogues
— recherche d'ensembles de combinaisons "possibles"
— augmenter, diminuer, ajouter, retrancher, multiplier, intégrer un item ou un élément culturel *quelconque* sans savoir ce qui sera valide dans ces opérations.

La Psychologie reste une science imparfaite, elle n'est capable que de proposer des concepts, peut-être importants, mais imprécis par nature. Elle s'exprime volontiers avec pertinence en images, en métaphores récurrentes ; labyrinthes, trajets, parcours, détournements, barrières, vecteurs, buts, cheminements, etc., sont parmi ses termes favoris ; ce sont là souvent des métaphores de l'espace (Matoré). Nous utiliserons ici quelques unes de ces images.

Tout d'abord l'ensemble de la connaissance, qu'elle soit d'ordre mathématique, celle des relations abstraites entre éléments de physique, se décomposera toujours en deux aspects :

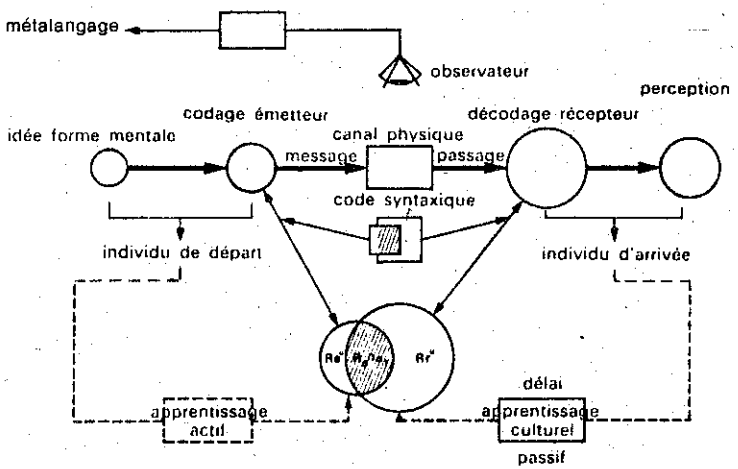
1 — la *science établie* à chaque instant : il est intéressant de la comparer à un vaste mur de livres, la bibliothèque universelle de ce qui est connu, qui certes change à chaque époque et dont chaque sujet ne "possède" vraiment qu'une petite partie ;

2 — le *processus de la science en train de se faire*, lieu de cheminement, labyrinthe dans le champ des "possibles". Ici le champ est l'imaginable où l'être évolue, butte contre des "impossibilités" reconnues à chaque instant, erre et revient en arrière.

L'acte scientifique, c'est la possibilité d'"appliquer" au sens topologique (à l'intérieur d'un domaine réduit) ce trajet vers le domaine de la science établie, écrite ou qu'il serait possible d'écrire, de mettre en forme. Ceci implique deux styles de comportements selon qu'on se situe plus ou moins dans l'un ou dans l'autre des deux plans de "ce qui est" ou de "ce qu'on fait" : l'opération de φαντασια, imagination créatrice, qui se passe dans le plan horizontal pour *créer une forme*, et l'opération de μιμησις, opération de mise en forme, de réduction critique, vérification, retour vers la cohérence universelle.

THEORIE DE LA COMMUNICATION ET DIDACTIQUE

Le schéma général de la communication met un peu de clarté dans l'ensemble de ce processus, en assimilant le "discours mathématique" à un message émis par un créateur qui code des formes mentales, transmis en un texte pour fournir à un décodeur des signes employés selon certaines règles en vue de construire une perception dont la plus ou moins grande fidélité à la forme mentale est un critère de valeur.



La situation fondamentale de communication.

Il implique par exemple que pour une bonne assimilation d'un message, le répertoire de signes de l'émetteur soit contenu dans le répertoire du récepteur. Il implique aussi que le *débit d'information* doive être limité : 5 à 8 éléments binaires par seconde est en pratique une limite supérieure. Dans l'explication des règles de l'enseignement, on retrouve ici le principe pédagogique : pas plus de trois notions nouvelles par heure qui est une application concrète de cette idée.

La théorie de la communication pédagogique va plus loin : elle indique par exemple que non seulement les éléments du répertoire de l'émetteur (le professeur) doivent être inclus à l'intérieur du répertoire du récepteur (l'élève) et que pour les termes "nouveaux" le débit de ceux-ci doit être strictement limité, mais plus encore, que la "température informationnelle de l'émetteur" (pente de la courbe dite de Zipf, de répartition de l'utilisation des mots "rares") doit se rapprocher de celle du récepteur, pour assurer la meilleure communication globale entre élève et professeur.

Ce schéma propose en outre l'idée de *Learning actif* qui remplace ou s'ajoute au *Learning passif*, au lieu de travailler sur la perception ou l'intelligence des formes ou relations, on cherchera à faire fabriquer de telles relations.

L'idée même de communication suggère alors une série de notions :

— taux de redondance
— débit de complexité ou d'information fournie dans une démonstration
— niveau d'abstraction
— coût de codage, coût de transfert, coût de rigueur, coût d'évidence.

Ce concept régulateur de *coût* a un très grand nombre d'applications en pédagogie : ainsi le coût généralisé d'échange (coût de codage + coût de transfert + coût de décodage + coût de perception-intégration) devrait être inférieur au bénéfice retiré de l'opération, pour que le récepteur entre dans le processus. Ceci amène à la notion :

coût de la démonstration = bénéfice d'évidence donnée au départ + coût rhétorique de démonstration + coût de rigueur.

Enfin le concept de *risque*, c'est-à-dire la probabilité subjective de se trouver contredit, au stade final de déroulement d'une pensée est un des caractères psychologiques essentiels de l'heuristique.

Examinons les critères d'application par l'esprit des différents processus heuristiques. Il y a :

1 — *le type de but poursuivi* :
Exemple :
— "connaître" au sens documentaire
— mémoriser au sens d'avoir présent sans effort dans le champ de conscience
— maîtriser en vue des applications
— être apte à dominer la structure logique (c'est-à-dire à redémontrer ou reconstituer une démonstration)
— inventer soi-même.

2 — *le degré d'évidence fourni* :
Quelle est la "quantité d'évidence" avec laquelle un individu, dans une situation donnée, peut connaître un résultat, un fragment du discours mathématique, c'est-à-dire le rendre solidaire de tout le reste du monde, en saisir la nécessité ? On notera que ceci implique un certain coût de codage, nous l'appellerons ici *coût d'évidence*, somme des coûts intellectuels élémentaires des opérations à effectuer pour parvenir à la *sensation* de plénitude de l'évidence.

3 — *la volonté de rigueur* :
Ne rien accepter comme vrai qui ne puisse être démontré sans faille à l'intérieur d'une chaîne. C'est certainement à ce dernier titre que la divergence s'établit le plus nettement entre les différents types d'individus soumis à l'enseignement mathématique.

Les uns estiment que leur formation mathématique doit avoir pour rôle de leur rendre le plus grand nombre possible de choses évidentes, dans les relations entre les êtres de pensée, de façon plus ou moins intuitive et immédiate, d'éliminer la démonstration au profit d'une simple monstration, de voir dans son ensemble la figure et ses propriétés, d'accepter le plus de choses possibles pour vraies à l'intérieur d'un univers délibérément restreint. Ce seront les mathématiques de l'ingénieur, de l'applicateur, du statisticien, de l'économiste pour lequel il est par exemple *plus facile* de

déclarer que toutes les fonctions imaginables sont monotones, continues et possèdent une dérivée, et que d'ailleurs, s'il y en a d'autres, ce sont des *exceptions* hors programme, en se reposant donc sur un concept de *fréquence d'usage dans un champ donné.*

Les autres estiment au contraire que la fonction des mathématiques est précisément de démontrer ou de définir objectivement tout l'ensemble de ce qu'il est possible d'imaginer, et par des généralisations successives et des cas limites (idée de tératologie mathématique) d'étendre le royaume de la rigueur et de la logique aussi loin et aussi profondément qu'il est possible. C'est vraisemblablement parmi eux que se recrutent les véritables mathématiciens, mais dans un enseignement général, le nombre de ceux-ci est si restreint qu'on peut se demander s'ils ne méritent pas d'être *ségrégés* dans un enseignement particulier.

Les étapes du processus créateur ou de l'élaboration du discours mathématique

L'observation de multiples types de découverte ou d'invention propose de façon récurrente l'existence d'une série d'*étapes* psychologiques, nettement caractérisées, qui quelquefois s'enchevêtrent ou se recoupent, mais qu'il est presque toujours possible de distinguer :

1 — *Assimilation du connu*

a) par soi
b) ou par les autres

C'est la construction, à l'intérieur de l'esprit, d'un *champ de connaissances* assimilées de façon passive, ou intuitive ; c'est le stade de la "documentation", de l'enrichissement du *champ de conscience* non seulement de tout ce qui est perçu, mais de tout ce qui est connu. L'individu s'efforce tout simplement de connaître le monde dans lequel il est et d'en percevoir le détail dans le domaine particulier qui l'intéresse. C'est donc *à la fin* de ce processus que se propose un "gap", un "manque" dans le savoir, un *problème.* Rappelons qu'on appelle "problématique" l'ensemble des questions qui se posent à propos d'un item accompagné de l'ensemble des règles auxquelles doivent obéir les réponses trouvées à ces questions, que l'on appellera "solutions".

2 — *Incubation*

Il y a donc un mécontentement de ce qui existe dans le "champ de conscience", qui établit le contact permanent avec le problème ; il y a une insatisfaction croissante par rapport à l'ensemble des formes mentales qui sont présentes dans ce champ de conscience spécialisé que ce chercheur porte avec lui. Les psychologues voient dans cette étape l'un des points essentiels, celui de l'*émergence d'une forme "ouverte"* que l'esprit tend à fermer, d'un manque dans une séquence, manque qui entraîne une activation spécifique de l'esprit. Il y a concentration dans un jeu permanent de l'esprit avec le centre de la forme et sa périphérie. L'incubation est une sorte de mobilisation de l'esprit et de la nature ; elle est une distorsion systématique du monde au profit du problème, une récupération de tous les éléments du champ de vision en vue de la clôture de la forme. "A quoi cela pourrait-il me servir ? " est la question que se pose l'individu à propos de tout nouvel élément présenté à son champ de conscience. Elle comporte entre autres un jeu permanent d'aller et retour entre le "centre" et la "périphérie" du champ de conscience où s'accumulent les matériaux (Shifting).

3 — *L'illumination*

Etape souvent très brève, processus fortement ressenti d'une *fermeture de la forme*, concept de plénitude et de certitude, souvent trompeur d'ailleurs, mais provisoirement convaincant, satisfaisant pour l'esprit. C'est l'Euréka dont parle Glaeser, souvent en une série de petites étapes avec des retours successifs à un point antérieur. L'illumination prépare et hausse l'esprit vers un stade ultérieur, où interviendra la volonté de la cohérence logique, ce que nous appelions le *besoin de rigueur*, qui va reprendre en charge le processus, l'élément ou la forme nouvelle pour le soumettre à une analyse de *critères de validité* ou à un contrôle de *possibilités d'emboîtement.* Souvent celui-ci sera défaillant, auquel cas l'illumination était un faux éclair et on reprendra à un point précédent. Une des illuminations les plus fréquentes en mathématiques est l'émergence d'analogie, de la ressemblance d'une forme, de son identité avec une forme déjà connue, identification qui entraîne que s'attacheront à la forme Y inconnue toutes les séries de propriétés et déductions déjà attachées à la forme C connue.

4 — *La vérification*, étape où l'esprit a l'impression d'avancer, d'effectuer une démarche dans un champ, d'effectuer une série d'actions, de *construire* en assemblant des éléments sous la domination d'un algorithme quelconque qu'il sait déjà posséder. Citons à ce titre les développements de polynômes à l'intérieur d'une parenthèse, les manipulations algébriques, etc., avec pour chaque étape un jugement : savoir si on s'est éloigné ou rapproché du "but", c'est-à-dire de la forme finale "close".

5 — Enfin, la cinquième étape serait celle de la *mise en forme*, polissage, formulation dans laquelle l'esprit revient sur tout l'ensemble du processus, en élimine des errements, des éléments non strictement utiles, réduit, met en forme, corrige dans des actions localisées, agréablement facultatives, et découvre souvent, par un processus que l'on peut appeler *fourmillement*, une quantité d'éléments annexes, de courts-circuits dans la séquence initiale.
La formulation est en fait le contact pris par l'esprit individuel avec un autre individu potentiel, le récepteur, le professeur, l'utilisateur, plus simplement cet "autre" qui est provisoirement le représentant des normes, ici principalement des normes logiques, auquel *je* dois me conformer pour faire accepter universellement *mon discours*.

Le discours mathématique comme chaîne ou comme réseau ?

La pensée mathématique est le modèle de la pensée discursive cohérente, elle va se réduire finalement et de toutes façons à un *discours linéaire*, séquentiel, ordonné, qui est cohérent vis-à-vis de lui-même, c'est-à-dire non contradictoire entre une partie et une autre, et cohérent vis-à-vis du domaine extérieur, c'est-à-dire de tout autre discours mathématique possible. En d'autres termes, il prétend à la cohérence universelle et c'est peut-être ce qui le spécifie vis-à-vis d'autres discours scientifiques qui se contentent d'une validité limitée dans un certain champ. On peut parler, à chaque propos de type de sciences, d'une *distance de cohérence*, c'est-à-dire d'une *distance moyenne* mesurée en nombre d'éléments de la chaîne *au bout de laquelle une contradiction* peut surgir, et être *tolérée* sans être rédhibitoire pour les opérations qu'on en veut faire.

Ce discours se présente donc comme linéaire possédant un début et une fin clairement indiqués. Il s'explore en principe au long de la page typographique et se coule dans le modèle de l'écriture ou du discours oral. L'un des buts de la mathématique est souvent de ramener à ce codage linéaire les éléments et les rapports d'une figure géométrique située dans un espace à 2, 3 ou n dimensions.

On peut légitimement se demander si cette affirmation de linéarité n'entraîne aucune discussion. La présentation d'une figure, l'évidence d'une disposition d'éléments juxtaposés, l'évidence démonstrative d'un diagramme à 3 dimensions tel qu'une ogive de Galton plus ou moins déformée, sont-ils exclus *de jure* de la mathématique tant qu'ils n'ont pas été réduits à des formulations au moins symboliques sur une ligne de papier ? Ceci prêterait interrogation pour le psychologue et le philosophe. Un grand nombre de civilisations ont accepté le "Voyez" comme l'étape finale d'un raisonnement mathématique (Inde / Chine, etc.) et on devra s'interroger (plus qu'on ne l'a fait) pour savoir si, dans toute cette part de l'enseignement des mathématiques et de l'inventivité qui est notre propos, il n'y a pas dans la figure une façon de satisfaire les exigences conjointes de l'évidence et de la rigueur. Par exemple, le "carré magique" comme solution *en soi* est-il à rejeter au rang des "résultats" purs ? Notons au passage que la notation matricielle et toutes ses formes condensées, les systèmes d'équation et les structures internes de formules correspondent à des mises en cause, minimes mais fréquentes, de cette linéarité du discours mathématique.

Dans l'expérience immédiate, ce discours se présente la plupart du temps comme une chaîne constituée de maillons inégaux quant à leur "*grosseur*" (ce serait leur visibilité dans le champ de consience), leur *longueur* (ce serait le temps qu'il faut à l'esprit pour les assimiler), leur *force de liaison*, c'est-à-dire l'élasticité plus ou moins grande du lien qui les rattache l'une à l'autre, et un certain nombre d'autres caractéristiques telles que, par exemple, leurs *systèmes d'enclenchement* de chacun des maillons les uns par rapport aux autres (fitting). Ces maillons sont les étapes de la solution d'un problème, d'une démonstration, et l'invention reposera sur le discernement de certains maillons de la chaîne, sans nécessairement en posséder la totalité. Les étapes seront tantôt des "actes de l'esprit" au sens des speech acts d'Austin, tantôt simple-

ment des notions ou concepts, tantôt des "blocs" plus complexes, tels que des formules, enfin quelquefois plus simplement des grandeurs algébriques. Le corpus de la mathématique comporte l'élaboration de notions et la mise de ces notions à l'intérieur de séquences.

Or, le processus séquentiel qui est suggéré par la linéarité de la pensée écrite, paraît contradictoire à la nature de la pensée scientifique tout court. Il s'agit en toute rigueur d'un *réseau maillé* et l'être, dans son premier contact avec la logique, découvre vite cette idée de cohérence interne qui fait qu'un élément est toujours supporté par plusieurs autres. Ainsi donc la chaîne aux multiples mailles de la monstration ou de la démonstration n'est qu'un *trajet particulier* à l'intérieur du réseau, ceci implique entre autres que la *rupture d'un des maillons ne met nullement en danger la solidité de l'ensemble.*

Il semble bien, d'après les études sur l'enseignement programmé et la science des labyrinthes, que les mailles se trouvent valorisées par l'intermédiaire du nombre de *passages totaux* p_{ij} situé entre i et j ; un élément de chaîne est valorisé et stéréotypé par le nombre de passages par ce maillon. Une connaissance *statistique* du champ des connaissances reposera sur cette idée de fréquence de passage, comme une phénoménologie statistique du domaine de connaissance.

Sur le prix de l'évidence

La notion d'évidence n'est pas *contrainte*, comme le voudrait la logique formelle, mais *accord* de l'individu avec le reste de l'univers, exception, vision, elle est autonome, *selbstverständlich* (chose qui se comprend d'elle-même).

"L'évidence n'est pas intrusion dans la conscience d'une réalité, qui lui serait totalement étrangère, son corrélatif n'est pas la vérité, mais l'objectivité." Husserl.

La monstration, la démonstration, l'exemple sont des outils de construction de l'évidence. La rhétorique se sert de l'évidence, quelquefois fallacieuse, puisque celle-ci est perception et non contrainte. Or, chacune de ces opérations représente, comme le montrent bien les théories des communications, une sorte de coût pour l'esprit, et celui-ci évolue dans le champ des possibles en

suivant un trajet de moindre coût, comme l'ont bien mis en évidence des études sur la psychologie des solutions dans les labyrinthes (Tolman).

On pourra donc appeler légitimement *coût de l'évidence* l'ensemble des efforts qui doivent être faits pour faire passer une phrase mathématique au niveau de l'accord spontané et irréfutable de l'être. Ce sera le coût de la démonstration, ou de l'invention en mathématique, pour le créateur, le coût d'effort pour l'enseigner. Il y a là un principe régulateur de la démarche de l'esprit dans la création ou dans la consommation mathématique.

Les facultés de l'esprit utilisées dans le raisonnement sont analysées par le psychologue en une série de facteurs qui appartiennent à ces concepts imprécis ("fuzzy concepts") de Moles et Zadeh qui font la matière des sciences de l'esprit (Geisteswissenschaften). Quelles que soient les critiques que le psychologue lui-même soit conduit à faire à ces facteurs, elles se groupent autour de pôles d'aptitudes plus ou moins inégalement répartis ches les individus.

Sont entre autres assez bien discernables :

— *la capacité d'abstraction*, celle de raisonner sur des êtres ou des concepts de plus en plus éloignés du réel visible et immédiat. Le mathématicien se situant par définition à un niveau déjà très élevé d'abstraction dans son propre langage (algèbre).

— *la capacité de déduction logique*, ce qu'on appelle volontiers la mécanique du raisonnement ou du calcul algébrique qui est l'aptitude à enclencher des fragments ou des opérations sans erreur et sans déformation les uns au bout des autres.

— *le sentiment de cohérence* ou d'intégration, souvent corrélé fortement au précédent et qui signifie essentiellement la perception d'un désaccord ou d'un illogisme à deux points de plus en plus distants d'une chaîne logique. On le rattachera au concept d'ordre à grande distance.

— *la largeur du champ de conscience*, aptitude à percevoir simultanément un grand nombre d'objets distincts mis à égale portée du regard ou de l'intelligence.

— *l'imagination* ou l'aptitude à proposer un grand nombre d'items diversifiés et à les faire venir sur le devant de la scène de l'esprit.

— *la ténacité*, capacité de suivre jusqu'à son terme l'exécution d'une tâche qu'on s'est imposée soi-même, quels que soient les résultats négatifs des étapes de cette tâche.

— *l'aptitude combinatoire* assez bien corrélée dans la notion de champ de conscience qui est la volonté pour l'esprit d'essayer une série de combinaisons qui couvrent un champ des possibles à partir de l'énonciation des éléments divers de cette combinaison (listing).

Les psychologues sont capables, en principe, de distinguer à l'intérieur d'un test la contribution relative de chacun de ces facteurs et d'énoncer par là des profils intellectuels utilisables. L'heuristique proprement dite rajoute volontiers à l'ensemble de ces facteurs intellectuels une notion qu'elle appelle *créativité*. Nous la définirons ainsi :

La créativité est l'aptitude d'un esprit à réorganiser les éléments du champ de conscience d'une façon originale et susceptible de donner lieu à des opérations dans un quelconque champ opératoire.

Cette définition implique donc l'*existence de deux champs* :

a) *champ de conscience* lui-même constitué par la somme de deux termes :
   - champ de perception (ce qui est effectivement présent dans mon champ de perception ou de vision)
   - connaissances, produits de la mémoire (remémoration) qui sont appelés par mon esprit.

b) *champ opératoire*, celui dans lequel je me sens capable d'agir.

Elle admet que le champ était déjà organisé, que la tâche créatrice consiste à briser cette organisation (principe de recodification de Wertheimer) pour en reconstruire une autre dont la valeur sera mesurée entre autres par son degré d'originalité (ou complexité, ou taux d'information) : il y aurait donc une mesure de cette réorganisation. Mais cette forme nouvelle est soumise à une *contrainte du possible* (μ ι μ η σ ι s). C'est l'idée d'*opérationnalisme* (Bridgman), capacité d'induire une "action" de l'individu dans le champ opératoire.

Sur le principe d'autorité

Une certaine formation mathématique a donné souvent à la démonstration une trop grande valeur, attribuant à la *rigueur* une importance que le sujet ne possédait pas. Il existe dans le champ de l'esprit une hiérarchisation spontanée de *valeur* des différents éléments de la chaîne du discours qui distingue spontanément les "résultats" et la façon d'y parvenir. *La rigueur doit être une volonté et non une condition.* Il ne devrait y avoir un appel de l'individu à la rigueur qu'à partir de ce qu'il sait déjà ; en fait, la rigueur appartient au luxe de l'esprit. Ce que l'individu désire dans la plupart des cas et tout d'abord, c'est l'*évidence* et la *maîtrise*. L'esprit créateur est parfaitement disposé, dans une mesure raisonnable, à préférer la *compréhension* d'un théorème qui n'est pas au centre de ses préoccupations et de ses conséquences, de façon volontiers intuitive, ou la *manière d'appliquer* une formule que de se charger du poids de sa démonstration, dans la mesure où le théorème ne lui paraît pas invraisemblable. "Avoir plus de soin de la certitude que de l'évidence et de convaincre l'esprit plutôt que de l'éclairer" est le premier défaut dénoncé par la logique de Port Royal.

La notion de vraisemblance, ou de plausibilité, dit Polya, est, semble-t-il, plus importante que celle de rigueur, dans la vie mathématique courante. On peut noter ici que l'idée d'autorité peut être légitimement considérée comme un mécanisme progressif et surtout *itératif* d'acceptation provisoire pour lequel l'individu sait qu'il le remettra en question, un jour, plus tard, à l'époque où *il en éprouvera le besoin*, et ce qu'il demande, c'est que lui soient *laissées ouvertes* les voies d'accès à cette démonstration au jour où il le désirera. Mais pour l'instant il n'en a cure, son désir se situe ailleurs. "Ce qu'on ne sait que par des démonstrations qui ne sont pas fondées sur des raisons matérielles s'échappe aisément et se retrouve difficilement quand il nous est une fois sorti de la mémoire, parce que notre esprit ne nous fournit point de voie pour le retrouver" (Logique de Port Royal, 4ème partie).

L'acceptation du principe d'autorité se présente donc non pas comme un *déni* de l'essence de la découverte mathématique, mais tout au contraire comme une stratégie d'*humilité provisoire* permettant de sérier les difficultés. Il ne se situe pas en conflit avec la *créativité*, mais comme un outil de celle-ci.

Quelques principes d'une heuristique :

a) Un *couple* de deux opposés est plus clair que l'ensemble des deux concepts séparés. Ainsi, on complètera la proposition d'appartenance par celle de non appartenance. On présentera donc les objets par exemples d'oppositions, si besoin est, on leur inventera des symétriques artificiels, quitte à les abandonner quand ils ont joué leur rôle. Les êtres doivent être complétés par leurs antinomies.

b) Idée de *listing* comme répertoire exhaustif d'un ensemble d'éléments possibles qui reporte le jugement vers l'opération : "$\in$ (?)" ou "$\in$", et constituera une fertilisation imaginaire de l'esprit en proposant un procédé pour élargir le champ de conscience par le jeu des *compléments*, et le microplaisir de la collection.

c) La *méthode étymologique* ou de *retraduction*
Pour prendre un exemple du rôle de l'étymologie, on accepte le vocabulaire comme une évocation, une métaphore, où le langage mathématique est prélevé largement dans le langage commun (anneaux, filtres, racine, exponentiel). Il y a à cet égard deux politiques, l'une de dire "ne confondons pas, c'est tout différent" (c'est le purisme mathématique), l'autre va dire "mais oui, c'est bien cela, c'est bien de là que vient ce terme" et de montrer *en quoi* un être mathématique se dérive progressivement du terme *banal* en prenant un sens de plus en plus spécialisé, en y rajoutant des couches de rigueur.

d) La *méthode de l'avocat* : chacun soutient un point de vue contradictoire et se borne à présenter les meilleurs arguments *en faveur de sa* thèse.

e) La *tératologie* : recherche systématique des exemples extravagants.
Exemple : "les foyers d'une ellipse sont les cercles de rayon nul tangents deux fois à l'ellipse et dont la corde des contacts est la directrice", afin de provoquer la curiosité active de l'esprit, dans un mouvement de refus $\rightleftharpoons$acceptation.

f) La *connaissance par l'exception* qui, en montrant le cas exceptionné, développe dialectiquement, puisqu'elle est l'exception, l'idée de l'item régulier.

g) Un *autre principe régulateur* sera le *principe de plausibilité de Polya*, largement inspiré de la logique du probable de Reichenbach : les conclusions d'une inférence plausible varient d'une façon monotone quand l'une de ses prémisses varie de façon monotone.

L'ensemble des remarques ci-dessus conduit à des propositions pratiques du psychologue de l'heuristique, dans le cadre mathématique il suggèrera par exemple tout d'abord de recenser :

- recettes
- méthodes
- procédés
- attitudes d'esprit
- valeurs

avec des séries d'exemples et une recodification de chacun de ces niveaux de démarche de l'esprit, suffisamment claire pour être rendue évidente à travers d'autres exemples.

Un effort ultérieur de hiérarchisation de ces artifices groupera ceux-ci en fonction de caractères psychologiques tels que :

- la largeur du champ de conscience en se contentant d'une estimation empirique
- le degré de rigueur reposant sur un jugement qui n'est pas arbitraire
- le taux de risque, notion très importante en créativité, c'est-à-dire la probabilité confusément ressentie de ne rien affirmer de stupide ou de tautologique comme conséquence d'une démarche entreprise et poursuivie selon un algorithme
- le coût de la démarche, c'est-à-dire la longueur de la chaîne d'énonciation qu'elle entraîne à partir d'un déclenchement initial
- l'originalité de la démarche, autre sentiment subjectif de surprise de l'esprit devant sa propre production, qui prépare on inhibe la démarche suivante.

Tous ces critères ont un aspect fortement arbitraire, en tout cas mal définissables en termes rigoureux, et si l'on peut soupçonner qu'en certains cas ils soient réductibles à une quelconque "mesure", à tout le moins à une estimation sur une échelle, le psychologue est bien incapable actuellement de fournir ces échelles. Ce serait pourtant une erreur, trop commise par un positi-

visme intransigeant, que de refuser ces critères sous prétexte qu'ils sont mal formulés et impossibles à quantifier. L'esprit humain les ressent d'une façon plus ou moins intuitive, c'est précisément la tâche de l'heuristique d'essayer de passer de cette intuition à des valeurs opérationnelles.

C'est à la suite de ce recensement et de cette analyse démonstrative que se proposera une stratégie de la *redécouverte* ou de la *microdécouverte* qui peut servir de base à une *didactique active* des mathématiques. "Réduisez les programmes, enseignez les méthodes" disait G. Berger.

Celle-ci cherchera à favoriser le jeu des mises en situation de redécouverte, à constituer son discours, c'est-à-dire ici son programme, de série de *formes ouvertes* proposées dans le champ de conscience et de mettre à portée immédiate de ce champ (domaine de *shifting*) les outils ou éléments permettant de les clore.

Nous conclurons avec Leibniz :

"Il y a une chose plus belle que les plus belles découvertes, c'est la connaissance de la façon selon laquelle on les fait".

BIBLIOGRAPHIE

AN. — *Logique de Port Royal*, T IV

AYER A.J. — *Language, Truth and Logic*, Dover

FAUCHEUX C. et MOSCOVICI S. — *Etudes sur la créativité des groupes*, Bulletin du CERP, 1960, t. IX, n° 1, 11-22

HADAMARD J. — *Psychology of invention in the mathematical field*, Dover, T 102

LANGER S.K. — *Symbolic Logic*, Dover, S 164

MOLES A. — *La création scientifique*, Kister, Genève, 1959

MOLES A. — *Créativité et méthodes d'innovation*, Mame Fayard, 1969

POINCARE H. — *La science et l'hypothèse*, Flammarion

POINCARE H. — *Science et méthode*, Flammarion, 1909

POLYA G. — *Les mathématiques et le raisonnement plausible*, Gauthier Villars, 1958

POLYA G. — *Comment poser et résoudre un problème*, Dunod

RIBOT Th. — *Essai sur l'imagination créative*, Alcan, 1900

THOMSON G. — *The psychology of Thinking*, Pelican, 1965

WERTHEIMER M. — *Productive Thinking*, Harper, 1948.

L'OBSERVATION CLINIQUE DES COMPORTEMENTS HEURISTIQUES

par Georges GLAESER

I L'HEURISTIQUE DESCRIPTIVE.

La psychologie de la compréhension et de l'incompréhension est un des thèmes centraux de la recherche sur la pédagogie des mathématiques. Pour progresser dans cette étude, il est urgent de rassembler un grand nombre d'observations sur le comportement d'un individu confronté à un problème.

Pourtant la littérature sur ce sujet reste étonnamment fragmentaire. Plus exactement, les travaux systématiques portent surtout sur *l'heuristique normative* et sur la *méthodologie*.

L'heuristique normative, à laquelle est consacrée l'oeuvre pédagogique de Georges POLYA [12] [13] [14], vise à accumuler les conseils sur l'art de résoudre des problèmes. Elle ne s'intéresse donc principalement qu'à la recherche *efficace* et ne tire ses leçons que de l'analyse des démarches intellectuelles des individus doués.

Elle ne porte pas d'attention spéciale à l'étude des "blocages" qui entravent la découverte. Décrivant une recherche qui s'étend sur une longue durée, elle en biffe tous les temps morts ou nuisibles.

La méthodologie [2] essaie, à propos de certains types de problèmes, de transformer les idées originales de quelques pionniers en "recettes éprouvées" susceptibles d'être appliquées automatiquement. On a décrit des monographies sur les problèmes de construction géométrique, sur la façon de calculer les déterminants, sur la résolution des "problèmes" (sic) de baccalauréat"...

Ainsi la méthodologie apparaît comme le contraire de l'heuristique : celle-ci vise à l'invention d'idées neuves, celle-là fournit l'occasion de s'épargner des efforts d'imagination lorsque la marche à suivre est déjà codifiée.

Cependant, une recherche de solutions comporte souvent, entre quelques instants d'inspiration, des séquences triviales qui se traitent par des procédés standarts. L'étude des problèmes-types est donc un outil indispensable pour un entraînement heuristique sérieux.

L'heuristique descriptive au contraire, est l'analyse du comportement de recherche indépendamment de son efficacité.

L'observation des chimpanzés de Köhler [7] ou même de débiles mentaux légers, fournit a priori des renseignements assez riches sur les mécanismes de découverte, ne serait-ce qu'en mettant en lumière les causes d'échecs.

L'objet de ce colloque est d'encourager des programmes de recherche systématique sur les démarches heuristiques. A partir d'observations isolées et diversifiées, on espère formuler des conjectures qui devront être soumises à un contrôle expérimental.

II L'OBSERVATION CLINIQUE.

Le futur chercheur est d'emblée confronté à un triple choix : Quels sont les individus-cobayes qu'il convient de mettre en observation ? Quels sont les énoncés qu'il convient de leur proposer ? Sur quels aspects du comportement l'observateur doit-il faire porter son attention ?

A — *Choix des cobayes.*

Les témoignages introspectifs de mathématiciens sur le génèse de leur découverte sont trop rares et insuffisamment détaillés pour suffire à nos besoins. [11] [5] [3] [18].

On peut borner ses observations à des individus très doués : nous avons plus d'une fois placé des collègues de l'Institut de Mathématique sur la sellette pour pouvoir les regarder travailler. Mais l'inconvénient majeur tient à ce que certaines séquences importantes s'effectuent à une grande rapidité, ce qui rend l'analyse du déroulement difficile.

Il semble que le meilleur terrain d'observation soit constitué par des élèves ou étudiants au-dessus de la moyenne, assez lents cependant pour ne pas brûler trop d'étapes, assez motivés pour accepter de persévérer dans la recherche d'un problème, ayant suffisamment d'entraînement et de connaissances pour ne pas buter sur les séquences triviales qui relèvent de la méthodologie. Enfin, ils doivent être capables, finalement, de surmonter quelques-unes des difficultés, en y mettant le temps.

L'observation d'un chercheur isolé est difficile, car il n'est pas aisé de l'interroger sur les sujets qu'il médite silencieusement : par

contre, une recherche par groupe de deux à quatre individus, habitués à communiquer entre eux, fournit beaucoup plus d'informations.

Les chercheurs de l'I.R.E.M. de Montpellier ont poussé très loin ce souci d'épier les moindres indices d'une découverte à l'état naissant.

B — *Choix des énoncés.*

Il va sans dire que nous prenons le mot "problème" dans le sens du chapitre II de [6].

Pour l'observation heuristique, les exercices didactiques (les "drills", les exercices de routines) dont la solution devrait s'obtenir immédiatement, après un dressage approprié, n'offrent pas d'intérêt. La solution doit donner lieu à une recherche de grande durée : malheureusement, il est difficile d'observer des individus pendant plus de deux heures, et cette contrainte limite sérieusement les possibilités.

Il est souhaitable que le travail d'imagination pure ne vienne pas trop interférer avec l'évocation de connaissances techniques. On évitera les problèmes qui font appel à l'érudition ou même à des connaissances que le cobaye a acquis trop récemment ou trop superficiellement.

Le style des énoncés proposés aux Olympiades [17] semble particulièrement adapté à nos besoins (textes courts, problèmes difficiles, absence d'indication sur les résultats intermédiaires).

Cependant, on a reproché aux énoncés olympiques de cultiver la "devinette" sans portée générale. On peut remédier à ce défaut en collectionnant des énoncés de théorèmes importants classiques, à cause des limitations de programme, mais qui sortent du champ des connaissances des étudiants.

Par exemple, la découverte de la façon d'inscrire un pentagone régulier dans un cercle, à la règle et au compas, répond aujourd'hui en France à ces conditions. Par ce biais, les nostalgiques peuvent encore faire revivre quelques perles qui charmèrent leur enfance !

C — *Méthodes d'observation.*

Il est important que les observateurs ne "soufflent" presque pas pendant que les cobayes "sèchent". Il s'agit de s'intéresser

davantage aux étudiants qu'aux mathématiques ! Il est parfois difficile de résister à relever la "solution sensationnelle" qui vous vient à l'esprit, pendant la contemplation d'une démarche heuristique particulièrement pénible.

Ainsi, si l'observateur aborde l'étude clinique sans aucune idée directrice, il risque de sa lasser devant la durée des temps morts. En fait, il faut savoir ce que l'on désire vraiment noter.

L'observation devient plus fructueuse lorsqu'on dispose de modèles provisoires destinés à formuler des conjectures que l'observateur va pouvoir confirmer ou infirmer.

Le bilan des résultats obtenus à Strasbourg ces trois dernières années se résume en l'acquisition d'un vocabulaire spécial, de métaphores, pour désigner certains comportements et pour répertorier diverses phases d'une recherche. Ce codage est certainement encore très incomplet.

Voici quelques mots de notre vocabulaire, dont certains seront illustrés, sans doute, tout au long du colloque.
Bricolage. "Comprendre l'énoncé". "Comprendre le problème".
Franchissement d'un seuil favorable (resp. nocif).
Détour, rectification de tir, effritement d'un problème.
Opposition.
Reconnaissance de forme, transfert, changement de contexte, séparation en deux niveaux.
Libération (ou fixation) de variables.
Analyse à l'envers.

Nous espérons établir ultérieurement par retouches successives des *grilles d'observation* de plus en plus systématiques.

Rappelons qu'une grille est un questionnaire agencé pour permettre une notation aisée de tous les aspects systématiques d'une observation.
Cette technique, qui demande encore de nombreux perfectionnements, a été développée par le pédagogue belge Gilbert de Landsheere [8].

Certains inspecteurs belges utilisent systématiquement de telles grilles qui leur permettent de noter et de coder des centaines d'items sur le maître, les élèves, le message transmis.
Un des avantages de cette méthode est que l'observateur est tellement occupé par ce passionnant jeu de KIM, qu'il n'a vraiement

plus envie de parler, c'est-à-dire d'intervenir dans le déroulement (cf. la conférence de Edouard Bayer en octobre 1971 à l'Institut Pédagogique National, cité par DJS n° 38 — juin 1972).

Il reste à trouver les comportements types qui seront les items des grilles d'observation : autrement dit, il s'agit de se constituer un modèle provisoire, destiné à suggérer des conjectures qu'une observation scrupuleuse cherchera à confirmer ou à infirmer. Une source d'information sur le sujet est constituée par quelques théories contemporaines qui jettent quelque lumière sur le comportement de recherche.

III LA CONCEPTION CYBERNETIQUE.

Elle envisage la démarche heuristique comme un échange d'information [16]. Cela peut surprendre quand on sait qu'un chercheur travaille souvent en solitaire. Mais il est séduisant d'interpréter certains monologues intérieurs comme des "dialogues avec soi-même". Le chercheur "se pose des questions", il "se répond". On est ainsi conduit à distinguer plusieurs personnages en un seul.

Par exemple, il est fréquent qu'en cherchant un problème d'arithmétique on trouve un nombre entier auxiliaire, et on s'interroge : "ce nombre est-il premier ? ". Alors, un nouveau personnage entre en scène, *l'exécutant* numérique : le processus de réflexion heuristique noble s'interrompt pendant que l'exécutant applique mécaniquement le crible d'Erathostène. A la limite, on pourrait vraiment charger un aide subalterne d'exécuter cette opération, et au cours d'une séance d'observation heuristique, il est tout indiqué de décharger le cobaye de cette tâche en fournissant de tels renseignements à la demande, pour ne pas le fatiguer inutilement (la fatigue essentielle provient des ruptures de centre d'intérêt dont il faut se détacher avant d'y revenir).

Une autre phase intéressante consiste en des *évocations lointaines* : le chercheur, trempant sa madeleine dans sa tasse de thé, se dit que la formule qu'il vient d'obtenir lui rappelle un livre qu'il a lu, il y a quinze ans, et qui doit se trouver en haut de la bibliothèque. Le dialogue avec soi-même consiste à localiser la source d'information et aller la consulter. Là encore, c'est une interruption dans le fil des idées : on peut imaginer que l'on demande un renseignement à un *archiviste* qui vous fournit une

photocopie du passage demandé. Ainsi, il y a lieu de préciser les diverses fonctions accomplies par les divers "personnages".

Un autre aspect cybernétique de la recherche a été envisagé par l'école du "Problem solving" [9]. Ces auteurs, ayant l'ordinateur en vue, se représentent un processus de recherche comme un cheminement dans un labyrinthe ou, plus sommairement, un arbre.

La recherche consisterait essentiellement à explorer un à un les divers chemins de l'arbre, en les testant l'un après l'autre. Mais cette méthodologie supprime pratiquement toute heuristique, en indiquant une marche à suivre.

En réalité, le chercheur n'envisage qu'un tout petit nombre de chemins intéressants ; pour ces auteurs, une *heuristique* serait une stratégie, une liste de critères qui guide le choix des bons cheminements. Le schéma de l'école du "Problem solving" ne paraît pas satisfaisant. Il néglige systématiquement les retours en arrière, les détours, les contre-sens et les sous-compréhensions. Enfin, un ordinateur épuise les branches d'un arbre, en ne manifestant aucune émotion. Au contraire, il est fréquent de voir des cobayes écrire la même formule ou dessiner la même figure : mais la situation est complètement différente selon que c'est fait d'une façon sceptique, désabusée ou délibérément optimiste.

Au cours du colloque on a signalé plusieurs fois le phénomène de la "*solution inaperçue*" : "le chercheur écrit la réponse sur son brouillon, bien avant d'avoir pris conscience du fait que son problème est résolu" (dans les observations de l'équipe de Montpellier, on présente un cas où il s'est passé 33 minutes entre ces deux évènements !).

Les comparaisons avec l'ordinateur ont le défaut de négliger complètement l'environnement *affectif* de la recherche. Pourtant, l'euréka est vraiment un paroxysme qui ne peut se décrire en termes formalisés.

IIV LA PSYCHOLOGIE DE LA FORME [4] [7]

Elle fournit la description d'un grand nombre de comportements heuristiques fondamentaux. Le livre de W. Köhler sur "L'intelligence du singe supérieur" est un ouvrage irremplaçable sur l'heuristique descriptive.

Les processus des plus importants sont la *reconnaissance de forme* : qui est la prise de conscience d'une structure dissimulée. Le *détour* a été très bien décrit par les gestalltistes. Le *transfert*, qui est le passage d'un contexte à un autre dans l'interprétation d'une situation (par exemple de l'algèbre à la géométrie ou l'optique ou la mécanique), est une opération heuristique de première importance.

On notera que du point de vue du logicien, la traduction mot à mot d'un problème, d'un langage dans un aute, ne modifie en rien le problème. Mais du point de vue heuristique, le stock des souvenirs, des associations d'idées potentielles peut varier considérablement. Lorsque les mathématiques sont rédigées d'une façon formelle, les rédacteurs éliminent du texte toute référence à ces transferts, évidemment inutiles du point de vue de la rigueur. Mais on ne comprend vraiment pas comment le résultat a pu être trouvé.

V LA CONCEPTION CATASTROPHIQUE [15] de la recherche s'intéresse surtout aux "coups de théâtre" des comportements heuristiques.

A chaque instant, le chercheur dispose d'un certain stock d'informations plus ou moins délimitées. C'est dans ce champ de recherche qu'il évolue en l'organisant ou le désorganisant : on a l'impression qu'il tourne en rond. Les progrès décisifs se traduisent par des modifications irréversibles du stock d'informations, grâce à l'apport d'idées neuves. Le processus de recherche apparaît ainsi comme une succession de *franchissements de seuils* (que A. Moles appelle des "micro-eurékas") entre lesquels n'apparaissent que des phases de consolidation ou de stagnation.

Ce schéma a été popularisé par Edward de Bono [1] qui a opposé la *pensée verticale* (usage méthodologique des techniques de l'algèbre ou de la logique) à la *pensée latérale* qui serait seule créative.

On peut observer des franchissements de seuils *favorables* et d'autres qui sont *nocifs* : tel progrès spectaculaire sur un point particulier peut inhiber la recherche de la suite du problème.

On peut franchir des seuils par des mécanismes très divers : le plus connu est *l'idée originale*, l'inspiration de génie. qui suggère soudain un rapprochement entre le problème posé et une situation

d'apparence très éloignée. Mais le bouleversement peut aussi intervenir grâce à une information venue de l'extérieur, dont la pertinence est immédiatement perçue et qui vient modifier substantiellement la situation.

Parmi les seuils les plus répandus figure la *compréhension de l'énoncé*, qui ne doit pas être confondue avec la *compréhension du problème*.

C'est au moment précis où le chercheur comprend qu'il ne comprend pas et qu'il s'écrie "Zut ! Que je peux bien être bête ! " qu'apparaît la lueur d'intelligence.

L'allusion à la théorie des catastrophes est pour l'instant très prétentieuse. L'étude clinique ne peut, aujourd'hui, que collationner des faits et décrire un grand nombre de types de franchissements de seuils. Il est plausible qu'en présence d'une documentation plus riche, on sera en mesure d'utiliser les classifications que René Thom a proposées pour décrire les diverses singularités d'applications différentiables et qui sont à la base de la théorie.

Mais, avant d'en arriver là, il faudrait observer les faits plus systématiquement.

VI LINGUISTIQUE.

Le mathématicien utilise constamment de nombreux langages, ayant des finalités diverses. L'habitude de ne laisser entrevoir dans l'activité mathématique que la partie émergée de l'iceberg — à savoir la rédaction définitive écrite dans un langage suffisamment formalisé — laisse dans l'ombre tous les autres modes d'exposition.

L'observation clinique de l'activité heuristique met en évidence toute une gamme de *langages heuristiques* dont le chercheur fait grand usage au cours des phases de la recherche, qui sont éliminés de la phase finale.

Ces langages doivent, sous peine d'inefficacité, être *assez précis* pour transmettre un peu d'informations, *assez vagues* pour laisser subsister une marge de manoeuvre du chercheur, qui peut ainsi se concentrer sur l'idée sans être victime des mots, être *assez évocateurs* pour suggérer de fructueuses analogies.

C'est ici qu'apparaît le rôle contemporain de la *géométrie*. Depuis longtemps, l'exposé "more geometrico" n'est plus le

modèle de la rigueur mathématique. En tant que science, la géométrie est morte : ce n'est qu'une branche de l'algèbre (et c'est dans un chapitre de l'Algèbre de Bourbaki qu'elle est incinérée). Mais en tant que langage heuristique, la géométrie est très vivante. Au contraire, elle envahit peu à peu toutes les mathématiques, de la géométrie des nombres à la géométrie des espaces fonctionnels.

L'emploi des *organigrammes* et des *schémas* peut s'apprécier, tant du point de vue du langage formalisé que du point de vue du langage heuristique. Les qualités d'un langage formalisé doivent être très différentes de celles d'un langage heuristique : dans le premier, c'est la *grammaire* qui joue le rôle prépondérant, dans le second, c'est le *style*.

Par exemple, le langage des organigrammes et des diagrammes sagittaux peut être formalisé. Mais alors, les dessins peuvent être considérablement déformés, jusqu'à devenir méconnaissables, sans cesser d'être corrects. Par contre, pour que le langage de ces diagrammes soit suggestif, il faudrait qu'il soit réalisé selon un ordonnancement esthétique qui permet, au premier coup d'oeil, de percevoir les analogies. Bref, à côté des règles de grammaire, il convient de respecter des règles de style.

Aucune règle de grammaire n'interdit d'appeler α X L les milieux des côtés d'un triangle B U R. Mais le style suggère d'employer les notations A'B'C' et ABC. Les raisons de ce choix sont uniquement heuristiques : c'est ainsi que l'on mémorise aisément les informations.

L'observation des comportements heuristiques a montré comment un langage outrageusement incorrect, complété par des mimiques, pouvait incontestablement véhiculer des informations essentielles.

Inversement, si le chercheur s'astreint à écrire d'une façon pédante tous les quantificateurs au cours d'une recherche où la principale difficulté n'est pas d'ordre logique, son imagination est rapidement inhibée.

VII CONCLUSION.

Cet exposé ne prétend être qu'un point de départ pour des recherches plus systématiques et plus rigoureuses. Une meilleure

compréhension de la psychologie de l'invention ne peut qu'entraîner des progrès, tant dans l'heuristique normative que dans la pratique pédagogique courante.

On observe fréquemment des professeurs qui, sans le savoir, *empêchent leurs élèves de comprendre*, par des interventions intempestives. Par exemple, en présence du phénomène déjà signalé de "solution inaperçue", le maître impatient peut considérer l'exercice comme terminé ; il néglige alors la phase de prise de conscience qui doit amener l'élève à comprendre qu'il a compris : le chercheur est frustré de son ultime effort.

Dans d'autres cas, le maître qui n'aurait pas compris l'utilité des langages heuristiques peut exiger une rigueur formelle dans l'expression à une phase de la recherche où le pédantisme est nuisible.

Ainsi, l'observation clinique des comportements heuristiques qui ressort de la recherche fondamentale doit comporter de nombreuses applications pratiques.

BIBLIOGRAPHIE

[1] E. de BONO. *La pensée latérale.* Dunod - Paris
[2] G. GLAESER. *Méthodologie et heuristique.* Documents et recherches - Sciences n° 2 - Hatier - Paris
[3] G. GLAESER. *Une petite aventure mathématique.* Bulletin de l'A.P.M.E.P. n° 281 - 1972
[4] P. GUILLAUME. *La psychologie de la forme.* Flammarion - Bibliothèque scientifique - Paris 1937
[5] J. HADAMARD. *Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine mathématique.* Blanchard - Paris 1959
[6] I.R.E.M. de Strasbourg. *Le Livre du Problème.* (Fascicule 1 - Pédagogie de l'exercice et du problème)
[7] W. KÖHLER. *L'intelligence des singes supérieurs.* Alcan - Paris 1927
[8] G. de LANDSHEERE. *Les tests de connaissance.* Editest - Bruxelles 1965
[9] A. NEWELL, J.C. SHAW et H. SIMON. *The process of creative thinking* (in Contemporary to Creative thinking - Atherton Press - New-York 1963 et Prentice-Hall - London)

[10] P. OLERON. *Les activités intellectuelles.* P.U.F. - Paris 1972
[11] H. POINCARE. *Science et méthode.* Flammarion - Paris
[12] G. POLYA. *Comment poser et résoudre un problème.* Dunod - Paris 1957
[13] G. POLYA. *Les mathématiques et le raisonnement plausible.* Gauthier Villars - Paris 1958
[14] G. POLYA. *La découverte des mathématiques.* Dunod - Paris
[15] R. THOM. *Stabilité structurelle et morphogenèse.* 1972 W.A. Benjamin.inc
[16] N. WIENER. *The human use of human beings.* Anchorbooks - Doubleday 1954
[17] YAGLOM. *Challenging mathematical problems with elementary solutions 1 et 2 Holden-day.* San Francisco 1967
[18] B.L. VANDER WAERDEN. *Einfall und Überlegung.* Birkhäuser - Basel 1973

UN EXEMPLE D'OBSERVATION D'ELEVES CHERCHANT UN PROBLEME

par Nicole BOPP (Strasbourg)

Il s'agit ici d'étudiants préparant le CAPES et qui travaillaient par groupe de deux ou trois.

Quelques indications supplémentaires ont été fournies par l'observation d'individus isolés (des assistants) cherchant ce problème.

Enoncé :

Existe-t-il dans le plan un ensemble fini S tel que tout point de S soit à la distance 1 de exactement n points de S ? ($n \in N$)

Attitude 1 : **Bricolage.**

Les étudiants ont tout de suite regardé ce qui se passe pour $n = 1, 2, 3$ car ils avaient été bien "*programmés*" par l'étude d'autres problèmes.

Ils n'ont pas essayé d'aborder le problème directement dans sa généralité.

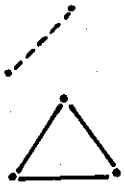
Attitude 2 : **"En faire le moins possible".**

Beaucoup d'entre eux se seraient contentés d'une seule solution pour n = 1 ou 2 si l'observateur — insuffisamment neutre — ne les avait poussés à en chercher d'autres.

Ils ont alors trouvé sans difficultés pour

n = 1 un couple ou une constellation de couples

n = 2 les sommets d'un triangle équilatéral



les sommets d'un carré

ou de tout polyèdre régulier.

La recherche dans le cas n = 3 a été très longue et a suscité un assez grand découragement chez un certain nombre d'élèves.

Attitude 3 : **Utilisation du triangle trouvé dans le cas n = 2**

Idée perdue : c'est une idée intéressante mais qui, aboutissant à un échec, passerait inaperçue dans la rédaction d'un problème.

Idée perdue a : certains ont fait le raisonnement suivant :

Puis-je rajouter un point à S_2 (vérifiant la propriété pour n = 2) pour obtenir S_3 ?

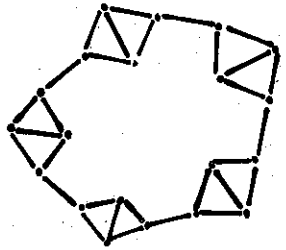
Oui, dans l'espace, j'obtiendrais un tétraèdre.

Zut, si je le raplatis dans le plan, je perds la propriété cherchée.

Cette idée aurait pu être fructueuse appliquée au cube, mais elle avait été oubliée.

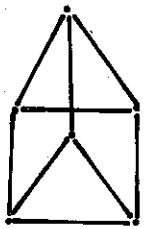
Idée perdue b : à partir du triangle, les élèves ont fabriqué un losange et ont essayé longuement de regrouper des losanges.

C'est ainsi que certains ont eu l'idée de faire une chaîne qui se ferme.



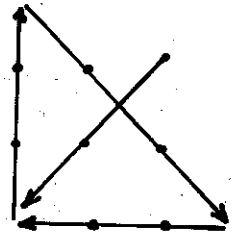
Malheureusement cette méthode élégante ne prêtait pas à généralisation.

c Personne n'a dessiné la figure suivante pourtant fort simple.



La raison en est classique :

Les élèves ne voulant pas "compliquer" leur figure se sont posés comme *condition implicite* : ne pas rajouter de points tels que les segments se coupent. Puis ils ont complètement oublié s'être donné arbitrairement cette condition.

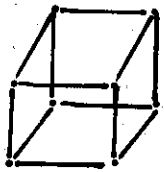


C'est pour la même raison que l'exercice suivant est difficile à trouver : tracer une ligne brisée continue à 4 segments passant par les neufs points ci-contre.
Les élèves se donnent la condition implicite "ne pas sortir du carré".

Attitude 4 : **Utilisation du carré trouvé dans le cas n = 2.**

Certains ont dessiné le cube (vu dans le plan ou dans l'espace suivant les cas) parfois sans même voir que cela donnait une solution dans le cas n = 3.

Il faut donc se garder de l'attitude consistant à dire à un élève —mais vous avez trouvé ! — au vu de ses dessins alors qu'il n'a pas reconnu encore avoir trouvé et qu'il lui reste en fait un seuil important à franchir.



Le seuil de la translation

a) Certains élèves ayant dessiné la figure 2 ont fini par voir qu'une translation permettait de trouver la solution.

b) Pour les autres, le professeur a dû donner un coup de pouce en leur indiquant qu'on pouvait trouver un ensemble S à 2^n élèments (on indiquerait à 3.2^{n-2} éléments si l'élève a dessiné la figure 1).

A partir de là on assiste à un dialogue dans les groupes :

— Comment démontrer une telle propriété ?

— Peut-être par récurrence ?

— Ah ! oui, on double le nombre de points.

— Peut-être pourrait-on prendre deux exemplaires de S_{n-1} pour obtenir S_n ?

— Comment ?

— En les mettant l'un au-dessus de l'autre.

— Mais on sort du plan.

— Il suffit de faire une translation — et *cette idée jaillit enfin.*

Remarque. Il n'est pas évident que dans ce problème le bricolage soit très utile et il est fort possible qu'une recherche "plus abstraite", dans le cas où n est quelconque, ait donné tout aussi vite la solution.

Attitude 5 : **Rectification de tir.**

Bien des élèves se satisfont alors de leur solution.

Mais il suffit que l'un des élèves du groupe ait un doute (un des points construits peut se trouver à la distance 1 de plus de n autres points de S) et pose la question explicitement pour qu'ils trouvent facilement qu'il n'y a qu'un nombre *fini* de translations à éliminer.

Le groupe a alors franchi le dernier *seuil* du problème.

OBSERVATION D'UN GROUPE D'ETUDIANTS

par Elisabeth KHALILI (Strasbourg)

Il s'agit d'une classe de préparation au CAPES, travaillant par groupes de deux ou trois.

Enoncé :

Montrer que l'ensemble des valeurs prises par un polynôme à coefficients entiers non constants ne peut être constitué uniquement de nombres premiers.

Cet exercice demande peu de connaissances, mais donne lieu à des "rectifications de tir" après le développement d'une idée principale.

Première étape :

Pour le polynôme à coefficients entiers, non constant,

$$P(x) = a_o + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

l'idée d'écrire

$$P(a_o) = a_o\,(1 + a_1 + \ldots + a_n a_o^{n-1})$$

a été rapidement trouvée (parfois après quelques essais de factorisation), sinon immédiatement.

Par contre, à ce stade, certains groupes ont considéré le problème comme résolu ; la nécessité de discuter les cas où $Q(a_o) = 1 + a_1 + \ldots + a_n a_o^{n-1}$ est nul, égal à + 1 ou à — 1, et les cas où $a_o = O, + 1$ ou — 1, ne s'est généralement pas imposée immédiatement.

Rectification de tir :

- Dans les cas $Q(a_o) = O. + 1$ ou — 1 (et a_o différent de O, + 1 et — 1), il suffit pour conclure de considérer
  $P(ka_o) = a_o(1 + ka_1 + \ldots + a_n k^n a_o^{n-1})$

  pour un entier k convenable.
- Dans, le cas $a_o = O$, on se ramène au cas général en écrivant (si $a_1 \neq O$)
  $P(x) = x(a_1 + \ldots + a_n x^{n-1})$.
- Dans les cas $a_o = + 1$ ou — 1, le polynome $R(x) = P(x + c)$, pour un entier c quelconque, prend les mêmes valeurs que P.
  Il suffit de choisir c tel que $R(O) = P(c)$ diffère de O, de + 1 et de — 1 pour être ramené au cas général.

Suivant les groupes, les différents cas à discuter ont paru d'une difficulté inégale. L'ignorance du théorème de d'Alembert (le nombre de racines réelles d'un polynome à coefficients réels de degré n est au plus n) a souvent été un obstacle dans la partie "rectification de tir".

JEU DE MOTS

par P. DESCHASEAUX (I.R.E.M. de Nancy)

Initialement, cet exposé s'intitulait : "L'apprentissage du raisonnement à l'école élémentaire". Disons que, si l'activité qui va être décrite contribue certes à l'apprentissage des mécanismes logiques et peut être utilisée à cette fin à l'école élémentaire, en fait, l'essai en a été tenté dans le premier cycle du secondaire, plus précisément dans des classes de cinquième et de quatrième.

DE QUOI S'AGIT-IL ? D'un jeu affublé de noms divers et probablement connu de la plupart d'entre vous. En voici le principe : un adversaire choisit et garde secret un mot de cinq lettres de la langue française. Le joueur doit découvrir ce mot le plus rapidement possible par le procédé suivant : le joueur propose un mot de cinq lettres ; l'adversaire compare le mot qui lui est proposé à celui qu'il a choisi en comptant les lettres qui sont les mêmes à la même place, il communique le résultat (un nombre entier compris entre 0 et 5) au joueur qui propose ensuite un autre mot de cinq lettres. Par exemple, si l'adversaire a choisi REGLE, à la question BARBU du joueur il répondra 0 et à la question SELLE il répondra 3.
Bien entendu, dans une partie mettant deux personnes en compétitions, chacune d'elles joue simultanément le rôle d'adversaire et de joueur.

Je me propose ici de décrire certaines explications pédagogiques possibles de ce jeu et de commenter celles d'entre elles qui ont été tentées.

DANS UNE PREMIERE PHASE, après avoir décrit la règle du jeu aux enfants, on leur propose d'y jouer. Cette familiarisation peut prendre diverses formes :

— tous les enfants jouent ensemble contre l'enseignant ;
— les enfants se constituent en deux équipes qui s'affrontent ;
— chaque enfant joue individuellement contre l'enseignant ;
— les enfants se groupent deux par deux et chacun joue contre l'autre.

L'objectif de cette première phase est que, "sur le tas", par approches successives, l'enfant se forge une stratégie de jeu.

DANS UN DEUXIEME STADE, on demande à l'enfant de jouer une partie en la commentant par oral, ou mieux, par écrit, c'est-à-dire de décrire même sommairement sa stratégie : pourquoi propose-t-il tel mot ? Telle réponse lui apporte-t-elle ou non une certitude ? ... Ces "minutes" de partie pourront être :

— Je regarde autour de moi, je vois une fenêtre, je pose la question VITRE car mon adversaire a peut-être fait comme ça pour choisir son mot.
— Je pose un mot au hasard.
— Je cherche la première lettre.
— J'ai eu de la chance.
— Je sais que le mot se termine par TS, la troisième lettre est sans doute une voyelle, je pose la question PLATS.
— J'ai obtenu les réponses BARBES 1, VOILE 1, PLUME 1. Je suis sûr que c'est le E final qui est bon.
— Je propose des mots compliqués (RHUME, MATHS) parce que mon adversaire est un malin et choisit toujours des mots de ce genre.
— J'ai obtenu la réponse BARBE 0. Je change toutes les lettres et je pose la question CLAIR.
— J'ai obtenu la réponse BORDS 2. Je modifie un peu le mot et pose la question BONDS. Je ne peux obtenir de réponse autre que 1, 2 ou 3 ; si c'est 1, je saurai que la troisième lettre est un R ; si c'est 2, je saurai que la troisième lettre n'est ni un R, ni un N ; si c'est 3, je saurai que la troisième lettre est un N.

. . .

Il est clair que, pour que cette explication soit possible, il est nécessaire que la phase de familiarisation ait été suffisamment longue. Mais peut-être, faute d'une certaine efficacité, l'enfant se sera-t-il découragé. Il pourra alors être souhaitable qu'au cours de la première phase, l'enseignant s'exhibe en jouant contre les enfants. Cette exhibition ne devrait pas être trop brillante ni laisser apparaître une stratégie modèle : cela risquerait d'inhiber la recherche personnelle de l'enfant. Si donc, au cours de la première phase, l'intervention de l'enseignant aura été discrète, par contre, à l'issue de la seconde phase, l'enseignant se transformera en un "réflecteur" pour permettre à l'enfant d'affiner la conscience qu'il a de sa propre stratégie, d'en déceler les défauts, d'en préciser la description.

Illustrons notre propos par un exemple : Paul raisonne par "coïncidence". Ainsi, si Paul a obtenu les informations BARBE 1, VOILE 1, PLUME 1, il sera convaincu que la dernière lettre est un E. Dans ce cas, l'enseignant pourra lui opposer le mot PAINS et laisser Paul se débattre avec cette contradiction. Mais, si le mot que Paul devait trouver et qu'il a finalement découvert était CRANE, il est fort probable que Paul objectera à son tour : "mais j'ai raison ; la dernière lettre est bien un E ! " et rejettera comme gratuite, voire vicieuse, l'hypothèse selon laquelle la dernière lettre aurait pu ne pas être un E ! Restera alors à l'enseignant à attendre qu'au cours d'une partie ultérieure, la naïveté de Paul soit sanctionnée par l'échec.

Mais il aurait pu se faire qu'il soit impossible d'opposer à Paul un contre-exemple : si, des informations POMME 3, POULE 3, POIRE 3, Paul déduit que le mot cherché commence par PO et se termine par E, l'exactitude de sa conclusion sera incontestable. Je crois qu'il serait alors inutile ou prématuré d'exiger de lui qu'il développe sa déduction d'une manière syntaxiquement correcte.

Enfin, la situation est la suivante : Paul détient les renseignements BOITE 2, CARTE 2, PORTE 2, SAUTE 2, FOIRE 1, et affirme que le mot se termine par TE. En ce cas, si le mot à trouver ne se termine pas par TE, la seule possibilité est qu'il commence par PAIT sans se terminer par E. Si d'aventure l'enseignant étant parvenu à cette conclusion avec une rapidité admirable oppose à Paul le contre-exemple PAITS, il sera sans doute accusé de tricher en sortant du référentiel constitué des mots de cinq lettres de la langue française.

On voit donc que l'utilisation du contre-exemple, dont la technique est souvent mal maîtrisée par nombre d'enseignants, pose en outre un délicat problème d'adaptation à la réalité psycho-logique de l'enfant : naturellement l'enfant confond le vrai, le certainement vrai, le plausible, le vraisemblable, le conjecturé ... Les expressions qu'il emploie (ça doit être le E, je pense au E, c'est le E qui est bon, j'ai deviné le E, pas de doute c'est le E, je suis sûr que c'est le E ...) traduisent selon les cas des démarches logiques très diverses.

Le but de cette seconde phase est d'amener l'enfant à prendre une certaine distance à sa propre activité de pensée en la décrivant, en la critiquant, donc à accéder à la pensée logique. Quel ambitieux mais nécessaire objectif pédagogique !

TROISIEME PHASE. L'enfant recommence à jouer librement. Une tâche essentielle de l'enseignant est alors d'observer comment la stratégie de l'enfant a été modifiée par le travail d'explicitation effectué en seconde phase. La "réflexion" a-t-elle apporté une plus grande maîtrise du jeu ou a-t-elle provoqué l'inhibition de l'enfant déniaisé et inquiété par la révélation d'une complexité qu'il ne soupçonnait pas ? ...

Pour tester la capacité de l'enfant à se forger une certitude logique, je crois intéressant à ce moment de lui proposer la modification suivante à la règle du jeu : il est créé une carte "sans aucun doute". En proposant un mot, le joueur peut abattre cette carte ; s'il obtient la réponse 5 il se voit attribuer un bonus de dix points par exemple, sinon il fait cadeau de ces dix points à son adversaire. Au cas où le joueur propose le mot exact sans l'avoir accompagné de la carte "sans aucun doute", il ne bénéficie que d'un point. Alors qu'auparavant la rapidité et l'efficacité étaient seules récompensées, on sanctionne maintenant la certitude acquise.
La stratégie doit s'adapter à la nouvelle situation : c'est un autre intérêt de cette variante de la règle du jeu.

Avant de passer à la description d'autres activités possibles autour de ce jeu, je tirerai quelques leçons de l'expérimentation menée essentiellement en classe de cinquième et de quatrième du premier cycle du secondaire.

Tout d'abord, les conditions étaient telles que seules les deux premières phases ont pu se dérouler et qu'à mon sens la période de familiarisation n'a pas été assez longue. L'activité proposée est apparue marginale aux enseignants qui ont hésité à amputer l'horaire consacré au programme officiel de mathématiques (non traditionnelles !). La question : "S'agit-il de mathématiques" a d'ailleurs été soulevée par une classe. Deux types de réponses positives ont été fournies : "oui, car il est question d'ensembles de lettres" (réaction significative s'il en est), "oui, car cela fait travailler les méninges".

Ceci dit, quelques constatations ont été faites : en premier lieu, le principe du jeu a toujours été correctement et facilement assimilé.

En règle quasi-générale, les difficultés dues au vocabulaire sont énormes : après avoir utilisé environ une vingtaine de mots de cinq lettres de la langue française, la plupart des enfants peinent.

Ainsi tel enfant développant au début une tactique claire (si j'ai obtenu 0, je change toutes les lettres ...) en est réduit assez vite à abandonner toute stratégie faute de pouvoir l'alimenter par des mots adéquats. Une attitude du professeur de mathématiques pourrait alors être de faire jouer avec des nombres de cinq chiffres. On ne peut mieux faire l'autruche. Est-il bon d'élaguer ainsi le jeu de composants certes fort difficilement modélisables (fréquence des voyelles et des consonnes, distorsion entre écriture et prononciation ...) ? Je pense personnellement qu'une telle abstraction serait dommageable à la richesse et à l'intérêt du jeu. Certains enseignants ont suggéré aux enfants d'utiliser un dictionnaire. On a pu alors constater que certains enfants (trop nombreux) ne possédaient pas la technique de consultation d'un lexique. Quelle belle occasion de leur faire découvrir la méthode d'approximations successives, de faire le lien avec la relation d'ordre dans les développements décimaux limités.

Certains enfants ne maîtrisent pas l'écriture. Quelques uns pour enregistrer les informations utilisent l'écriture cursive ou, s'ils emploient les majuscules d'imprimerie, ne disposent pas les mots correctement les uns en dessous des autres. Très peu d'enfants ont mis au point une procédure graphique de traitement des informations et de stockage des certitudes acquises soit en barrant ou entourant les lettres soit en disposant a priori cinq emplacements destinés à acceuillir les lettres, par exemple sous la forme :

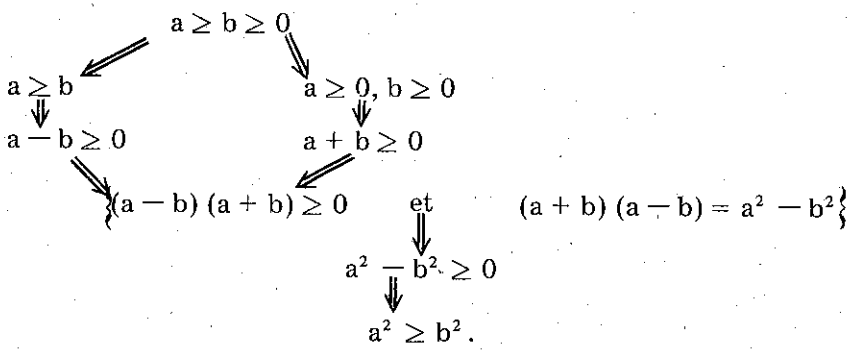
P · · T ·
O R E
A L N
U

Ces enfants auront probablement d'énormes difficultés à dresser un diagramme sagittal, à construire une figure, choisir des notations approchées, à mener un calcul numérique ou algébrique !

Une forte proportion d'élèves néglige le contenu de la réponse "zéro". Il semble que pour eux, la vérité se présente exclusivement sous la forme affirmative (ou positive).

La plupart des enfants localisent leur recherche par exemple en s'attachant à la découverte de la première lettre par tests successifs : BOITE 0, ce n'est pas le B ! CARTE 0, ce n'est pas le C, DIGUE 1 c'est le D ! ... Il arrive que le foyer de recherche se

déplace (de la première à la dernière lettre). De toutes façons la lutte n'est menée que sur un seul front à la fois. On peut former l'hypothèse que ces enfants, accessibles à un raisonnement linéaire où à chaque énoncé se déduit du seul énoncé précédent, ne peuvent surmonter les difficultés d'une démonstration à structure non linéaire du type suivant par exemple :



La méthode appelée ci-dessus de "coïncidence" est employée par la presque totalité des joueurs ; certains l'utilisent plus ou moins consciemment pour former des hypothèses plausibles qu'ils confirment ou infirment plus tard. D'autres en tirent des convictions qu'ils ne seront pas capables de remettre en cause. Ainsi Isabelle, jouant contre Sophie, s'est persuadée par "coïncidence" que la première lettre est un B. Dans le déroulement ultérieur de la partie, elle obtient la réponse 0 à la question BURIN. Immédiatement elle accuse Sophie de tricher et appelle à la rescousse l'enseignant, lequel prend connaissance du mot choisi par Sophie et s'assure que les réponses de cette dernière ont été correctes. Isabelle n'en démord pas : les arguments, disons moraux, de confiance en sa camarade et en l'enseignant ne la satisfont pas. Elle exige de procéder elle-même à la vérification. Confrontée à la matérialité des faits, elle reconnaît la bonne foi de Sophie mais déclare ne plus avoir envie de jouer. Isabelle a refusé de transformer en "débat logique" avec elle-même le conflit qui l'opposait à Sophie. Cette attitude de Sophie pourra paraître extrême. En fait, il est arrivé souvent qu'après avoir ressenti le caractère "insécurisant" du jeu, les élèves aient refusé de continuer à jouer et préféré passer à l'étude des propriétés de la droite et du plan affine.

Enfin, il ne m'est pas possible de passer sous silence l'anecdote suivante. Après avoir fait jouer tous les enfants collectivement contre lui, l'enseignant déclare que chaque élève poursuive individuellement la partie inachevée : chacun posera sa question par écrit, l'enseignant ira de l'un à l'autre et sans commentaire inscrira la réponse. Au cours de cette phase du jeu, François écrit le mot RUBAN qui avait été choisi par l'enseignant. Celui-ci inscrit la réponse 5 et poursuit sa tournée des élèves. Peu de temps après, il en revient à François qui lui propose le mot RUSES. L'enseignant fournit la réponse 2. François est très déçu par cette diminution de son score. L'enseignant lui fait remarquer qu'il avait "trouvé" le mot RUBAN. Ce n'est qu'alors que François explose en un euréka triomphant. Ainsi, bien qu'ayant manifestement compris la règle du jeu, François n'a pas trouvé en lui-même les ressources suffisantes pour acquérir la conviction de sa victoire. Ce cas est-il vraiment pathologique ? Ne faut-il pas le rapprocher de l'attitude de nombre d'élèves ou même d'étudiants qui attendent la sanction (de préférence chiffrée) par l'enseignant pour se faire une idée de la justesse de leur travail ?

Je suis conscient de l'aspect très anecdotique des commentaires qui précèdent. Ils auront peut-être permis d'apercevoir les bénéfices qu'enfants et enseignants peuvent retirer d'une telle activité. Néanmoins, une expérimentation plus méthodique serait certainement menée avec profit.

Sur le thème de ce jeu, peuvent se greffer d'autres prolongements.

RESOLUTION DE PROBLEMES

Voici un premier énoncé (à quatre lettres) : trouver tous les mots de quatre lettres compatibles avec les données suivantes :

SOIT 2, MUER 1, SOIE 2, NUIT 2

Il convient de préciser que l'on n'impose plus que les mots appartiennent au vocabulaire de la langue française.

Voici un second énoncé plus constant : les réponses suivantes ont été obtenues :

ATONE 1, RADIS 1, ESCOPE 1
BRUNI 1, CORNU, BORIS 1
ETAGE 1, ALESE 1, COING 1

Par ailleurs, on sait que la question FEMME a été posée et que la réponse fournie a permis au joueur de terminer. Quelle est la solution ?

Voici un troisième énoncé. Les données sont :

ONCLE 1, CRINS 1, BAINS 1, ABATS 1
GROIN 1, AINEE 1, FLUOR 1, TRAIN 1
FOIRE 1, BLIER 1

Puisque j'exploiterai ce dernier énoncé dans la suite, j'en fournis la solution : ANION, BRUTE, GLANE.

Le lecteur découvrira les méthodes que la résolution de ce type de problème amené à développer : elles peuvent prendre une allure algorithmique, être résumé en des diagrammes ...

CONSTRUCTION DE PROBLEMES

On propose à l'élève de construire lui-même un problème analogue à ceux qui viennent de leur être soumis. Ainsi, l'élève va choisir deux (ou trois) mots de cinq lettres, par exemple : TRAIN, BOITE ; il accumule un matériel constitué de mots ayant avec l'un et l'autre le même nombre de lettres identiques à la même place : CRINS 1, BISON 1, BRAVE 2 ... A priori quand pourra-t-il interrompre cette cueillette ? ... En fin de construction, se pose une question : le système de données obtenues est-il minimal ? On voit comment cette activité peut initier à l'économie d'un théorème.

ENFIN, je propose au lecteur de me suivre en une digression logique.

Prenons comme liste d'axiomes les 10 informations qui constituent la donnée du troisième problème proposé ci-dessus. Dans cette "théorie" que peut on dire de la "relation" ACERE 1 ? : elle est certainement vraie. La relation GALON 3, elle, est certainement fausse. Quelle est la valeur de vérité de FRERE 2 ? de ALAIN 2 ? de la disjonction exclusive ALAIN 2 ou FRERE 2 ? Que dire des implications suivantes :

FIOLE 1 $\Longrightarrow$ BLEUE 2
POMME 1 $\Longrightarrow$ FRERE 2 ?

Quelle est donc la signification qu'il convient de donner au connecteur logique "ou" ?

Ces considérations pourront paraître ridiculement inconsistantes ; elles sont éloignées de savantes subtilités à propos d'implication et d'inférence ; il n'y est point question de tables de vérité. Gageons cependant qu'elles contribueront efficacement à ce que l'enfant atteigne une conscience claire des mécanismes logiques qu'il aura mis en action dans le jeu.

Le lecteur, mis en appétit et souhaitant une nourriture plus solide, s'exercera à pratiquer le jeu du mot de cinq lettres sous la forme suivante : l'adversaire, au lieu de choisir un seul mot de cinq lettres, en choisit deux, par exemple : TROUS et LAMPE. A une question posée par le joueur il n'acceptera de répondre que si les deux mots qu'il a choisis amènent une même réponse : il répondra 0 à la question AVION, 1 à la question BRUTE mais il opposera un refus à la question FRONT.

Pour terminer, je voudrais souligner le peu d'originalité de ces propos. Le jeu exploité fait partie du patrimoine. Je l'ai pratiqué moi-même en des étés pluvieux, bien avant d'avoir l'idée de l'utiliser à des fins "professionnelles". De telles occasions foisonnent. Le jeu de la bataille navale est très répandu, on peut se contenter de le citer comme exemple de repérage d'un point du plan par un couple de coordonnées. Sophistiquons-le en donnant à chaque bâtiment une certaine portée de tir et une certaine possibilité de déplacement. On aura mis à jour une mine d'activités que j'oserai qualifier de mathématiques.

TRAVAIL DE RECHERCHE EN HEURISTIQUE A L'I.R.E.M. DE MONTPELLIER

G. AUDIBERT, A. BANTEGNIE, N. BERTRAND, L. HIGOUNET, M. JANVIER, Y. VACHE.

I. Origine et but de cette recherche

Durant trois ans (70-71 ; 71-72 ; 72-73) un groupe d'une douzaine d'enseignants de l'U.S.T.L. enseignant dans le premier cycle de l'université ont été amené :

— à travailler en groupe,
— à faire travailler leurs étudiants en groupes de 4, 5 ou 6,
— à pratiquer des contrôles de groupes,
— à réfléchir sur les rapports d'autorité entre enseignants et enseignés.

Cinq des enseignants dont nous venons de parler ont aussi enseigné dans un certificat de formation des maîtres où ils ont pratiqué des analyses sommaires de recherche de problèmes avec leurs étudiants.

Enfin, parmi ces enseignants, certains travaillent depuis trois ans à l'I.R.E.M. de Montpellier, et les contacts avec les professeurs de tous les ordres d'enseignement (primaire, secondaire, technique) les ont amené à constater le renforcement de l'aspect dogmatique des mathématiques dans l'enseignement et la nécessité de développer l'aspect "recherche de problème".

Durant l'année scolaire 72-73, les analyses ont montré l'insuffisance des informations recueillies par un simple observateur et la nécessité d'utiliser un matériel audio-visuel.

Une équipe de recherche en Heuristique s'est alors constituée à l'I.R.E.M. de Montpellier, elle se compose actuellement de 6 personnes.

Ce travail de recherche en Heuristique a pour but d'obtenir des résultats théoriques qui seront confrontés à la pratique de l'enseignement des mathématiques, notamment sur le plan des facultés créatrices des individus et du travail en groupe.

II. Matériel utilisé et méthode de travail

— *Matériel audio-visuel utilisé* : 1 studio d'enregistrement avec régie, équipé de 3 caméras, 2 magnétoscopes 1/2 pouce, 1 magnétophone (4 pistes enregistrées simultanément).

La méthode de travail comprend : l'enregistrement, le décryptage, l'analyse.

— *Enregistrement* : Un problème est proposé à quatre personnes disposées autour d'une table (dans les enregistrements réalisés : quatre étudiants de mathématiques de quatrième année). Chaque personne est munie d'un micro cravate relié à une piste du magnétophone.
On enregistre séparément le groupe des chercheurs et leurs brouillons. Un observateur analyse en cours de séance, ce que disent et font les chercheurs.
Outre les 4 personnes cherchant le problème, un enregistrement nécessite 4 à 5 personnes.

A la fin de l'enregistrement, nous disposons des documents suivants :

— 2 bandes de magnétoscope,
— 1 bande de magnétophone,
— 4 brouillons,
— 1 analyse de l'observateur.

— *Décryptage* : Nous reproduisons par écrit la totalité des dialogues enregistrés.
Ce travail de décryptage est long, minutieux et fastidieux.

Une équipe de 2 à 4 personnes travaille pendant 3 heures pour décrypter 10 mn d'enregistrement et obtenir un texte dactylographié de 10 pages environ.

— *Analyse* : En utilisant
— l'image et le son,
— les brouillons,
— le texte des dialogues.

L'analyse a pour but de déterminer :

— le cheminement de la pensée des personnes qui cherchent le problème,
— comment les idées apparaissent, et évoluent,
— comment les idées s'opposent les unes aux autres.

Pour cela nous cherchons à décomposer la séance enregistrée en séquences élémentaires de l'ordre de quelques secondes. Nous appelons thème élémentaire, l'idée exprimée dans une séquence élémentaire.

Plusieurs thèmes élémentaires peuvent être regroupés en un thème plus vaste.

Ne disposant pas d'une notion précise de thème élémentaire, nous avons procédé de manière empirique : trois équipes font séparément cette décomposition et confrontent leurs résultats.

III. Les résultats théoriques

Langage : Le vocabulaire et en particulier le vocabulaire mathématique est simple et comporte de nombreuses incorrections. La structure grammaticale des répliques est très souvent incohérente, mais cela ne nuit en aucune façon à la qualité de la communication.

De plus, il s'établit entre les personnes, des éléments de communication spéficiques à leur groupe (ces éléments évoluent dans le temps).

Oppositions : Le cheminement de la pensée se fait principalement par oppositions. En général, un thème élémentaire s'oppose au thème élémentaire qui le précède. Cette opposition peut être de différents types. Nous cherchons une classification des différents types d'oppositions.

Enoncé : Tout énoncé est remis judicieusement en question lors de la recherche, quel que soit le soin apporté à sa rédaction.

Découverte, conviction, preuve :
La découverte est le plus souvent collective et n'apparaît jamais brusquement. Un individu peut ne pas avoir conscience de l'intérêt de l'une de ses idées si le groupe ne l'a pas acceptée.
Un résultat n'est accepté qu'après une conviction collective.

Cette conviction se base sur des éléments de preuve mais ne conduit pas à une démonstration mathématique usuelle. Il y a très rarement une mise en forme écrite des résultats et même si celle-ci est recherchée, elle est très difficilement obtenue.

Nous nous posons la question : la démonstration mathématique n'est-elle pas pour les étudiants simplement un consensus social ? Et, si oui, quelles implications cela doit avoir dans l'enseignement des mathématiques ?

IV Limites de la recherche

1 — La recherche porte sur des groupes et non des individus. On n'étudie pas l'attitude d'un individu seul face à un problème, comme l'ont fait par exemple Simon et Newell. On ne mesure pas les performances individuelles.

2 — Les problèmes proposés sont spécifiquement des problèmes de mathématiques.

3 — Cette recherche nécessiterait à la fois :
- un très grand nombre d'analyses, (sur des problèmes différents, avec des groupes différents),
- des analyses très fines.

Ceci est incompatible avec le temps dont nous disposons.

4 — Nous n'avons pas utilisé les techniques d'études des

groupes humains. (Nous n'avons pas de psycho-sociologue dans notre groupe de recherche).

5 — Nous n'avons pas entrepris de manière précise l'étude linguistique des dialogues. (Nous n'avons pas de linguiste dans notre groupe de recherche).

V. Stage des étudiants de C_3

Durant un semestre de l'année scolaire 73-74 (15 séances de 3 heures chacune), douze étudiants du C_3 d'enseignement suivent un stage en Heuristique.
Ils fournissent le même travail que les membres de l'équipe de recherche qui ainsi gagne du temps de travail ; c'est la principale raison pour laquelle cette équipe a accepté des stagiaires. De leur côté les étudiants acquièrent des éléments de formation à cause de l'utilisation d'un matériel audio-visuel, de la minutie du décryptage et de la rigueur de l'observation et de l'analyse.
De plus un rapport de stage écrit leur donne automatiquement une partie de la note de l'examen de C_3.

La formation acquise à un tel stage avec une équipe de recherche en didactique des mathématiques n'aide apparemment pas les étudiants à préparer leur concours de CAPES.
L'intérêt d'un tel stage est qu'il concrétise par sa réalisation la liaison entre la formation initiale des maîtres et la recherche en didactique des mathématiques.

(*) Un compte rendu plus détaillé des recherches décrites ici se trouve dans un livret polycopié : *Heuristique*. IREM de Montpellier — avril 1975. (S'adresser à l'IREM de Montpellier, Place Bataillon, Montpellier (34)).

HEURISTIQUE ET METHODOLOGIE MATHEMATIQUE

Guy HIRSCH (Bruxelles)

Je voudrais tout d'abord préciser ici le sens que je désire attribuer au terme "méthodologie", sens qui sera assez différent de celui qu'utilise mon collègue Glaeser. Je crois en effet qu'il y a plus qu'une simple nuance entre l'heuristique et la méthodologie, et plus particulièrement la méthodologie mathématique, mais je ne suis pas volontiers disposé à ramener la méthodologie, comme Glaeser, à un niveau à peine supérieur à celui de l'application de recettes de cuisine. En faveur de mon interprétation de ce terme, je peux invoquer non seulement l'existence d'un enseignement de la méthodologie mathématique, mais encore et surtout le fait que la méthodologie des sciences est mentionnée dans le nom d'une des Unions Internationales fonctionnant sous l'égide de l'U.N.E.S.C.O. (D'une manière plus précise, il s'agit de la *Division de Logique, de Méthodologie et de Philosophie des Sciences* de l'U.I.H.P.S.).

Il est bien clair que la méthodologie ici peut donc être autre chose que l'étude de recettes à appliquer presque machinalement. (Faute d'un autre terme convenable, je proposerais de qualifier de "procédologie" cette application de procédés "tout faits" et je n'en dirai évidemment pas grand'chose). En particulier, la méthodologie mathématique me paraît présenter quelques aspects dignes d'intérêt, que je voudrais souligner dans les lignes qui suivent. Avant toute autre chose, il conviendra peut-être d'indiquer en quoi je la distingue de l'heuristique au sens de Glaeser, et c'est sans doute grâce au texte même de celui-ci que nous le ferons le plus facilement : alors que, comme le fait remarquer Glaeser, le comportement des singes (tel qu'il a par exemple été décrit par Köhler) nous donne d'abondants renseignements sur les démarches heuristiques, le comportement des mathématiciens (et je prends ici ce terme dans un sens fort large) se distingue de celui des singes sous plusieurs aspects. Ce sont donc précisément ces aspects, qui ne se retrouvent pas facilement dans l'observation des chimpanzés, que je voudrais souligner ici, en en tirant aussi quelques conclusions.

A côté de ces règles générales que nous trouverons dans le comportement des mathématiciens, nous constatons aussi que la conception des mathématiques et de leurs méthodes a évolué au cours du temps (ainsi qu'en atteste par exemple l'exclamation, qui a eu un certain retentissement, d'un grand mathématicien contemporain : "A bas Euclide ! "), ce qui nous montre qu'un mathématicien qui a joui pendant plusieurs siècles d'une autorité presque absolue peut à un moment donné être contesté. Cette remarque nous incite donc à examiner aussi les enseignements apportés par l'histoire des mathématiques ; cette histoire, bien entendu, devant

en particulier nous montrer comment et aussi pourquoi des points de vue nouveaux s'introduisent en mathématique.

A mes yeux, d'ailleurs, l'étude de l'histoire des mathématiques et celle de la méthodologie mathématique sont étroitement liées. Il est certes possible, mais pas très intéressant (même si c'est malheureusement ce que nous apportent, pour les deux derniers siècles au moins, la plupart des ouvrages consacrés à l'histoire des mathématiques (1)), de faire une histoire des mathématiques où les aspects biographiques, voire même anecdotiques, l'emportent de loin sur la considération de l'évolution des méthodes et des conceptions des mathématiques ; mais renoncer à examiner cette évolution, en la replaçant dans le cadre historique qui l'explique, c'est amputer la méthodologie mathématique d'une partie essentielle de sa substance.

S'il est sans doute oiseux ou téméraire de prétendre définir la mathématique, je voudrais cependant, et dans la mesure où c'est nécessaire pour mieux préciser notre objet, essayer de décrire ce que nous entendrons par là. Rappelons tout d'abord que la mathématique est une activité mentale destinée à apporter une réponse à une question (celle-ci pouvant trouver son origine dans la vie quotidienne — calcul d'une somme à payer, par exemple —, dans la technique — étude de la résistance d'un pont, entre autres — ou enfin dans la mathématique elle-même : la conjecture de Riemann est-elle démontrable ?). Je dirai alors qu'il y a *traitement mathématique* d'information lorsque de l'information (provenant en général de l'extérieur, mais pas nécessairement) est traitée de manière efficace (c'est-à-dire en nous rapprochant d'une réponse aux questions évoquées ci-dessus, les réponses ainsi obtenues n'étant ni contradictoires ni vides de sens) par des processus mentaux qui dépassent le simple bon sens et qui ont une portée plus générale que ce qui est requis pour donner la réponse à la question originale. (Dans la plupart des sciences utilisant les mathématiques, ce processus n'est en général pas clairement

(1) Parmi les quelques rares exceptions notables, il faut citer, évidemment l'*Histoire des Mathématiques* de BOURBAKI, qui ne couvre cependant qu'une partie des mathématiques et dont, de plus, les différents chapitres ne s'adressent pas toujours à une même classe de lecteurs. Un autre ouvrage conçu du point de vue du mathématicien est celui de Morris KLINE, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times* (New-York 1972) qui n'est cependant pas exempt de lacunes ou de défauts pour ce qui concerne les développements des cent dernières années ; le lecteur désireux d'en savoir davantage à ce sujet pourra consulter le compte rendu publié dans le Bulletin de la Société Mathématique de Belgique, 26 (1974), p. 287-298.

dissocié de l'apport extérieur d'information, et des connaissances théoriques de physique, de chimie, de physiologie, etc. sont invoquées au milieu de développements mathématiques ; bien entendu, il serait possible de rassembler au départ ces connaissances techniques, et de les séparer ainsi du traitement mathématique, mais les utilisateurs des mathématiques n'ont guère de raisons de procéder ainsi, dans la plupart des cas, puisque ce sont toujours les interprétations dans leur propre science qui les intéressent tandis que la mise en oeuvre de méthodes mathématiques leur apparaît plutôt comme un mal nécessaire que comme un objet de réflexion).

Je crois que la mathématique va bientôt s'étendre à des domaines qui lui ont échappé jusqu'à présent, et je désire pour cette raison en donner une description qui couvrira davantage que ce qui est déjà reconnu comme mathématique. Au sens large que je souhaite lui donner ici, la mathématique sera la science qui a pour objet le "traitement mathématique de l'information", et en particulier l'élaboration des méthodes nécessaires pour ce traitement ainsi que la réflexion sur ces méthodes elles-mêmes.

Cette définition a un caractère assez relatif et subjectif, puisque les limites du simple bon sens dépendent des individus et de leur niveau de culture ; mais il ne me paraît pas incorrect d'appeler mathématiques certaines démarches de l'enfant ou de l'homme primitif qui pour un civilisé adulte ressortissent au simple bon sens. D'autre part, en exigeant que la méthode mathématique soit plus générale que ne le demande le problème immédiat, nous excluons des problèmes parfois ardus mais particuliers, comme les problèmes de jeux d'échecs. Observons enfin, car ce n'est pas sans intérêt du point de vue méthodologique, qu'un langage abstrait n'est pas du tout indispensable, et que certains problèmes (combinatoires, par exemple) peuvent être traités par des méthodes qui ont les caractères essentiels des mathématiques, même si on accepte de s'exprimer dans un langage concret.

Un exemple très simple permet d'illustrer ce qui vient d'être dit : l'introduction des nombres abstraits est sans doute, historiquement, la première mise en oeuvre d'un traitement mathématique, car la notion de nombre "abstrait" et sa manipulation n'étaient certainement pas à la portée du simple bon sens de l'homme primitif, l'emploi des nombres (par le calcul arithmétique

élémentaire) donnait la réponse à des questions (sans qu'il fût nécessaire de compter des objets) et enfin la méthode était générale, puisque les calculs s'appliqueraient à un très grand nombre de situations et d'objets qui n'avaient même pas été imaginés lors de la création de la méthode.

C'est probablement par leur caractère de généralité que les méthodes mathématiques se distinguent le plus nettement de l'heuristique proprement dite. S'il est vrai que le comportement des singes doit être une révélation pour les démarches heuristiques, il convient de remarquer que, lorsque le singe aura réussi, grâce à son ingéniosité, à s'emparer de la banane qui se trouvait initialement hors de sa portée, il se contentera de manger la banane ainsi acquise. Placé dans une situation analogue, le mathématicien, avant de manger sa banane, réfléchira au problème qu'il vient de résoudre et aux méthodes qu'il a mises en jeu, en s'efforçant de voir comment il aurait pu les adapter à des données différentes.

[Bien entendu, lorsque nous parlons ici du mathématicien, nous entendons décrire de cette façon une tournure d'esprit qui, loin d'être exclusivement celle du mathématicien professionnel, se trouve à des degrés divers chez tous les hommes, mais est sans doute particulièrement mise en évidence chez les mathématiciens. Et il n'est peut-être pas téméraire d'affirmer que si le singe, et même le primate, doit encore toujours se contenter de manger les bananes tandis que l'homme peut (entre autres choses) les produire, c'est précisément parce que l'esprit plus mathématique de l'*homo sapiens*, plutôt que de manger les bananes après les avoir obtenues, préférait parfois réfléchir au sujet de ces bananes et de quelques autres problèmes analogues ...]

On a proposé de donner une description cursive de l'heuristique en disant qu'on a fait de l'heuristique quand on dit "Euréka ! " (et je proposerais de caractériser la "procédologie" ou méthodologie au sens de Glaeser en disant que quand on en a fait on soupire bruyamment "Ouf ! "). Pour la méthodologie, au sens où je l'entends ici, on peut dire que ses adeptes s'exclament "Hé, hé ! " lorsqu'ils entreprennent de réfléchir aux manières de résoudre le problème qu'ils considèrent.

Il n'est point besoin d'aller chercher bien loin des exemples tout à fait typiques de ce comportement de "méthodologie mathématique" ; nous en avons vu ici même au cours de ce Colloque,

lorsque la description des problèmes que les chercheurs de l'I.R.E.M. de Montpellier avaient posés à leurs "cobayes" a été accueillie par des questions et suggestions concernant des propositions de généralisations dans diverses directions ! J'en ai rencontré récemment un remarquable exemple historique (cité et discuté par A. Koyré) (2) chez Descartes. Beeckman avait compris l'aspect physique du problème de la chute des corps, mais ses connaissances mathématiques ne lui permettaient pas d'en formuler la loi : c'est pourquoi il demanda l'aide de Descartes pour calculer l'espace parcouru ; Descartes lui fournit la solution, mais, en même temps, et sans que Beeckman (qui ne s'intéressait qu'au problème physique) y ait fait la moindre allusion, Descartes donna aussi la loi (s'exprimant en fonction du cube au lieu du carré) correspondant au cas où la force attractive croîtrait proportionnellement au temps. Nous avons visiblement ici un exemple de la tendance des mathématiciens à placer leur problème dans le cadre d'une méthode générale (chez Descartes, ici, une attraction pouvant dépendre du temps au lieu d'être constante). Ces entretiens Beeckman-Descartes présentent d'ailleurs un intérêt particulier à cause des erreurs qu'ils contiennent de part et d'autre, mais c'est là une autre histoire qui ne nous concerne pas ici.

Ce souci de généralité prend en mathématiques une forme particulièrement remarquable et féconde, sur laquelle on n'a pas suffisamment attiré l'attention. En présence de questions difficiles ou même simplement lorsque des résultats et des méthodes se présentent avec des aspects plutôt disparates, le mathématicien va se poser des problèmes nouveaux qui n'apparaissent pas comme des prolongements logiques des questions initiales ; il introduira ce qu'on pourrait appeler une dimension de plus, traitant maintenant des problèmes d'une autre nature que ceux qu'il considérait d'abord, faisant voir ceux-ci en quelque sorte du dehors et donnant alors, par une certaine particularisation, les réponses aux questions initiales. De ce processus, qui se manifeste même à petite échelle dans les réflexions de chaque chercheur aux prises avec quelque problème, on peut donner de nombreux exemples empruntés à l'histoire des mathématiques ; j'en citerai quelques-uns, pour leur importance historique, méthodologique ou pratique.

(2) *Etudes Galiléennes*, vol. II. *La loi de la chute des corps. Descartes et Galilée* (Paris, 1939). Voir pages 99 à 106.

Jusqu'au premier tiers du 19e siècle, les algébristes s'occupaient de la détermination des racines d'équations données, ou encore, et notamment lorsque cela s'avérait trop difficile, de l'approximation de ces racines (avec, par exemple, le nombre des racines positives, etc.). Il s'agissait toujours de problèmes concernant un individu mathématique bien déterminé (ici une équation donnée). Avec Galois, le point de vue devient maintenant différent, puisque, en étudiant les équations dont la solution s'exprime au moyen de radicaux, on apporte des relations entre des propriétés de classes d'équations et non plus des équations individuelles. La théorie des équations se trouve ainsi placée dans une lumière nouvelle, mais en même temps, la mathématique elle-même s'enrichit, avec la notion de groupe introduite par Galois, d'un premier exemple de ces structures algébriques dont le rôle allait devenir de plus en plus grand dans la mathématique moderne.

Cette même théorie des groupes intervient aussi dans le deuxième exemple que je désire évoquer ici : par son *Programme d'Erlangen*, Felix Klein proposait de substituer à la considération des figures de la géométrie classique l'étude des propriétés qui sont invariantes pour certains groupes de transformations ; ici encore nous voyons substituer à des êtres individuels (les figures de la géométrie d'Euclide) l'étude des relations entre des classes de propriétés. Ce point de vue nouveau, dont le germe se trouve peut-être déjà dans les recherches de Möbius (qui était bien empêché de l'exprimer de façon satisfaisante, puisqu'il ne disposait pas des notions de groupe et de sous-groupe, qui sont à la base de cette hiérarchie des géométries), allait déborder du cadre de la géométrie qui lui avait donné naissance et conduisit notamment à la théorie des espaces homogènes, dans lesquels la notion d'espace n'apparaît qu'après celle des groupes eux-mêmes.

Enfin, le dernier exemple est peut-être le plus intéressant par toutes ses implications méthodologiques, que je ne peux évidemment qu'effleurer ici : je veux parler de la théorie des fonctions généralisées ou *distributions*. On y rencontre à la fois des exemples de notions inadmissibles pour les mathématiques établies, mais utilisées avec profit et efficacité (par les physiciens : voir la "fonction" δ de Dirac !), l'abandon de certaines propriétés des fonctions (celle de *valeur* en chaque point) au profit d'une propriété (une valeur, ou produit scalaire, ou intégrale, sur des fonctions appartenant à un ensemble convenablement choisi) qui permettent

par exemple d'attribuer une dérivée (elle-même, en général, une distribution) à toute fonction généralisée et rendent superflues tout un ensemble de conditions qui devaient être vérifiées a posteriori lors de la résolution d'équations différentielles ou aux dérivées partielles.

Dans toute l'évolution de la mathématique, nous voyons comment ces notions nouvelles, introduites pour l'étude de problèmes déjà posés mais ayant une portée beaucoup plus grande, débouchent à leur tour sur de nouveaux problèmes, et je voudrais citer ici quelques lignes de MORDELL (3) qui décrivent clairement cette situation : The solution of a problem frequently requires new ideas and new methods. The generalization it suggests, its consideration from a different point of view or its rephrasing may lead to a new problem of far greater significance than the original one which may turn out to be only a very special case of a general theorem. Sometimes it seems almost incredible what striking and far-reaching fundamental developments have arisen in directions which seem very remote indeed from the problem from which they arose.

Assez souvent, comme le montrent certains des exemples cités, et c'est là une des caractéristiques des méthodes mathématiques, cette généralisation se présente comme un changement complet de point de vue, et les questions que l'on étudiait se présentent alors, non pas comme de simples cas particuliers d'un problème général, mais bien plutôt comme une des facettes d'un problème d'un type tout différent. Cet aspect fort remarquable n'a cependant guère retenu l'attention de la plupart des observateurs qui ont voulu étudier la psychologie de l'invention chez le mathématicien. On en trouve la preuve dans l'emploi fort généralisé de l'image du labyrinthe dans leurs descriptions, et dans l'usage de termes comme trajet, cheminement ou carrefour. Mais l'histoire des mathématiques montre que le mathématicien peut déjouer les prévisions de celui qui a bâti le labyrinthe ou de ceux qui ont pu en repérer les carrefours, car, comme Icare (mais plus prudent ou plus raisonnable que lui, car il se garde bien de s'élever à des hauteurs inconsidérées) il s'échappera du labyrinthe en empruntant une dimension nouvelle.

(3) Some aspects of Davenport's work by L.J. MORDELL, *Acta Arithmetica*, XVIII (1971).

Je dois concéder cependant que ces retournements de la situation, qui rendent impossible de prévoir l'évolution de la mathématique, ne ressortissent sans doute pas à ce qu'on peut appeler l'heuristique au sens restreint, mais seulement à ce que j'ai décrit ici comme méthodologie mathématique. L'heuristique, au sens qu'on donne le plus souvent à ce mot, et particulièrement lorsqu'il s'agit de l'heuristique descriptive, s'attache de préférence à la résolution de problèmes bien précis, situés, fût-ce de façon plus ou moins tacite, dans le cadre d'un ensemble de problèmes et de méthodes déjà assez bien déterminés. Le temps limité empêchera le plus souvent le sujet de faire déboucher le problème posé sur ces thèmes nouveaux et imprévus qui sont justement, comme nous l'avons fait remarquer, à l'origine des progrès les plus féconds et les plus remarquables de la mathématique. On peut dire que l'heuristique au sens strict concerne l'aspect local ou tactique de la recherche mathématique, tandis que la méthodologie est plutôt comparable à une stratégie, à caractère global, pour laquelle l'arsenal des moyens à mettre en oeuvre est en principe illimité. Si l'on veut établir une hiérarchie entre ces diverses façons de comprendre l'activité de recherche mathématique, l'échelon le plus bas sera occupé par la "procédologie", ou méthodologie au sens que lui donne Glaeser, au-dessus de laquelle se placera l'heuristique proprement dite, tandis que la méthodologie, comprenant les précédentes comme cas particuliers ou comme aspects momentanés, prendra la position supérieure.

A ce niveau aussi s'estompera quelque peu la distinction entre heuristique normative et heuristique descriptive car, dans une recherche d'une certaine durée, l'heuristique descriptive débouche directement sur une heuristique normative, puisqu'elle correspond à une recherche qui progresse et dont les étapes méritent donc d'être retenues.

Cela nous autorise à mentionner ici quelques remarques qui peuvent être ajoutées aux principes énoncés par POLYA dans divers livres et particulièrement dans "How to solve it" (Princeton, 1946). Il y a tout d'abord dans les notations mathématiques et dans l'expression mathématique correcte ce qu'on pourrait appeler, en s'inspirant du titre d'un livre de Georges Bachelard (4), "la valeur inductive des mathématiques". Par exemple, en essayant de démontrer un théorème conjecturé, on pourrait constater que

(4) *La valeur inductive de la Relativité*, Paris 1929.

l'énoncé en question ne se laisse pas mettre convenablement sous une forme intrinsèque, ou symétrique, ou homogène, ce qui obligera à modifier l'énoncé hypothétique pour le remplacer par une version correcte du théorème et, en même temps, apportera souvent quelque indication conduisant à sa démonstration. Il ne faut cependant pas perdre de vue que cette formulation rigoureuse et précise peut aussi avoir pour effet de bloquer l'intuition et de rendre ainsi beaucoup plus malaisée la démarche de la pensée. Je veux en donner ici un exemple simple qui pourra d'ailleurs intéresser, par sa nature même, les géomètres et ceux qui enseignent la géométrie. Lorsqu'on donne un système d'axiomes pour une géométrie projective (ou affine) "rudimentaire" (c'est-à-dire sans les axiomes de Desargues ou de Pappus-Pascal), mais reposant uniquement sur les axiomes d'incidence des droites et des points, ce système est presque toujours non auto-dual, parce qu'on exige l'existence de quatre points dont trois quelconques ne sont pas colinéaires, tandis que l'exigence analogue concernant des droites non-concourantes n'est pas formulée. (Si on l'ajoutait au système d'axiomes, celui-ci deviendrait redondant parce que la proposition concernant les droites est une conséquence de celle qui concerne les points). On peut cependant donner un système d'axiomes complètement auto-dual (5), et on peut en énoncer l'axiome-clef sous la forme générale suivante : "Il existe deux éléments de première espèce et deux éléments de seconde espèce tels que les éléments de première espèce et les éléments de deuxième espèce ne sont pas incidents, et que l'élément de première espèce incident aux deux éléments de seconde espèce est incident à l'élément de seconde espèce incident aux deux éléments de première espèce ...". En acceptant de renoncer aux termes généraux de relation d'incidence et d'éléments de première ou de seconde espèce, et en parlant de points d'intersection et de droites passant par des points, c'est-à-dire en utilisant un langage en partie dépouillé de la grande symétrie qui existe entre points et droites, le lecteur verra plus facilement ce que l'axiome postule ... Pour que sa recherche soit féconde, le mathématicien doit donc maintenir un constant équilibre entre une vision plus ou moins intuitive, facile à mémoriser, à manier et à exploiter, mais souvent incomplète, ou insuffisamment rigoureuse, d'une part, et de l'autre une expression

(5) On le trouve dans *A Survey of Geometry*, vol. 1 (Boston 1969) par Howard EVES. Il y est énoncé sous une forme plus intuitive que celle qui est donnée, à dessein, ci-dessus.

précise et mathématiquement irréprochable. C'est peut-être là d'ailleurs ce qui caractérise les meilleurs mathématiciens, qui sont capables d'effectuer à tout moment ces aller-retour entre une image plus ou moins floue qui sert de support familier à leur activité et les exigences rigoureuses entraînées par les définitions mathématiques qui empêchent la pensée de s'égarer sur des voies illusoires.

La nécessité ou la possibilité de maintenir la pensée fermement dans une voie déterminée peut parfois, à elle seule, permettre de découvrir la solution d'un problème : les difficultés que rencontrent les non-initiés sont seulement la conséquence de démarches mal assurées, qui défont, en partie du moins, ce qui avait déjà été fait. Fort instructif à ce point de vue est le vieux problème du loup, de la chèvre et du chou : il suffit de savoir qu'une solution existe et de se rappeler à chaque pas que l'objectif souhaité est la traversée dans un sens déterminé et qu'il ne faut pas revenir à un état déjà obtenu antérieurement ; alors (modulo l'évidente symétrie entre le chou et le loup), la solution s'obtient de façon automatique. Des exemples analogues sont fournis par les problèmes de mesure d'une certaine quantité de liquide au moyen de cruches dont la capacité est connue : leur solution, pour ceux qui ignorent la théorie des congruences arithmétiques, est presque toujours marquée par des retours en arrière qui ramènent à une situation qu'on avait déjà rencontrée.

Ces remarques débouchent sur un problème assez général, dont la solution n'est pas encore à notre portée, à mon avis : c'est celui de la progression de l'information au cours d'une recherche ou d'une démonstration mathématique. Il exige évidemment, au préalable, une définition convenable de la quantité d'information, applicable aux mathématiques, et dont nous ne disposons pas encore aujourd'hui (6). La théorie de l'information, à laquelle on doit un certain nombre de résultats intéressants, a été édifiée par des ingénieurs télégraphistes pour qui les messages à transmettre étaient évidemment exprimés dans un langage précis et bien connu ; le problème de l'origine de cette information ne les concernait pas, et la théorie classique est beaucoup trop rigide

(6) C'est ce que reconnaît par exemple Léon Brillouin qui, après avoir estimé d'abord que le contenu d'information de la mathématique devait être nul ou infini, écrivait plus tard (*Scientific Uncertainty and Information*, New-York 1964) "the whole problem of an information theory applicable to pure mathematics remains wide open".

pour se plier à l'étude d'information qui n'est pas encore présentée dans un langage précis.

Un progrès dans ce domaine permettra vraisemblablement un traitement mathématique efficace de quelques parties des sciences dites "humaines", psychologie, sociologie ou même biologie dont les lois, quand elles peuvent être appelées ainsi, ont tout au plus un caractère vague ou fragmentaire. (C'est évidemment se leurrer que de compter sur les méthodes statistiques pour fournir des réponses à des questions qu'on est incapable de formuler). Une description adéquate, et suffisamment souple, de l'information, permettant d'exprimer notamment les processus qui entrent en jeu dans les résumés et les analogies, devrait expliquer par exemple le fonctionnement de la mémoire, de la reconnaissance des formes et des structures, voir même de la constitution d'organes et de l'évolution chez les êtres vivants.

Ce n'est pas ici le lieu de développer davantage cette thèse, mais il est permis d'espérer que les prochaines décennies verront s'étendre de façon notable le domaine accessible à la mathématisation. D'une part, presque toutes les disciplines scientifiques et leurs applications exigent aujourd'hui une certaine formation mathématique. (Que celle-ci soit le plus souvent dirigée vers l'usage de l'analyse statistique, qui n'a sans doute qu'un rôle extrêmement modeste à jouer dans la mathématisation des sciences, n'est heureusement pas très important ici, car l'accès aux méthodes statistiques présuppose, en principe, une certaine culture mathématique qui devrait donc progressivement toucher un nombre de plus en plus grand de scientifiques.) D'autre part, les mathématiques dites "modernes" se caractérisent (lorsqu'elles sont enseignées convenablement, bien entendu) par une réflexion sur les propriétés et sur les raisons d'être des structures et des théories mathématiques. Ici encore, il n'est pas déraisonnable d'espérer que de bons esprits, convenablement entraînés à cette gymnastique intellectuelle, seront capables de reconnaître quelques structures sous-jacentes à leurs préoccupations habituelles et (éventuellement avec l'aide de collègues mathématiciens) d'en décrire les propriétés essentielles nécessaires à une étude mathématique.

Je voudrais ici essayer de dissiper un préjugé assez répandu, même chez des mathématiciens professionnels, qui pensent qu'un élargissement du domaine mathématisable (comme je l'ai écrit au début de cet article, j'entends par là l'utilisation de techniques à la

fois abstraites et générales) ne peut se faire que par une complication croissante des théories mathématiques. Or, l'histoire des mathématiques nous fournit un remarquable exemple de reconnaissance d'un type de structure, et en même temps de mathématisation de vastes domaines de la science, obtenus simplement par la combinaison judicieuse de quelques idées fort simples. Il s'agit de la notion de fonction, qui a atteint son plein développement (pour ce qui nous concerne ici) à la fin du 17ème siècle, avec Newton et Leibniz. (Qu'il ait fallu attendre Dirichlet, au milieu du 19ème siècle, pour obtenir une définition tout à fait satisfaisante pour les mathématiciens est une autre histoire, qui ressortit à l'histoire des mathématiques proprement dites.)

Il est bien connu que la mathématique grecque (à une exception près, chez Archimède, tout à la fin de l'époque classique) a un caractère statique (peut-être dû à l'influence inhibante exercée par les paradoxes de Zénon et la philosophie éléate ?). Les processus impliquant des mouvements ou des suites d'opérations (comme l'antanérèse) sont autant que possible éliminés des mathématiques, il n'est pas question de variables ou de variations, et la notion de fonction ne pouvait donc trouver aucune place dans la mathématique grecque, même s'il est évident que celle de dépendance devait être depuis longtemps déjà familière au bon sens. Il en résulte par exemple que là où nous pouvons formuler un résultat, comme une quadrature par exemple, au moyen d'une fonction, les mathématiciens grecs sont contraints d'exprimer l'égalité entre deux figures dont la seconde est bien connue. (La quadrature du segment de parabole chez Archimède conduit à la construction d'un triangle de même aire.)

Les progrès de la mécanique, et particulièrement de la mécanique céleste, vont déboucher sur l'idée de fonction, puisqu'il s'agit d'exprimer certaines variables (l'espace parcouru, ou la vitesse) en fonction d'autres variables (le temps ou l'espace). Mais cette idée intuitivement simple est encore fort difficile à mathématiser au début du 17ème siècle, et c'est encore seulement sous la forme d'égalité ou, tout au plus, de proportionnalité, qu'elle se trouve chez Kepler (voir la loi des aires qui sert à décrire la vitesse des planètes sur leur orbite !) ou même chez Galilée. S. Bochner (7) attribue à l'existence de tables (trigonométriques, ou de logarithmes) un rôle dans l'émergence de la notion mathématique de fonction, mais, pour ma part, je pense que l'avènement d'une notation algébrique (avec Viète, notamment) et aussi de la géométrie analytique chez Fermat et chez Descartes, exprimant, même sans l'avoir cherché, la valeur d'une des variables chaque fois qu'on attribue une valeur à l'autre, doit avoir très puissamment contribué à placer la notion de fonction parmi les principales préoccupations des mathématiciens. Jusque là, bien entendu, on ne s'est pas encore élevé bien haut au-dessus du niveau du simple bon sens, mais les aspects techniques mathématiques qui se concrétisent dans le calcul différentiel et intégral, en apportant des notions précises comme celles d'accélération, vont permettre non seulement des prévisions valables, mais encore et surtout l'expression de lois (telles que les lois de Newton) qui seraient à peu près inaccessibles au bon sens sans l'aide des mathématiques.

(7) *The Role of Mathematics in the Rise of Science*, Princeton 1966.

Cet exemple montre qu'il n'est peut-être pas téméraire d'espérer qu'une collaboration de plus en plus étroite entre mathématiciens et scientifiques en général permettra aux méthodes mathématiques (prises dans le sens large que j'ai défendu, et qui ne signifie donc pas seulement, tant s'en faut, une application des techniques qui sont aujourd'hui familières aux mathématiciens) d'envahir des régions de plus en plus étendues de l'activité humaine.

Quelques lecteurs se demanderont peut-être ici si cette perspective est à craindre ou à espérer. Sans vouloir entamer maintenant une longue discussion qui ne serait pas à sa place, je rappellerai seulement que M. Moles a souligné dans son exposé que la mathématique est un luxe de la pensée. Ce luxe s'étend peut-être aussi au-delà de la pensée, et j'aimerais terminer par quelques brèves considérations sur un thème de réflexion qui était devenu actuel lorsque de lourdes menaces pesaient sur les sources d'énergie disponibles pour notre civilisation. Indépendamment de tout jugement de valeur qu'on pourrait porter sur l'utilisation des ressources naturelles, on peut constater que les nations, qu'elles soient développées ou en voie de développement, souhaitent atteindre un haut niveau de prospérité matérielle, et que leurs gouvernements s'efforcent de leur donner satisfaction. Nous constatons que parmi les pays qui jouissent actuellement de cette prospérité, on en trouve qui n'ont guère de matières premières, qui ont souffert de crises économiques profondes après 1929, qui ont été dévastés par une ou deux guerres entraînant parfois des pertes

considérables en vies humaines ou en équipement, qui ont perdu des colonies, etc. . Il est assez curieux de constater (il suffit pour cela de rendre visite à une bibliothèque bien équipée) qu'à peu de choses près, ces pays qui ont maintenu ou repris relativement vite un haut niveau de développement sont aussi les pays où paraissent de nombreux périodiques mathématiques d'un bon niveau scientifique. Vouloir rechercher quelles explications peuvent être données à cette remarquable corrélation prendrait beaucoup trop de place, tout en nous entraînant dans des voies trop incertaines, mais je pense pouvoir conclure en disant que, dans notre société, le rôle direct et indirect des mathématiques, avec tout ce que cela comporte nécessairement comme aspects heuristiques, est sans doute beaucoup plus grand que ce qu'un examen superficiel laisserait croire.

COMPTE-RENDU DU GROUPE "MANIPULATIONS DANS L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE"

1° **Préliminaires :**

Un questionnaire diffusé aux enseignants du secondaire...

1) Combien d'enseignants de votre établissement enseignent les maths.
   a) à temps plein ?
   b) à temps partiel ?
2) Combien enseignent les maths principalement dans leur propre salle de classe ?
3) Combien changent de salle pour assurer leur enseignement de maths ?
4) Combien de locaux sont consacrés exclusivement aux maths ?
5) Pouvez-vous indiquer dans votre établissement un ou plusieurs salles ou laboratoires de maths ?
6) Y a-t-il une réserve utilisée seulement pour le matériel mathématique ?
7) Le matériel de mathématique peut-il être entièrement mis sous clef ?

8) Les salles de maths sont-elles groupées pour former une unité ?
9) Le directeur du département de math. de l'établissement a-t-il un bureau ?
10) Avez-vous une décharge de service pour les réunions du département de math. ?
11) Y a-t-il un fichier dans le département de math. ?
12) *Budget* :
    Livres
    Autre matériel (e.g. fiches)
    Papeterie
    Equipement courant
    Equipement consommable permanent.
13) Mobilier des salles de maths :
    Bureaux en pente ?
    Tables ?
    Bureaux plats ?
    Bancs fixes ?
14) Nombre d'élèves des classes ?
15) Approvisionnement en petit matériel ?
    Ciseaux, règles, stylos feutres, compas, équerres, appareils de dessin.
16) Moyens de calcul ?
    Règles, calculatrices à main, électriques, électroniques.
17) Disposez-vous de magnétophones ?
18) Equipement de multigraphie et de reproduction ?
19) Moyens audio-visuels disponibles ?
20) Fabriquez-vous vous-même du matériel mathématique ?
21) Y a-t-il un endroit pour l'exposition des travaux d'élèves ?
22) Peut-on faire une obscurité convenable :
    a) dans le laboratoire de maths ?
    b) dans la classe ?

Il est inutile d'examiner les résultats de cette enquête ; les questions seules sont déjà édifiantes. Ce questionnaire a été diffusé en Grande-Bretagne. L'objectif du groupe n'était certes pas de s'extasier sur le système britannique en dénigrant l'enseignement français : chacun a ses qualités propres et ses défauts. Mais, si l'on veut réfléchir à la possibilité d'avoir recours à des manipulations

dans l'enseignement des mathématiques, il n'est pas mauvais de regarder ce qui se passe dans un pays où cette pratique est effective.

2° Avantages et inconvénients possibles de la pratique de manipulations

a) *Avantages*

1. Fixer un sens (i.e. un sens *opératoire*) à un vocabulaire a priori étranger aux élèves.

2. Permettre à l'attention de se concentrer sur un aspect d'une question (les autres étant pris en charge "automatiquement" par le matériel).

3. Permettre une résolution pratique de problèmes de la théorie.

4. Amener les professeurs à un travail coordonné (sinon de groupe).

5. Donner à certains élèves l'occasion de briller (motivation), ainsi ceux qui sont habiles manuellement.

6. Proposer des *confrontations* triples :

— phénomènes réels
— représentations
— langage.

b) *Inconvénients*

1. Coût (point de vue financier : réfléchir avant de payer).

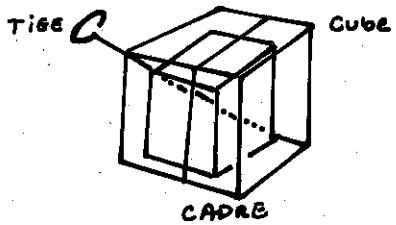
2. Conduire à des détournements d'attention de l'objet de réflexion proposé.

3. Faire apparaître comme évidents des résultats non triviaux de la théorie et soulever d'autres questions.

4. Organisation difficile et exigente pour l'enseignant.

3° Quelques problèmes effectifs considérés pendant la réunion

a) Une réalisation illustrant le groupe des déplacements laissant un cube invariant.



Les quelques manipulations effectuées par les participants, non prévenus du but dans lequel l'objet avait été construit, ont clairement illustré la possibilité d'aboutir à d'autres questions : il était par exemple possible de placer verticalement une diagonale du cube.

b) *Le tétraèdre équifacial.*

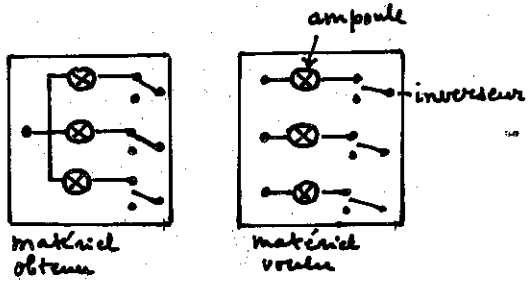
Par découpage d'un parallélépipède rectangle en *polystirène expansé*, on peut obtenir un tétraèdre dont les faces ont chacune trois côtés de longueurs différentes mais sont néanmoins toutes isométriques.
Un tel objet n'est pas en soi d'un intérêt général (encore que son existence ne soit pas évidente pour tout le monde), mais il a été présenté surtout pour illustrer les possibilités du matériau, très facile à travailler avec une lame aiguisée.

c) La tour de Hanoï comme introduction à l'étude des suites.

Ce problème classique consiste à transporter la pile de rondelles de taille décroissante sur le piquet de droite, en ne manipulant les rondelles qu'une à une et sans jamais poser de rondelle sur une rondelle plus petite.

Un professeur des environs de Cambrai ou Calais a eu l'ingénieuse idée de demander à ses élèves, *qui allaient aborder l'étude des suites*, de déterminer le nombre de coups nécessaires au transport des rondelles suivant le nombre de celles-ci. L'un répondit : "Quand j'augmente de 1 le nombre des rondelles, je double le nombre de coups et j'ajoute 1." Un autre affirma : "Le nombre de coups pour n rondelles est $2^n - 1$." La première réponse résulte de la procédure, la deuxième de l'examen d'un tableau de résultats. La *confrontation* qui s'en suivit introduisit naturellement les idées de suite et de suite récurrente.

d) *Electricité ou : des manipulations aux mathématiques.*



On pense généralement à la démarche math. → manipulations. La démarche inverse n'est pas non plus dépourvue d'intérêts, si même elle a le gros défaut de demander aux enseignants une certaine disponibilité et l'art de saisir les occasions. Voici une petite aventure électrique qui a conduit à des questions que nous n'avons pas encore résolues.

Tout le monde sait aujourd'hui (regardez vite un bouquin si vous n'êtes pas tout le monde) que les circuits électriques les plus simples (interrupteurs ou inverseurs, piles, ampoules, fils et fiches) fournissent de bonnes illustrations de la logique des propositions.

On peut se proposer de travailler dans l'autre sens : tout le monde au jus ! et voir à quels problèmes conduisent de simples manipulations électriques. En voici un auquel a conduit une différence entre un matériel voulu et le matériel effectivement obtenu (représentés ci-dessus) : peut-on, en disposant de piles, de fils et de fiches, réaliser *les mêmes circuits* avec les deux réalisations ?

On est conduit alors à une notion *d'équivalence* de circuits, et plus : équivalence pour les effets seuls (ampoules) ou pour les effets et les causes (inverseurs).

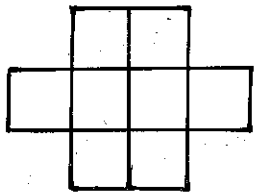
Et les questions affluent alors : combien de circuits non équivalents (dans l'un ou l'autre sens) avec a ampoules et i inverseurs (piles à la demande) ? Y a-t-il dans l'arsenal mathématique les outils nécessaires à une bonne (i.e. opératoire) représentation des circuits ?

A QUI VEUT, D'Y REFLECHIR ! ! !

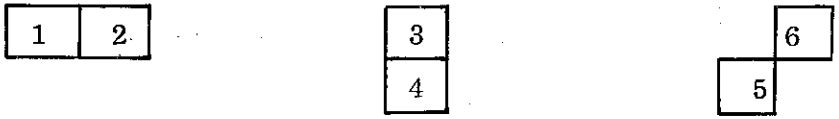
BANQUE DU PROBLEME

La Banque Du Problème, qui avait lancé à Albé une grande souscription nationale, vous ouvre ses coffres ...

I PROBLEMES POUR "PETITS"



● Placer les nombres de 1 à 8 dans les carrés ci-dessus, de manière à ce que deux nombres consécutifs ne soient pas l'un près de l'autre. Autrement dit, aucune des dispositions suivantes n'est permise :



● 7 5 8 1 3 2 8 8

Quand les signes + et − sont disposés convenablement entre les chiffres, on doit obtenir un total de 100.

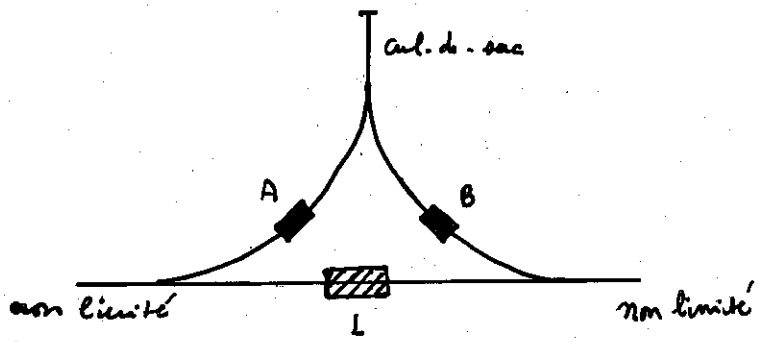
● Une compagnie de location de voitures propose trois formules à ses clients :

50 francs par jour et 20 centimes au km.
60 francs par jour et 15 centimes au km.
80 francs par jour et 10 centimes au km.

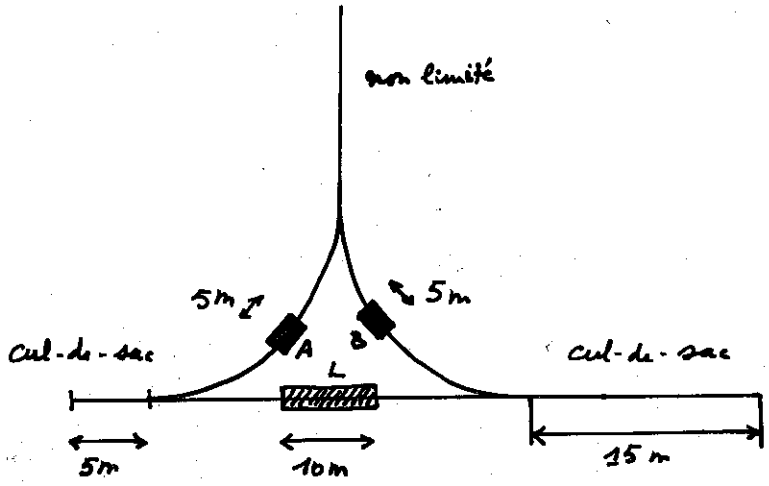
Quelle est la meilleure formule (suivant les cas) ?

● Un enfant va à la foire faire du tir. Son père lui a payé 5 tirs. S'il fait mouche, il peut tirer 2 coups en plus. L'enfant ayant tiré 17 fois, combien de fois a-t-il fait mouche ?

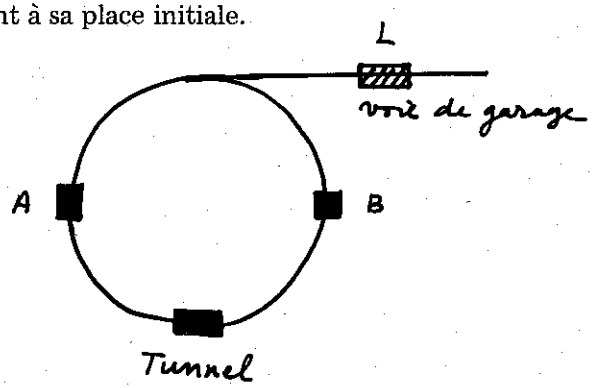
● Trois problèmes de manoeuvres



Le machiniste de la locomotive L a été chargé d'intervertir les wagons A et B. Le cul-de-sac ne peut contenir que la locomotive ou bien un wagon. Comment le conducteur peut-il procéder ?



Trouvez les manoeuvres successives permettant d'échanger les wagons A et B à l'aide de la locomotive L qui doit revenir finalement à sa place initiale.

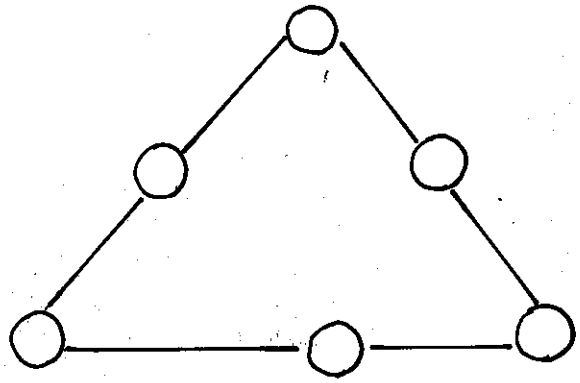


Echangez les wagons A et B à l'aide de la locomotive L qui doit regagner la voie de garage. Les wagons ne peuvent pas passer sous le tunnel. On ne peut pas tourner à gauche en sortant de la voie de garage.

● Une file de soldats de 50 mètres de long avance en ligne droite à vitesse constante. Un petit chien part du dernier soldat à vitesse constante, rattrape le premier et, toujours à la même vitesse, retourne au dernier. Ce dernier soldat a alors parcouru 50 mètres.

Quelle est la distance parcourue par le chien ?

● Placer 1, 2, 3, 4, 5, 6, de manière à ce que la somme sur chaque côté soit la même.



II PROBLEMES POUR "GRANDS"

● Existe-t-il une fonction numérique f définie sur **R**, satisfaisant à

$$f(x) + f(1-x) = x \ ?$$

(Test d'élimination roumain)

● Construire le graphe de l'ensemble

$$1 \leqslant \big|\,|x+y| - |x-y|\,\big| \leqslant 2$$

(Epreuve de 1er échelon tchèque)

● Démontrer que

$$\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{8}\right)\left(1+\frac{1}{15}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right) < 2$$

(Epreuve de 1er échelon tchèque)

● Etude de l'ensemble des nombres

$$(1-x^n)^m$$

où x est un réel $0 < x < 1$, n, m des entiers naturels.

● Dans un ensemble à n éléments, on considère un système de 2^{n-1} parties, qui ont une intersection commune non vide, trois à trois.
Montrer que toutes ces parties ont un élément commun.

(KBAHT n° 1 - 1971 - p. 30)

● Résoudre l'équation

$$\cos x + \cos 7x + \cos 19x = 3$$

(Test d'élimination de l'équipe britannique)

● Le constructeur de la machine à calculer FADA vient de sortir un ordinateur peu cher qui ne peut réaliser qu'une opération : pour deux nombres a et b, il calcule instantanément, lorsqu'elle existe, l'expression :

$$a * b = 1 - \frac{a}{b}$$

Des clients prétendent qu'un tel ordinateur ne sert pas à grand' chose dans la pratique. Pourtant on peut l'utiliser pour effectuer les 4 opérations.

● Un problème de FRENKEL

Soit E le plan affine à neuf points, d'espace vectoriel sous-jacent $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$.
Trouver les coniques non dégénérées différentes ayant même ensemble de points dans E.
Indications : On désigne par P l'espace projectif associé à E. Des coniques sont dites différentes lorsqu'elles diffèrent dans P.

On rappelle que toute conique non dégénérée est unicursale : Ici, il en résulte que, dans P, toute conique non dégénérée a en particulier la propriété de se composer de quatre points (à distance finie ou à l'infini).
L'intérêt de ce problème est d'illustrer la différence entre coniques et classes d'équations correspondantes, différence non apparente dans le plan affine réel.

● LE MORPION SOLITAIRE

Comme au jeu ordinaire de morpion, il s'agit de former des alignements de chaque fois cinq points situés en des noeuds consécutifs d'un quadrillage (horizontalement, verticalement ou en diagonale).
Mais, au jeu solitaire, on ne peut placer un point qu'à la condition de former un tel alignement. La partie s'arrête donc lorsqu'aucun coup ne permet de former d'alignement de cinq.

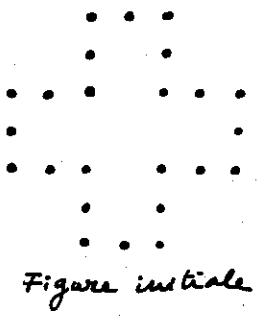


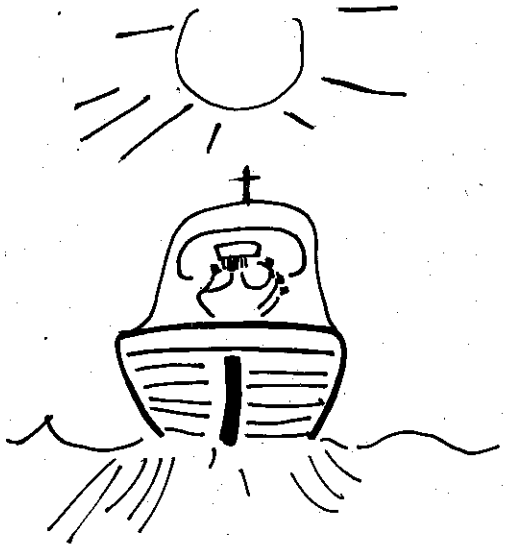
Figure initiale

Au départ, on se fixe un certain nombre de points, par exemple comme sur la figure ci-dessus.
Démontrer que la partie s'arrête forcément au bout d'un nombre fini de coups.

● NAVIGATION A VUE

Un navigateur part le matin au lever du soleil (à 6 h) d'un point A. Il navigue toute la journée à la vitesse de 20 noeuds (1 noeud correspond à 1852 m/h), sans rencontrer d'obstacle, en se dirigeant constamment vers le soleil.

1. A quel point B aboutit le navigateur à la tombée de la nuit (à 18 h.) ?



Aurait-il pu naviguer de manière plus économique (pénurie d'essence oblige ...) pour atteindre B, et comment aurait-il alors dû se diriger ?

2. Pour revenir le lendemain en A, quelle manière de se diriger utilisera le navigateur qui a passé la nuit au mouillage au point B ?

● Dans un hôpital militaire se trouvent des blessés dont une proportion α (resp. β, γ) a perdu un oeil (resp. une oreille, le nez). Trouver une fonction de α, β, γ à valeurs positives, non identiquement nulle, qui minore la proportion de blessés ayant perdu à la fois un oeil, une oreille et le nez.

(Lewis Caroll)

● Deux joueurs A et B jouent au jeu suivant : on donne l'ensemble des nombres $\{1,2, \ldots 1024\}$. Le joueur A raye 512 nombres de la liste, le joueur B en raye 256 parmi les restants, A 128 puis B 64, etc. (toujours la moitié).
Lorsque A joue pour la dernière fois, il reste 4 nombres. Il en raye 2 et reçoit en gain une somme de roubles égale à la différence des nombres restants et payée par B.
Comment doit jouer A (resp. B) pour essayer de gagner le plus (resp. de perdre le moins) ?

(32ème Olympiade fédérale de Moscou
cf. KBAHT n° 1 - 1971 - p. 39)

● Dans un bal, aucun garçon n'a dansé avec toutes les filles, mais chaque fille a dansé avec au moins un garçon.
Démontrer qu'il existe deux couples g f et g′f′ qui ont dansé ensemble sans que g f′ et g′f aient dansé ensemble.

(Concours Putnam - 1965 - U.S.A.
cf. American Mathematical Monthly)

● Sur chacun des 99 cartons d'un jeu, on inscrit des entiers strictement compris entre 0 et 99. Ces entiers ne sont pas nécessairement différents. On remarque que la somme des nombres inscrits sur toute partie de ce jeu de cartes n'est jamais divisible par 100. Prouver que ces nombres sont égaux.

(Epreuve de sélection britannique
FIST - 1973)

● On donne 7 segments de longueurs comprises entre 1 et 10. Montrer que l'on peut toujours trouver 3 d'entre eux qui forment un triangle (non aplati).

● On donne dans Z^2 cinq points distincts. Montrer qu'il existe un segment dont les extrémités sont deux de ces points et dont le milieu appartient à Z^2.

(Eliminatoire 1er degré - Olympiades polonaises)

● Dans un carré de côté 1, on dessine une ligne polygonale de longueur supérieure ou égale à 1000. Montrer qu'il existe un segment parallèle à un côté du carré qui rencontre la ligne polygonale en 354 points au moins.

(Olympiades fédérales - Bundeswettbewerb - 1970-1971)

● Soit S l'aire d'un pentagone convexe et Σ l'aire du pentagone dont les sommets sont les milieux du précédent.
Montrer que $\frac{S}{2} \leqslant \Sigma \leqslant \frac{3}{4} S$.

(Variante d'un sujet proposé par KBAHT - Glaeser)

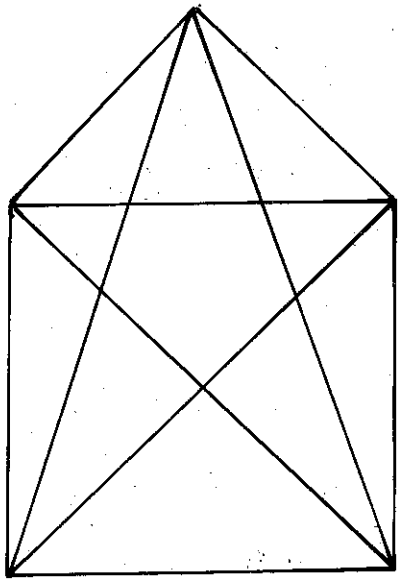
● Soit P_1 un polyèdre convexe à 9 sommets $a_1, a_2, \ldots, a_9$ et soit P_i le polyèdre déduit de P_1 par la translation $a_1 a_i$.
Montrer qu'au moins deux des polyèdres P_i (i = 1,2,...,9) ont un point intérieur commun.

(13ème Olympiade internationale - 1971)

● Si les frontières de 2 rectangles isométriques se coupent en huit points distincts, alors l'aire de l'intersection dépasse la moitié de l'aire de chacun des deux rectangles.

(KBAHT n° 11 - 1970 - Olympiades fédérales)

● Combien y a-t-il de triangles ?



● Le problème de Mikusinsky
Solution de Conway et Croft
Partitionner une sphère de sorte que les classes d'équivalence soient des arcs de grands cercles semi-ouverts isométriques entre eux.

(Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 1964 - Tome 60)

● On place un nombre positif ou nul sur chaque case d'un échiquier $m \times n$. On suppose que la somme des termes de toute croix (réunion d'une ligne et d'une colonne) est supérieure ou égale à a. Quelle est la plus petite somme possible de tous les nombres placés sur l'échiquier ?

(Bundeswettbewerb - 1ère ronde - 1971-1972)

Quelle est la limite lorsque n tend vers l'infini, de :

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{\alpha}{n} \\ -\frac{\alpha}{n} & 1 \end{pmatrix}^n$$ pour α réel ?

(Mme Pérot - Strasbourg)

● Etude des images possibles de $\mathbf{R}^2$ par des polynomes à coefficients réels.

(KBAHT)

● Démontrer que si

$$P(x) = a_0\, x^7 + a_1\, x^6 + \ldots + a_7$$

à coefficients dans Z prend les valeurs + 1 ou − 1 en 7 valeurs distinctes entières, alors P(x) est irréductible dans Z [x].

(Préolympiades - Mai 1971 - La Havane - Cuba)

● Existe-t-il une ligne polygonale fermée de 1973 (respectivement 1974) côtés telle que chaque côté est coupé par exactement un côté (en un point qui n'est pas un sommet ...) ?

(Préolympiades)

● Peut-on décomposer l'unité en une somme de 1971 inverses d'entiers tous distincts ?

(KBAHT)

● Dans R^3 muni du produit scalaire habituel, peut-on trouver 5 vecteurs (V_i) $1 \leqslant i \leqslant 5$ tels que

$$\forall i \forall j \quad i \neq j \Rightarrow V_i \cdot V_j < 0$$

(Généralisation à R^n avec $n + 2$ vecteurs).

(I.R.E.M. de Nancy)

● Dans R^3 muni du produit scalaire habituel, peut-on trouver 4 vecteurs (V_i) $1 \leqslant i \leqslant 4$ tels que

$\|V_i\| = 1$ et que $V_i \cdot V_j$ soit constant pour tous les couples (i,j) $i \neq j$?

(Généralisation à $\mathbf{R}^n$ avec $n + 1$ vecteurs).

(I.R.E.M. de Nancy)

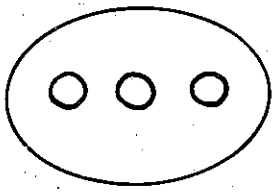
● Tour de Hanoï

On dispose de 3 piquets sur l'un d'eux sont empilés n disques de diamètres allant en décroissant vers le haut.

Règle du jeu :
On peut bouger un disque s'il est en haut d'une pile et on peut le reposer sur un piquet en respectant l'ordre croissant des diamètres.
But :
Par déplacements successifs empiler les n disques sur un des deux autres piquets.
Problème :
Trouver un algorithme *non récursif* et *déterministe* pour résoudre ce problème.

(I.R.E.M. de Nancy)

● Peut-on tracer cette figure d'un seul coup de crayon ?



(I.R.E.M. de Rennes)

"Il n'y a que le bon sens qui mène à rien" (E. Renan)

● Jeu de probabilités

Le jeu se joue à deux personnes. On donne un à un 10 nombres compris entre 0 et 1 aux deux joueurs, ces nombres étant tirés au hasard suivant une loi de probabilité uniforme sur [0,1].
Chaque joueur doit choisir un de ces dix nombres sans évidemment connaître les suivants et sans connaître le nombre éventuellement choisi par l'autre joueur.
Le joueur qui gagne est celui qui a choisi le plus grand nombre.
Quelle doit être la stratégie d'un joueur ?
Réalisation pratique : la suite des dix nombres peut être donnée par le numéro minéralogique des 10 premières voitures passant sur une route pas trop fréquentée . (9914 QL 54 → 0,9914)).

● Je bois 1/6 d'une tasse de café noir ; je complète avec du lait et je mélange ; je bois alors 1/3 du mélange ; je recomplète avec du lait et enfin je bois le reste. Ai-je bu plus de café que de lait ? (Au départ la tasse était pleine de café).

● Dans une boîte cubique d'arête unité, sont enfermées 2001 mouches. Montrer qu'il existe à tout moment une boule sphérique de rayon $\frac{1}{11}$ où se trouvent 3 mouches.

● Un rameur, qui rame à une vitesse parfaitement constante, remonte une rivière qui coule à une vitesse parfaitement constante. En passant sous un pont, il perd son chapeau. Il s'en aperçoit 1/2 heure plus tard, fait demi-tour et retrouve son chapeau à 1 km en aval du pont. Quelle est la vitesse du courant ?

● On peint les faces d'un cube en bois puis on découpe ce cube en 1000 cubes égaux, à l'aide de traits de scie parallèles aux faces. Combien y a-t-il de petits cubes qui ont au moins une face enduite de peinture ?

● On considère que la terre est une sphère parfaite de circonférence 40 000 km. On entoure l'équateur par une corde de 40 000 001 mètres qui est partout à la même distance du sol. Une puce peut-elle passer entre la terre et la corde ?

● On peint une partie de la surface d'une sphère. L'aire de la partie est inférieure aux 7/15 de l'aire de la sphère. Montrer qu'il existe deux points diamétralement opposés non peints.

● On donne six points du plan dont trois quelconques ne sont pas alignés.

Chacun des 15 segments les joignant 2 à 2 est colorié en vert ou en rouge.
Montrer qu'il existe un (deux ?) triangles coloriés de la même couleur parmi les 20 triangles dont les sommets sont les points donnés.

● Soit p un entier naturel. Existe-t-il des fonctions numériques $f_i : R \to R$ et $g_i : R \to R$ pour tout i de 1 à p telles que :

$$(\forall x)(\forall y) \quad |x - y| = \sum_{i=1}^{p} f_i(x)\, g_i(y) \ ?$$

● On casse un spaghetti en 3. Quelle est la probabilité qu'on puisse former un triangle avec les 3 morceaux ?

(I.R.E.M. de Basse-Normandie)

- Trouver un nombre de 2 chiffres qui est la somme des carrés de ses chiffres.

- Trouver un nombre de 3 chiffres qui est la somme des cubes de ses chiffres.

- On calcule $f : \mathbb{N} - \{0\} \to \mathbb{N} - \{0\}$ pour la formule de récurrence
  $f(1) = 1$
  $f(2k) = f(k)$
  $f(2k + 1) = f(3k + 2)$
  A-t-on $f(n) = 1$?
  Remarque : la solution est inconnue !

- Quelle est la figure formée par un tétraèdre régulier et son symétrique par rapport à son centre de gravité ? Quelle est l'intersection de ces deux tétraèdres ?

LISTE DES PARTICIPANTS AU COLLOQUE SUR L'HEURISTIQUE

AUDIBERT G.	Montpellier
BACHMANN E.	Strasbourg
BADINO A.	Besançon
BERTRAND N.	Montpellier
BLANC M.	Nice
BOISTEL J.	Paris Nord
BOPP N.	Strasbourg
BOROWCZYK J.	Poitiers
BRETAGNOLLE J.	Paris Nord
BUISSON P.	Rouen
BURGAUD C.	Rennes
CARRIER J.	Lyon
CARVALLO M.	Brest
CHAMONTIN M - CHAMONTIN F.	
CHOUCHAN M.	Rouen
COHEN M.	Paris Sud
COMITI C.	Grenoble
COUTY R.	Limoges
DESCHASEAUX J.P.	Nancy
DHOMBRES J.	
DONTENVILLE R.	
DOUADY R.	Paris Sud
DUPUIS C.	Strasbourg
DURIER R.	Paris Nord
DUVAL R.	Strasbourg
DUVERT L.	Lyon
FORT J.	Poitiers
GABORIEAU J.P.	Rennes
GAUTIER D.	Rennes
GLAESER G.	Strasbourg
GRAS R.	Rennes
GRISVARD C.	Nice
GRUMETZ J.P.	Nancy
GUILLERAULT M.	Grenoble
HAUG. P.	Grenoble
HANNACHI A.	Montpellier
HIGOUNET L.	Montpellier
HIRSCH G.	Bruxelles
HUYGHE J.D.	Bordeaux
JANVIER M.	Montpellier
JEANSOLIN M.	Nice
JULLIEN P.	Grenoble
KHALILI E.	Strasbourg
KAYEMBE M.	Zaïre
KOCKO M.	Zaïre
KOLMAYER E.	Nancy
KOZLIK F.	Strasbourg
LAMBINET P.	Strasbourg
LANIER D.	Basse-Normandie
LECOQ J.	Basse-Normandie
LEFORT J.	
LEITE-LOPES M.	Strasbourg
MARCHAND P.	Nancy
MERIGOT M.	Nice
MERRIEN J.	Rennes
METENIER J.	Rouen
MISSONIER P.	Paris
MOLES A.	Strasbourg
MOSSMANN C.	Strasbourg
NAFFZGER G.	Strasbourg
OVAERT J.L.	Nancy
PELE C.	Paris
PESTEL J.	Rouen
PLUVINAGE F.	Strasbourg
POUGEOISE C.	Strasbourg
QUERE M.	Nancy
RAMIS M.	Strasbourg
RICHE E.	Paris
RIVET R.	Rennes
ROUCHIER A.	Orléans
SAGUERRE G.	Rennes
SAMSON J.	Strasbourg
SAUSER P.	Dijon
SAVALLE A.	Rouen
SCHAEFFER M.	Strasbourg
SILVESTRE H.	Strasbourg
THEBAULT R.	Rennes
WERQUIN M.C.	Paris Nord