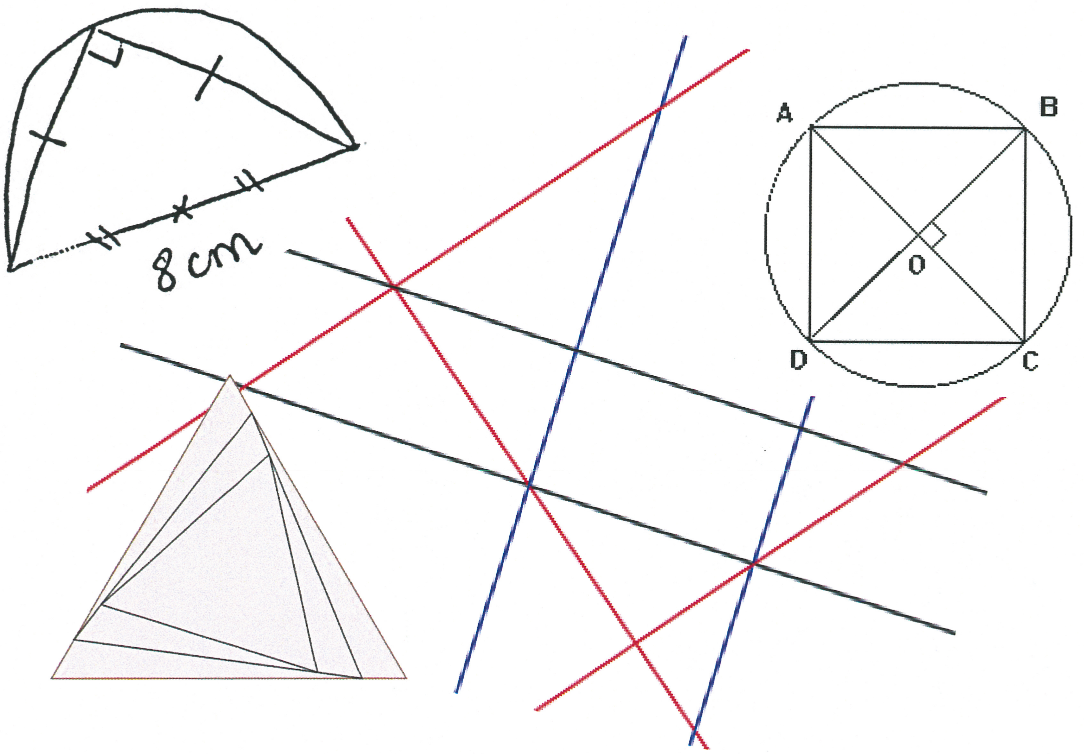
IREM

Académie de Lyon – Université Claude Bernard Lyon 1
Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques de Lyon

LA GEOMETRIE PLANE DU CYCLE 3 AU COLLEGE

Trois modules de formation



Groupe Rectoral École Collège
Bernard Anselmo, Annette Braconne-Michoux, Daniel Gros, Hélène Zucchetta

Université Claude Bernard Lyon 1 IUFM de l'Académie de Lyon académie Lyon

LA GEOMETRIE PLANE DU CYCLE 3 AU COLLEGE

Trois modules de formation

Groupe Rectoral École collège
Bernard Anselmo, Annette Braconne-Michoux, Daniel Gros, Hélène Zucchetta.

Juin 2013

Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques de Lyon

Sous la direction de Georges Combier puis de Paul Planchette le groupe rectoral de l'académie de Lyon a réuni pendant plus de cinq années des enseignants et des formateurs du premier et du second degré issus des trois départements de l'académie. En vue d'améliorer la qualité de l'enseignement en mathématiques et de contribuer à l'amélioration des résultats des élèves, il a conçu et animé des formations à destination des enseignants de primaire et de début de collège.
Cette brochure reprend un des dispositifs de formation élaboré par ce groupe. Elle a été rédigée par quelques-uns de ses membres[1].

Pour le soutien apporté à ce projet, nous tenons à remercier l'IREM de Lyon, l'IUFM de Lyon, l'Inspection de Mathématiques de l'Académie de Lyon, ainsi que les trois Inspections Académiques de l'Ain, de la Loire et du Rhône. Nous remercions en particulier Denise Courbon et Janine Reynaud, IA-IPR de Mathématiques, pour leurs encouragements et l'équipe de mathématiques de l'IUFM de l'académie de Lyon, site de l'Ain pour ses éclairages et ses propositions de situations de formation.

[1] Ont également participé, à différents moments, au groupe Rectoral Ecole Collège à l'IREM de Lyon :
Frédérique Bourgeat, Gérard Burdy, Philippe Busch, Karine Fenoy, Béatrice Frackowiak, Stéphane Garapon, André Gramain, Laurence Gouhot, Geneviève Lagain, Claire Tardy, Catherine Verbrugghe.

Préface

Pourquoi la géométrie à l'articulation de l'école et du collège ?

La géométrie demeure encore aujourd'hui le parent pauvre de l'enseignement des mathématiques à l'école primaire. Il y a plusieurs raisons à cela.
- Pendant très longtemps, l'enjeu assigné à l'école a été « savoir lire et compter », la géométrie ne constituant pas une priorité aux yeux des décideurs. Pour preuve, lors des changements de programme, les discussions souvent polémiques portent essentiellement sur le numérique, rarement sur le géométrique.
- Nombre d'enseignants du primaire ne sont pas d'origine scientifique et sont en délicatesse avec la géométrie, gardant un souvenir douloureux de sa fréquentation et plus particulièrement de la démonstration.
- Si les recherches sur lesquelles peuvent s'appuyer les auteurs de manuels et les enseignants ne manquent pas pour le collège, il en va différemment pour l'école. Si la thèse de Marie-Hélène Salin et René Berthelot a clairement posé la question de l'enseignement de la géométrie à l'école, peu nombreux sont les travaux de recherche qui proposent des ingénieries d'enseignement prenant en compte l'intégralité du programme de géométrie sur un cycle. L'équipe ERMEL et quelques autres chercheurs se sont attachés depuis quelques années à combler ce manque.

En collège, la question de l'enseignement de la géométrie se pose différemment. La plupart des notions figurant au programme de géométrie de la classe de sixième ont déjà été abordées à l'école élémentaire. Du côté des élèves, cette impression de « déjà vu » ne favorise pas leur motivation et du côté des professeurs, ils ont du mal à positionner leur enseignement en classe de sixième : « comment faire du neuf avec du vieux ? ». Pour faire simple et donc nécessairement de façon quelque peu caricaturale, le problème qu'ils ont à résoudre est, en conformité avec les instructions, d'installer progressivement le territoire du géomètre par rapport à celui du dessinateur.

Cette brochure est le fruit d'un travail de plusieurs années conduit par un groupe intercatégoriel réunissant des conseillers pédagogiques, des enseignants de collège et des formateurs en IUFM. Son originalité réside dans la proposition de modules de formation à l'articulation école-collège validés par plusieurs expérimentations. L'objectif de ces modules est d'aider les enseignants de cycle 3 et de sixième à mieux positionner leur enseignement au niveau d'enseignement qui est le leur, en prenant en charge les continuités mais aussi les ruptures entre l'école et le collège.

Cette brochure s'articule autour de trois thèmes :
1- De l'école au collège, ce n'est pas une géométrie qui est enseignée mais plusieurs, chacune ayant son intérêt et sa légitimité.
2- L'enseignement de la géométrie est celui de concepts qui structurent les programmes tant à l'école qu'au collège. Se pose donc la question de la mise en progression de l'enseignement et de l'apprentissage des différents aspects d'un concept.

3- La question se pose de comment provoquer ou favoriser le passage d'un niveau de géométrie à un autre. L'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique constitue un élément de réponse.

Un quatrième thème est traité de manière transversal : celui de l'enseignement par résolution de problèmes qui permet à l'élève de donner sens aux apprentissages.

Si cette brochure est prioritairement destinée à des formateurs intervenant en formation continue, les professeurs d'école et de collège pourront y trouver des éléments pour conforter ou renouveler leur enseignement.

Georges COMBIER
Formateur en mathématiques
IUFM de l'académie de Lyon

Table des matières

Les documents complétant la brochure sont sur le site de l'IREM de Lyon,

http://math.univ-lyon1.fr/irem/ **Rubrique : documents en ligne**

Quelques documents sont en accès libre et d'autres en accès restreint avec l'identifiant : geometrieplane et le mot de passe : cycle3college

INTRODUCTION AUX DIFFERENTS MODULES DE FORMATION

Cette brochure propose trois modules de formation qui ont chacun leur unité mais qui sont complémentaires. Elle est complétée par des ressources en ligne sur le site de l'IREM de Lyon, utilisables directement (documents photocopiables, diaporamas, fichiers geogebra et html)[2].
Elle est destinée à des formateurs qui pourront les utiliser plus particulièrement en formation continue dans des stages aussi bien en cycle 3 qu'en début de collège ou pour des liaisons école-collège.

L'objectif des modules est de sensibiliser les enseignants (du primaire et du secondaire) au fait que les géométries enseignées dans chacun des cycles sont différentes. On parlera de paradigme géométrique, considérant ainsi l'univers dans lequel l'élève travaille ou le contexte dans lequel l'activité se situe.

En primaire, il s'agit d'une géométrie G1 qualifiée de spatio-graphique (Parzysz ; 2003) ou de naturelle (Houdement & Kuzniak ; 1998). Elle se caractérise ainsi :

- les dessins ne représentent que les objets eux-mêmes ; leurs propriétés sont « locales » et n'ont pas un caractère général ni théorique ou abstrait. Ici deux carrés de 3 et 5 cm de côtés sont deux « figures » distinctes.
- les validations sont perceptives : à l'œil nu ou à l'aide d'instruments (, règle graduée ; équerre ; compas ; gabarit d'angle). Dans tous les cas, la validation est le fruit de l'interprétation de la perception. Les approximations y jouent un rôle important. Ainsi à propos de la reconnaissance d'un angle droit, dans le cas où les bords de l'équerre coïncident « presque » avec les côtés de l'angle, l'élève peut tout aussi bien considérer qu'il s'agit bien d'un angle droit parce que les approximations deviennent quantités négligeables, ou au contraire, il peut considérer qu'il ne s'agit pas d'un angle droit parce que, justement les bords de l'équerre ne coïncident pas avec les côtés de l'angle, l'approximation fût-elle due à sa maladresse.
- Un élève fonctionnant dans G1 considère qu'un carré n'est pas un rectangle.

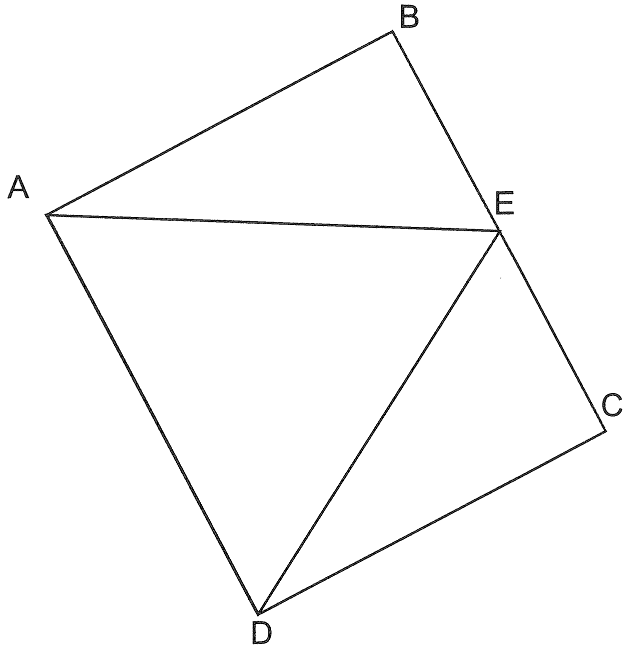
Au collège, on demande aux élèves de travailler dans un paradigme plus théorique : une géométrie G2, qualifiée de proto-axiomatique (Parzysz ; 2003) ou d'axiomatique naturelle (Houdement & Kuzniak ; 1998). Dans tous les cas,

- Les dessins deviennent des figures représentant des objets géométriques théoriques : les carrés de 3 et de 5 cm de côté auront les mêmes propriétés géométriques. Le dessin pourra être un schéma codé fait à main levée.
- Les validations sont le fruit d'un raisonnement hypothético-déductif « local ». En effet, dans ce paradigme géométrique, les élèves n'inscrivent pas leurs raisonnements dans un système complètement axiomatisé ; ils ne distinguent pas nécessairement un théorème et une définition ou un axiome. Ils connaissent un certain nombre de propriétés géométriques et peuvent les organiser déductivement les unes par rapport aux autres pour amener des informations nouvelles sur la figure ou prouver une conjecture ; les validations perceptives ou instrumentées devenant alors inutiles.

[2] http://math.univ-lyon1.fr/irem/spip.php?rubrique137

- Un élève fonctionnant dans G2 est capable de considérer qu'un carré est un rectangle particulier, mais la justification de cette inclusion de classes ne se situe pas encore dans un système complètement axiomatisé.

Prenons l'exemple de la situation d'un triangle équilatéral et d'un rectangle tel que l'un des côtés du rectangle soit confondu avec un côté du triangle équilatéral et le côté opposé passe par le 3ème sommet du triangle équilatéral.



Exemples d'activités relevant de G1

- Reproduction de la figure à l'identique ; le modèle étant donné. L'ordre dans lequel l'élève procède n'a pas d'importance puisque les dimensions sont celles qu'il prend sur le modèle. On peut poser la question de la nature du quadrilatère, de chacun des triangles pour s'assurer que l'élève a identifié les sous-figures de la figure construite.

- Dans G1 encore, on demande de doubler ou de tripler les dimensions de la figure. En posant les mêmes questions sur la nature du quadrilatère ou des triangles, on reste dans G1 puisque les validations se font de manière instrumentée. En revanche, on commence à aborder le fait que la taille de la figure ne change rien quant à la nature des objets géométriques qui la composent : on aborde là une composante de G2.

Exemples d'activités à l'articulation de G1-G2

- Dans G1 toujours, on donne un texte demandant de construire un triangle équilatéral AED de 6 cm de côté puis le rectangle ABCD tel que le côté [BC] passe par le point E. Cette fois l'ordre est imposé par la description et par les mesures. Si la construction du triangle équilatéral est une activité située dans G1, en revanche, la prise en compte des diverses contraintes pour le dessin du rectangle (le côté [BC] du rectangle passe par le sommet E du triangle équilatéral) fait que cette partie de la construction se situe plutôt dans G2. Pour autant la validation se fait de manière perceptive donc dans G1 : à l'œil ou aux instruments.

- Dans G2/G1, on donne le schéma à main levée codé accompagné d'un texte précisant l'alignement des points B, E, C. On pose la même question sur la nature du quadrilatère et des triangles. La nature de la validation détermine le paradigme de fonctionnement de l'élève. En demandant aux élèves de se déterminer par mesure des longueurs, on a une validation dans G1. En demandant, par exemple, aux élèves d'expliquer en quoi le quadrilatère ne peut pas être un carré, on leur demande de se placer dans G2. Si le schéma à main levée est proche du dessin attendu, un élève fonctionnant dans G1 pourra réussir. En revanche, si le schéma à main levée ne ressemble pas au dessin attendu, alors l'élève est contraint de fonctionner en G2.

Exemples d'activités relevant de G2

- Dans G2, on décrit la même situation par un texte dans lequel les sommets sont désignés par des lettres, par exemple :
  « *Construire un triangle BAE rectangle en B tel que l'angle A mesure 30°.*
  Construire le triangle équilatéral AED extérieur au triangle BAE.
  Enfin construire le triangle ECD rectangle en C extérieur au triangle précédent tel que l'angle E mesure 60°.
  Les points B, E, C sont-ils alignés ?
  Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ? »
  Si l'élève valide ses réponses par des calculs d'angles, alors il fonctionne dans G2. En revanche, si l'élève valide encore ses réponses de manière perceptive ou instrumentée, alors il fonctionne dans G1.

- Dans G2, à partir du schéma codé où les points B, E, C ne semblent pas alignés, on demande aux élèves de répondre (sans possibilité de constructions avec les instruments) aux questions précédentes de manière argumentée.

Globalement pour un mathématicien expert, il n'y a pas de hiérarchie entre les paradigmes G1 et G2 : ils se contrôlent l'un l'autre. Mais pour l'élève de l'école primaire ou du début de collège, ils sont différents et on ne saurait espérer que le passage d'un paradigme à l'autre se fasse spontanément ou sans apprentissage particulier.
On peut considérer qu'une activité située intégralement dans G1 relève plutôt de l'école élémentaire ; une activité située intégralement dans G2 relève par nature du collège et au-delà. La continuité dans les apprentissages de l'école élémentaire et du collège demande alors des activités situées à l'articulation G1-G2.
Cette articulation peut se faire par plusieurs entrées :

- l'usage de dessins à main levée dont il faut décoder les caractéristiques pour réaliser la figure en vraie grandeur ;
- l'agrandissement ou la diminution d'une figure proposée à la règle dont les caractéristiques doivent être repérées par l'élève (perceptivement ou aux instruments) avant de réaliser la figure demandée ;
- l'explicitation de la démarche de l'élève dans la réalisation de sa construction ou de sa validation.

En tout état de cause, un enseignant devra accepter que dans un premier temps, l'élève ne puisse pas expliquer sa validation théorique selon les canons de l'expression formelle du raisonnement hypothético-déductif. A l'école, il ne pourra que raconter ce qu'il a fait, dans l'ordre où il l'a fait et ce qu'il en attendait. L'expression formelle du raisonnement hypothético-déductif relève des apprentissages du collège.

Dans chacun des modules présentés, on se situera tantôt en G1 tantôt en G2 selon que l'on est en position d'élève du primaire, du collège ou d'adulte expert en géométrie ; l'idée étant de repérer pour une activité donnée, le paradigme dans lequel elle se situe et d'en déduire les chances de réussite des élèves.

Pour la mise en œuvre de ces modules, les formateurs prendront en compte les programmes officiels en cours, en particulier, pour identifier le type de problèmes auquel est confronté l'élève, ils souligneront les verbes d'action utilisés dans la partie « géométrie » du cycle 3 et de la classe de $6^{ème}$: reconnaître, reproduire, décrire, construire, représenter, compléter… Ils s'attacheront à repérer comment l'initiation à la déduction est amenée et s'articule entre l'école et le collège mais aussi à pointer comment l'expression du raisonnement en géométrie évolue et quel niveau de formalisme est attendu. Par exemple, on peut lire : « conduire sans formalisme des raisonnements simples utilisant les propriétés des figures usuelles ou de la symétrie axiale » dans les objectifs de la résolution de problèmes des programmes 2008 de la classe de 6^{e}.

LA GEOMETRIE PLANE : DU CYCLE 3 AU COLLEGE

OBJECTIFS DES TROIS MODULES DE FORMATION

Faire réfléchir les stagiaires sur l'enseignement de la géométrie, interroger leurs conceptions et, peut-être, modifier leurs pratiques :

- acquérir des connaissances ;
    - sur les différents niveaux de géométrie,
    - sur les différents types de problèmes,
    - sur certains logiciels de géométrie dynamique,
    - sur les programmes de géométrie et leur articulation école/collège,
- transformer des points de vue ;
    - vers une perception constructive des erreurs des élèves,
    - vers une approche conceptuelle de l'enseignement de la géométrie,
- transformer des pratiques ;
    - vers une construction des apprentissages géométriques par résolution de problèmes,
    - vers la mise en place de progressions incluant situations d'apprentissage et situations d'entrainement,
    - vers davantage d'utilisation raisonnée des TICE.

PUBLICS VISES

- Professeurs des écoles de cycle 3 ou/et professeurs de début collège (6^e, 5^e)

REFERENCES THEORIQUES

- Voir références bibliographiques page 103

DISPOSITIF:

Premier module

1. Différents niveaux de géométrie (1h)
2. Géométrie et résolution de problème (2h)

Deuxième module

1. Construction d'un concept : différents aspects et programmation sur un long terme (2h)
2. Des problèmes pour raisonner (1h)

Troisième module

La géométrie dynamique : un outil pour travailler à l'articulation des niveaux de géométrie.

PREMIER MODULE

1.Différents niveaux de géométrie (1h)
2.Géométrie et résolution de problème (2h)

1. DIFFERENTS NIVEAUX DE GEOMETRIE

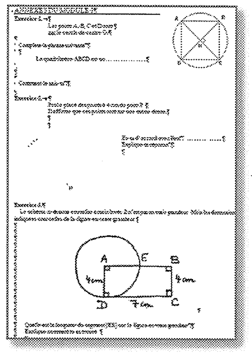
OBJECTIFS DE FORMATION

- Identifier l'existence de différents niveaux de géométrie par lesquels passe successivement l'élève au cours de sa scolarité.
- Rendre l'enseignant capable de déterminer à quel niveau de géométrie se situe son attente dans les activités proposées.
- Prendre conscience que l'élève a souvent l'initiative et la responsabilité de déterminer lui-même le niveau de géométrie attendu.

MATERIEL NECESSAIRE A LA FORMATION

On trouvera les annexes nécessaires pages 28 à 44 et sur le site de l'IREM de Lyon.

- Pour les stagiaires :
    - photocopies de l'annexe 1.1.



- Pour l'animateur :
    - ordinateur et vidéoprojecteur ou rétroprojecteur pour projeter les documents des annexes 1.2 ;
    - les commentaires fournis en annexe 1.3 à propos des productions des élèves.

MISE EN SITUATION

1^{er} temps : Recherche individuelle : 10 min

Chaque stagiaire reçoit une photocopie de l'annexe 1.1 comportant trois exercices qui ont été donnés à des élèves de CM et de 6^e.

Consigne

Pour chaque exercice, envisager ce que pourraient être des réponses d'élèves et sur quels types d'arguments les élèves pourraient s'appuyer pour les justifier.

$2^{ème}$ temps : Mise en commun : 30 min

L'animateur pourra suivant le temps dont il dispose choisir d'exploiter deux ou trois des exercices proposés.

Exercice 1

L'animateur recense les propositions de réponses et d'arguments

Il projette ensuite les productions d'élèves fournies en annexe 1.2 et illustre les deux niveaux de géométrie (voir commentaires fournis en annexe 1.3) :

- non axiomatique) (G1): « dans l'espace physique concret ou représenté » avec deux types de validation ;

- perceptive : « Je vois »,
  - instrumentée « J'utilise mes instruments (règle graduée et équerre) »,
- axiomatique « dans l'espace théorique des figures géométriques » avec une validation ;
  - par le raisonnement hypothético-déductif (G2): « Je raisonne sur les énoncés, sans recourir aux instruments ».

Commentaires :
Veiller toutefois à ne pas opposer validation théorique et validation instrumentée : dans les deux géométries l'élève peut mettre en œuvre un raisonnement qui s'appuie sur des propriétés du carré, mais celui-ci peut se mettre en œuvre à partir de données de natures différentes (mesurées, théorisées).
En fin de cycle 3, les seules propriétés connues de l'élève sont celles relatives aux côtés. Sa réponse ne peut donc que se situer au niveau de la géométrie instrumentée (mesure des longueurs des côtés). Ce n'est qu'au collège, après avoir étudié les propriétés sur les diagonales qu'il pourra se situer au niveau théorique.

Exercice 2

Le déroulement est identique au précédent.

Commentaires :
Il est vraisemblable que les élèves de cycle 3 recourront aux instruments pour valider ou invalider la réponse (la règle). Très peu penseront à préciser que les points sont sur un même cercle. La question n'induit pas cette justification, de plus la conception du cercle qu'ont beaucoup d'élèves de CM (une ligne obtenue au compas sans voir une ligne comme étant faite de points) les empêche de se situer au niveau de la géométrie théorique. On pourrait y inciter les élèves de 6e, en modifiant la consigne : « sans utiliser d'instruments, mais en te servant de tes connaissances, peux-tu dire si Paul dit vrai ou si Paul dit faux ? ».
Cet exercice soulève aussi l'ambigüité du vocabulaire relatif à l'alignement : points alignés, points sur une ligne, ligne droite, ligne courbe.

Exercice 3

Le déroulement est similaire à celui des exercices précédents

Commentaires :
Les trois types de validation peuvent être sollicités :
- perceptive : E semble au milieu de [AB], d'où EB = 3,5 cm ;
- instrumentée : EB = 2,3 cm. L'élève ne différencie pas le schéma de ce qu'il représente. Il est toutefois plus facile de distinguer figure et dessin lorsque l'élève travaille sur un schéma que lorsqu'il travaille sur une épure ;
- théorique : E est sur le cercle donc AE = AD = 4 cm ; ABCD est un rectangle donc AB = DC ; EB = AB - AE = 3 cm.

Il est exceptionnel qu'un élève de 6e fournisse toutes les étapes du raisonnement théorique : à ce niveau de classe, l'élève distingue difficilement ce qui pour lui relève de l'évidence, de ce qui doit faire l'objet d'une justification. D'autant plus que dans la figure proposée certaines informations sont implicites : ainsi la courbe imparfaite qui apparaît sur le dessin à main levée doit être vue comme un cercle valide passant par le point D, alors que l'information sur la position du point E qui, sur le dessin, semble être le milieu de [AB] ne doit pas être considérée comme fiable.

3ème temps : CONCLUSION (10 min)

En synthèse, retour sur les niveaux de géométrie et des types de validation associés :

- perceptive où l'élève distingue les formes les unes des autres, perçoit des égalités de longueur… ;
- instrumentée où les propriétés sont contrôlées avec les instruments. L'élève est déjà passé d'une perception globale de l'objet à une perception séquentielle (assemblage de plusieurs éléments de base, comme des segments…). L'élève s'appuie sur certaines propriétés d'éléments constitutifs de la figure ;
- théorique où l'élève utilise les informations qui lui sont données et ses connaissances (définitions, théorèmes, sans recourir aux instruments, …). Il les organise en un raisonnement hypothético-déductif.

Différents facteurs interviennent dans la détermination du niveau de géométrie où l'élève va se situer :

- la familiarité avec les éléments de la figure et leur orientation dans la feuille (cas de l'exercice 1) ;
- les connaissances disponibles (le deuxième exercice nécessite de maîtriser la propriété caractéristique du cercle pour se situer au niveau théorique) ;
- l'énoncé (avec la donnée d'un dessin ou non, à main levée ou pas, à l'échelle ou non…) qui n'indique pas à quel niveau de géométrie se situer
- le contrat (bien souvent implicite) passé par l'enseignant avec la classe et qui situerait le paradigme géométrique dans lequel l'élève devrait fonctionner.

L'enseignant peut jouer sur certains paramètres (variables didactiques) ou certains leviers pour faire "passer" les élèves d'une géométrie à l'autre. Par exemple, il peut proposer des figures pour lesquelles la perception ne permet pas d'identifier leurs propriétés (un rectangle "presque carré", un parallélogramme "presque rectangle"...) pour passer de la géométrie perceptive à la géométrie instrumentée ou utiliser des figures faites à main levée ou des figures qui ne respectent pas les vraies grandeurs pour que l'usage des instruments devienne inopérant et passer ainsi d'une géométrie instrumentée à une géométrie théorique.
De plus il arrive fréquemment que le travail au sein d'un même problème se situe à différents niveaux de géométrie. C'est ainsi le cas, quand on veut démontrer que les médiatrices d'un triangle sont concourantes (on ne se préoccupe pas de justifier que deux d'entre elles sont sécantes avant de recourir au raisonnement pour prouver que la troisième passe par le point d'intersection des deux premières). Il en est ainsi de beaucoup de questions d'incidence et de convexité. Il est d'ailleurs difficilement envisageable qu'il en soit autrement au collège.

Une des difficultés de l'élève est de décoder suivant le contexte quelles sont les attentes pas toujours claires de l'enseignant et de déterminer le type de validation qui est attendue par celui-ci.
De plus en primaire et en début de collège, nombre de propriétés sont admises suite à un constat fait avec les instruments et, il est ensuite demandé (bien souvent de façon implicite) à l'élève au collège de ne plus recourir aux instruments pour argumenter sa réponse, mais d'utiliser les propriétés qui viennent d'être installées.

QUE DISENT LES PROGRAMMES ?

(10 min)

L'animateur présente différents extraits des programmes de primaire et de collège en cours, en ciblant ceux qui font référence à des niveaux de géométrie différents, auxquels l'élève accède progressivement. Il pourrait par exemple relever :

- dans le programme de l'école primaire (BO HS n°3 du 19 juin 2008) : « L'objectif principal de l'enseignement de la géométrie du CE2 au CM2 est de permettre aux élèves de passer progressivement d'une reconnaissance perceptive des objets à une étude fondée sur le recours aux instruments de tracé et de mesure. »
- dans le préambule du programme de collège d'Aout 2008 : « passer de l'identification perceptive (la reconnaissance par la vue) de figures et de configurations à leur caractérisation par des propriétés (passage du dessin à la figure). »
- dans la partie géométrie du même programme en 6e : « À l'école élémentaire, les élèves ont acquis une première expérience des figures et des solides les plus usuels, en passant d'une reconnaissance perceptive (reconnaissance des formes) à une connaissance plus analytique prenant appui sur quelques propriétés (alignement, perpendicularité, parallélisme, égalité de longueurs, milieu, axes de symétrie), vérifiées à l'aide d'instruments. Ils ont été entraînés au maniement de ces instruments (équerre, règle, compas, gabarit) sur des supports variés, pour construire des figures, en particulier pour le tracé de perpendiculaires et de parallèles à l'aide de la règle et de l'équerre. Les travaux conduits en sixième prennent en compte les acquis antérieurs, évalués avec précision et obéissent à de nouveaux objectifs. Ils doivent viser d'une part à stabiliser les connaissances des élèves et d'autre part à les structurer, et peu à peu à les hiérarchiser. L'objectif d'initier à la déduction est aussi pris en compte. À cet effet, les activités qui permettent le développement des capacités à décortiquer et à construire des figures et des solides simples, à partir de la reconnaissance des propriétés élémentaires, occupent une place centrale. »

2. SITUATION PROBLEME ET GEOMETRIE

D'après les travaux de l'équipe de mathématiques de l'IUFM de Lyon site de l'Ain

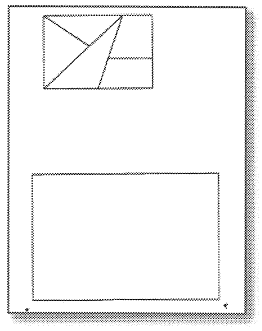
OBJECTIF DE FORMATION

- Prendre conscience :
  - que la géométrie peut être abordée par la résolution de problème ;
  - qu'une nouvelle connaissance peut être construite en réponse à un problème.

MATERIEL NECESSAIRE A LA FORMATION

On trouvera les annexes nécessaires pages 45 à 49 et sur le site de l'IREM de Lyon.

- Pour les stagiaires :
  - photocopies de l'annexe 1.4bis ;
  - instruments de géométrie ;
  - petits morceaux de papier de calque (3,5 cm × 3,5 cm).



- Pour l'animateur :
  - photocopies des annexes 1.4 et 1.4bis ;
  - scotch ou pâte à fixe ;
  - ordinateur et vidéoprojecteur ou rétroprojecteur pour projeter les documents de synthèse : annexe 1.5 ;
  - programmes de collège et de primaire.

MISE EN SITUATION

1er temps : Recherche individuelle : 20 min

La feuille annexe 1.4 est affichée au tableau ou projetée. La figure du bas est présentée comme étant un agrandissement réalisé avec un photocopieur de la figure du haut.
La feuille annexe 1.4bis est ensuite distribuée. Le rectangle du bas est présenté comme étant le même agrandissement que celui de la feuille affichée, mais il manque les tracés intérieurs au rectangle. Le papier calque est mis à disposition des stagiaires qui le demandent. La calculatrice est interdite.

Consigne :

Vous allez devoir terminer l'agrandissement de la figure sur la feuille annexe 1.4bis. Vous disposez pour cela de tous vos instruments de géométrie ainsi que d'une feuille de calque (si nécessaire) mais vous n'êtes pas autorisés à calculer ni à venir prendre de l'information sur l'agrandissement affiché au tableau.

2ème temps : Mise en commun (30 min)

Les stagiaires sont invités à faire part des difficultés qu'ils ont rencontrées. Leur travail s'arrête souvent au tracé de la diagonale, au repérage du milieu d'un côté. D'autres propriétés géométriques sont identifiées mais ne sont pas mises en œuvre.
Différentes procédures utilisées par les stagiaires qui n'ont pas permis de réussir sont présentées. Après chaque présentation, la procédure est soumise au groupe et est invalidée dans le débat complété si besoin par superposition de la production au modèle d'agrandissement.
La procédure utilisant la conservation des angles est ensuite présentée, puis validée. Elle est reconnue comme étant la seule qui permet de résoudre le problème posé.

Analyse de la situation

Elle est choisie de façon à mettre en évidence la conservation des angles, des alignements, et des égalités de longueur et plus particulièrement pour mettre en défaut toute procédure qui n'utiliserait pas les angles (notamment les procédures utilisant la mesure de longueur).L'interdiction, posée dans la consigne, de recourir au calcul ne rend pas possible d'utiliser la propriété de proportionnalité des mesures caractéristique d'une situation d'agrandissement.
Il est possible d'engager une procédure, mais seule celle utilisant les angles permet de réussir. Cette situation permet de prendre conscience des limites des connaissances construites jusque-là. La comparaison des productions au modèle à atteindre, à l'aide d'un calque par exemple, permet d'en prendre conscience. Les notions d'alignement, de milieux et d'angle apparaissent ainsi comme des nouveaux outils permettant de résoudre certains problèmes que les connaissances antérieures ne permettent pas de résoudre.
L'angle est présenté sous son aspect géométrique (et non pas sous l'aspect mesure de grandeur), c'est l'ouverture entre les côtés de l'angle (et non la longueur de ces côtés) qui est mobilisée, l'indépendance de la longueur des côtés de l'angle est mise en évidence.

En classe cette situation a souvent besoin d'être aménagée. Elle implique plusieurs propriétés de conservation qui peuvent chacune constituer un objectif d'apprentissage. Ainsi, si on veut viser l'introduction de la notion d'angle, il faudra tenir compte du fait que certains élèves ne disposent pas des propriétés de conservation d'alignement ou de milieux dans un agrandissement. On pourra, soit considérer que c'est un prérequis travaillé avant dans des situations d'agrandissement construites à cet effet, soit penser la mise en œuvre de la situation en conséquence (par exemple en instituant une mise commun intermédiaire portant uniquement sur ces deux points), soit encore proposer une autre situation du même type mais dans laquelle les deux premières propriétés ne sont pas mobilisées (l'agrandissement d'un losange par exemple).

3eme temps : SYNTHESE (30 min)

Exploitation en classe

Si nécessaire, l'animateur s'appuie sur l'activité précédente pour rappeler les caractéristiques d'une situation problème ou situation d'apprentissage par adaptation (annexe 1.5).

La connaissance à acquérir est l'outil le mieux adapté pour résoudre le problème.
Il y a des contraintes dans la situation (importance du choix des variables) pour que la connaissance visée soit nécessaire à la résolution du problème.
Les élèves sont confrontés à un vrai problème.
Ils ne connaissent pas a priori la procédure de résolution; en particulier la consigne ne doit pas induire de procédure.
Les élèves peuvent s'engager dans la résolution.
Ils comprennent la question, la situation a une finalité pour eux, ils peuvent essayer de résoudre avec les connaissances dont ils disposent.
Mais ces connaissances sont insuffisantes pour résoudre le problème immédiatement.
Les élèves ressentent les limites de leurs connaissances.
La situation permet à l'élève de savoir si sa solution convient ou non.
Les élèves peuvent valider ou invalider leur réponse sans l'intervention du maître.
L'organisation de la situation doit permettre à chaque élève de faire plusieurs essais, de réussir.
L'organisation de la situation favorise les interactions entre enfants (travail de groupe et/ou mise en commun).
L'organisation doit permettre de faire le point sur ce qui a été produit et appris.

L'animateur poursuit en fournissant des éléments de mise en œuvre. Il peut faire le parallèle avec les repères fournis dans les programmes de collège pour la mise en œuvre de la démarche d'investigation dans l'introduction commune aux disciplines scientifiques du collège.

Choix de la situation

S'assurer que la connaissance visée est la seule qui permet de résoudre le problème.
Choisir les variables de la situation : instruments, dimensions de la figure.
S'assurer que les élèves peuvent s'engager dans le problème. Pour cela, ils doivent pouvoir comprendre le but à atteindre et pouvoir engager une procédure, même erronée. Faire une analyse a priori des démarches possibles, exactes ou erronées.
S'assurer que les élèves peuvent se rendre compte par eux-mêmes de l'exactitude de leur production.

Mise en œuvre

1. **Une phase de présentation** au cours de laquelle, il faut s'assurer que les élèves comprennent bien la situation (ici agrandir une figure) et le but à atteindre (faire à la main avec les outils mis à disposition, ce que fait le photocopieur).

2. **Un temps de recherche** suffisant pour que les élèves puissent mettre en œuvre individuellement, au moins dans un premier temps, leurs connaissances. Il n'est pas nécessaire que tous aboutissent à la solution souhaitée. Par contre, il est indispensable que chacun prenne conscience des limites de ses connaissances antérieures. Il se peut qu'aucun élève ne réussisse. Éventuellement, une première mise en commun peut constituer une aide (ici par exemple la superposition de

productions d'élèves peut amener certains d'entre eux à considérer l'« ouverture » entre deux segments ayant une extrémité commune).

3. **Une mise en commun** portant sur les démarches. Pour garder un enjeu à l'explicitation des procédures, la validation n'intervient qu'à la fin. Cette mise en commun n'est pas une correction. Il ne s'agit pas d'exhiber en premier la solution, mais de prendre appui sur les procédures utilisées par les élèves pour en discuter et faire émerger la notion d'angle.

4. **Un temps de synthèse** au cours duquel les limites des méthodes, comme le report de mesures de longueur qui jusque-là convenaient sont rappelées et où une procédure qui permet de réussir est reprise devant la classe. Les nouveaux objets (ici l'angle) sont alors nommés.

5. **Un temps de réinvestissement** devant permettre à chaque élève de s'approprier le nouvel outil (ici la conservation des angles). Ce temps est individuel. Dans notre exemple, on peut proposer d'agrandir une autre figure.

<u>RETOUR AUX PROGRAMMES</u> : Les étapes de la résolution de problèmes

Ce qui vient d'être dit éclaire :

- la lecture du socle commun de connaissances et de compétences ;
  Dans chacun des domaines que sont le calcul, la géométrie et la gestion des données, les mathématiques fournissent des outils pour agir, choisir et décider dans la vie quotidienne. Elles développent la pensée logique, les capacités d'abstraction et de vision dans le plan et dans l'espace par l'utilisation de formules, de modèles, de graphiques et de diagrammes. Il s'agit aussi de développer le raisonnement logique et le goût de la démonstration.
  La maîtrise des principaux éléments de mathématiques s'acquiert et s'exerce essentiellement par la résolution de problèmes, notamment à partir de situations proches de la réalité. Les compétences acquises en mathématiques conditionnent l'acquisition d'une culture scientifique.

- la démarche d'investigation p 4 de l'introduction commune aux programmes de mathématiques de collège. (Août 2008) annexe 1.6 ;
- le paragraphe 4.1 « Une place centrale pour la résolution de problème », p. 9 des programmes de mathématiques de collège. (Août 2008) : annexe 1.6 bis.

Les stagiaires pourront se référer avec profit à deux documents d'accompagnement pour l'école primaire (programmes 2002) :

- « des problèmes pour chercher » ;
- « résolution de problèmes et apprentissage : des solutions personnelles vers les solutions expertes[3] ».

[3] Consultables sur le site de l'ARPEME http://www.arpeme.fr/index.php?id_page=28

LES TYPES DE PROBLEMES EN GEOMETRIE, AU CYCLE 3 ET AU DEBUT DE COLLEGE

(30 min)

Reproduire

En primaire, c'est souvent réaliser une copie du dessin à l'identique, mais ce peut être aussi la réaliser à une certaine échelle (par exemple sur un quadrillage).

L'élève doit :

- analyser la situation (repérer les éléments ou figures élémentaires qui la composent, les liens entre ces éléments) ;
- mobiliser les propriétés de la figure pour définir une chronologie des tracés ;
- faire un choix d'instruments ;
- mettre en place des contrôles.

Variables : la complexité de l'objet, le support, les outils.

Validation : par superposition ou par le calque du maître.

Compléter

Une partie de la figure est déjà reproduite, l'élève doit poursuivre la reproduction. Il doit pour cela, en plus des compétences sollicitées pour reproduire une figure, identifier les éléments déjà reproduits.

Variables : les mêmes que pour « ***reproduire*** » avec en plus le choix des éléments déjà reproduits qui orientent vers l'utilisation de certaines propriétés, contraint les stratégies de construction.

Validation : par superposition ou par le calque du maître.

Construire

A partir d'un programme de construction, l'élève doit:

- maîtriser le vocabulaire et sa signification ;
- connaitre les propriétés des objets ;
- maîtriser la syntaxe spécifique de la géométrie ;
- faire un choix d'instruments.

A partir d'un schéma codé ou d'une description, l'élève doit :

- connaître les conventions de codage.
- analyser une figure ;
- distinguer la figure du dessin ;
- faire un choix d'instruments ;
- définir une chronologie des tracés.

Variables : les mêmes que pour « ***reproduire*** » et les différentes possibilités d'amorcer la construction de la figure.

Validation : par superposition, par le calque du maître ou reprise de la chronologie de la construction.

Représenter, *dans le cas d'un objet de l'espace.*

L'élève doit alors :

- faire abstraction de certaines propriétés de l'objet. Toutes les propriétés ne sont pas conservées sur une représentation ;
- connaître les conventions

Décrire

Pour reconnaître une figure parmi d'autres.

L'élève doit :

- identifier les caractéristiques des figures et/ ou des sous-figures qui la distingue des autres ;
- maîtriser le vocabulaire.

Variables : le choix des figures qui oriente vers une description globale ou par les propriétés, les caractéristiques des figures qui conduisent à tenir compte d'un ou plusieurs critères, le choix des caractéristiques discriminantes, les outils mis à disposition pour prendre de l'information

Pour reproduire une figure, l'élève doit :

- analyser la figure c'est-à-dire identifier les sous-figures et les relations entre les différents éléments qui la composent ;
- communiquer les différentes étapes de la construction dans le contexte d'un programme de construction, ce qui nécessite de définir une chronologie, de choisir le vocabulaire adapté, de se décentrer pour contrôler que le message est recevable par un tiers ;
- donner une description de la figure en laissant à la charge du récepteur la responsabilité de la chronologie de la construction.

DES OUVRAGES OU TROUVER DES SITUATIONS

- *ERMEL* (2006) *géométrie cycle 3, Apprentissages géométriques et résolutions de problèmes,* Hatier
- *Cap maths CM1 et CM2, manuel, guide des activités et fiches photo-copiables,* Hatier
- *Maths et Clic 6^e^,*(2000) *Manuel et livre du professeur*, Bordas
- *Manuels Sésamath 6è* (2013)
- *Articulation école-collège : Des activités géométriques,* Commission Inter IREM Premier Cycle (2001), COPIRELEM
- *Travaux géométriques : Apprendre à résoudre des problèmes, cycle 3,* (2000) IREM de Lille
- *Travaux géométriques en 6^e^*, (1998) Nathan Pédagogie

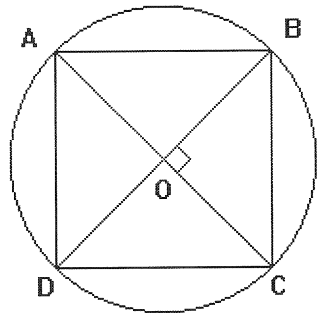
ANNEXES DU MODULE 1

Ces annexes sont téléchargeables sur le site de l'IREM de Lyon http://math.univ-lyon1.fr/irem/ Rubrique : documents en ligne en accès restreint avec l'identifiant : geometrieplane et le mot de passe : cycle3college

Annexe 1.1

Exercice 1.

Les points A, B, C et D sont sur le cercle de centre O.



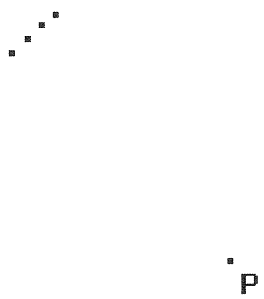
Complète la phrase suivante :

Le quadrilatère ABCD est un …………………

Comment le sais-tu ?

Exercice 2.

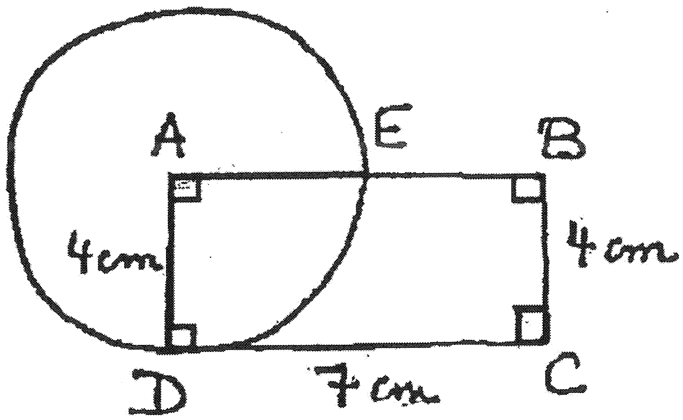
Paul a placé des points à 4 cm du point P.
Il affirme que ces points sont sur une même droite.



Es-tu d'accord avec Paul ? ………………..
Explique ta réponse :

Exercice 3.

Le schéma ci-dessous est réalisé à main levée. Il n'est pas en vraie grandeur. Mais les dimensions indiquées sont celles de la figure en vraie grandeur.

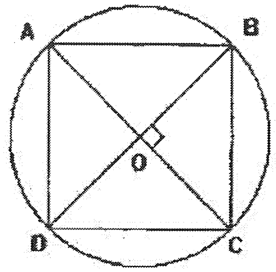


Quelle est la longueur du segment [EB] sur la figure en vraie grandeur ?
Explique comment tu as trouvé :

Production A1

Exercice 1.

Les points A, B, C et D sont
sur le cercle de centre O.



Complète la phrase suivante :

Le quadrilatère ABCD est un .rsont.......

Comment le sais-tu ? ges regarder la figure t B Dc et ges vous que c'était un sont

Production A2

Le quadrilatère ABCD est un quadrilatère a 4 coté

Production A3

Le quadrilatère ABCD est un ..polygone....

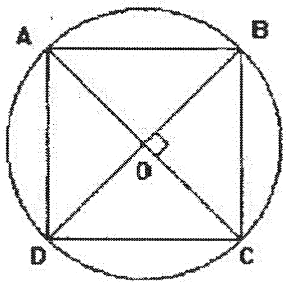
Comment le sais-tu ?

Parce qu'un polygone doit avoir 3 ou 4 angles

Production B1

Exercice 1.

Les points A, B, C et D sont
sur le cercle de centre O.



Complète la phrase suivante :

Le quadrilatère ABCD est un .quarx..........

Comment le sais-tu ? parce-que il a la forme d'un quare

Le quadrilatère ABCD est un .carre...............

Production B2

Comment le sais-tu ?

Car A est liés a B . B est liés a C. c est liés a D et D est liés a A

Production B3

Le quadrilatère ABCD est un carre.............

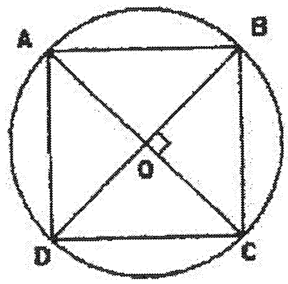
Comment le sais-tu ?

je le sait car les angle son perpendiculair

Production C1

Exercice 1.

Les points A, B, C et D sont
sur le cercle de centre O.



Complète la phrase suivante :

Le quadrilatère ABCD est un carré.........

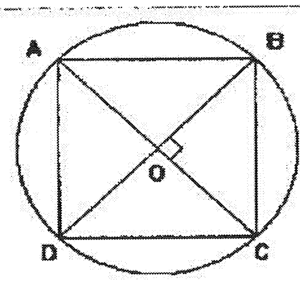
Comment le sais-tu ?

Je le sais car cela se voie et je l'ai verifier en le mesurant.

Production C2

Exercice 1.

Les points A, B, C et D sont
sur le cercle de centre O.



Complète la phrase suivante :

Le quadrilatère ABCD est un ..carré...........

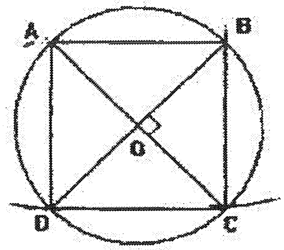
Comment le sais-tu ?

Je le sais car j'ai mesuré et il fait 2,9 cm de chaque côté.

Production C3

Exercice 1.

Les points A, B, C et D sont
sur le cercle de centre O.



Complète la phrase suivante :

Le quadrilatère ABCD est un .carré...........

Comment le sais-tu ?

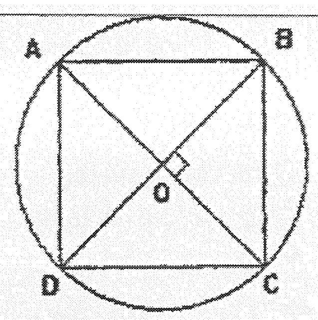
un segment sur

je le sais parce que j'ai pris mon compas et j'ai raporté tous les autres segments

Production D1

Exercice 1.

Les points A, B, C et D sont sur le cercle de centre O.



Complète la phrase suivante :

Le quadrilatère ABCD est un .carré.........

Comment le sais-tu ?

car les diagonal se croise en perpendiculair

Production D2

Le quadrilatère ABCD est un ..carré...........

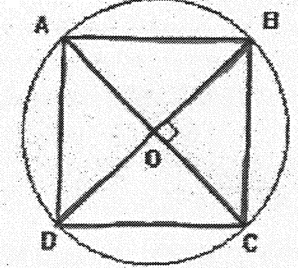
Comment le sais-tu ?

Car les rayons ~~de~~ d'un cercle sont obligatoirement égaux donc les côtés du quadrilatère ABCD sont aussi obligatoirement égaux.

Production E

Exercice 1.

Les points A, B, C et D sont sur le cercle de centre O.



Complète la phrase suivante :

Le quadrilatère ABCD est un .carré.........

Comment le sais-tu ?

C'est un carré car les côté du carré sont tous égaux et de même longueur. On voit aussi qu'il y a quatre triangles rectangle égaux si on les emboîtes on trouvera un carré cela fonctionne pour tous les carrés si les triangles rectangles sont tous égaux et qu'il sont quatre

Le quadrilatère ABCD est un carré..........

Production F1

Comment le sais-tu ?

c'est un carré car les 2 diagonales du carré sont aussi 2 diamètre du ~~carré~~ cercle et ~~s~~ si on trace les côtés pour rejoindre n'importe quel diagonale ça fait un carré.

Le quadrilatère ABCD est un ..carré.........

Production F2

Comment le sais-tu ?

Je le sais car les diagonales de ce quadrilatère se coupe à angle droit et que chaque sommet du carré sont ~~sur~~ le cercle.

Le quadrilatère ABCD est un carré.........

Production F3

Comment le sais-tu ? parce que ses 4 côtés sont égaux, il a 4 angles droits, les diagonales qui se coupent en leurs millieu ect...

Le quadrilatère ABCD est un carré........

Production G

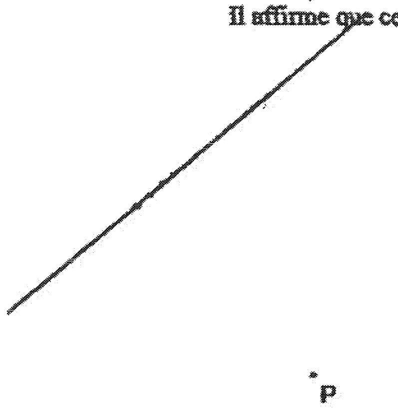
Comment le sais-tu ?

On sait que tous les points du cercle sont à égale distance du centre O et que O est le ~~centre~~ point d'intersection des deux diagonales ~~et que~~ et que les diagonales se coupent en leur milieu et sont perpendiculaires et comme les sommets ABCD sont sur le cercle; ABCD est un carré

Production A

Exercice 2.

Paul a placé des points à 4 cm du point P.
Il affirme que ces points sont sur une même droite.



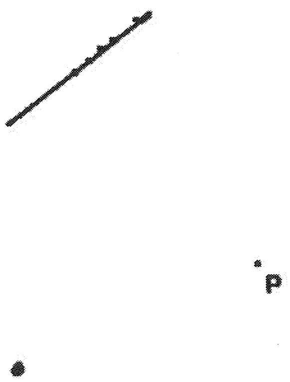
Es-tu d'accord avec Paul ? Oui..........
Explique ta réponse :
Parce que les point que Paul à dessiné sont sur la Même ligne. Et si on prend la règle et qu'on l'aligne aux point sa fait une droite, droite

Exercice 2.

Production B1

Paul a placé des points à 4 cm du point P.
Il affirme que ces points sont sur une même droite.

Es-tu d'accord avec Paul ? Faux........
Explique ta réponse :
car si l'on trace d'autre point a 4 cm il est impossible de former une droite.

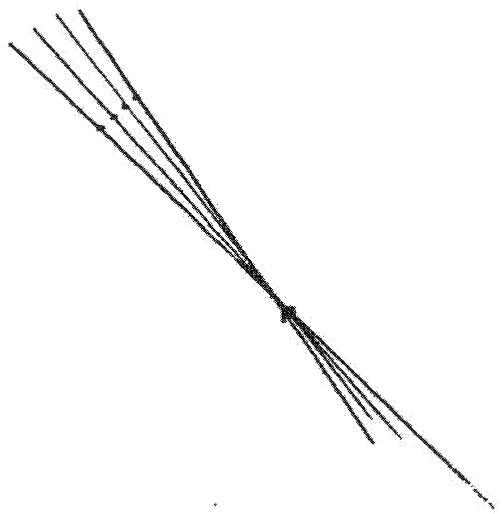


← exemple

Exercice 2.

Production B2

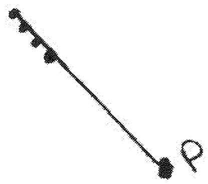
Paul a placé des points à 4 cm du point P.
Il affirme que ces points sont sur une même droite.



Es-tu d'accord avec Paul ? ...Non......
Explique ta réponse :

Je ne suis pas d'accord avec Paul car les points sont pas placé verticalement.
Pour que Paul ~~puis~~ trace une seul droite pour aller j'usqua point p il faudra que les 4 petit point sont alignes verticalement

ex



Production C1

Es-tu d'accord avec Paul ? .Non..........
Explique ta réponse : Une droite ne peux pas passé par quatre point

Production C2

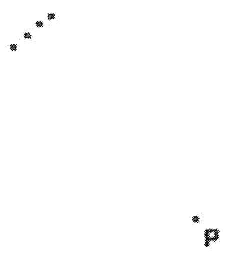
Es-tu d'accord avec Paul ? ...non........
Explique ta réponse :

car il se touche pas

Exercice 2.

Production D1

Paul a placé des points à 4 cm du point P.
Il affirme que ces points sont sur une même droite.

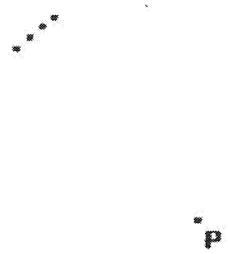


Es-tu d'accord avec Paul ? ….non…..

Explique ta réponse :

J'ai mis non parce que j'ai vu que 2 petits points était plus haut que les deux autre.

Production D2

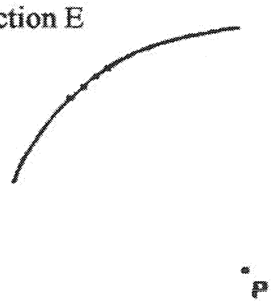


Es-tu d'accord avec Paul ? ..non……….

Explique ta réponse :

parce que une droite va tout droit et elle ne tourne pas.

Production E



Es-tu d'accord avec Paul ? .oui……….

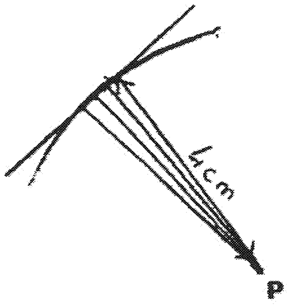
Explique ta réponse :

parce qu'en traçant un arc de cercle tout ces point sont sur cet arc. ce qui affirme que ces points sont bien alignés

Exercice 2.

Production F

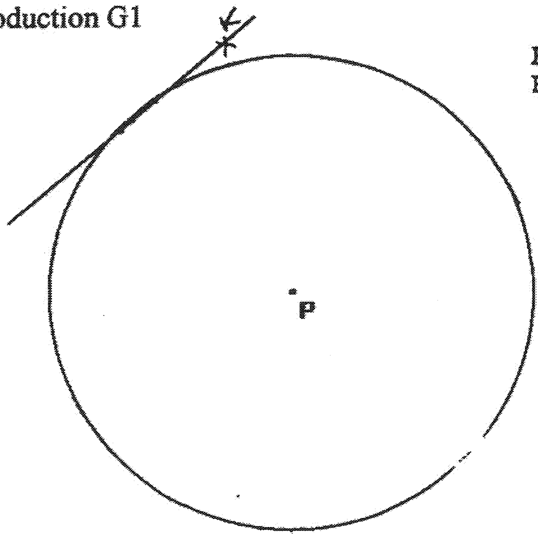
Paul a placé des points à 4 cm du point P.
Il affirme que ces points sont sur une même droite.



Es-tu d'accord avec Paul ? Oui............

Explique ta réponse : Car le 4 point sont a la même place, enfin pas exactement mais a partir du point P il font tous 4 cm et on peut les mètres sur une droit ou un sercle car si on les déplace vers la droite ou la guauche se sera pareil mais si on les bouge vers le haut ou le bas se sera différent

Production G1

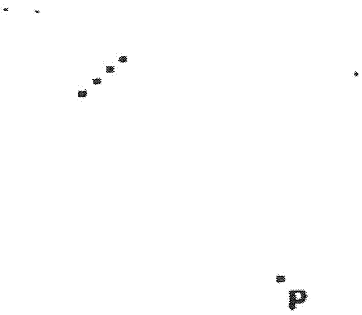


Es-tu d'accord avec Paul ? ..Non............

Explique ta réponse :

Oui paul à placé des points à 4 cm deu point P. Mais sont affirmation n'est pas bonne car pour que les points soit à 4 cm deu point P il faut qu'il forme un cercle. Si ces point était sur une même droite le point K serai à 4 cm du point P alors qu'il ne l'est pas

Production G2



Es-tu d'accord avec Paul ? ..Non............

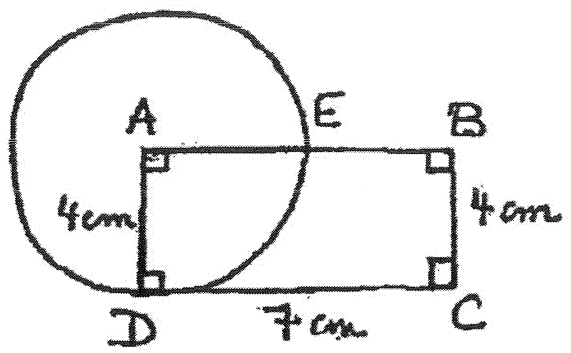
Explique ta réponse :

Les 4 points sont à 4 cm du point P mais ne sont pas sur une même droite car l'infinité de points se trouvant à 4cm de P autour de lui sont sur un cercle parce qu'on peut faire tout le tour du point P en gardant la même mesure.

Exercice 3.

Production A

Le schéma ci-dessous est réalisé à main levée. Il n'est pas en vraie grandeur. Mais les dimensions indiquées sont celles de la figure en vraie grandeur.



Quelle est la longueur du segment [EB] sur la figure en vraie grandeur ?
Explique comment tu as trouvé : Alors j'ai fau 11 + 11 = 22 cm j'ai fait des operation est j'ai trouve

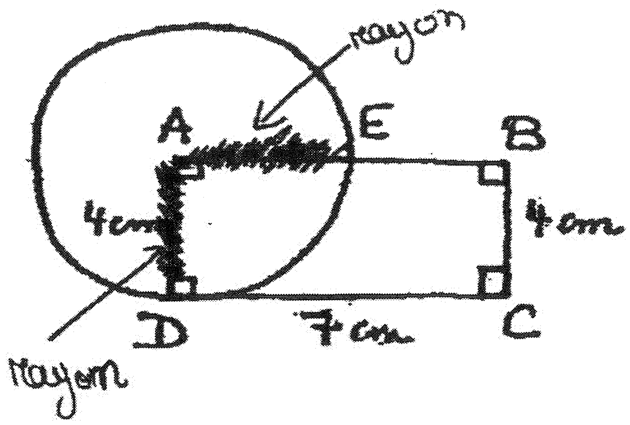
4 + 7 = 11 ; 4 + 4 = 8 ; 7 − 4 = 3

4 + 4 = 8 cm ; 8 + 3 = 11 ; 7 − 4 = 3 cm ; 11 + 11 = 22 cm

Quelle est la longueur du segment [EB] sur la figure en vraie grandeur ? 3,5 cm
Explique comment tu as trouvé : C'est un rectangle donc les 2 grands côtés sont de même longeur. AB mesure 7 cm. Le cercle coupe à la moitié du segment AB. La moitié de 7 cm est de 3,5 cm

Production B1

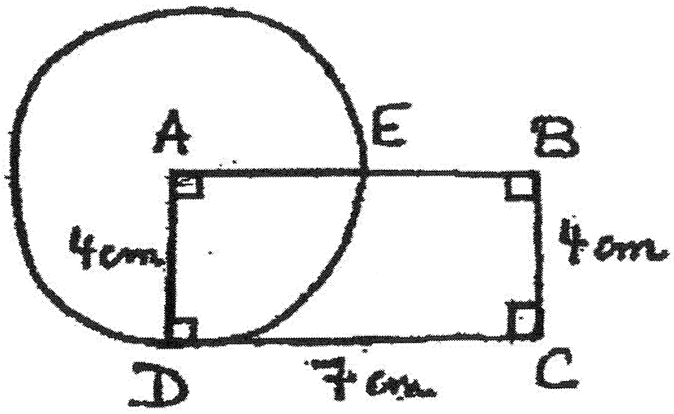
Production B2



Quelle est la longueur du segment [EB] sur la figure en vraie grandeur ?
Explique comment tu as trouvé :

La longueur du segment [EB] est de 4 cm car c'est le rayon du cercle.

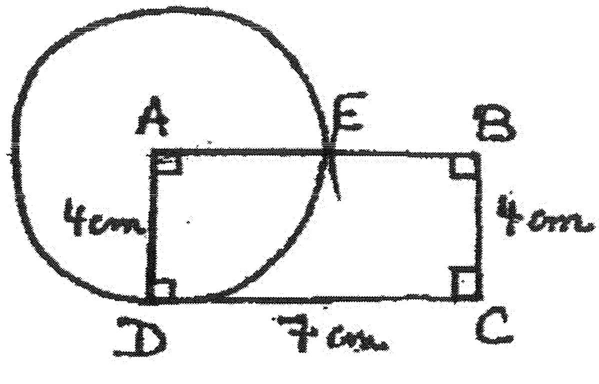
Production C



Quelle est la longueur du segment [EB] sur la figure en vraie grandeur ?
Explique comment tu as trouvé :

Le segment [EB] fait 2,3 cm en vraie grandeur
j'ai pris ma règle et j'ai mesuré

Production D1



Quelle est la longueur du segment [EB] sur la figure en vraie grandeur ?
Explique comment tu as trouvé :

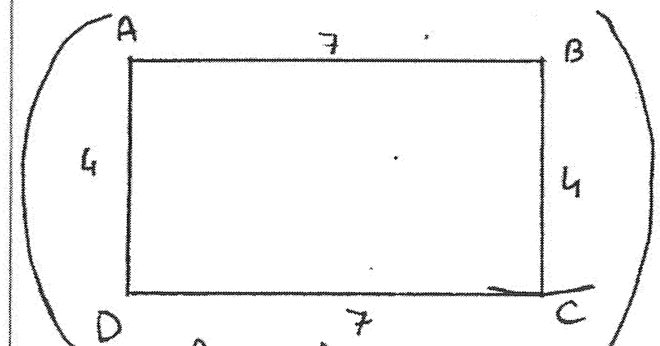
J'ai pris le segment [BC] et je ~~le~~ l'ai reporté sur le segment [EB] et il mesure 4 cm.

Quelle est la longueur du segment [EB] sur la figure en vraie grandeur ? [EB] = 2,4 cm
Explique comment tu as trouvé :

J'ai trouvé le résultat 2,4cm car j'ai mesurer avec ma règle.

(faux) je me suis trompé car j'ai oublié que le schéma n'était pas en vraie grandeur.

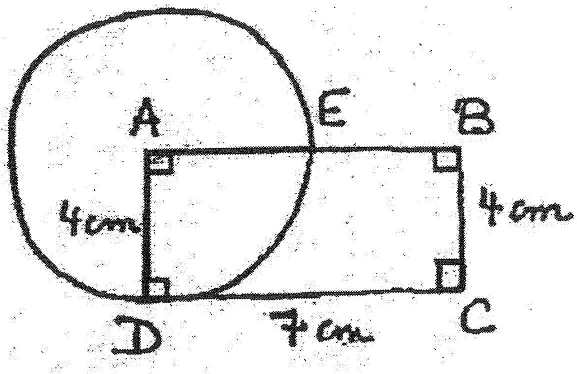
Production D2



Quand on mesure la longueur AB sur le schéma cela donne 5cm et le point E est à 2,5cm (au millieu) donc [EB] = 3,7

faux le schéma ne sert à rien

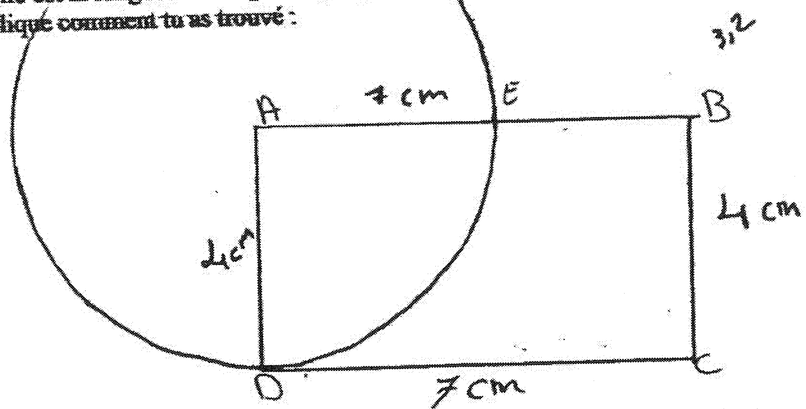
Production D3



Quelle est la longueur du segment [EB] sur la figure en vraie grandeur ? 4,3cm
Explique comment tu as trouvé : J'ai remis 2 cm car sur la figure faite à main levée la longueur est de 5cm et sur la vraie figure il mesure 7cm.

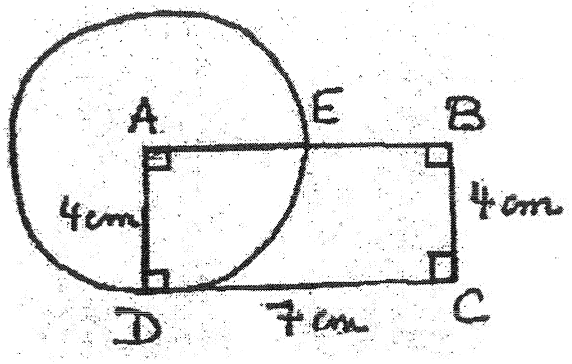
Production E

Quelle est la longueur du segment [EB] sur la figure en vraie grandeur ?
Explique comment tu as trouvé :



La longueur du segment [EB] sur la figure en vraie grandeur est de 3,2
Je l'ai trouvé car j'ai fais la même figure quand tout mais en vraie grandeur

Production F



Quelle est la longueur du segment [EB] sur la figure en vraie grandeur ? 3 cm
Explique comment tu as trouvé : J'ai trouvé grace au indication comme sur un côté il est écris 4cm et que sur un autre il est marqué 7 cm ja me suis dit que 7=4+3 et j'ai vu que le segment [AE] était plus grand que le segment [EB] alors comme le plus petit des chiffres qui font 7 est 3 j'ai su que c'était ça.

Production G

Quelle est la longueur du segment [EB] sur la figure en vraie grandeur ?
Explique comment tu as trouvé :

La longeur du segment [EB] est égale à 3cm.

Si [AD] = 4 cm, [AE] aussi car le cercle de centre A passe par D et par E. ABCD étant un rectangle, [AB] = [DC] = 7cm
On obtient donc [AB] - [AE] = [AB]

D'où [EB] = 7cm - 4cm = 3cm

[EB] = 3cm

Exercice 1 :
Une très grande majorité des élèves a répondu que le quadrilatère ABCD est un carré.

Productions A.

A1, A2 et A3
Pour ces élèves, le quadrilatère ABCD *"est un rond"* ou un *"quadrilatère" à 4 côtés"* ou *"un polygone à 3 ou 4 angles"*. Le mot « quadrilatère » n'a visiblement pas de sens pour eux.

Productions B.

Les réponses des élèves sont de l'ordre du perceptif *(G1 avec validation perceptive)* :.

B1 Vision globale de la forme de la figure.

B2 Vision des éléments d'une figure : 4 cotés accrochés les uns aux autres. Sommets reliés.

B3 Vision des éléments d'une figure : angles droits (angles droits du quadrilatère ou angles droits formés par les diagonales)

Productions C.

Les réponses des élèves sont de l'ordre de la géométrie instrumentée *(G1 avec validation instrumentée)* :

C1 Vision globale et vérification par mesurage (on suppose qu'il s'agit de la mesure des côtés).

C2 Vérification des côtés égaux par l'utilisation de la règle graduée.

C3 Vérification des côtés égaux par l'utilisation du compas : report de longueur.

Productions D.

Justifications incorrectes concernant les diagonales :

D1 Référence au codage de l'angle droit. Peut-être connaissance d'une des propriétés du carré *(G1 avec validation perceptive).*

D2 Connaissance d'une des propriétés du cercle (les rayons ont la même longueur) et confusion entre les rayons du cercle (demi-diagonales) et côtés du carré *(G1 avec essai d'argumentation).*

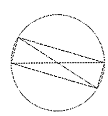
Production E.

Référence au pavage du carré par 4 triangles rectangles identiques. Lien possible avec une construction par manipulation. Justification perceptive par analyse des sous figures.

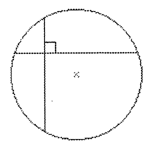
Productions F.

Essais d'argumentations *(à l'articulation entre G1 et G2).*

F1 Il manque la perpendicularité des diagonales.---------→



F2 La justification ne précise pas que les diagonales sont des diamètres ---→



F3 Excès d'arguments : « Plus on ajoute d'arguments, plus on le prouve… »

Production G.

Géométrie déductive. Justification raisonnée *(G2 avec raisonnement hypothético-déductif).*

Exercice 2 :
Production A.

L'élève trace une droite et **perçoit** que les points sont alignés (*G1 avec validation instrumentée*).

Productions B.

Difficultés d'interprétation de l'énoncé (*G1 avec validation instrumentée*).

B1 Il semble comprendre l'énoncé comme : « Est-ce que tous les points situés à 4 cm de P sont sur une même droite ? » Il donne un contre-exemple.
Il trace une droite, ce qui peut sous-entendre qu'il considère que les points proposés par Paul sont alignés et il en donne un cinquième qui n'est pas aligné avec les précédents.
On peut interpréter cette production autrement : l'élève fait un raisonnement correct et il ne trace la droite que pour s'approprier l'énoncé et pour confirmer ses dires.

B2 Il semble comprendre l'énoncé comme : « Est-ce que les 4 points et le point P sont sur une même droite ? » D'ailleurs il dessine le cas où on pourrait répondre que les points sont sur une même droite.

Productions C.

Problèmes de conception, de représentation de l'objet « droite » *(à l'articulation entre G1 et G2)*

C1 Peut-être, l'élève est-il perturbé parce qu'il a appris que : « Par deux points, il ne passe qu'une seule droite » Et dans le cas de 4 points ?

C2 Les quatre points ne se touchent pas, ils forment une « ligne en pointillés » (discontinuité) et donc ils ne peuvent représenter une droite.

Productions D.

Ils **perçoivent** que les points ne sont pas sur une même droite. (*G1 avec validation perceptive*).

D1 La perception que l'élève a des positions relatives des points les uns par rapport aux autres est pour lui déterminante. Décalage des points qui ne peuvent donc être alignés

D2 Perception de la courbure ou référence non explicitée à un savoir : « Une droite ne peut pas tourner ».

Production E.

Il **perçoit** bien l'arc de cercle. Mais « être aligné » veut dire « être sur une même ligne, même s'il s'agit d'une ligne courbe ».

Production F.

Les points sont perçus tout aussi bien comme étant sur le cercle que sur la droite. (La distance entre les points du cercle et ceux de la droite étant infime à proximité du point de tangence) L'intersection du cercle et de la droite est constituée, pour l'élève, de points multiples.
Cette production illustre le « conflit » entre G1 et G2 : l'élève sait que 4 points à une même distance d'un autre sont sur un cercle *(G2)* mais quand il les choisit assez proches, ils ont l'air alignés *(G1)*.

Productions G.

Arguments déductifs *(G2)*.

G1 Il commence par justifier que si des points sont à 4 cm du point P, ils sont sur un cercle. Puis il ajoute que la droite et le cercle tracés ne peuvent pas être confondus.

G2 Il passe par la définition du cercle comme ensemble de points à égale distance d'un même point.

Exercice 3 :
Dans cet exercice, la longueur EB cherchée est égale à 3 cm.
Mais sur le dessin à main levée, le point E est placé « presque au milieu de [OB] » et « EB =AD ».

Production A.

Il calcule le périmètre du rectangle ABCD et ne répond pas à la question posée mais en route il a calculé 7-3, sans doute la longueur EB.

Productions B.

Ils font appel à des propriétés concernant le rectangle ou le cercle mais ils **perçoivent** que le point E est le milieu de [AB].

B1 Les côtés opposés d'un rectangle sont de même longueur donc AB = 7 cm. Puis E étant le milieu de [AB], il calcule la moitié de 7, ce qui donne EB = 3,5 cm.

B2 Les rayons d'un cercle sont de même longueur donc AE = 4 cm. Puis E étant le milieu de [AB], on a EB = AE. Ce qui donne EB = 4 cm.

Production C.

Il mesure directement sur le schéma fait à main levée. EB = 2,3 cm.

Productions D.

Au schéma est attribué le statut de dessin comme un dessin en vraie grandeur ou à l'échelle *(G1 instrumenté)*.

D1 Il considère que le schéma est dessiné comme une réduction de la figure en vraie grandeur. Ainsi en reportant BC avec le compas, il s'aperçoit que BC = BE. D'où EB = 4 cm (validation instrumentée.)

D2 Après avoir **mesuré**, il prend conscience que le dessin n'est pas en vraie grandeur et change de méthode. Il perçoit E comme étant le milieu de [AB], il calcule la moitié de 7, soit 3,5 cm. Puisque 5 cm sur le schéma correspond à 7 cm sur la figure en vraie grandeur, il réajuste 3,5 cm. On peut penser que comme 5 + 2 = 7 alors 3,5 + 0,2 = 3,7. EB = 3,7 cm (conception additive de l'agrandissement ?).

D3 Il mesure directement EB sur le schéma où il trouve 2,3 cm. Puisque 5 cm sur le schéma correspond à 7 cm sur la figure en vraie grandeur, il ajoute les 2 cm à 2,3 cm. EB = 4,3 cm. Il a une conception additive de l'agrandissement.

Production E.

Il trace la figure en vraie grandeur puis mesure, sur celle-ci, la longueur EB. Le tracé étant imprécis, il trouve EB = 3,2 cm *(G1 avec validation instrumentée)*.

Production F.

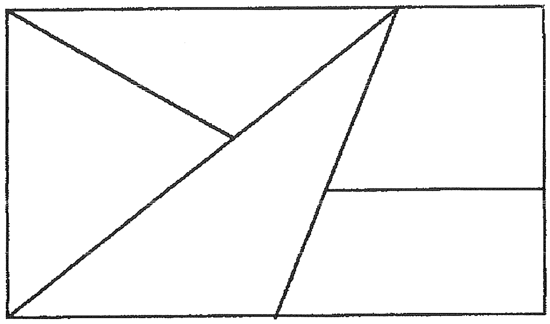
Le résultat donné est exact, mais le raisonnement est incorrect. Il semble qu'il recherche deux nombres dont la somme est égale à 7. On peut supposer que sous l'effet contrat, il utilise la donnée du 4cm du schéma. Il n'identifie pas l'égalité des rayons. Ainsi 7 = 4 + 3.
D'où (AE ; EB) = (4 ; 3) ou (AE ; EB) = (3 ; 4).
Il perçoit sur le schéma à main levée que AE < EB donc AE = 3 cm et EB = 4 cm.

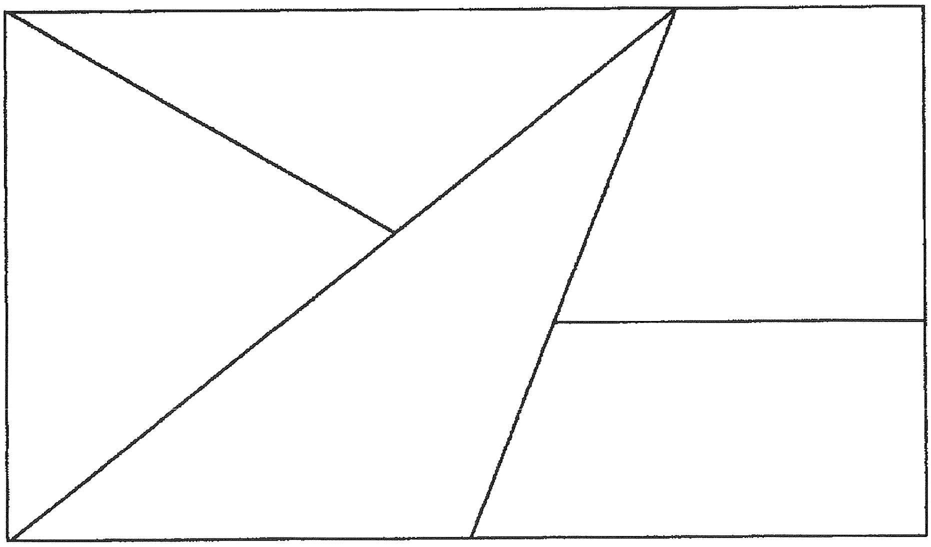
Production G.

Raisonnement correct s'appuyant sur les propriétés du cercle et du rectangle. EB = 3 cm. *(G2)*

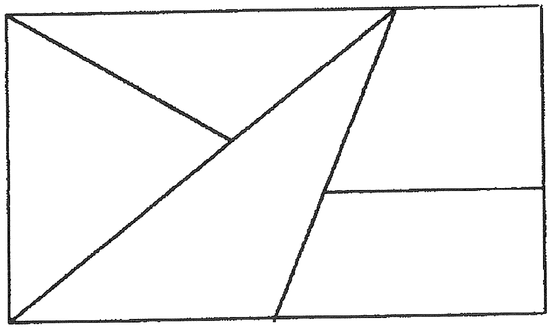
Annexe 1.4

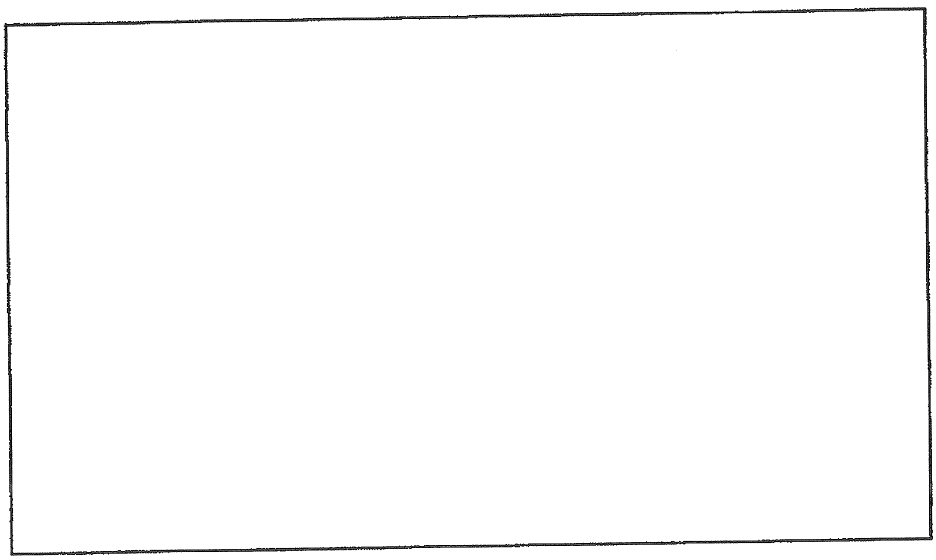
Situation





Annexe 1.4 bis





Annexe 1.5

Situation – problème

Un apprentissage nouveau est visé

La connaissance à acquérir est l'outil le mieux adapté pour résoudre le problème

Les élèves sont confrontés à un vrai problème

Les élèves peuvent s'engager dans la résolution

Mais leurs connaissances sont insuffisantes pour résoudre le problème immédiatement

La situation permet à l'élève de savoir si sa solution convient ou non

L'organisation de la situation doit permettre à chaque élève de faire plusieurs essais, de réussir

L'organisation de la situation favorise les interactions entre enfants

L'organisation doit permettre de faire le point sur ce qui a été produit et appris

Canevas d'une séquence d'investigation

Programme de collège Aout 2008

Choix d'une situation - problème

Appropriation du problème par les élèves

Formulation de conjectures, d'hypothèses explicatives, de protocoles possibles

Investigation ou résolution du problème conduite par les élèves

Échange argumenté autour des propositions élaborées

Acquisition et structuration des connaissances

Mobilisation des connaissances

Annexe 1.6

Introduction commune aux programmes de mathématiques du collège p4 (août 2008)

III. LA DEMARCHE D'INVESTIGATION

Dans la continuité de l'école primaire, les programmes du collège privilégient pour les disciplines scientifiques et la technologie une démarche d'investigation. Comme l'indiquent les modalités décrites ci-dessous, cette démarche n'est pas unique. Elle n'est pas non plus exclusive et tous les objets d'étude ne se prêtent pas également à sa mise en œuvre. Une présentation par l'enseignant est parfois nécessaire, mais elle ne doit pas, en général, constituer l'essentiel d'une séance dans le cadre d'une démarche qui privilégie la construction du savoir par l'élève. Il appartient au professeur de déterminer les sujets qui feront l'objet d'un exposé et ceux pour lesquels la mise en œuvre d'une démarche d'investigation est pertinente.

La démarche d'investigation présente des analogies entre son application au domaine des sciences expérimentales et à celui des mathématiques. La spécificité de chacun de ces domaines, liée à leurs objets d'étude respectifs et à leurs méthodes de preuve, conduit cependant à quelques différences dans la réalisation. Une éducation scientifique complète se doit de faire prendre conscience aux élèves à la fois de la proximité de ces démarches (résolution de problèmes, formulation respectivement d'hypothèses explicatives et de conjectures) et des particularités de chacune d'entre elles, notamment en ce qui concerne la validation, par l'expérimentation d'un côté, par la démonstration de l'autre.

Repères pour la mise en œuvre

1. Divers aspects d'une démarche d'investigation

Cette démarche s'appuie sur le questionnement des élèves sur le monde réel (en sciences expérimentales et en technologie) et sur la résolution de problèmes (en mathématiques). Les investigations réalisées avec l'aide du professeur, l'élaboration de réponses et la recherche d'explications ou de justifications débouchent sur l'acquisition de connaissances, de compétences méthodologiques et sur la mise au point de savoir-faire techniques.

Dans le domaine des sciences expérimentales et de la technologie, chaque fois qu'elles sont possibles, matériellement et déontologiquement, l'observation, l'expérimentation ou l'action directe par les élèves sur le réel doivent être privilégiées.

Une séance d'investigation doit être conclue par des activités de synthèse et de structuration organisées par l'enseignant, à partir des travaux effectués par la classe. Celles-ci portent non seulement sur les quelques notions, définitions, résultats et outils de base mis en évidence, que les élèves doivent connaître et peuvent désormais utiliser, mais elles sont aussi l'occasion de dégager et d'expliciter les méthodes que nécessite leur mise en oeuvre.

2. Canevas d'une séquence d'investigation

Ce canevas n'a pas la prétention de définir « la » méthode d'enseignement, ni celle de figer de façon exhaustive un déroulement imposé. Une séquence est constituée en général de plusieurs séances relatives à un même sujet d'étude.

Par commodité de présentation, sept moments essentiels ont été identifiés. L'ordre dans lequel ils se succèdent ne constitue pas une trame à adopter de manière linéaire. En fonction des sujets, un aller et retour entre ces moments est tout à fait souhaitable, et le temps consacré à chacun doit être adapté au projet pédagogique de l'enseignant.

Les modes de gestion des regroupements d'élèves, du binôme au groupe-classe selon les activités et les objectifs visés, favorisent l'expression sous toutes ses formes et permettent un accès progressif à l'autonomie.

La spécificité de chaque discipline conduit à penser différemment, dans une démarche d'investigation, le rôle de l'expérience et le choix du problème à résoudre. Le canevas proposé doit donc être aménagé pour chaque discipline.

Le choix d'une situation - problème:

- analyser les savoirs visés et déterminer les objectifs à atteindre ;
- repérer les acquis initiaux des élèves ;
- identifier les conceptions ou les représentations des élèves, ainsi que les difficultés persistantes (analyse d'obstacles cognitifs et d'erreurs) ;
- élaborer un scénario d'enseignement en fonction de l'analyse de ces différents éléments.

L'appropriation du problème par les élèves :

Les élèves proposent des éléments de solution qui permettent de travailler sur leurs conceptions initiales, notamment par confrontation de leurs éventuelles divergences pour favoriser l'appropriation par la classe du problème à résoudre.

L'enseignant guide le travail des élèves et, éventuellement, l'aide à reformuler les questions pour s'assurer de leur sens, à les recentrer sur le problème à résoudre qui doit être compris par tous. Ce guidage ne doit pas amener à occulter ces conceptions initiales mais au contraire à faire naître le questionnement.

La formulation de conjectures, d'hypothèses explicatives, de protocoles possibles :

- formulation orale ou écrite de conjectures ou d'hypothèses par les élèves (ou les groupes) ;
- élaboration éventuelle d'expériences, destinées à tester ces hypothèses ou conjectures ;
- communication à la classe des conjectures ou des hypothèses et des éventuels protocoles expérimentaux proposés.

L'investigation ou la résolution du problème conduite par les élèves :

- moments de débat interne au groupe d'élèves ;
- contrôle de l'isolement des paramètres et de leur variation, description et réalisation de l'expérience (schémas, description écrite) dans le cas des sciences expérimentales, réalisation en technologie ;
- description et exploitation des méthodes et des résultats ; recherche d'éléments de justification et de preuve, confrontation avec les conjectures et les hypothèses formulées précédemment.

L'échange argumenté autour des propositions élaborées :

- communication au sein de la classe des solutions élaborées, des réponses apportées, des résultats obtenus, des interrogations qui demeurent ;
- confrontation des propositions, débat autour de leur validité, recherche d'arguments ; en mathématiques, cet échange peut se terminer par le constat qu'il existe plusieurs voies pour parvenir au résultat attendu et par l'élaboration collective de preuves.

L'acquisition et la structuration des connaissances :

- mise en évidence, avec l'aide de l'enseignant, de nouveaux éléments de savoir (notion, technique, méthode) utilisés au cours de la résolution,
- confrontation avec le savoir établi (comme autre forme de recours à la recherche documentaire, recours au manuel), en respectant des niveaux de formulation accessibles aux élèves, donc inspirés des productions auxquelles les groupes sont parvenus ;
- recherche des causes d'un éventuel désaccord, analyse critique des expériences faites et proposition d'expériences complémentaires,
- reformulation écrite par les élèves, avec l'aide du professeur, des connaissances nouvelles acquises en fin de séquence.

La mobilisation des connaissances :

- exercices permettant d'automatiser certaines procédures, de maîtriser les formes d'expression liées aux connaissances travaillées : formes langagières ou symboliques, représentations graphiques… (entraînement), liens ;
- nouveaux problèmes permettant la mise en œuvre des connaissances acquises dans de nouveaux contextes (réinvestissement) ;
- évaluation des connaissances et des compétences méthodologiques.

Annexe 1.6bis

Paragraphe 4.1 p 9 des programmes de mathématiques du collège (août 2008)

4.1. Une place centrale pour la résolution de problèmes

La compréhension et l'appropriation des connaissances mathématiques reposent sur l'activité de chaque élève qui doit donc être privilégiée. Pour cela, et lorsque c'est possible, sont choisies des situations créant un problème dont la solution fait intervenir des « outils », c'est-à-dire des techniques ou des notions déjà acquises, afin d'aboutir à la découverte ou à l'assimilation de notions nouvelles. Lorsque celles-ci sont bien maîtrisées, elles fournissent à leur tour de nouveaux « outils », qui permettent un cheminement vers une connaissance meilleure ou différente. Ainsi, les connaissances peuvent prendre du sens pour l'élève à partir des questions qu'il se pose et des problèmes qu'il résout. Les situations choisies doivent :

- prendre en compte les objectifs visés et une analyse préalable des savoirs en jeu, ainsi que les acquis et les conceptions initiales des élèves ;
- permettre un démarrage possible pour tous les élèves, donc ne reposer que sur des consignes simples et n'exiger, au départ, que des connaissances solidement acquises par tous ;
- créer rapidement un problème assez riche pour provoquer des conjectures ;
- rendre possible la mise en jeu, puis la formulation des notions ou des procédures dont l'apprentissage est visé ;
- fournir aux élèves, aussi souvent que possible, des occasions de contrôle de leurs résultats, tout en favorisant un nouvel enrichissement ; on y parvient, par exemple, en prévoyant divers cheminements qui permettent de fructueuses comparaisons.

Si la résolution de problèmes permet de déboucher sur l'établissement de connaissances nouvelles, elle est également un moyen privilégié d'en élargir le sens et d'en assurer la maîtrise. Pour cela, les situations plus ouvertes, dans lesquelles les élèves doivent solliciter en autonomie les connaissances acquises, jouent un rôle important. Leur traitement nécessite initiative et imagination et peut être réalisé en faisant appel à différentes stratégies qui doivent être explicitées et confrontées, sans nécessairement que soit privilégiée l'une d'entre elles.

L'utilisation d'outils logiciels est particulièrement importante et doit être privilégiée chaque fois qu'elle est une aide à l'imagination, à la formulation de conjectures ou au calcul. Cette utilisation se présente sous deux formes indispensables, notamment dans le cadre des compétences du socle commun : l'usage d'un vidéoprojecteur en classe et l'utilisation par les élèves d'ordinateurs « en fond de classe » ou en salle informatique.

DEUXIEME MODULE

1. Construction d'un concept :
   Différents aspects et programmation sur un long terme (2h)
2. Des problèmes pour raisonner (1h)

1. CONSTRUCTION DU CONCEPT DE PERPENDICULAIRES (ET DE PARALLELES)

Différents aspects du concept et programmation sur un long terme

D'après les travaux de l'équipe de mathématiques de l'IUFM de Lyon site de l'Ain.

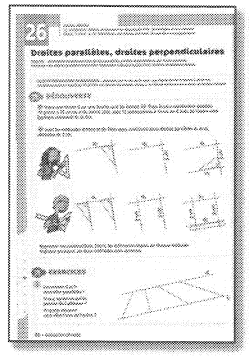
OBJECTIFS DE FORMATION

- Comprendre qu'un concept revêt plusieurs aspects et se construit sur plusieurs années.
- Prendre conscience des points forts et des limites de quelques outils référents : programme, manuels.
- Prendre conscience de la pluralité des approches didactiques parmi lesquelles le professeur pourra choisir en tenant compte de différentes logiques : celles du contenu, de l'apprenant, du contrat.

MATERIEL NECESSAIRE A LA FORMATION

On trouvera les annexes nécessaires pages 68 à 85 et sur le site de l'IREM de Lyon.

- Pour les stagiaires :
  - o photocopies de l'annexe 2.3. et de cinq extraits de manuels de CM1 suivants[4] :
    - J'apprends les maths (Retz 2010) p 38-39
    - La clé des maths (Belin 2010) p 44-45
    - Euromaths (Hatier 2009) p 72-73
    - A portée des maths (Hachette 2008) p 152-153
    - ERMEL Apprentissages géométriques (Hatier 2006) p 241



- Pour l'animateur :
  - o annexes 2.1.A et 2.1.B ; 2.2 et 2.3;
  - o ordinateur et vidéoprojecteur ou rétroprojecteur pour projeter les documents de synthèse.

ASPECTS DU CONCEPT

1er temps : RECHERCHE INDIVIDUELLE (5 min)

Consigne

Comment définiriez-vous les termes : « angle droit », « perpendiculaire », « parallèle » pour vous-mêmes, pour des élèves de l'école élémentaire, du collège. Écrivez vos définitions.

[4] Les pages de manuels référencées ne figurent pas dans la brochure mais on peut soit se reporter aux manuels, soit les trouver sur le site de l'IREM de Lyon.

$2^{ème}$ temps : *MISE EN COMMUN (10 min)*

Les différentes propositions sont recensées au tableau. Les stagiaires sont invités à s'interroger sur celles qui, à leur avis, relèvent du primaire, du collège et à quels niveaux de classe. (Les formateurs peuvent s'inspirer de l'annexe 2.3 pour structurer les propositions des stagiaires)

$3^{ème}$ temps : *Reconnaitre la perpendicularité (10 min)*

Cette phase est menée collectivement.

Les différentes figures (annexe 2.1.A et 2.1.B) sont projetées une à une.

Consigne

Pour chacune des figures 1, 2, 4, 5, 6, dire si vous identifiez des droites perpendiculaires ou non. Comment procédez- vous pour le savoir ?
Pour la figure 3, imaginez le tracé précis de la perpendiculaire à la droite en gras passant par A. Comment procédez-vous ?
Le formateur doit veiller à faire verbaliser les procédures et inciter à en faire émerger la diversité à propos d'une même figure. Faire expliciter des réponses comme : « ça se voit » ; « j'ai penché la tête » ; « c'est dans un demi-cercle » ; « ça a l'air mais on ne peut rien vérifier » ; « il faudrait sûrement plus d'informations, de tracés … ». Faire remarquer que les procédures varient selon les configurations, les individus, le contexte (comme dans la figure 1 qui peut être considérée comme la représentation d'un objet de l'espace qui lui-même contient des angles droits ou comme une figure de géométrie plane sans angle droit) etc. …

Commentaires :
Différentes procédures sont envisageables :

- comparaison à une figure standard verticale/ horizontale ;
- comparaison de deux angles (ouverture plus ou moins grande entre les côtés ; aigu/obtus…) ;
- recherche de la plus courte distance d'un point à une droite ;
- rotation de la tête pour replacer l'objet dans une position verticale/ horizontale ;
- projection d'une équerre physique ;
- en plaçant mentalement un petit carré dans le coin ;
- reconnaissance d'une configuration…

Ces modes de reconnaissances dépendent de l'individu et du contexte. Ici, par contrat didactique, les reconnaissances de perpendicularité sont faites dans G1 sauf pour les situations n°3 et 5 qui peuvent relever de G2.

$4^{ème}$ temps : *SYNTHESE (10 min)*

Des activités précédentes, on peut dégager différents aspects des concepts d'angle droit, de perpendicularité ou de parallélisme, qui correspondent à autant de façon de les définir ou de les introduire (annexe 2.3).

(Le formateur distribue les documents de l'annexe 2.3.)

Pour Gérard Vergnaud, le véritable enjeu de l'enseignement en mathématiques est les concepts et l'apprentissage d'un concept passe par la construction de son champ conceptuel aux différents niveaux de la scolarité.

(Le formateur projette le document en annexe 2.2)

Pour lui, un concept se caractérise par :

- un ensemble de situations qui donnent du sens au concept c'est dans ces situations qu'il montre son utilité)un ensemble d'invariants opératoires sur lesquels s'appuie l'organisation de l'activité. (l'ensemble des propriétés, des techniques communes à toutes les situations qui font qu'on les range toutes dans la même catégorie conceptuelle) ;
- un ensemble des termes, dénomination ou symboles qui permettent de représenter le concept et sa relation avec l'action.

Un champ conceptuel est l'ensemble des situations dont le traitement impose la mobilisation du concept, de ses propriétés et des procédures qui en découlent et symboles qui y sont associés.

De la fréquentation de situations différentes relevant du même champ vont naître les invariants, les caractéristiques, le vocabulaire, l'emploi des symboles. Il en est ainsi pour les concepts d'angle droit, de perpendicularité ou de parallélisme.

ETUDE DES CHOIX FAITS PAR DES MANUELS

1er temps : travail en groupe (30 min)

Les stagiaires reçoivent une photocopie de différents extraits de manuels de CM1. Il s'agit de la première « leçon » sur la notion de parallèles en CM1. Par groupe de 3 ou 4, ils comparent ces activités (sur affiche).

Consigne

Comparer ces activités du point de vue :

- des aspects du concept travaillé ;
- des objectifs d'apprentissage visé ;
- des prérequis nécessaires à la « leçon » ;
- de la tâche demandée à l'élève ;
- de la possibilité qu'a l'élève de valider sa démarche.

2ème temps : MISE EN COMMUN (15 min)

Cette mise en commun doit porter sur les différents choix didactiques possibles :

- les aspects du concept choisis (et en particulier du premier aspect introduit),
- la manière de les aborder (par le problème ou non),
- les objectifs d'apprentissages visés.

Elle permet aussi de poser la question des effets de ces choix sur :

- la programmation d'enseignement (par les auteurs du manuel),
- l'apprentissage des élèves,
- le contrat didactique instauré dans la classe.

Commentaires : tableau comparatif de différents manuels de CM1

	J'apprends les Maths (RETZ édition 2010) p 38-39	La clé des maths p 44-45 (BELIN édition 2008)	Euromath (HATIER édition 2009) p 72-73	A portée des maths (HACHETTE édition 2008) p 152-153	Ermel : Apprentissages géométriques (les roues) (HATIER édition 2006) p 241
Aspects abordés	Droites : de même direction qui ne se rencontrent jamais ; à écart constant.	Droites : perpendiculaires à une même droite ; non sécantes. à écart constant ;	Droites : ensemble de points à une distance donnée d'une autre perpendiculaires à une même troisième ; à écart constant.	Droites : perpendiculaires à une même droite ; à écart constant ; non sécantes.	Droites : à écart constant ;
Objectifs	Retrouver des parallèles de façon perceptive ou à l'aide d'un réseau de parallèles. Retrouver des segments parallèles sur une figure fermée de façon perceptive ou en utilisant un réseau de parallèles.	Définir deux parallèles comme deux droites perpendiculaires à une même troisième	Retrouver des parallèles de façon perceptive Vérifier le parallélisme Construire des parallèles Mesurer la distance entre deux parallèles	Tracer des parallèles Retrouver des parallèles de façon perceptive Mesurer l'écartement Vérifier le parallélisme	Identifier des parallèles de façon perceptive Utiliser l'écart constant associé à la perpendicularité pour vérifier le parallélisme Utiliser l'écart constant pour construire un parallèle
Prérequis	Mesurer une longueur	Perpendicularité Fréquentation de l'équerre Distance d'un point à une droite	Distance d'un point à une droite. Perpendicularité	Perpendicularité	Mesurer une longueur Perpendicularité
Tâche demandée	Mesurer ; observer comment on utilise les instruments et/ou les connaissances et appliquer	Tracer en suivant un programme de construction. Constater	Chercher une méthode de construction rapide (ex. 1). Puis observer et reproduire des méthodes (peut-être découvertes dans l'ex. 1)	Plier, observer, tracer, trouver, vérifier.	Chercher une méthode de construction d'une parallèle à une distance donnée d'une droite.
Possibilité de valider sa démarche	Pas de validation de la démarche. La validation de ce qui semble perçu nécessite de savoir utiliser l'outil proposé (ici le calque).	Non. Pas de place à l'erreur. Les erreurs des élèves ne sont pas anticipées et ne peuvent être exploitées. Si l'élève se trompe, c'est parce qu'il n'a pas suivi les instructions.	Oui, dans l'exercice 1 à condition de savoir comment mesurer la distance d'un point à une droite (voir prérequis).	Non. Pas de place à l'erreur. Les erreurs des élèves ne sont pas anticipées et ne peuvent être exploitées. Si l'élève se trompe, c'est parce qu'il n'a pas suivi les instructions.	Oui, la situation propose une validation par le milieu.

$3^{ème}$ temps : Synthèse : éléments à prendre en compte pour construire une progression (10 min)

Le choix des aspects travaillés

Pour construire une progression, nous suggérons que l'enseignant se pose des questions à propos de l'aspect premier à mettre en avant :

- Faut-il choisir le plus intuitif ?
- Celui qui est le plus familier à l'élève ?
- Comment faire pour que ce premier aspect ne fasse pas obstacle à la construction des autres aspects ?
- Est-il judicieux, par exemple, d'aborder les parallèles sous l'aspect horizontal/horizontal ?
- …

Pour aborder les différents aspects retenus, il est nécessaire de faire des choix et de définir une chronologie.
Pour arrêter ces choix, il est aussi nécessaire de prendre en compte à la fois la logique des contenus et les possibilités de l'apprenant. On ne peut pas commencer par certains aspects car ils découlent d'autres. Ainsi on ne saurait définir l'angle droit comme un angle de 90° avant d'avoir vu la mesure des angles. D'autres aspects sont d'un abord difficile et ne sauraient être premiers. Par exemple, la notion de droites parallèles vue comme deux droites perpendiculaires à une même troisième, notion qui est le fruit d'une construction intellectuelle, est plus difficile d'accès que celle de droites qui ne se coupent pas ou encore d'écart constant.

Les programmes de 2008 laissent à l'enseignant une certaine liberté sur les aspects premiers et les choix à faire dans la construction d'une progression. Pour autant les tableaux présentant la progressivité des apprentissages suggèrent de partir de figures de base (carré, rectangle) pour en dégager les notions plus abstraites comme la perpendicularité ou le parallélisme. Ces tableaux ne sont pas en contradiction avec les précisions fournies par les programmes de 2002

- au Cycle 2 : Percevoir l'angle droit en référence à un objet : « coin d'une feuille de papier, feuille pliée en quatre, après identification perceptive d'un carré ou d'un rectangle […] L'équerre traditionnelle de l'écolier peut engendrer des représentations erronées relatives à l'angle droit (confusion avec le triangle) » (Cf. : *document d'application programmes 2002 Cycle 2 p.26*) ;
- au Cycle 3 : « angle droit » est reconnu comme angle de l'équerre ;
    - « les expressions « droites perpendiculaires » et « droites se coupant à angle droit » sont considérées comme synonymes. » Les élèves sont invités à réfléchir « au cas des droites qui se coupent en formant quatre angles égaux ».
    - deux droites « parallèles » sont deux droites « non sécantes », mais aussi deux droites qui ont un écart constant. (Cf. *document d'application programmes 2002 Cycle 3 p.31*) ;

Le choix des objectifs d'apprentissage

Il s'agit de définir les compétences qu'on souhaite voir développer.
Ce choix se fait en référence au programme et au socle commun de connaissances et de compétences.

Exemples d'objectifs d'apprentissage sur la notion de perpendiculaires :

En primaire :

- mobiliser des images mentales de l'angle droit dans l'espace physique (cycle 2) puis l'espace de la feuille de papier par un tracé à main levée (cycle 3) ;
- reconnaître des angles droits dans une figure fermée (polygone) ou une figure ouverte (droites perpendiculaires), et ceci indépendamment de leur orientation dans la feuille ;
- utiliser des instruments (gabarit, équerre) pour contrôler, pour construire ;
- tracer des angles droits pour construire un carré, un rectangle ;
- tracer une droite perpendiculaire à une autre passant par un point donné situé sur la droite ou extérieur à la droite ;
- tracer une droite parallèle à une autre passant par un point donné ;
- etc.

En sixième :

- utiliser différentes méthodes pour tracer, par un point donné, la perpendiculaire ou la parallèle à une droite donnée ;
- commencer à utiliser et formuler des propriétés pour contrôler et/ou justifier le parallélisme et la perpendicularité de certaines droites ;
- associer angle droit et angle de mesure 90°.

Les programmes déclinent des compétences et tâches mais font rarement mention des aspects d'un concept à travailler à un niveau donné. Ceci est laissé à la charge des auteurs de manuels et de l'enseignant.

Le choix des situations d'apprentissage

Pour introduire un nouvel aspect du concept, on peut s'interroger sur la façon de l'aborder, l'activité à proposer, le temps à y consacrer.

Le savoir prend du sens dans les problèmes qu'il permet de résoudre et pour lesquels jusque-là l'élève soit ne disposait pas d'outils pour le faire, soit l'emploi des outils utilisés était fastidieux et souvent source d'erreurs. Ces situations problèmes qui permettent d'aborder une notion en en construisant le sens sont autant de situations de référence pour l'élève, mais elles ne suffisent pas à rendre le savoir disponible, il sera donc nécessaire de mettre en place des situations complémentaires où le savoir sera entraîné et réinvesti.

L'articulation, le contrôle de la cohérence

Les différents choix (les aspects travaillés, objectifs d'apprentissage, situations d'apprentissage) s'articulent à partir de différentes logiques :

- la logique du contenu qui demande de construire les différents aspects les uns à partir des autres ;
- la logique de l'apprenant qui demande de vérifier que les aspects abordés sont accessibles à l'enfant au stade donné de son développement cognitif ;
- la logique du contrat qui demande de vérifier que les activités proposées sont susceptibles de permettent aux élèves de construire eux-mêmes leurs apprentissages au travers de la résolution de problèmes.

ETUDE D'UNE PROGRESSION EXISTANTE AU REGARD DU PROGRAMME

(CAP MATHS CE2, CM1, CM2 ; EDITIONS 2011-2010)

1er temps : travail en groupe (20 min)

Matériel

- *Collectif* : Annexes 2.5.A, 2.5.B et 2.5.C.
- *Individuel :* Photocopies de l'annexe ; programmes de primaire et de collège, pilier 3 du socle commun.

Consigne

Pour un niveau donné, repérer les différents aspects du concept qui sont travaillés (et leur adéquation au programme)
Étudier la nature des activités, leur mise en cohérence et leur articulation.
Donner quelques éléments qui permettraient d'étendre cette progression en cycle 2 ou en collège.

L'animateur s'assure que les trois niveaux de classe à étudier sont répartis équitablement entre les groupes de stagiaires (un niveau par groupe).

2ème temps : Mise en commun (15 min)

Mise en commun orale : chaque groupe complète ce qui a été dit par le précédent en restant centré sur les questions suivantes :

- Quels sont les choix de contenus qui ont été faits ?
- Peut-on repérer des objectifs d'apprentissage ?
- Les situations-phares sont-elles des situations-problèmes ?
- La progression est-elle cohérente avec les trois logiques identifiées (de l'apprenant, du contenu et du contrat) ?

La mise en commun peut être complétée par les questions suivantes :

- Cette progression est-elle en cohérence avec le programme 2008 ?
- Y a-t-il des manques sur certains aspects du concept ? Seront-ils comblés par le programme de 6ème ?

Commentaires pour l'animateur :
La mise en commun porte sur les différents points étudiés dans le manuel :

Aspects du concept

- Angle droit :
  - coin du carré et du rectangle, gabarit, équerre (CE2) ;
  - demi-angle plat (CE2) ;
  - angle particulier (quart d'un angle plein) (CM1).

- Perpendiculaire :
  - vertical/horizontal ; référence à un angle droit (CE2) ;
  - droites qui se coupent en formant un angle droit (CE2) ;
  - droites qui partagent le plan en quatre angles droits (CM1) ;

  - direction selon laquelle la distance entre le point et la droite est la plus courte (CM2). (*aspect non mentionnés dans les programmes 2008*)

- Parallèle :
  - rien (CE2) ;
  - droites qui ne se coupent pas (CM1) ;
  - écart constant, même inclinaison(CM1) ;
  - perpendiculaire à une même troisième (CM1) ;
  - points à la même distance d'une droite (CM2) (*aspect non mentionnés dans les programmes 2008*)

Activités

- Situations phares : Elles sont en gras dans le document.

- Situations d'entraînement : Voir document

Cohérence

Les aspects des différents concepts sont déclinés et ordonnés en fonction de différentes logiques.

- Logique du contenu : Les différents aspects du concept sont abordés de façon à l'enrichir, des choix sont faits dans l'agencement : angle droit (pas de référence à horizontale et verticale) avant perpendiculaire (pour pouvoir se référer à l'image mentale de l'angle droit) ; perpendiculaire avant parallèle (pour pouvoir se référer à la perpendicularité).
- Logique de l'apprenant : La reconnaissance et les tracés à main levée permettent la création d'images mentales. Le contrôle visuel ou aux instruments précède les tracés et construction. La plus courte distance d'un point à une droite n'est pas abordée en premier : elle demande une certaine maîtrise de la notion de distance. La construction d'une parallèle comme perpendiculaire à une perpendiculaire demande elle-aussi une construction intellectuelle ; elle vient après l'écart constant.
- Logique du contrat : Quel contrat veut-on installer dans la classe ? Ici on vise l'approche par le problème : on part d'un problème plutôt ouvert au début et on referme après. Qui valide les productions ? ici c'est plutôt l'élève. La progression permet cette validation : par exemple la représentation de l'angle droit comme coin du carré permet de disposer de gabarit pour vérifier la perpendicularité.

En collège quelques aspects du concept perpendiculaire

- Plus court chemin d'un point à une droite.
- Symétrique d'un point par rapport à un axe.
- Caractérisation d'un angle inscrit interceptant un demi-cercle …

3ème temps : CONCLUSION

Pour construire une programmation, il est pertinent de garder à l'esprit les différents aspects du concept tels que décrits par Vergnaud :

- les différents problèmes qu'il permet de résoudre,
- les procédures que ce concept permet de remplacer avantageusement, les savoir-faire, les techniques,
- les différentes définitions et propriétés,
- les langages,
- les images mentales.

ELEMENTS DE BIBLIOGRAPHIE

- ERMEL (2006) : *Géométrie cycle 3, Apprentissages géométriques et résolutions de problèmes,* Hatier
- *Cap maths CE2(2011), CM1 et CM2(2010), manuel, guide des activités et fiches photo-copiables,* Hatier
- *J'apprends les maths* (Retz 2010)
- *La clé des maths* (Belin 2010)
- *Euromaths* (Hatier 2009)
- *A portée des maths* (Hachette 2008)
- *Maths et Clic 6^e^, Manuel et livre du professeur*, (Bordas 2000)
- *Articulation école-collège : Des activités géométriques,* Commission Inter IREM Premier Cycle, COPIRELEM
- *Travaux géométriques : Apprendre à résoudre des problèmes, cycle 3,* IREM de Lille
- *Travaux géométriques en 6^e^*, (1998) Nathan Pédagogie
- VERGNAUD, G (1990). : « Théorie des champs conceptuels » *Recherche en Didactique des Mathématiques ; Vol. 10- 2.3 ; pp. 133-170*
- MULLET-MARQUIS, R. (1994) : « Géométrie élémentaire, mon cher Watson ! » *Repères IREM* n°17 ; pp. 7-12

2. DES PROBLEMES POUR RAISONNER

OBJECTIFS DE FORMATION

- Prendre conscience :
  - que l'activité géométrique peut être support à raisonnement ;
  - que le raisonnement peut s'exercer dans les différentes catégories de problèmes géométriques.

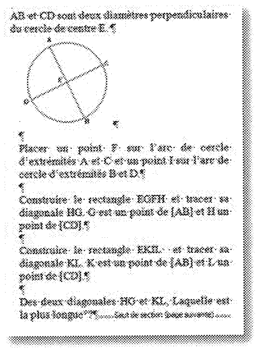
- S'interroger à propos du raisonnement en géométrie :
  - comprendre qu'il prend appui sur les propriétés géométriques théoriques, en révélant leur connaissance et leur organisation les unes par rapport aux autres ;
  - réaliser que l'explicitation des étapes de la construction de la figure (« comment as-tu fait ? » ; traces de construction, etc.) est révélateur de ce raisonnement.

MATERIEL NECESSAIRE A LA FORMATION

On trouvera les annexes nécessaires pages 76 à 85 et sur le site de l'IREM de Lyon.

- Pour les stagiaires :
  - photocopies de l'annexe 2.6 pour le temps 1 et de l'annexe 2.7 (de 2.7A à 2.7C) pour le temps 2 ;
  - instruments de géométrie.

- Pour l'animateur :
  - matériel de vidéo ou rétroprojection ;
  - quelques instruments de géométrie en réserve ;
  - documents à projeter ou fichiers des annexes.


AB et CD sont deux diamètres perpendiculaires du cercle de centre E.

Placer un point F sur l'arc de cercle d'extrémités A et C et un point I sur l'arc de cercle d'extrémités B et D.

Construire le rectangle EGFH et tracer sa diagonale HG. G est un point de [AB] et H un point de [CD].

Construire le rectangle EKIL et tracer sa diagonale KL. K est un point de [AB] et L un point de [CD].

Des deux diagonales HG et KL, laquelle est la plus longue ?

MISE EN SITUATION

1er temps : Un exercice niveau stagiaire (20min)

Consigne

Résoudre l'exercice proposé puis énoncer les connaissances et compétences nécessaires à sa résolution. (annexe 2.6)

Mise en commun

Les différentes propositions sont recensées, les compétences relevant du raisonnement sont pointées et mises en valeur.

Éléments d'analyse de l'exercice :

- Le recours à la mesure ne permet pas de conclure (imprécision).
- Les propriétés du cercle et des diagonales d'un rectangle sont mobilisées. Il est nécessaire d'utiliser d'abord l'égalité des rayons d'un cercle puis l'égalité des diagonales d'un rectangle pour pouvoir en déduire l'égalité des segments à comparer.

2e temps : Des exercices pour la classe (25min)

La consigne de la phase 1 est reprise et complétée

Consigne

Choisissez un des exercices proposés, (répartissez-vous pour que l'ensemble des 3 exercices soient traités). Vous devez le résoudre puis énoncer les connaissances et compétences nécessaires à sa résolution. Le proposeriez-vous en classe ? Pour quelle(s) raison(s) ? (annexes 2.7)

Mise en commun et synthèse

Elle porte sur les compétences mises en œuvre pour la résolution des exercices. La gestion de classe et le mode de validation des réponses peuvent être également évoqués.
On dégagera en synthèse, que les problèmes de construction proposés sont des supports à déduction.
La mise en œuvre hiérarchisée de plusieurs propriétés en vue de les résoudre nécessite à la fois d'avoir des connaissances, d'être capable de les mobiliser et d'avoir une attitude de recherche critique.

Éléments d'analyse

- Exercice 1 : La construction du triangle symétrique se fait en mobilisant en acte les propriétés : « le symétrique d'une droite et une droite », « tout point de l'axe de symétrie est invariant ». Confronté à ce problème, l'élève doit donc organiser ses connaissances pour élaborer une stratégie de résolution.

- Exercice 2 : La réalisation du patron mobilise en acte les propriétés : « le patron d'un pavé est déterminé par 2 fois 3 rectangles » « les dimensions du troisième rectangle sont déterminées par celles des 2 autres ».

- Exercice 3 : La construction des figures impose d'organiser les données de l'énoncé sans en oublier et en les mettant correctement en relation. La réalisation d'un dessin à main levée permet à la fois de garder une trace des mises en relation et de fixer une représentation du but à atteindre. Dans cet exercice, la proximité des énoncés est à elle seule source de difficultés. Un élève peut réaliser une construction satisfaisant à l'énoncé 2 en pensant résoudre l'énoncé 1 et inversement. Seul le raisonnement permet de lever cette contradiction.

D'AUTRES PROBLEMES POUR LA CLASSE

Travail collectif 15 min

Les différents exercices sont projetés et commentés collectivement un par un. Les commentaires sont orientés selon deux points de vue :

- des propriétés géométriques mises en œuvre et,
- des connaissances nécessaires à leur réussite (annexes 2.8A à 2.8F soit 6 documents à projeter).

Reproduire : *Cap math CM1* (annexe 2.8A)

La reproduction de figure nécessite de repérer les différentes sous-figures qui la composent (losanges avec sommets communs) ou les relations d'incidence entre les points (alignements des sommets sur des droites perpendiculaires). Ce repérage effectué, il faut encore élaborer une stratégie de construction qui fait appel à la déduction.

Compléter et restaurer des figures[5] :

figure 1 (annexe 2.8B)

La construction n'est possible qu'en repérant des droites non tracées qui permettent de déterminer des points d'intersection et un des sommets du quadrilatère manquant. On peut identifier deux niveaux de difficultés dans la construction de cette figure :

- Prolonger un tracé existant
- Repérer qu'un point est sur le prolongement d'un tracé existant
- Découvrir que trois points sont alignés et les relier

figure 2 (annexe 2.8B)

A un niveau plus simple, les mêmes compétences sont mobilisées : repérage des alignements, organisation des tracés.

Construire à partir d'un *dessin à main levée* (annexe 2.8.C)

La construction à partir de l'angle droit ne garantit pas l'obtention d'un diamètre de 8cm. Il faut commencer par construire le cercle, puis utiliser en acte la propriété de la médiatrice. La justification du triangle rectangle ne peut être obtenue avant la classe de quatrième (cercle + diagonales du carré en 6^e).

Décrire pour reconnaître *Cap math CM1* (annexe 2.8D)

La situation impose un découpage en sous-figures et la formulation des relations qui les lient. Dans le manuel, une liste de mots géométriques est fournie dans laquelle les élèves peuvent puiser.

Décrire pour construire

Comme dans l'activité précédente, les relations entre les sous-figures doivent être repérées tant en termes de relations d'incidence que de positions relatives les unes par rapport aux autres. Les étapes de construction peuvent être précisées dans un ordre qui n'est pas nécessairement unique.

Justifier : Construction de quadrilatères (annexe 2.8E)

L'impossibilité de la construction du quadrilatère à exactement trois angles droits peut être constatée après de multiples expériences en confrontation avec la connaissance que les élèves ont du rectangle. Mais cette impossibilité ne peut être établie que par un raisonnement hypothético-déductif s'appuyant sur les propriétés des parallèles et perpendiculaires. Une telle preuve relève donc de G2. Certains élèves de CM2 peuvent conduire oralement ce raisonnement mais la formulation n'est pas à leur portée à ce niveau de scolarité.

Symétrie *CapMath CM1*

L'argumentation pour invalider les figures non symétriques met en œuvre les propriétés des symétries (même taille, retournement, même distance à l'axe, même inclinaison par rapport à l'axe…)

Représenter un prisme droit à base parallélogramme pour pouvoir le reconnaître parmi d'autres solides

Le dessin en perspective (dont l'apprentissage n'est pas au programme de primaire) n'est pas nécessaire pour reconnaître ; la comparaison avec les faces des autres solides permet de

[5] Travaux de Lille

montrer que le dessin de la face parallélogramme suffit (à condition toutefois qu'il n'y ait pas d'autre solides ayant comme face un parallélogramme).

croquis à main levée avant de construire.

C'est ce que les stagiaires ont dû faire pour résoudre l'exercice 3. Il permet de visualiser la figure à obtenir en mettant en relation les éléments qui la constituent.

Localiser : **sur le plan d'une ville, utilisation de l'index,**

Repérage d'indices, tri d'informations, mises en relation.

croquis d'un espace

Prises d'information, mises en relation .....

Synthèse

Ce qu'on appelle un raisonnement en primaire est souvent, une explication ou une validation à vue d'œil ou instrumentée (donc en G1), organisée à partir de connaissances générales (qui deviendront des connaissances théoriques). Au collège, un raisonnement (formel ou non) tend à devenir de nature hypothético-déductive (donc en G2) et conduit à une nouvelle information dont on est certain à l'intérieur de la communauté mathématique que constitue le groupe classe.

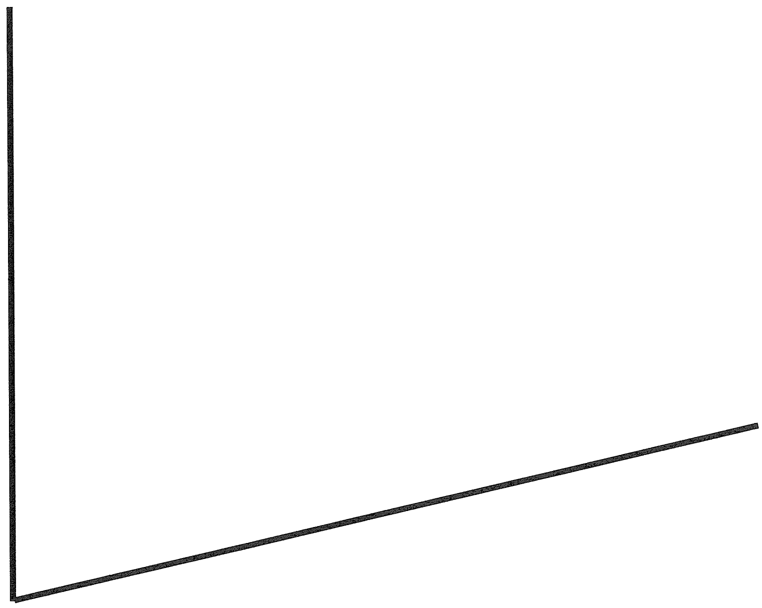
On peut trouver quantité de problèmes visant au développement des compétences de raisonnement. Ils constituent des situations d'apprentissage à la condition qu'ils soient l'occasion d'échanges à la fois sur les procédures utilisées et sur leur validation. L'enseignant doit penser la mise en œuvre et notamment anticiper la mise en commun en s'appuyant sur les productions des élèves.

ANNEXES DU MODULE 2

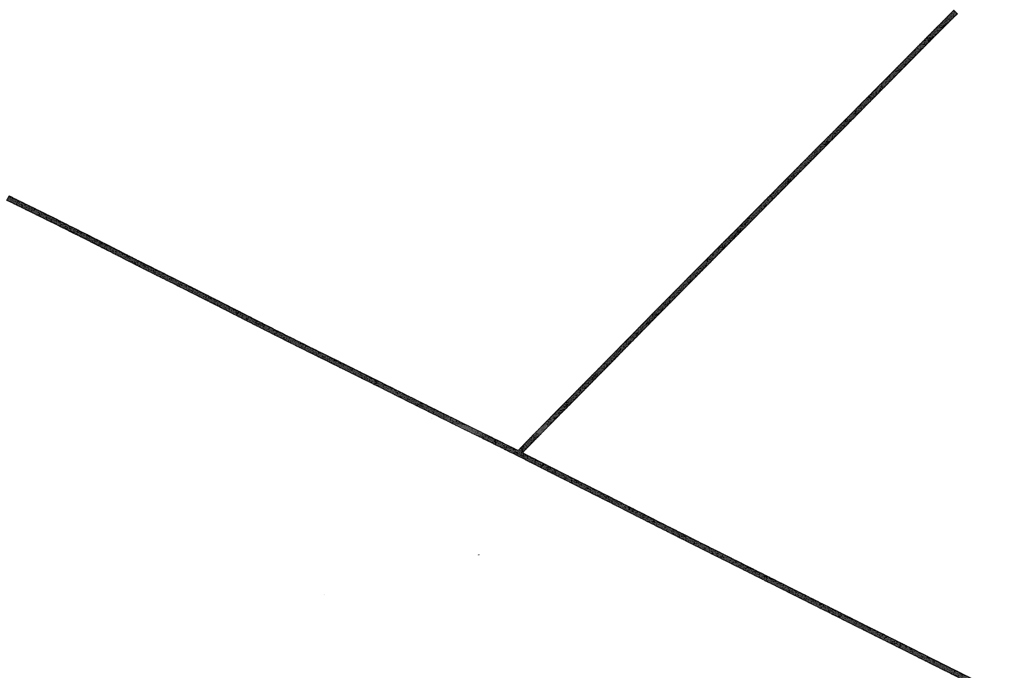
Ces annexes sont téléchargeables sur le site de l'IREM de Lyon http://math.univ-lyon1.fr/irem/ Rubrique : documents en ligne en accès restreint avec l'identifiant : geometrieplane et le mot de passe : cycle3college

Annexe 2.1A Reconnaître des perpendiculaires

1

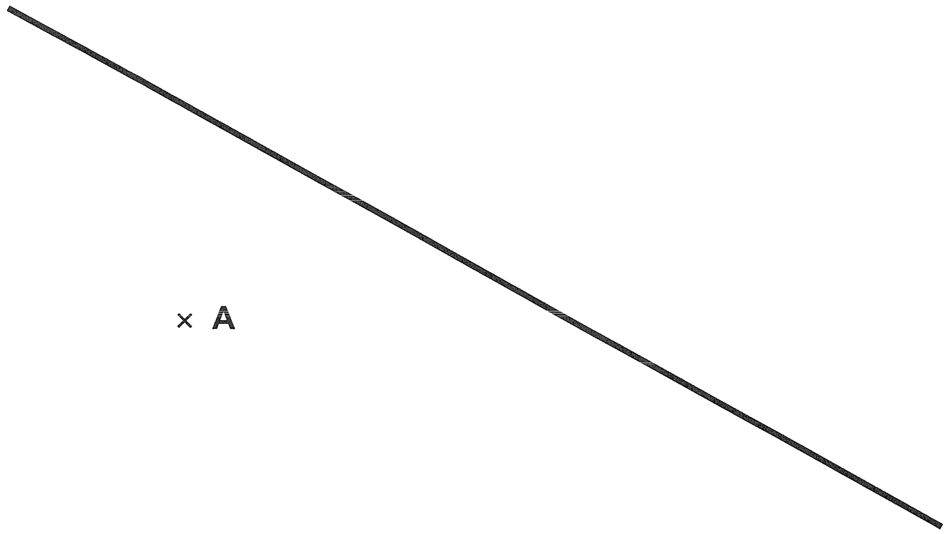


2

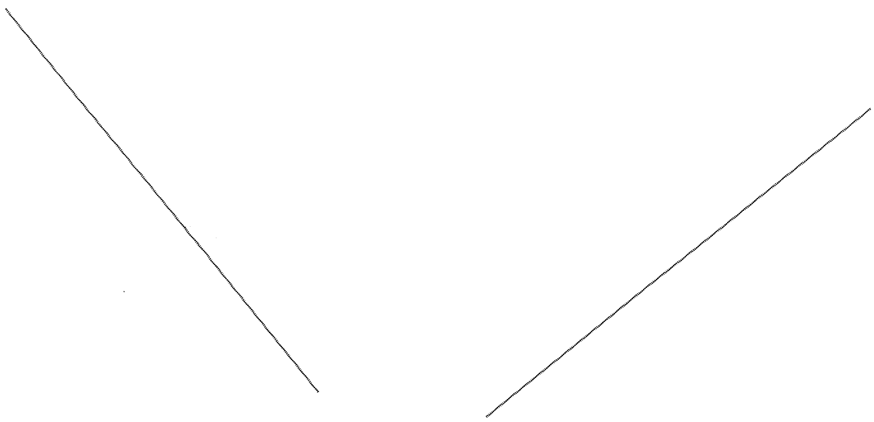


Annexe 2.1B Reconnaître des perpendiculaires

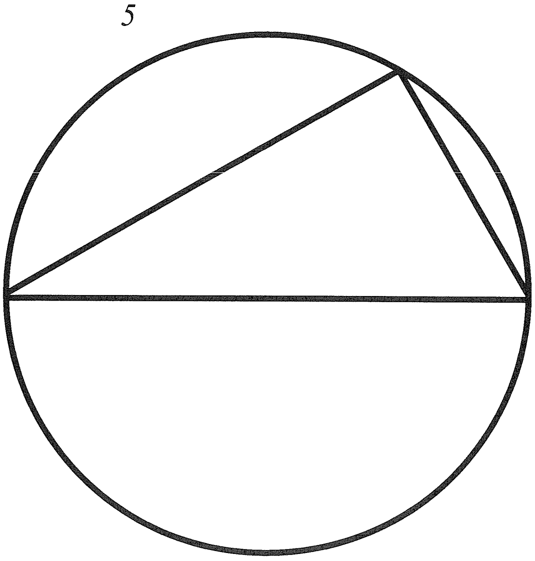
3



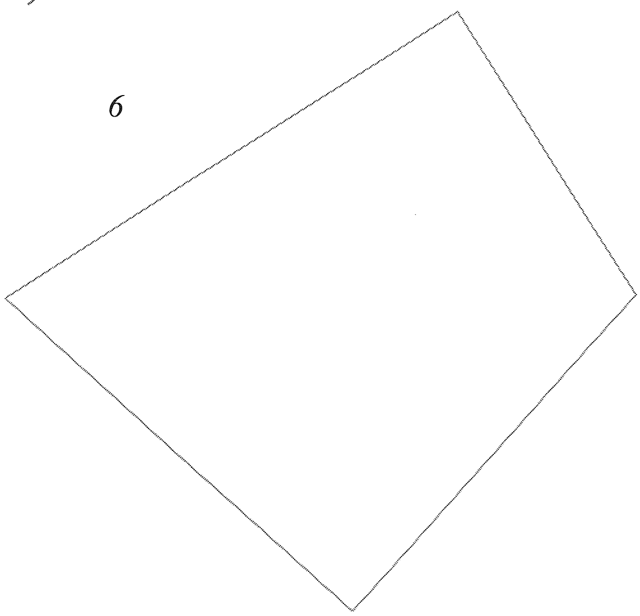
4



5

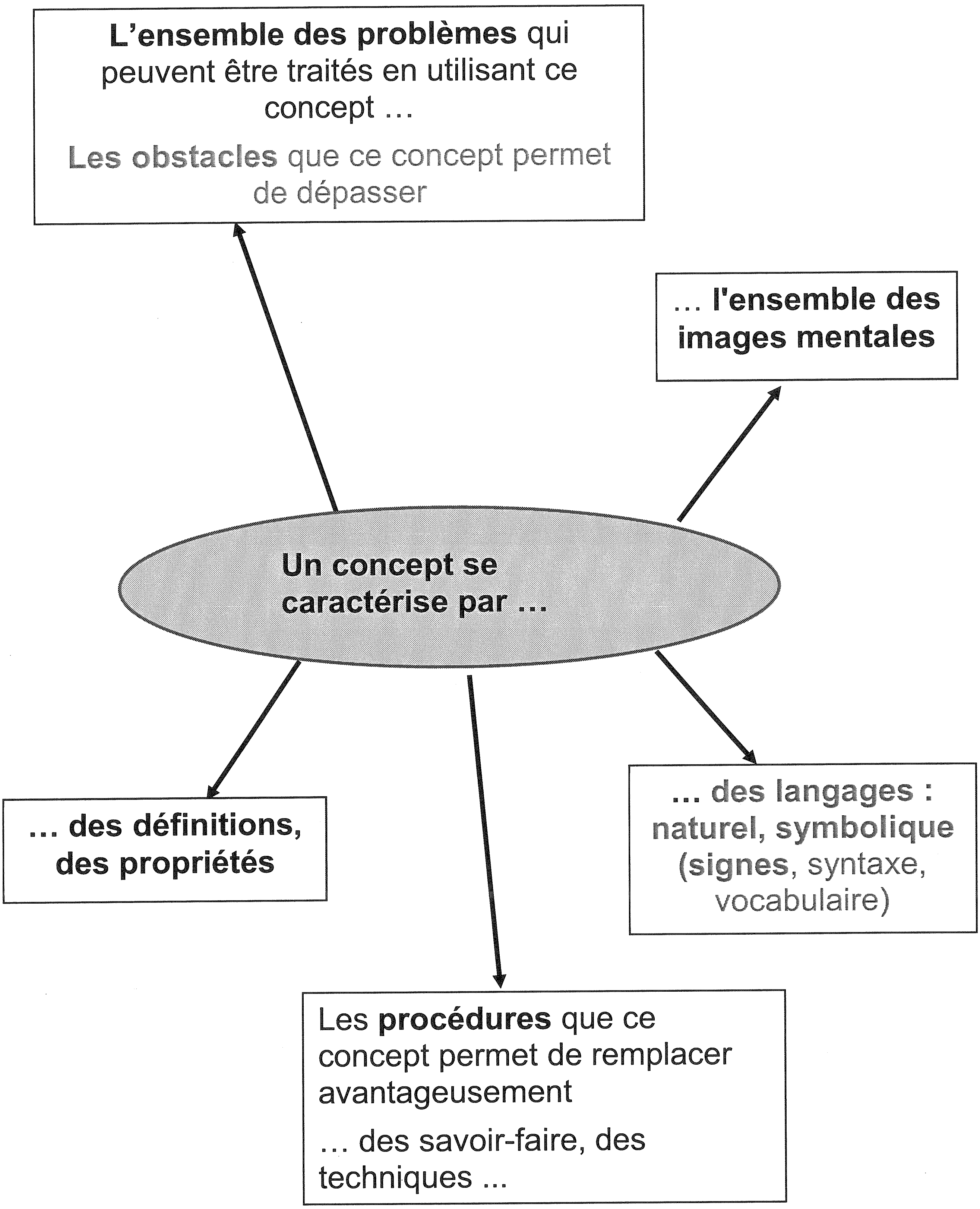


6



Annexe 2.2 Caractérisation d'un concept

d'après Gérard Vergnaud



Annexe 2.3

Eléments présentant différentes représentations sur perpendicularité et parallélisme

Perpendicularité

Les conceptions d'un angle droit

Référence à horizontale et verticale
Référence à un objet : équerre, coin de la feuille
Référence à l'angle d'une figure prototype : coin du carré, du rectangle
Moitié d'un angle plat
Quart de l'angle plein ou angle de rotation qui composée 4 fois à elle-même revient à son point de départ

Les conceptions de droites perpendiculaires

Si je mets l'une horizontale, l'autre est verticale
Droites qui se coupent à angle droit
Droite d'équilibre, partage d'un angle plat en deux angles égaux
Droites qui se coupent en formant 4 angles égaux
Direction de la plus courte distance d'un point à une droite
Droite invariante par symétrie autour de l'autre
Hauteur d'un triangle

Parallélisme

Droites horizontales ou verticales ou qui ont la même direction (sens commun)
Droites supports des côtés opposés d'un rectangle
Droites qui ne se coupent pas
Droites d'écart constant
Droites qui sont perpendiculaires à une même troisième
Droites qui sont « penchées pareil » ou qui font le même angle avec une même troisième.

- *Droites qui ont même vecteur directeur.*

Eléments à prendre en compte pour établir une progression

1. Choix des aspects travaillés

a. Quels sont les aspects du concept ?
b. Quels sont ceux qui relèvent du niveau de classe ?
c. Quel aspect mettre en premier ?

2. Choix des objectifs d'apprentissage

a. Qu'est-ce que les élèves doivent reconnaître ?
b. Qu'est-ce que les élèves doivent savoir faire ?
c. Qu'est-ce que les élèves doivent savoir ?

3. Choix des situations d'apprentissage

a. Qu'est-ce qui nécessite de passer par une situation d'apprentissage ?
b. Quelle situation choisir (situation-problème) ?
c. Quelles situations d'entraînement sont à prévoir ?

4. Articulation et contrôle de la cohérence :

a. de la logique du contenu ;
b. de la logique de l'apprenant ;
c. de la logique du contrat.

Annexe 2.5A Progression sur Angle droit - Droites perpendiculaires - Droites parallèles
Cap maths CE2 (Edition Hatier 2011)

Unités	**Objectifs et aspect travaillé** ***Situations de référence***	**Entraînement**
5	**Comprendre que tous les coins des carrés sont superposables. On les nomme angles droits** *Un gabarit d'un carré est fourni. Reconnaître d'autres carrés parmi un ensemble de quadrilatères.* Coder un angle droit pour le reconnaître parmi autres Savoir utiliser un gabarit d'angle droit **Comprendre que les carrés et les rectangles sont les seuls quadrilatères à posséder 4 angles droits** *Construire un quadrilatère ayant 4 angles droits*	Choisir parmi des figures celles qui peuvent servir de gabarit d'angle droit Utiliser un gabarit pour : - Déterminer les angles droits d'un polygone, - Construire un polygone ayant un nombre donné d'angles droits
6	Savoir utiliser l'équerre	Reconnaître un angle droit isolé Construire un angle droit
8	Savoir utiliser l'équerre et la règle graduée **Comprendre que deux droites qui forment un angle droit sont appelées droites perpendiculaires** *Après avoir défini deux droites perpendiculaires comme étant deux droites qui se coupent en formant un angle puis 4 angles droits, les élèves doivent en reconnaitre, puis tracer plusieurs droites perpendiculaires à une droite donnée.* **Identifier les positions relatives d'une verticale et d'une horizontale. Elles forment un angle droit. Une droite verticale et une droite horizontale sont perpendiculaires.** *Les élèves utilisent le fil à plomb et le niveau à bulle pour contrôler la verticalité ou l'horizontalité de lignes droites dans la classe, la cour... Ils ont à conjecturer qu'une verticale et une horizontale se coupent en formant un angle droit, hypothèse qui sera ensuite validée par recours à l'expérimentation*	Identifier un triangle rectangle, un carré, un rectangle dans une figure complexe
9	Comprendre qu'un angle droit est la moitié d'un angle plat Savoir utiliser l'équerre et la règle graduée	Réaliser un gabarit d'angle droit par pliage d'une feuille de papier Identifier un losange un carré, un rectangle dans une figure complexe
15	Savoir utiliser l'équerre et la règle graduée	Analyser une figure complexe et la reproduire

Annexe 2.5B Progression sur Angle droit - Droites perpendiculaires - Droites parallèles

Cap maths CM1 (Edition Hatier 2010)

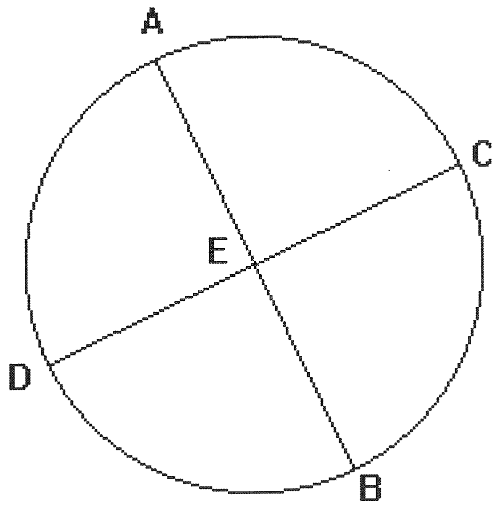
Unités	**Objectifs et aspect travaillé** ***Situations de référence***	**Entraînement**
1	Savoir utiliser l'équerre et la règle graduée Identifier perceptivement des angles et contrôler avec l'équerre ou un gabarit d'angle droit.	Analyser une figure pour la reproduire et décider d'un ordre des tracés et la reproduire effectivement Retrouver un polygone à partir d'une description. Décrire un polygone pour qu'on puisse le reconnaitre.
2	Savoir utiliser l'équerre et la règle graduée	Construire un carré, un triangle rectangle, un rectangle.
4	Utiliser l'équerre pour contrôler que des droites sont perpendiculaires Distinguer une droite du trait qui la matérialise Utiliser l'équerre pour tracer une droite perpendiculaire avec contrainte Anticiper la position de la perpendiculaire	Identifier des droites perpendiculaires Tracer une droite qui passe par un point et qui est perpendiculaire à une droite donnée, à main levée et avec les instruments
5	**Comprendre ce que sont deux droites parallèles et savoir en reconnaître** *1- Des couples de droites sont présentés comme étant ou non parallèles, il s'agit d'écrire une définition de 2 droites parallèles* *2- L'insuffisance de la perception pour déterminer des droites parallèles conduit à considérer l'écart entre les 2 droites* **Enrichir la notion de 2 droites parallèles comme perpendiculaires à une même troisième.** *Tracer une droite parallèle à une droite donnée* *1- Sans aucune contrainte* *2- La droite doit passer par un point fixé, tous les instruments sont autorisés* *3- La droite doit passer par un point fixé, seule l'équerre est autorisée.*	Identifier des droites parallèles Tracer une parallèle à une autre passant par un point donné.
6	Utiliser équerre et règle graduée pour reconnaître des parallèles	Reconnaître des côtés parallèles dans un quadrilatère
8	Identifier perceptivement et contrôler avec les instruments des côtés parallèles et perpendiculaires..	Retrouver un polygone à partir d'une description.

Annexe 2.5B Progression sur Angle droit - Droites perpendiculaires - Droites parallèles

Cap maths CM2 (Edition Hatier 2010)

Unités	**Objectifs et aspect travaillé** ***Situations de référence***	**Entraînement**
1	Utiliser l'équerre pour tracer des angles droits	Compléter une spirale
2	Revoir ce que sont 2 droites perpendiculaires (présence d'un angle droit et de 4 angles droits), 2 droites parallèles (droites qui ne se coupent pas) Développer la reconnaissance perceptive de droites perpendiculaires, de droites parallèles Utiliser l'équerre pour contrôler que 2 droites sont perpendiculaires Utiliser le guide-âne pour contrôler que 2 droites sont parallèles Distinguer la droite du trait qui la matérialise Utiliser l'équerre pour tracer une droite perpendiculaire avec contrainte Anticiper la position de la perpendiculaire	Déterminer parmi plusieurs couples de droites lesquels correspondent à des droites perpendiculaires, à des droites parallèles Tracer une droite qui passe par un point et qui est perpendiculaire à une droite donnée, à main levée et avec les instruments
5	**Établir le lien entre distance d'un point à une droite et perpendiculaire à une droite passant par un point** **Comprendre que tous les points d'une droite parallèle à une autre sont à la même distance de cette droite** *1- Placer un point à 7 cm d'une droite donnée* *2- place 24points à 7 cm d'une droite donnée* **Concevoir selon le cas 2 droites parallèles comme étant 2 droites ayant un écart constant ou 2 droites perpendiculaires à une même troisième.** Utiliser les instruments pour tracer une droite parallèle avec la règle et l'équerre, puis avec l'équerre seule	
6	**Comprendre que des quadrilatères qui possèdent les mêmes propriétés (perpendicularité, parallélisme peuvent être calssés dans une même catégorie de figure.** *Classer des quadrilatères donnés en s'intéressant à leurs propriétés*	
7	Savoir tracer et mesurer une hauteur comprendre : - qu'une hauteur dans un triangle est une droite perpendiculaire e à un côté et qui passe par un sommet, - qu'il est possible d'en tracer trois dans un triangle - qu'une hauteur peut être extérieure au triangle. - que la mesure de la hauteur est la distance entre le sommet par laquelle elle passe et son point d'intersection avec le côté qu'elle coupe.	Tracer une ou des hauteurs d'un triangle

AB et CD sont deux diamètres perpendiculaires du cercle de centre E.



Placer un point F sur l'arc de cercle d'extrémités A et C et un point I sur l'arc de cercle d'extrémités B et D.

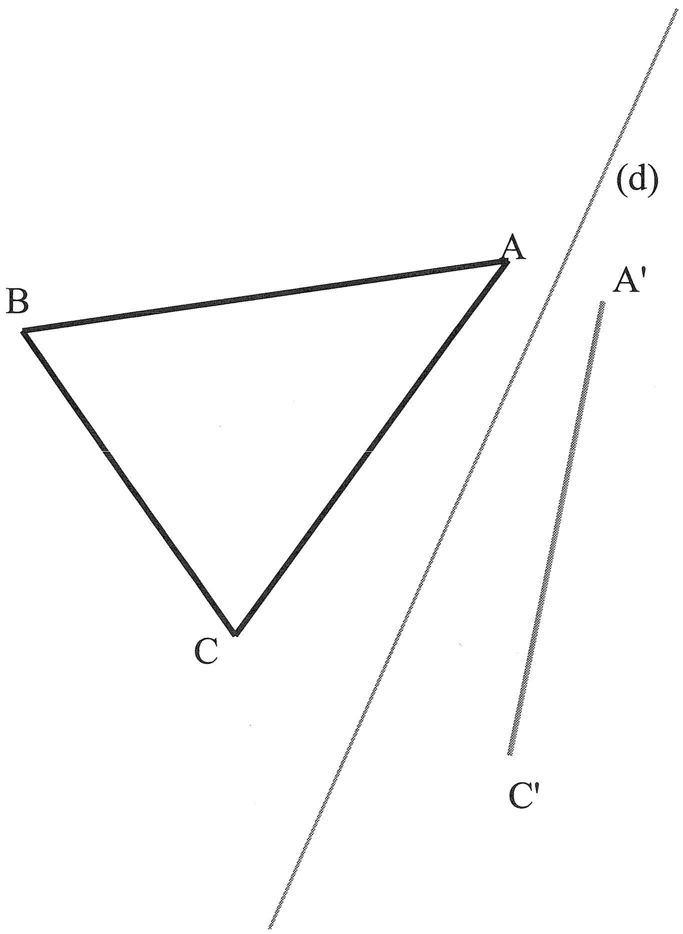
Construire le rectangle EGFH et tracer sa diagonale HG. G est un point de [AB] et H un point de [CD].

Construire le rectangle EKIL et tracer sa diagonale KL. K est un point de [AB] et L un point de [CD].

Des deux diagonales HG et KL, Laquelle est la plus longue ?

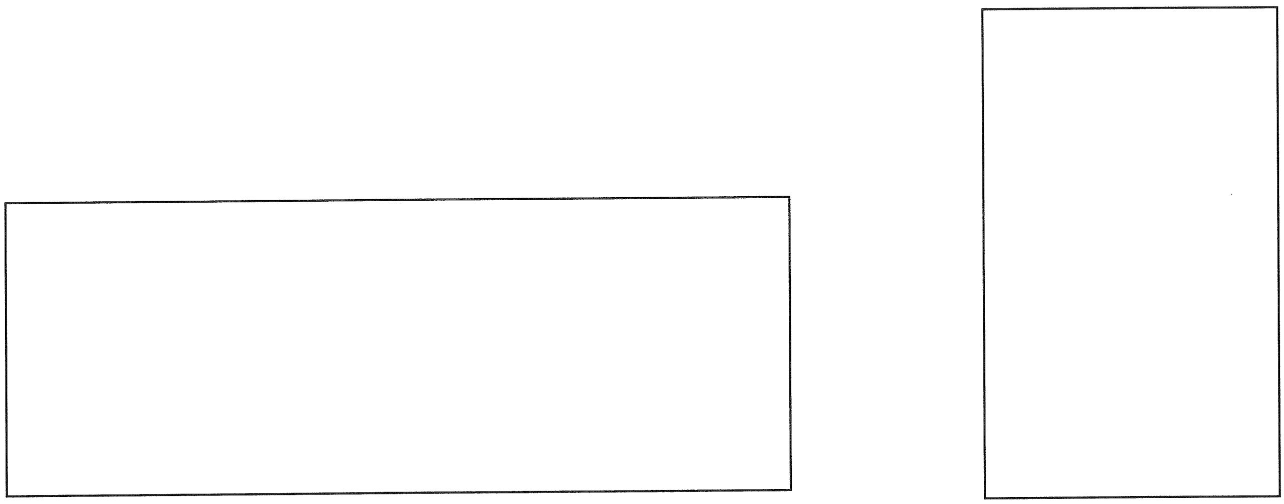
Exercice 1 :

Trace le symétrique du triangle ABC en utilisant uniquement le côté non gradué de la règle.



Exercice 2 :

Deux faces d'un parallélépipède rectangle sont dessinées ci -dessous.



Construis un patron de ce parallélépipède rectangle.

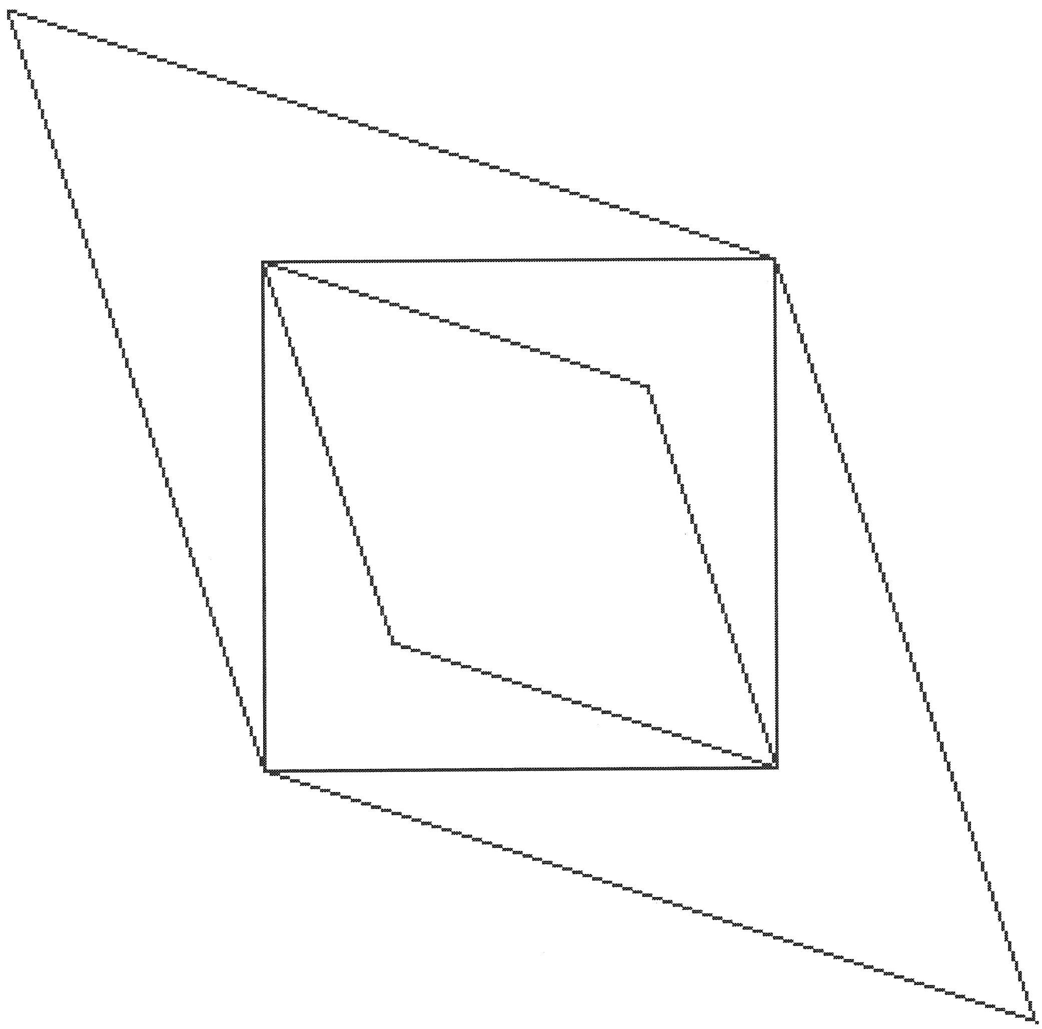
Exercice 3 :

Dessiner un losange dont trois sommets sont sur un cercle et le quatrième n'est pas le centre du cercle.

Dessiner un losange dont trois sommets sont sur un cercle et le quatrième est le centre du cercle.

Reproduire :

D' après Capmath CM1 (Editions Hatier)

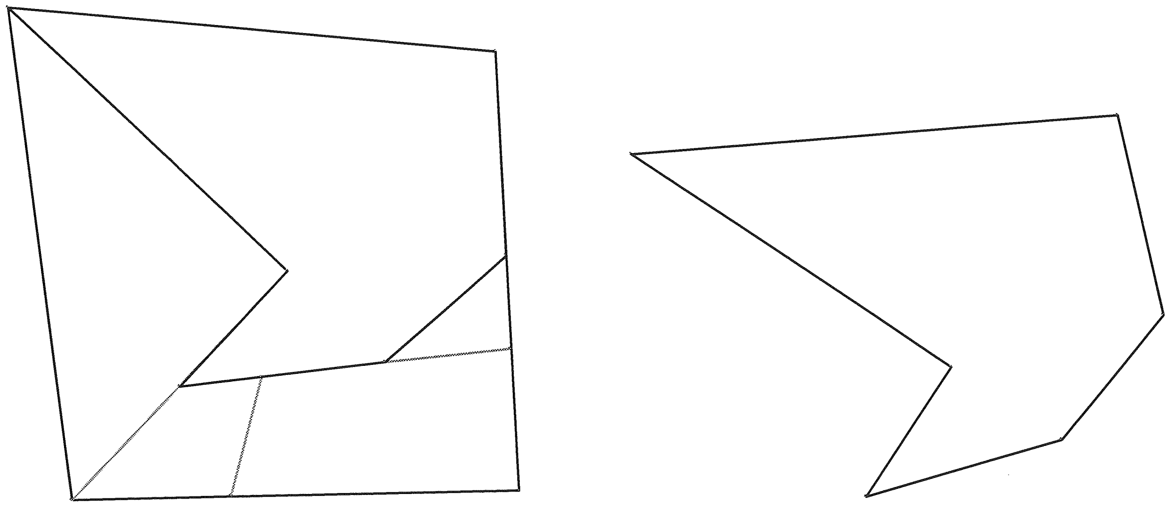


Compléter :

Termine le dessin de droite en utilisant ta règle sans mesurer

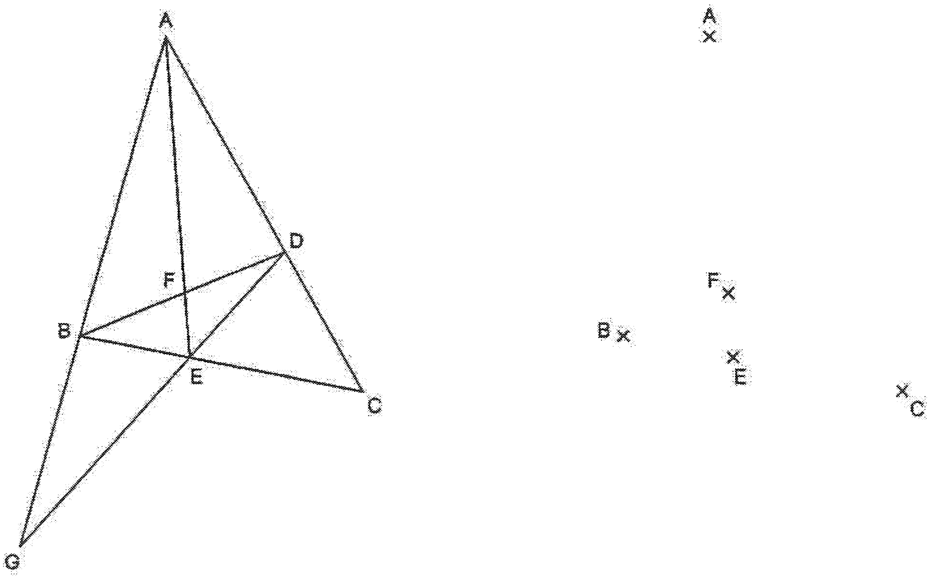
D' après une équipe de Lille

Figure 1

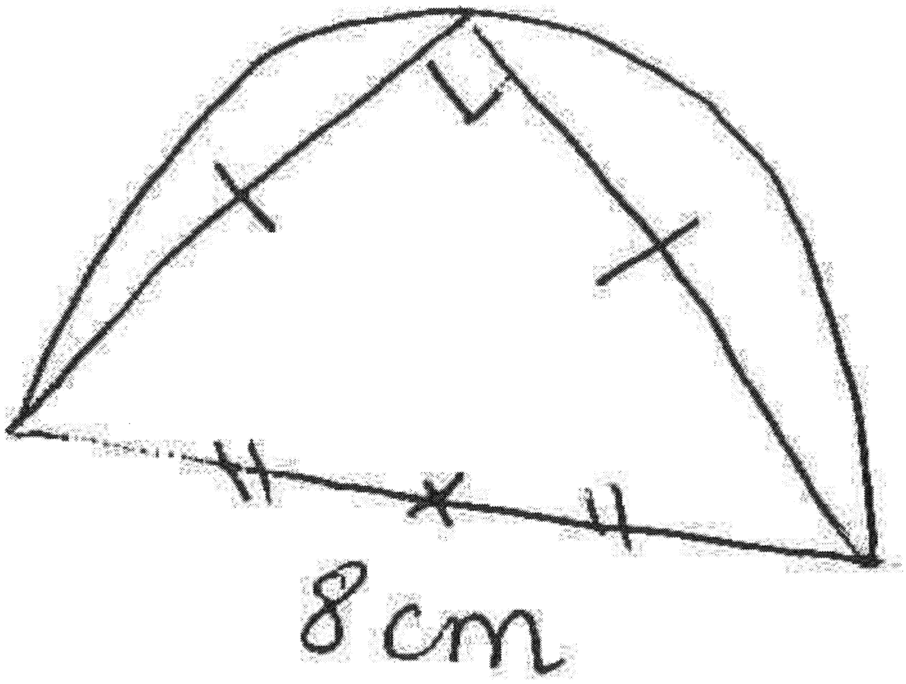


D' après Capmath CM1 (Editions Hatier)

Figure 2

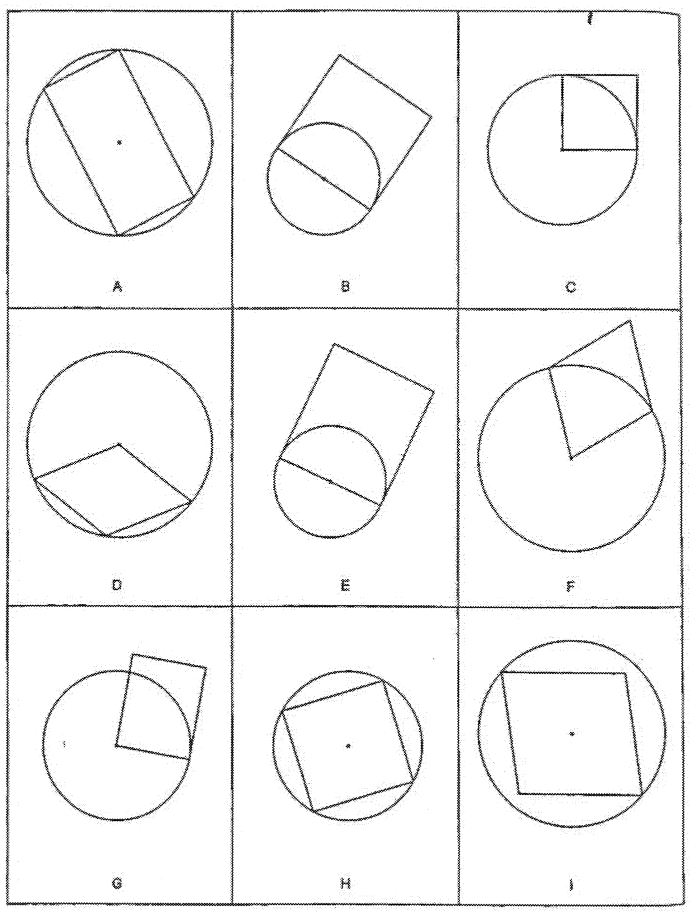


Construire à partir d'un schéma à main levée :

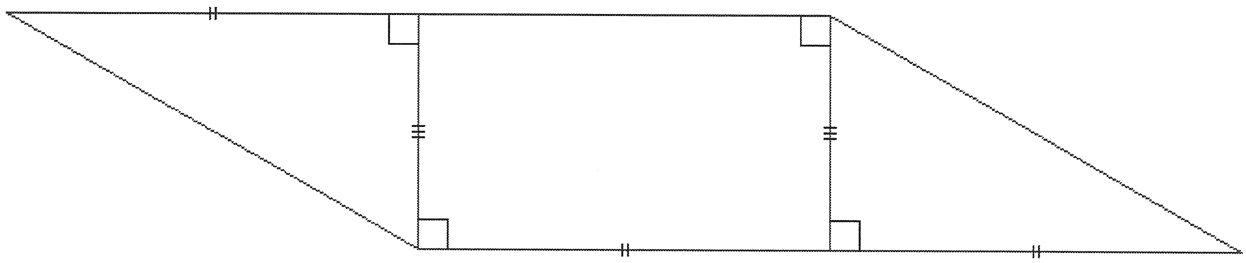


Décrire... : pour reconnaître :

D' après Capmath CM1 (Editions Hatier)



Décrire..... pour construire :



Justifier :

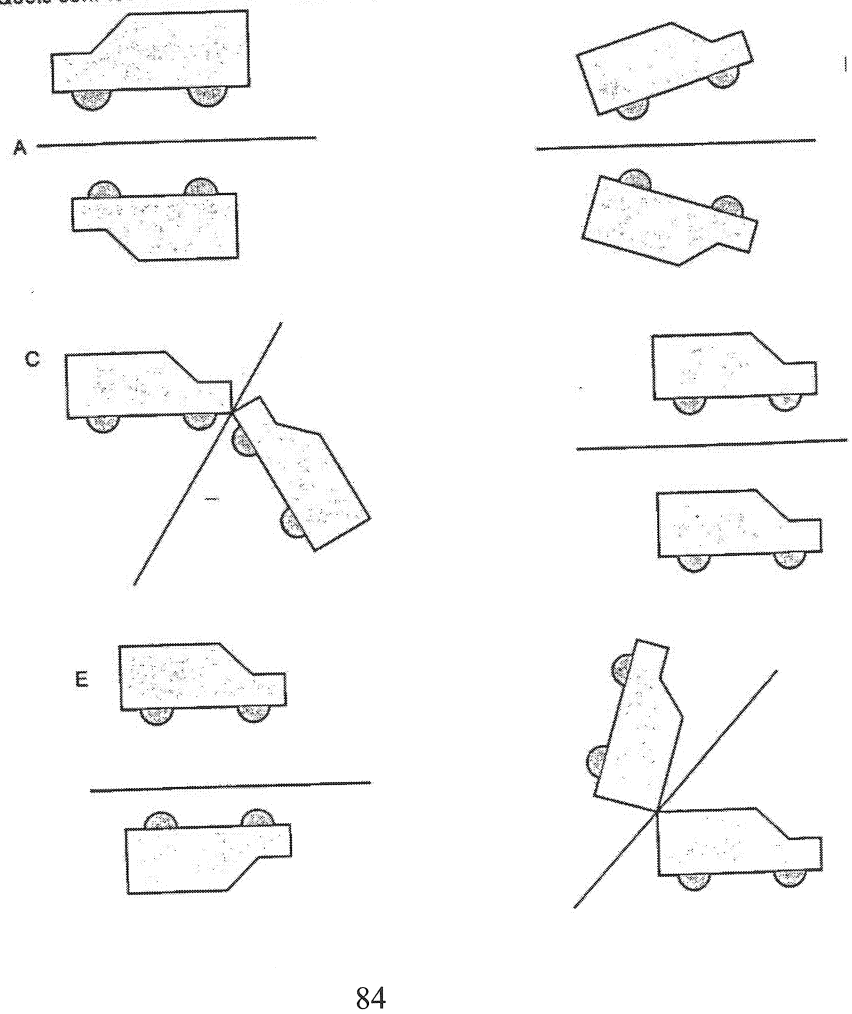
Construire un quadrilatère qui n'a qu'un angle droit.

Construire un quadrilatère qui a exactement deux angles droits.

Construire un quadrilatère qui a exactement trois angles droits.

Justifier : *D' après Capmath CM1 (Editions Hatier)*

Quels sont les dessins où les figures sont symétriques par rapport à l'axe ?



Représenter :

- Représenter un prisme droit à base parallélogramme pour pouvoir le reconnaître parmi d'autres solides.

- Réaliser un croquis à main levée avant de construire une figure.

Localiser :

- Utiliser un plan de ville et son index pour décrire le chemin allant d'un point à un autre.

- Faire le croquis de la salle de classe pour localiser un objet, un emplacement.

TROISIEME MODULE

Géométrie dynamique (3h)

Un outil pour travailler à l'articulation des niveaux de géométrie.

GEOMETRIE DYNAMIQUE

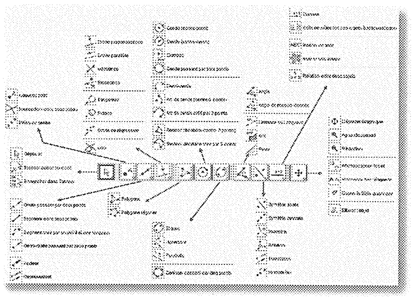
OBJECTIFS DE FORMATION

- Comprendre que la géométrie dynamique est un outil d'aide à l'apprentissage de la géométrie, complémentaire au « papier-crayon », qui force l'entrée dans le domaine de la géométrie théorique ;
- Comprendre quelques modalités de fonctionnement d'un logiciel de géométrie dynamique : notion d'outil et de commande ; points libres et points dépendants ...
- Construire ou étudier quelques situations directement exploitables en classe ;
- Déterminer des critères pour concevoir ou sélectionner des situations où son utilisation est pertinente (repérage des invariants ; usage pédagogique d'un menu restreint…).

MATERIEL NECESSAIRE A LA FORMATION

On trouvera les annexes nécessaires pages 99 à 101 et sur le site de l'IREM de Lyon. Tous les fichiers en geogebra et en html sont à télécharger pour être installés sur les ordinateurs. Le dossier d'activités pour le $4^{ème}$ temps est à photocopier : fiches « maître » et fiches « élève » et les fichier(s) « geogebra » accessibles depuis l'ordinateur de l'élève sont à télécharger.

- *Un ordinateur par personne* (si possible, avec Geogebra et Java installés)
- *Collectif* : vidéoprojecteur
- *Individuel :* photocopies des annexes ;
  programmes de primaire et de collège, pilier 3 du socle commun.



Le logiciel utilisé lors de la formation sera Geogebra mais les activités pourront être adaptées et menées avec tout autre logiciel pour tout lecteur averti ou plus à l'aise avec ce logiciel (en particulier Cabri-géomètre ou CaRMétal). Voir fiche technique en annexe 3.1 ;

Notre choix s'est porté sur Geogebra pour plusieurs raisons :
- C'est un logiciel libre facilement téléchargeable sur l'ordinateur ou utilisable en ouvrant un applet GeoGebra complètement fonctionnel dans un navigateur internet sans installation sur l'ordinateur. On peut aussi extraire le fichier d'installation sur une clef USB et installer GeoGebra sans connexion internet. Il suffit d'avoir Java sur l'ordinateur pour avoir un logiciel prêt à l'emploi.
- En outre, il permet de faire des choix de menus réduits adaptables au public visé, ou restreignant les outils disponibles. Le protocole de construction est assez proche d'un programme de construction et il peut aider à suivre ou écrire un programme de construction. De plus, la « navigation dans les étapes de construction » reprend la construction pas à pas.
- La fenêtre Algèbre et le protocole de construction permettent un contrôle facile par l'enseignant.
- La fonction « exporter » « la feuille de travail dynamique en page web (html) » est un outil pédagogiquement intéressant qui, sans afficher ni donner accès aux différents menus, permet d'explorer une figure de façon simple et transparente.

1er temps : Familiarisation avec le logiciel (10 min + synthèse de 15 min)

Ouverture du logiciel :

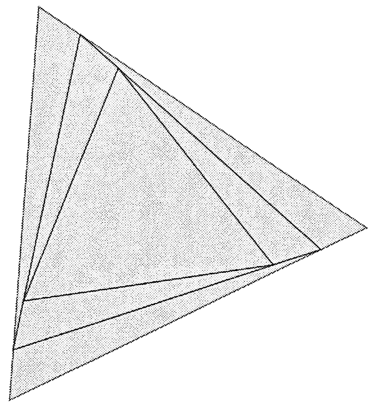
A l'ouverture du logiciel, l'animateur montre au vidéoprojecteur comment désactiver les fonctions d'affichage « fenêtre algèbre », « grille » et « axes », Il met en œuvre la fonction « annuler » qui permet de revenir en arrière, « sélectionner » et « supprimer » et montre ce que sont les menus déroulants.
Ce discours est à adapter en fonction du logiciel utilisé. L'intérêt est de repérer le mode de fonctionnement du logiciel.

Consigne

Construire un triangle équilatéral et afficher la longueur des côtés.

Si nécessaire, en demander la construction de plusieurs façons surtout pour ceux qui ont utilisé le polygone régulier, ou demander de changer d'outil, de colorier la figure, de faire afficher les mesures d'angle, de longueurs,….

Ou éventuellement de reproduire la figure suivante pour les stagiaires les plus avancés (voir figure en annexe 3.2) fichier ggb : « triangles emboîtés » sur le site de l'IREM de Lyon



Mise en commun

Les écrans des ordinateurs des stagiaires sont en veille. Le fichier est enregistré et fermé.

Recueil des procédures : elles sont montrées au vidéoprojecteur en allant vers la procédure la plus efficace et en ouvrant une fenêtre par procédure de construction. L'écran éteint permet de centrer les stagiaires sur la communication (échange, partage,...) des actions menées par chacun d'eux.

Les procédures susceptibles d'apparaître sont :
- **Construction de segments approximativement de même longueur et ajustements successifs**
- **Construction d'un triangle ajusté à vue avec l'outil polygone (non régulier)**
- Construction de segments de même longueur par l'outil segment de longueur donnée (« segment créé par un point et une longueur) et ajustement pour former un triangle
- Construction avec l'outil arc de cercle (construction qui peut aboutir mais difficile à utiliser)
- Construction avec l'outil compas

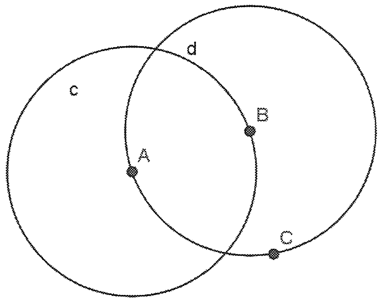
- Construction avec l'outil polygone régulier
- **Construction avec l'outil cercle (centre, point) de cercles de même rayon, liés selon la grammaire du logiciel de géométrie dynamique**
- Construction avec l'outil cercle (centre, rayon) de même rayon, liés selon la grammaire du logiciel de géométrie dynamique, le rayon peut être donné par un nombre ou désigné par une lettre correspondant à la longueur d'un segment défini préalablement. On obtient alors soit un seul triangle soit une famille de triangles équilatéraux.
- Construction utilisant la médiatrice d'un côté
- **Construction de cercles passant, à vue, par les extrémités de segments (sans utiliser les extrémités de segments comme extrémité de rayon)**

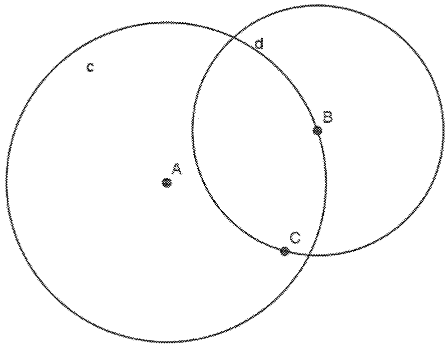
L'idée est de mettre en avant les procédures (marquées en gras) mais les autres doivent être étudiées si elles sont produites par les stagiaires.

Remarque : La construction du triangle équilatéral soulève le problème de l'utilisation des fonctions avancées (polygone régulier) ; ce peut être l'occasion de montrer qu'on peut ajouter ou retirer des outils à la barre d'outils et ainsi la personnaliser selon les activités (voir en annexe 3.3 une copie d'écran de la barre d'outils personnalisée dans le menu « outils »)[6].

Différents moyens de validation :
- L'agrandissement de la figure est une possibilité offerte par le logiciel. Il permet de conforter ou de remettre en cause une première perception de l'exactitude de la construction. D'autres outils fournis par le logiciel permettent de vérifier si le dessin à l'écran possède les propriétés de la figure demandée (ici, par exemple, on peut faire afficher la mesure de la longueur des côtés, ou la valeur des angles), il est possible augmenter la précision de la mesure pour invalider une procédure incorrecte.
- Le test de la résistance aux déplacements des points libres permet de vérifier la justesse d'une construction théorique et qui respecte les contraintes de construction du logiciel.

Remarque : Il arrive parfois qu'une figure correcte du point de vue théorique ne soit pas validée par le logiciel de géométrie dynamique parce qu'elle n'a pas été construite en respectant ses contraintes : par exemple, en créant un cercle à l'aide de l'outil « centre/ point » sans cliquer précisément sur le point par lequel on veut faire passer ce cercle, on obtient une figure qui ne suit pas le déplacement de ce point. Ainsi, pour tracer un triangle équilatéral « résistant » en utilisant l'outil cercle avec « centre/point », après avoir tracé un cercle de centre A et passant par B, il faut bien pointer sur le point A pour fixer le cercle de centre B. Si on se contente de faire « passer » le cercle par A, on fixe un autre point C et quand on déplace B, le cercle passe par C mais plus par A.





[6] Les autres logiciels comme Cabri-géomètre ou CaRMetal ont aussi la possibilité de personnaliser les menus.

Ceci peut être déstabilisant pour les débutants qui ne connaissent pas encore la syntaxe du logiciel et qui ne comprennent pas pourquoi leur construction pourtant théoriquement correcte n'est pas validée.

Synthèse

Quels sont les moyens de contrôle que donne un logiciel de géométrie dynamique pour vérifier la justesse d'une figure ?

Le logiciel[7] propose un outil « agrandissement » qui permet de « zoomer » sur le dessin et d'affiner les constats perceptifs.

On peut contrôler que le dessin est juste par la comparaison de certaines mesures : le logiciel de géométrie dynamique permet l'affichage de mesures dont on peut augmenter la précision. On constatera alors qu'il est très difficile de faire un dessin juste par approximation.

Le logiciel de géométrie dynamique permet de tester les liens entre les objets :

- on peut contrôler que les propriétés qui lient les éléments géométriques entre eux sont conservées après déplacement, déformation ou agrandissement-réduction : on dit que la figure est résistante.
- on peut utiliser l'outil « relation entre deux objets » de la barre de menu (appartenance, perpendicularité, parallélisme, égalité de longueur, …)

Remarque importante : La « grammaire » du logiciel de géométrie dynamique fonctionne selon une logique d'objets libres et d'objets dépendants ou liés (ex : deux points placés l'un sur l'autre ne sont pas un seul point pour le logiciel de géométrie dynamique ; le fait de créer un objet passant par un point n'établit pas automatiquement le lien entre les deux éléments). Une construction géométriquement correcte qui ne respecte pas la grammaire du logiciel de géométrie dynamique peut être invalidée par celui-ci. Ce constat peut décourager l'utilisateur débutant.

2ème temps : appropriation du logiciel par le stagiaire et anticipation de son utilisation dans la classe dans le contexte de la construction d'un triangle rectangle (1h)

Activité de reconnaissance des triangles rectangles mis en position prototypiques (voir fichier « triangles_rectangles.html » sur le site de l'IREM de Lyon)

Remarque : Le fichier html interdit l'accès à la barre d'outils de Geogebra mais autorise les déplacements des points libres ou liés à un seul objet. La présence de l'équerre autorise une vérification instrumentée mais suffisante de la perpendicularité. (Aucun des triangles non rectangles proposés n'a d'angle dont la mesure fixée est proche de 90°).

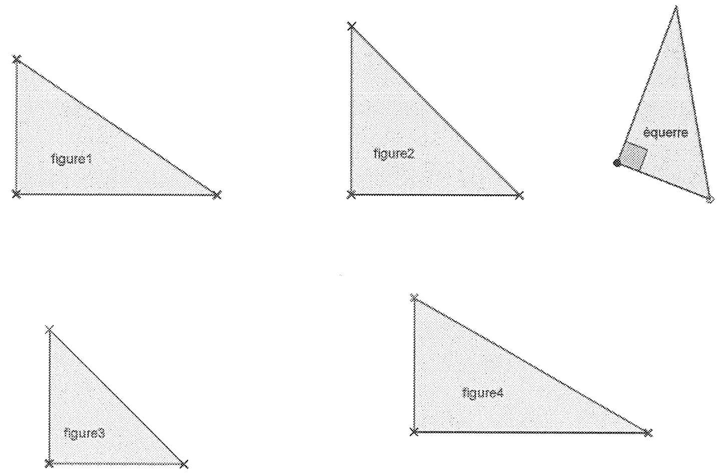
Consigne

(10 minutes)
Les stagiaires ouvrent le fichier html (triangles_rectangles.html).

[7] Idem pour Cabri-géomètre ou CaRMetal

L'animateur pose les questions :

- *Les figures suivantes ont-elles été* ***construites pour être*** *des triangles rectangles ?*
- *Comment faites-vous pour le savoir ?*



Réponse et mise en commun

Les figures qui ont été construites pour être des triangles rectangles résistent aux déplacements (conservation de l'angle droit), peu importe la longueur des côtés, l'orientation sur l'écran. Les autres triangles peuvent apparaître parfois comme triangles rectangles mais ne le sont pas nécessairement.

Transposition à la classe

(15 minutes)
L'animateur pose la question :
« Proposeriez-vous cette activité à des élèves de CM2 ? Si oui, dans quel but ? Si non, pour quelles raisons ?»
Les stagiaires notent leurs réponses à l'écrit puis l'animateur recueille les arguments et éventuellement complète :

- Arguments « pour » :
  - montrer qu'en géométrie dynamique la perception n'est pas un outil suffisant pour la validation ; la propriété caractéristique du triangle rectangle (l'angle droit) doit résister ;
  - la construction d'une figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique nécessite aussi de convoquer les propriétés de la figure
  - c'est l'occasion d'approcher la distinction entre dessin et figure : à l'écran la manipulation fait apparaître une classe de figures (les triangles rectangles objets géométriques théoriques) alors que sur le papier, l'élève dessine un seul représentant de cette classe de figures.

- Arguments « contre » :
  - difficultés de manipulation : difficultés à utiliser l'équerre dynamique ; confusion entre les figures lors des déplacements ; difficulté à appréhender le fait que le test de la résistance d'une figure réside dans le déplacement de ses sommets
  - la précision dans la position de l'équerre dynamique construite pour cette activité ne permet pas de distinguer un angle droit d'un angle « presque droit »

Synthèse

Après avoir rappelé que les programmes préconisent de proposer des activités géométriques dans différents espaces[8], l'animateur confirme que la géométrie dynamique permet de travailler l'articulation entre les deux géométries G1 et G2 (géométrie perceptive ou instrumentée et géométrie des propriétés, voir introduction et module 1), c'est-à-dire à l'articulation entre École et Collège.
Même si la résistance aux déplacements est difficile à appréhender, elle constitue un outil de validation de base en géométrie dynamique. C'est donc une compétence à construire si l'on veut travailler avec un logiciel de géométrie dynamique.
Le problème de précision posé par la validation instrumentée (ici, usage de l'équerre) sera en partie résolu par les outils du logiciel de géométrie dynamique (mesure des angles, des longueurs, relations d'incidence, etc.)

Remarque : Les réponses données par un logiciel de géométrie dynamique en termes de validation sont des informations considérées comme exactes mais qui ne sont pas le fruit d'un raisonnement hypothético-déductif : en ce sens on ne se situe pas complètement en géométrie G2. C'est la recherche de constructions de figures résistantes aux déplacements qui, en obligeant à mobiliser des propriétés, permet de s'engager dans cette géométrie.

Appropriation du logiciel
(30 minutes)

A l'aide du logiciel de géométrie dynamique, les stagiaires sont invités à construire les triangles qui semblent rectangles, après avoir exploré les déplacements à partir du fichier html précédent (triangles_rectangles.html).

A l'issue de l'activité, l'animateur fait un bilan rapide des difficultés ou des découvertes des stagiaires. On peut pointer :

- les différences et nuances dans les couleurs des points par défaut qui indiquent leur degré de liberté : bleu foncé (point libre), bleu clair (point dépendant, lié à un objet), noir (dépendant, lié à deux objets)
- l'intérêt de l'exportation d'un fichier au format html : aucun outil de construction n'est accessible donc aucune modification de la structure de la figure exportée n'est possible. En restreignant l'environnement, on impose à l'utilisateur une modalité de fonctionnement : tester la résistance de la figure.

3ème temps : projection de l'utilisation du logiciel en classe : problème de reproduction d'une figure dynamique complexe (45 min)

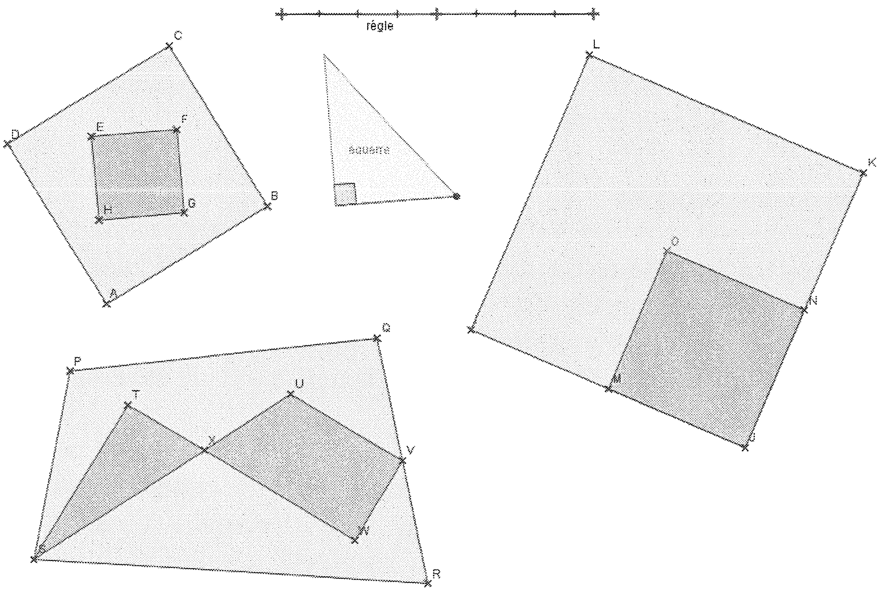
Activité de reproduction d'une figure dynamique (voir fichier : « les_3_figures_avec_outils »)

[8] cf programme de collège aout 2008 : « Les travaux géométriques sont conduits dans différents cadres : espace ordinaire (cour de récréation, par exemple), espace de la feuille de papier uni ou quadrillé, écran d'ordinateur. La résolution des mêmes problèmes dans ces environnements différents, et les interactions qu'elle suscite, contribuent à une approche plus efficace des concepts mis en œuvre »

Consigne

(20 minutes)

Les stagiaires ouvrent le fichier html (les_3_figures_avec_outils.html) et chacun choisit une des trois figures qu'il devra reproduire à l'aide du logiciel de géométrie dynamique



Construire à l'aide du logiciel de géométrie dynamique, l'une des trois figures de façon à ce qu'elle ait les mêmes propriétés que celles identifiées sur le modèle.

Pour réussir la construction de la figure, le stagiaire doit faire l'inventaire de ses propriétés géométriques, ainsi que repérer les points libres et les points liés.
Pour cela, il peut :

- procéder de manière perceptive en éprouvant la résistance de la figure,
- contrôler, de manière instrumentée, les propriétés identifiées.

Il dispose pour cela d'instruments « virtuels » : une équerre qui pivote autour de l'angle droit et une « règle à milieu » qui permet de vérifier les alignements et les milieux des segments.
Il lui reste alors à établir une chronologie sur l'ensemble des propriétés identifiées pour les lier en un programme de construction cohérent respectant la logique et la grammaire du logiciel de géométrie dynamique.

La validation de la construction se fait en comparant les résistances respectives du modèle et de la figure produite par le stagiaire.
Dans un premier temps, on considèrera comme exactes des constructions dans lesquelles les propriétés géométriques sont conservées mais obtenues par des programmes de construction différents. Par exemple, les deux carrés imbriqués (IJKL et OMJN) doivent rester des carrés mais peuvent avoir été construits en utilisant la diagonale (ou non) et avoir par conséquent des points mobiles différents. On pourra proposer aux stagiaires les plus avancés de faire en sorte que les points mobiles soient les mêmes que ceux du modèle.

Mise en commun

(10 minutes)

La mise en commun se fait autour de la diversité des procédures de construction des figures en demandant à un stagiaire de reproduire sa démarche au vidéoprojecteur et au groupe de réagir.
On pourra pointer que deux figures ayant les mêmes propriétés géométriques présentent des points de couleurs différentes si elles ont été construites selon des procédures différentes et évoquer le repérage

des points libres et liés. A cette occasion on pourra aussi afficher la fenêtre « protocole » du logiciel de géométrie dynamique (menu « Affichage »).

Retour sur l'activité

(15 minutes)
L'animateur demande aux stagiaires de noter ce qu'ils ont retenu et les questions que soulève cette activité aussi bien pour eux-mêmes que pour la classe.

La discussion qui suit devrait porter sur :

- la maîtrise des actions possibles avec le logiciel de géométrie dynamique nécessaire pour que l'enseignant propose à ses élèves des activités similaires (nécessité d'avoir construit soi-même toutes les figures proposées aux élèves)
- la faisabilité des constructions pour les élèves. Il est envisageable de donner des figures à compléter (s'il y a un carré au départ de la construction, à l'école élémentaire, on le donne à l'élève)
- les aides à apporter aux élèves : on peut en construire sur le logiciel comme la « règle à milieu » ou l' « équerre dynamique » de l'activité, utiliser celles du menu déroulant en interrogeant le logiciel de géométrie dynamique (menus déroulants : mesure de longueurs ; relation entre objets ; ...). Les échanges entre les élèves installés en binômes sont souvent profitables.
- la gestion de la classe : il faut être vigilant à garder du temps pour les échanges de procédures via le vidéoprojecteur dans le cadre d'une mise en commun.
- ...

4ème temps : propositions d'activités pour la classe (30 min)

L'animateur met à la disposition des stagiaires un dossier d'activités déclinées en :

- fiche « maître » : objectifs et raison d'être de cette activité ; consignes à donner aux élèves
- fiche « élève » papier : description de l'activité (consigne et traces écrites attendues)
- fichier(s) « geogebra » accessibles depuis l'ordinateur de l'élève.

Le dossier est à télécharger sur le site de l'IREM de Lyon.

Consigne

L'animateur répartit les activités entre les stagiaires et les invite à les tester pour pouvoir les présenter rapidement aux membres du groupe.

Présentation des activités

Chaque stagiaire présente en quelques mots l'activité qu'il a testée : contenu mathématique, niveau de classe, descriptif de l'activité et formule ses observations, ses remarques ou ses questions.

Conclusion

L'animateur rappelle les activités dont l'intérêt didactique ou pédagogique aura été retenu. Il souligne leur faisabilité en classe et le peu de technicité que nécessitent la conception et la mise en œuvre de certaines d'entre elles. Il signale qu'elles sont toutes mises à disposition des stagiaires, qui pourront les utiliser telles quelles ou de façon aménagée, et qu'ils peuvent s'en inspirer pour en concevoir d'autres pour leur classe.

ANNEXES DU MODULE 3

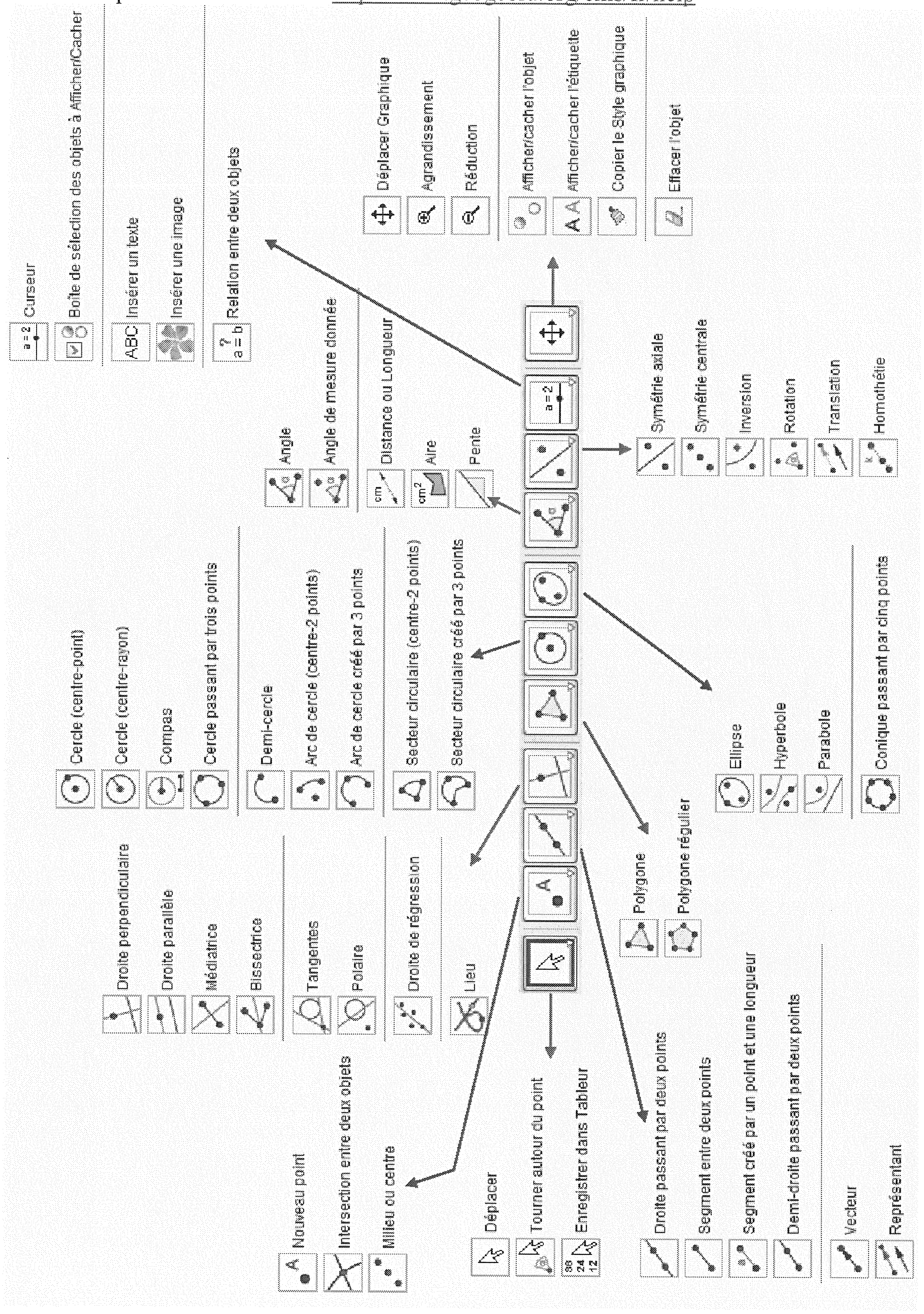
Ces annexes sont téléchargeables sur le site de l'IREM de Lyon http://math.univ-lyon1.fr/irem/ Rubrique : documents en ligne en accès restreint avec l'identifiant : geometrieplane et le mot de passe : cycle3college

Annexe 3.1

Fiche technique de Geogebra

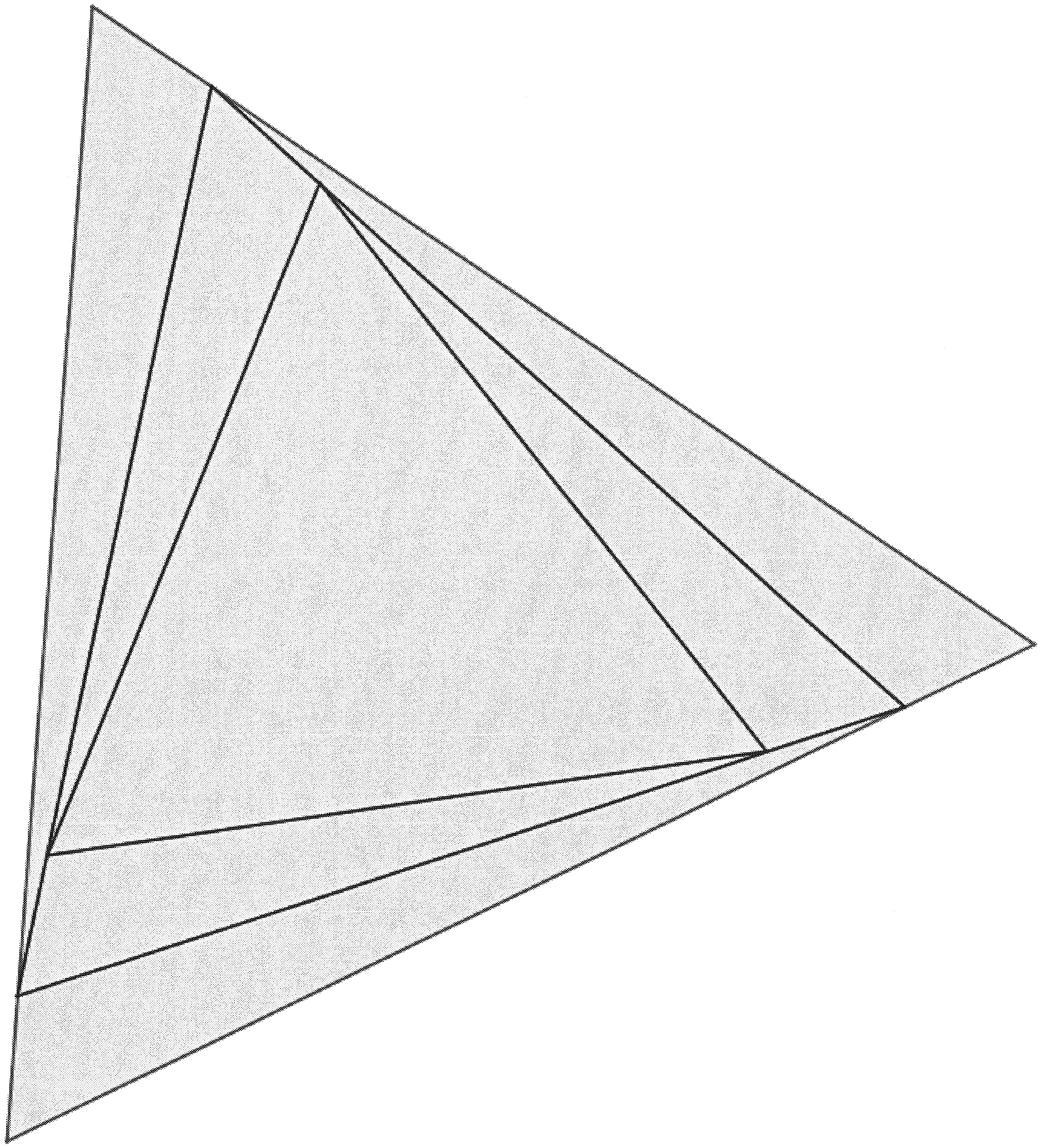
Menus déroulants

Document provenant sur le site : http://www.geogebra.org/cms/fr/help



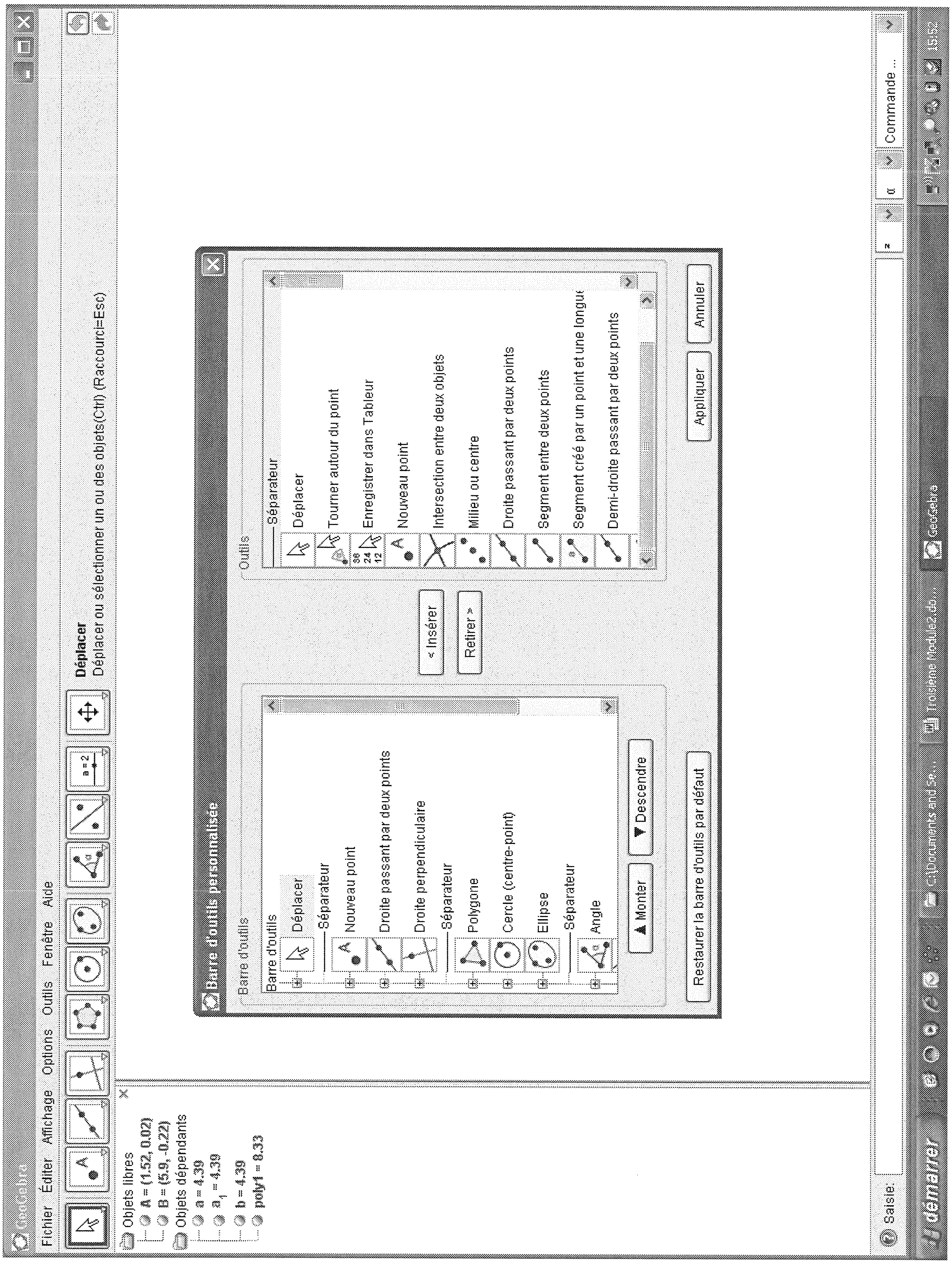
Annexe 3.2

Triangles emboîtés



Annexe 3.3

Personnalisation du menu



REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Voir le site Publimath pour les fiches commentées : http://publimath.irem.univ-mrs.fr/

Les documents complétant la brochure sont sur le site de l'IREM de Lyon,

http://math.univ-lyon1.fr/irem/ **Rubrique : documents en ligne**

Quelques documents sont en accès libre et d'autres en accès restreint avec l'identifiant : geometrieplane et le mot de passe : cycle3college

Documents téléchargeables :

Programmes de collège et de l'école primaire 2008
http://eduscol.education.fr/cid48646/ecole-elementaire-cycle-des-approfondissements.html
http://eduscol.education.fr/cid48727/mathematiques-college.html
Document ressources pour le collège sur la « géométrie au collège »
http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Programmes/17/0/doc_acc_clg_geometrie_109170.pdf
Logiciels à télécharger : Geogebra http://www.geogebra.org/cms/fr/ ou CaRMetal http://db-maths.nuxit.net/CaRMetal/

Certains documents sont consultables sur les sites correspondants :
Grand N et Petit x sur le site de l'IREM de Grenoble : http://www-irem.ujf-grenoble.fr/irem/accueil/
Repères IREM : http://www.univ-irem.fr/spip.php?rubrique23
APMEP : http://www.apmep.asso.fr/
COPIRELEM sur le site de l'ARPEME : http://www.arpeme.fr/index.php?id_page=15

Articles ou ouvrages :

BERTHELOT, R. & SALIN, M.H. (1993): L'enseignement de la géométrie à l'Ecole primaire, *Grand N* n°53; pp. 39-56; IREM de Grenoble

BERTHELOT, R. & SALIN, M.H. (1994): Un enseignement des angles au cycle 3, *Grand N* n°56

BERTHELOT, R. & SALIN, M.H. (2001): L'enseignement de la géométrie au début du collège. Comment concevoir le passage de la géométrie du constat à la géométrie déductive? *Petit x* n° 56 ; IREM de Grenoble

BRACONNE-MICHOUX, A. & ZUCCHETTA H. (2010) : Formation continue en géométrie au cycle 3 : une entrée par les problèmes. Atelier A5 in Actes du XXXVIème Colloque de la COPIRELEM, Auch.

BRIAND, J. ; PELTIER, M-L., NGONO, B. & VERGNES, D. (2009 et 2010) : *Euro Maths CE2, CM1, CM2, Manuels et livre du professeur;* Hatier

BROUSSEAU, G. (1983) : Études de questions d'enseignement, un exemple : la géométrie *; IMAG n°45* ; Grenoble

CHARNAY, R.; COMBIER, G. & DUSSUC, M. - P. (2003 et 2010) : *Cap maths CE2, CM1, CM2 Manuel, Guide des activités et Fiches photocopiables ;* Hatier

Commission Inter-IREM Premier Cycle (1998) : *Des mathématiques en sixième* IREM de Nantes

Commission Inter IREM Premier Cycle, (2001) : *Articulation école-collège : Des activités géométriques,* COPIRELEM, IREM de Lyon

DUVAL, R. (1994) : Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique, *Repères IREM,* n°17

DUVAL, R. (1995) : *Semiosis et pensée humaine*, éditions Peter Lang ; pp. 173-207

DUVAL, R. & GODIN, M. (2005) : *Les changements de regard nécessaires sur les figures*, Grand N n°76 ; pp. 7 – 27

ERMEL (2006). *Apprentissages géométriques et résolution de problèmes.* Hatier

FENICHEL M., PAUVERT M., PFAFF N. (2004). Donner du sens aux mathématiques, Espace et géométrie. Tome 1, Bordas.

GRAMAIN A. (2000) *Maths et Clic 6^e^, Manuel et livre du professeur*, Bordas

HOUDEMENT, C & KUZNIAK, A. (2003) : Epistémologie et didactique : un exemple de cadre conceptuel pour analyser l'enseignement de la géométrie, *Carnets de route de la COPIRELEM, Concertum*, tome 2 ; pp. 95- 106

KESKESSA, B. , PERRIN-GLORIAN, M.J. & DELPLACE, J.R. (2007), Géométrie plane et figures au cycle 3, une démarche pour élaborer des situations visant à favoriser une mobilité du regard sur les figures de géométrie, *Grand N* n° 79 ; pp 33 à 60

MULLET-MARQUIS, R. (1994) : « Géométrie élémentaire, mon cher Watson ! » *Repères IREM* n°17 ; pp. 7-12

PARZYSZ, B. (2003) : Articulation entre perception et déduction dans une démarche géométrique en PE1, *Carnets de route de la COPIRELEM, Concertum*, tome 2 ; pp. 107-125

PELTIER, M.L. (2003) : « La fleur» et « le napperon » ; *Carnets de route de la COPIRELEM.* Tome 2 ; pp. 183 – 190

PERRIN-GLORIAN, M.J. (2013) Comment Peut-on Penser la Continuité de l'enseignement de la géométrie de 6 à 15 ans ? *Repères – IREM* n° 90 pp. 3-39

PERRIN-GLORIAN, M.J. (2012) : Vers une progression cohérente de l'enseignement de la géométrie plane du CP à la fin du collège ? Les mathématiques en marche au long de la scolarité obligatoire : L'exemple de la symétrie axiale ; *Bulletin Vert de l'APMEP*, n° 499. p. 325-332

ROYE et al. (2000) : *Travaux géométriques : Apprendre à résoudre des problèmes ; cycle 3*, IREM de Lille, CRDP Nord - Pas de Calais, SCEREN

Manuels Sésamath 6è (2013) http://manuel.sesamath.net/

VERGNAUD, G (1990). : « Théorie des champs conceptuels » *Recherche en Didactique des Mathématiques ; Vol. 10- 2.3 ; pp. 133-17*

Institut de recherche sur l'enseignement des mathématiques de Lyon
Université Claude Bernard Lyon 1, Bât. Braconnier (tramway T1 : Université Lyon 1)
21, Avenue Claude Bernard -- 69622 Villeurbanne cedex
04.72.43.13.82 - http://math.univ-lyon1.fr/irem/

Titre : **La géométrie plane du cycle 3 au collège, trois modules de formation**

Auteurs : Groupe Rectoral Ecole-Collège de l'IREM de Lyon

Éditeur : IREM de Lyon

Date : Juin 2013

Résumé : Cette brochure s'adresse aux formateurs qui voudraient concevoir et animer des formations sur l'enseignement de la géométrie du cycle 3 de primaire, en début de collège ou dans une liaison école-collège. Elle présente des modules de formations « clés en mains » de trois heures, accompagnés de documents ressources en ligne disponibles sur le site de l'IREM de Lyon.

Les trois modules qui la composent sont indépendants mais complémentaires :

- Le premier positionne l'enseignement de la géométrie à différents niveaux, de l'école au collège, et propose d'aborder l'apprentissage de la géométrie par la résolution de problèmes dans des situations construites à cet effet.
- Le deuxième interroge d'abord la programmation des apprentissages dans la durée, à partir de l'exemple de la construction des concepts de perpendicularité et de parallélisme, et offre à l'étude quelques problèmes dont l'objectif est d'initier les élèves au raisonnement déductif.
- Le troisième est centré sur la géométrie dynamique. Par des mises en situation permettant de se familiariser à Geogebra, il montre en quoi l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique peut être une aide à l'apprentissage, complémentaire au « papier -crayon », et peut favoriser le passage vers une géométrie théorique. Il propose aussi d'étudier des activités utilisables directement en classe dont on pourra s'inspirer par la suite.

Mots clés : Modules de Formation, géométrie plane, liaison école-collège, situations-problèmes en géométrie, perpendiculaires et parallèles, géométrie dynamique, gestion de classe

Format : A4

Pages : 104

ISBN : 978-2-906943-66-7

9782906943667

Prix : **10 €**