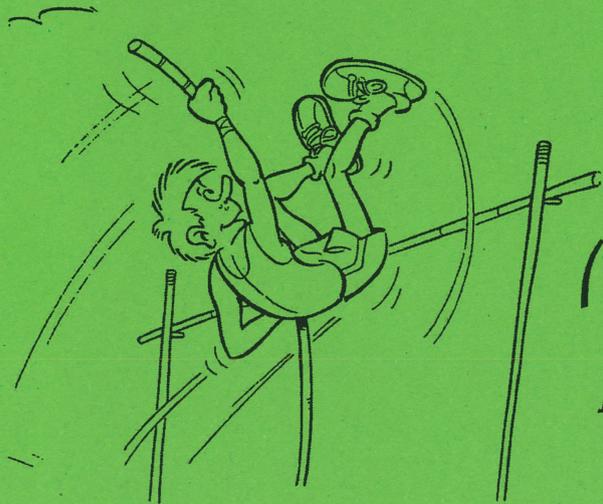


IREM



50 PROBLEMES
(et plus si affinités)
pour les élèves de 4ème/3ème

Quand on dit d'un sujet qu'il est « épuisé », c'est que l'on pense en avoir fait le tour. Mais quand on doit, en réponse à une demande, dire d'un ouvrage qu'il est « épuisé », c'est au contraire qu'ayant connu une belle diffusion, il continue à susciter l'intérêt. C'était le cas du fascicule « Trente problèmes pour nos élèves de quatrième et troisième ». Nous avons donc décidé sa réédition.

Confessons tout d'abord le grand plaisir éprouvé en retrouvant ces problèmes. Tous restaient intéressants, mais les élèves et les programmes ayant changé, nous avons opéré un tri pour ne garder que ceux qui nous semblaient les plus pertinents. Une fois ce choix effectué, nous l'avons complété, arrivant ainsi à un recueil de « Cinquante problèmes ...et plus si affinités », si bien que, pour une part, les problèmes proposés ne figuraient pas dans la précédente version. On croise au fil des pages les grands théorèmes du collège, Thalès, Pythagore, k ; k^2 ; k^3 , mais aussi des situations où l'algèbre apparaît comme un puissant outil de résolution, sans oublier pourcentages, angles, recherche de régularité dans des problèmes numériques qui sont également au menu. Les formulations sont « ouvertes » pour ne pas induire de méthode et laisser le plaisir de la découverte.

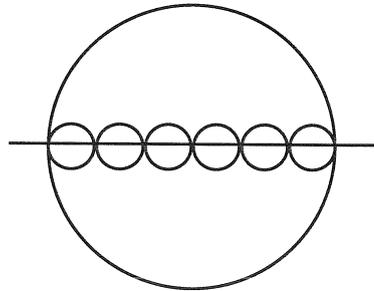
Piquer la curiosité des élèves, leur faire partager notre bonheur de chercher, d'oser prendre le risque de parcourir des sentiers qui ne sont pas balisés, voilà des objectifs qui nous semblent toujours au cœur de notre métier d'enseignant de mathématiques.

Maryvonne Le Berre, René Mulet-Marquis

1

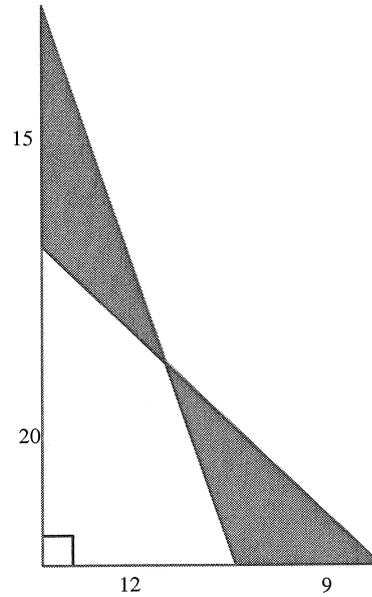
Calcul mental !!

L'aire de chaque petit disque est 2 cm^2 . Quelle est l'aire du grand disque ?



2

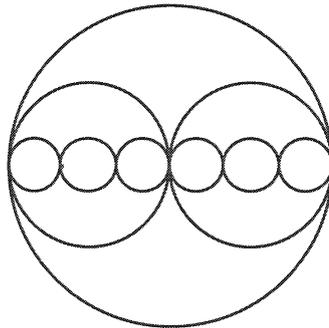
Les deux triangles hachurés ont-ils la même aire ?



3

A quelle fraction du grand disque correspondent les six petits disques ?

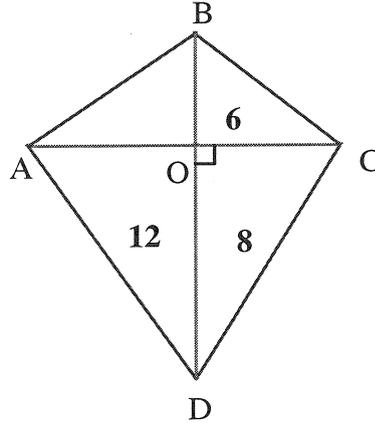
A quelle fraction du grand disque correspond la surface hachurée ?



4

On donne les aires des triangles OBC, OCD et OAD.

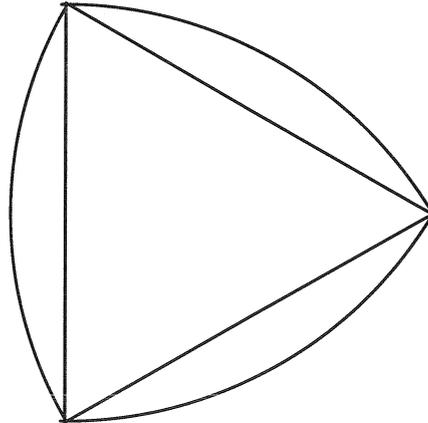
Trouve l'aire du triangle AOB.



5

Le triangle est équilatéral, de côté 1. Les trois sommets sont les centres des arcs de cercle.

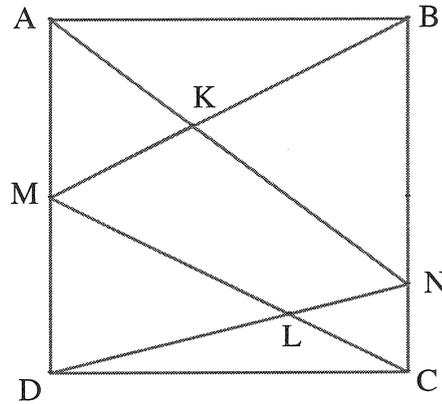
Trouve l'aire de la figure limitée par les arcs de cercle



6

ABCD est un carré de côté 1. M est le milieu de [AD]. N est placé au quart de [BC].

Quelle est l'aire du quadrilatère MKNL ?

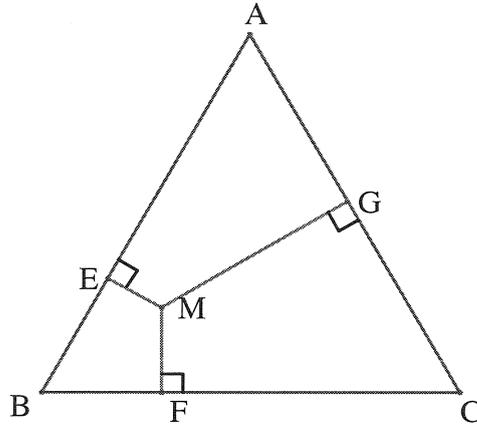


7

Défi !

ABC est un triangle équilatéral, M un point quelconque à l'intérieur du triangle.

Où faut-il placer M pour que la somme des distances $ME + MF + MG$ soit la plus petite possible?

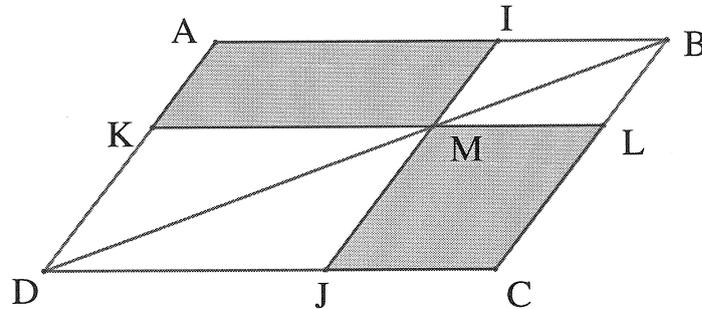


8

ABCD est un parallélogramme. M est un point quelconque de la diagonale [BD].

(IJ) et (KL) sont parallèles aux côtés de ABCD.

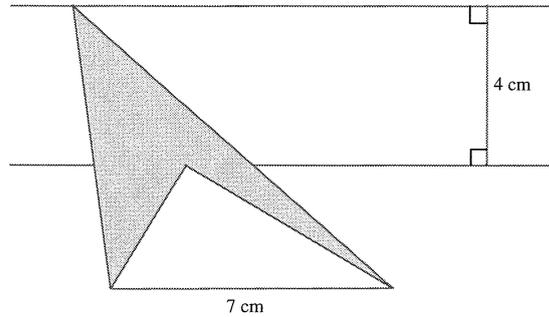
Compare l'aire des deux parallélogrammes grisés.



9

Prenons de la hauteur !

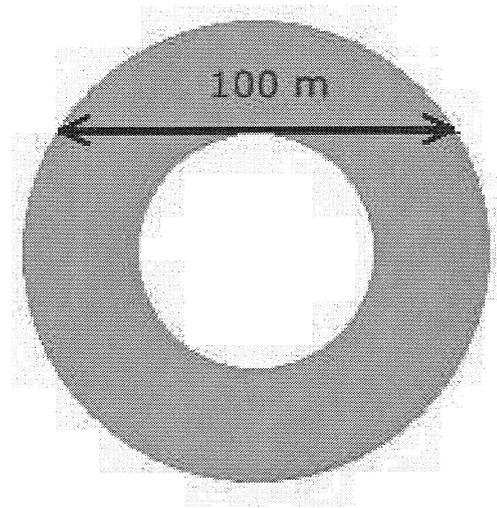
Quelle est l'aire de ce quadrilatère ?



10

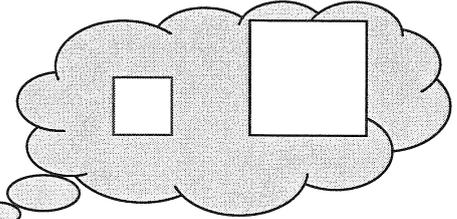
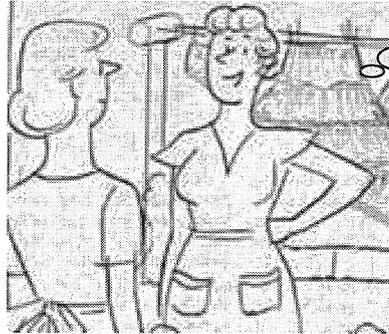
Quelle est l'aire de cette pelouse ?

Le dessin ci-dessous représente une pelouse qui a la forme d'une couronne circulaire : elle est délimitée par deux cercles concentriques.



11

A vos ciseaux (1) !



Madame Lacouture dispose de deux napperons carrés qu'elle trouve trop petits.
Elle décide de les découper pour fabriquer un seul napperon plus grand, également carré,
et ceci sans perdre un seul morceau de tissu !

Sauriez-vous l'aider ?

12

A vos ciseaux (2) !

Prenez un carré bien ordinaire

Découpez -le en **cinq** morceaux

Avec ces cinq morceaux, reconstituez **deux** carrés.

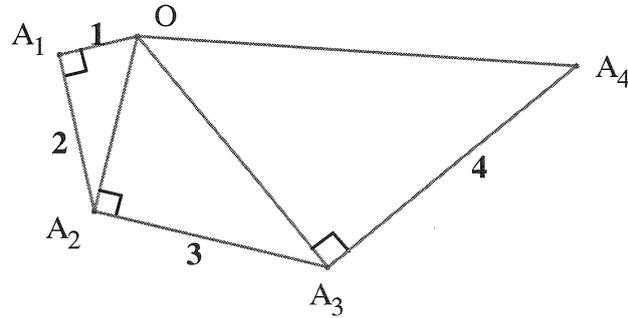
Facile : deux carrés de même dimension

Moins facile : deux carrés différents, mais il y a plus d'une solution !

13

En spirale !

Trouve le plus petit entier n tel que $OA_n > 30$

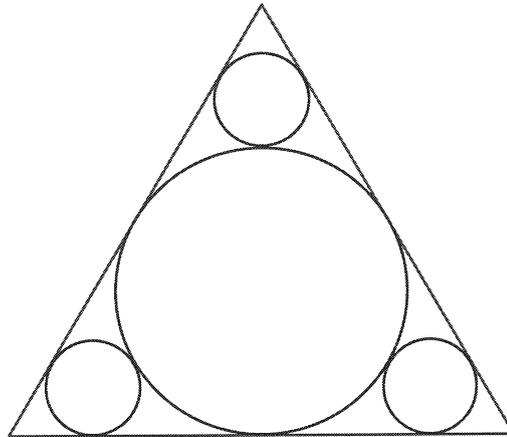


14

Vitrail 1

Le triangle est équilatéral. Les cercles sont tangents au triangle et tangents deux à deux.

Construis la figure .

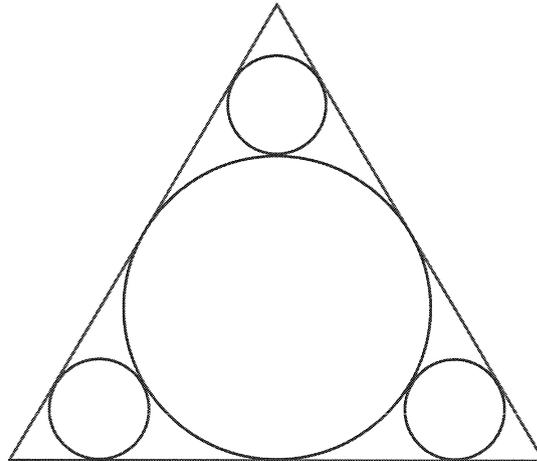


15

Vitrail 2

Le triangle est équilatéral. Les cercles sont tangents au triangle et tangents deux à deux.

Si le grand cercle a pour rayon 3, quel est le rayon des petits cercles ?

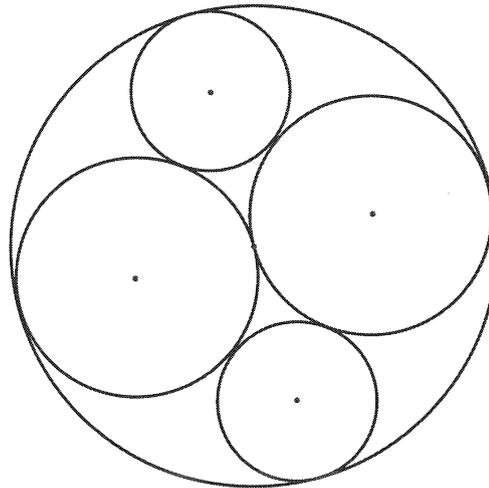


16

Vitrail 3

Les cercles sont tangents deux à deux. Le rayon du plus grand cercle est 2.

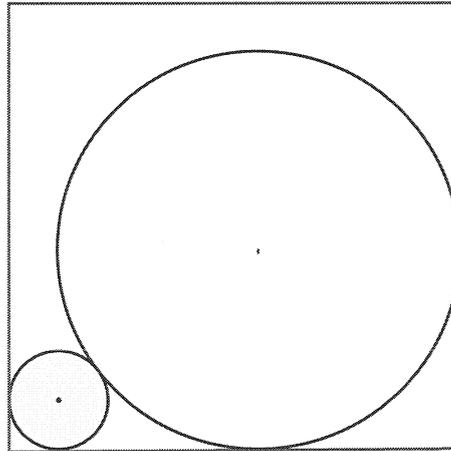
Calcule le rayon des deux plus petits.



17

La boule et le cochonnet

Le rayon de la boule est 4 fois celui du cochonnet
Ils sont placés dans une boîte carrée de 27 cm de côté
Calcule leurs rayons respectifs.



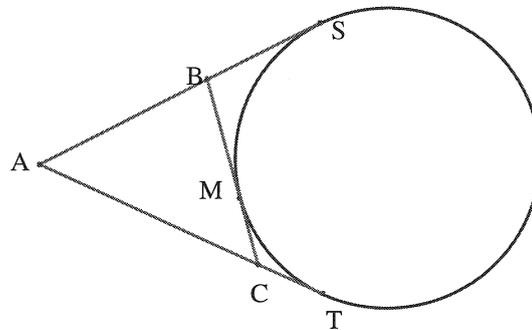
18

Prendre la tangente (1)...

(AS) et (AT) sont tangentes au cercle en S et T.

Par un point M de l'arc BT, on a tracé une troisième tangente au cercle.

Compare le périmètre du triangle ABC aux longueurs AS et AT.



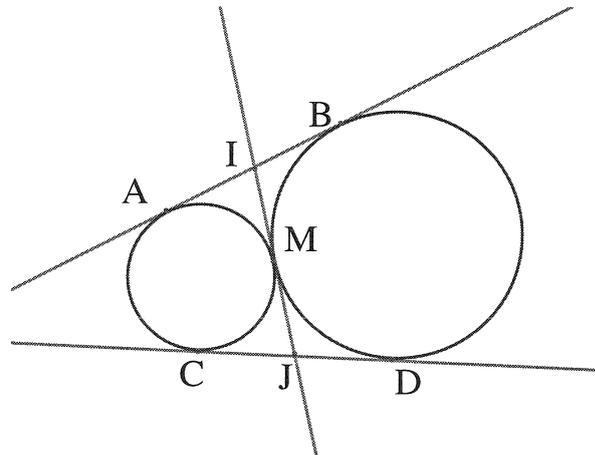
19

Prendre la tangente (2)...

Les droites (AB), (CD) et (IJ) sont les tangentes communes aux deux cercles.

I et J sont deux de leurs points d'intersection.

Prouve que I est le milieu de [AB] et J le milieu de [CD].

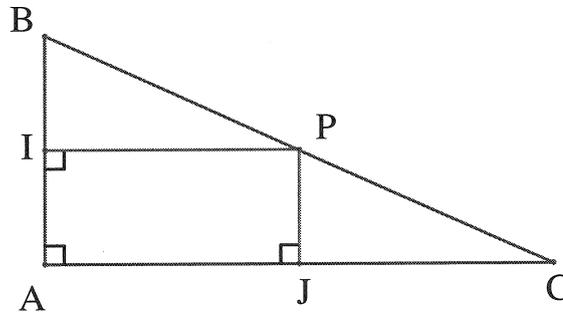


20

Pré carré

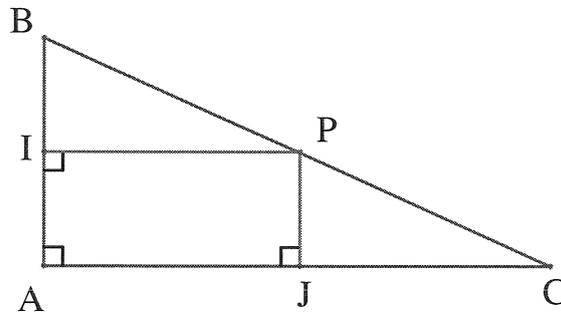
On se donne un triangle ABC, rectangle en A.

Comment construire le point P sur [BC] de façon à ce que le rectangle PIAJ soit un carré ?



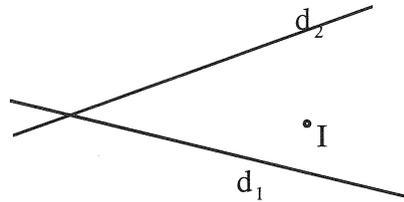
21

Comment construire le point P sur [BC] de façon à ce que la longueur IJ soit la plus petite possible ?



22

Construire un point A sur la droite d_1 et un point B sur la droite d_2 , de façon à ce que I soit le milieu de $[AB]$.



23

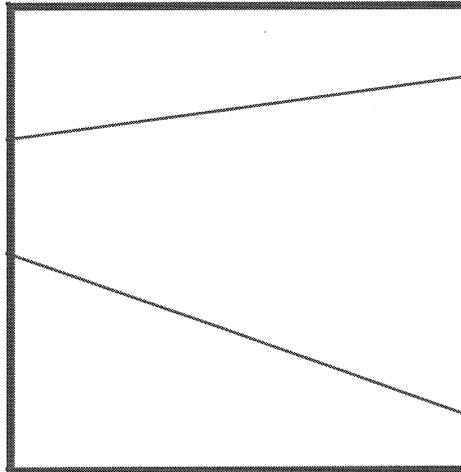
Avec une règle non graduée, mais aux bords bien parallèles,
comment peut-on construire le milieu du segment $[AB]$?



24

Sans sortir du cadre (1)

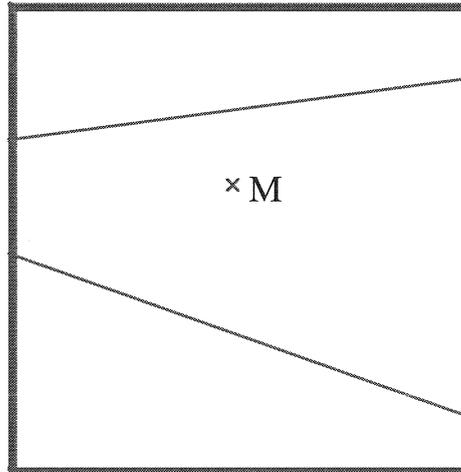
Construire la bissectrice de l'angle formé par les deux droites.



25

Sans sortir du cadre (2)

Les deux droites se coupent en I. Construire la droite (MI)

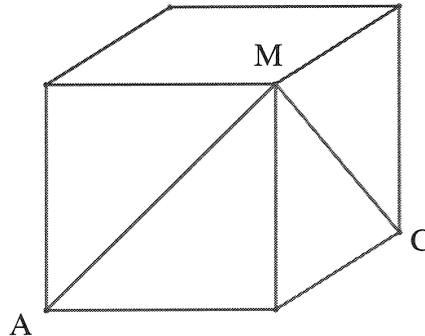


26

Dans l'espace

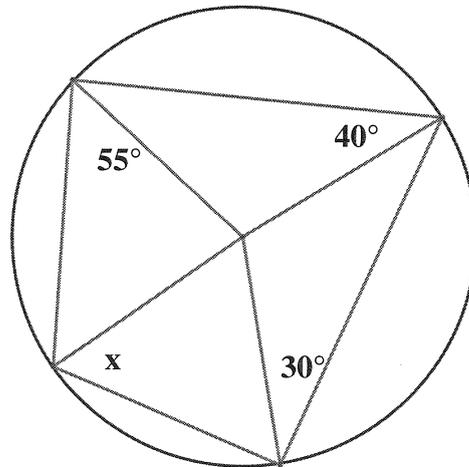
Sur un cube, on a tracé deux diagonales, comme indiqué sur le dessin ci-dessous.

Quelle est la mesure de l'angle formé par ces deux diagonales ?



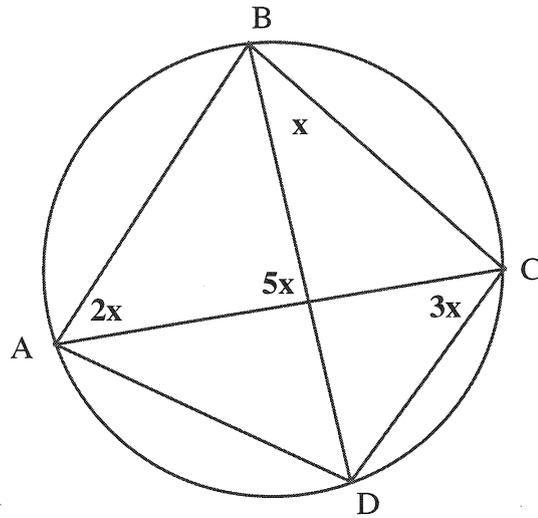
27

Calcule x



28

Calcule x

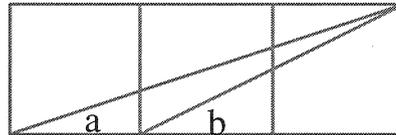


29

Sans calcul !

Le rectangle est formé de trois carrés.

Que vaut l'angle $a + b$?

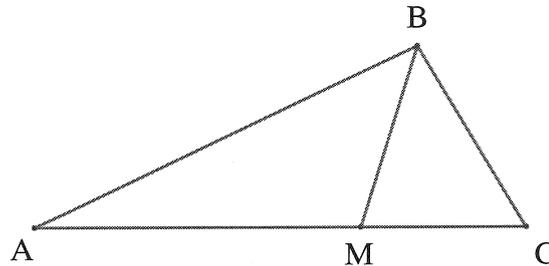


30

Jouons les prolongations !

$AB = 2 BC$ et $AM = 2 MC$.

Compare les angles ABM et MBC .

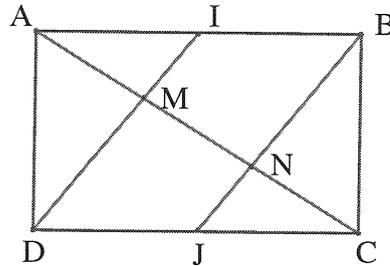


31

Le bon format

I est le milieu de AB et J le milieu de CD.

Comment faut-il choisir les dimensions du rectangle ABCD pour que les angles M et N soient des angles droits ?



32

On augmente la longueur d'un rectangle de 10% et on diminue sa largeur de 10%.

Que devient son aire ?

33

On augmente de 30 % la longueur et la largeur d'un rectangle.

Que devient son aire ?

34

De quel pourcentage faut-il augmenter la longueur des côtés d'un rectangle pour que son aire soit augmentée de 44% ?

En 2004, les affaires de "Maptitentreprise" étant peu brillantes, la prime annuelle des employés a été diminuée de 50%. En janvier 2005, le patron annonce qu'une reprise des affaires va permettre une augmentation de la prime de 50%.

Qu'en pensez-vous ?

36

Vrai ou faux ?

Le produit de deux nombres qui se terminent par 76 se termine aussi par 76.

Peut-on écrire 2012 comme somme de trois entiers consécutifs ? et 2013 ?

Y a -t-il une règle ?

Peut-on écrire 2012 comme somme de quatre entiers consécutifs ?

et ton année de naissance ?

Quels sont tous les nombres qui peuvent s'écrire comme somme de quatre entiers consécutifs ?

38

Vrai ou faux ?

Tout multiple de 9 et de 15 est un multiple de 135.

39

Calcule 25^2 , 45^2 , 75^2 .

Trouve une règle qui permet de calculer mentalement 35^2 , 65^2 , etc

Justifie.

40

Vrai ou faux ?

Les entiers de la forme $n^3 - n$ sont divisibles par 6.

41

La somme de 2 nombres est 300.

De combien augmente leur produit quand chaque nombre augmente de 7 ?

42

Dans tous les sens

En pliant une feuille de papier en deux parties égales, dans le sens de la longueur, j'obtiens un rectangle de périmètre 48 cm. Si je plie la même feuille de papier dans le sens de la largeur, j'obtiens un rectangle de périmètre 30 cm.

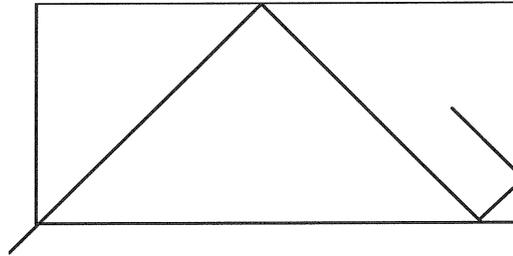
Quelles sont les dimensions de la feuille de papier ?

43

Trouve deux entiers a et b non nuls tels que $28a = b^2$.

44

Un billard un peu spécial



A chacun des sommets d'un billard rectangulaire, une ouverture permet d'envoyer un rayon lumineux qui se réfléchit sur les côtés du rectangle.

On se donne deux conditions supplémentaires :

1. Le billard peut être quadrillé par des carrés identiques
2. On envoie le rayon de lumière suivant la diagonale d'un carré du quadrillage. Il se réfléchit donc de la même façon. Sa trajectoire suit toujours les diagonales du quadrillage.

Connaissant les dimensions du quadrillage, peut-on prévoir le nombre de carrés traversés par la boule ?

45

A toute vitesse !

A Lyon, un funiculaire monte de Saint-jean à Fourvière à la moyenne de

14 km / h.

A quelle vitesse devrait-il redescendre pour que sa moyenne sur l'ensemble du parcours soit de

28 km / h ?

46

Deux notes vous manquent...

En fin de trimestre, le professeur vérifie avec les élèves leurs notes de DS et de DM. Un élève s'aperçoit qu'il lui manque deux notes. Le lendemain, le professeur a retrouvé les deux notes.

L'élève prend sa calculette et dit :

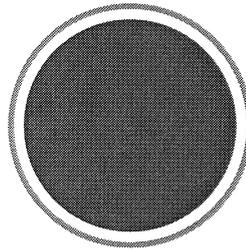
- " ça me fait la même moyenne de DM et la même moyenne de DS. "

Doit-il recalculer sa moyenne générale ?

47

Le boa et le microbe

Supposons que l'on fasse le tour de la terre avec une ficelle... Si l'on rallonge la ficelle de 1 mètre, et qu'on la dispose à égale distance du sol, suivant le schéma ci-dessous ,



qui pourra passer sous la ficelle, sans la toucher ?

Un microbe ? Une fourmi ? Une souris ? Un cobaye ? Un boa ?

48

Avec 30 cm de ficelle, on peut faire le tour d'un ballon. Quelle longueur de ficelle faut-il ajouter pour faire le tour d'un autre ballon dont le rayon est supérieur de 2 cm ?

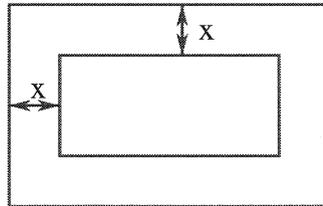
Supposons que l'on ait une ficelle assez longue pour faire le tour d'une boule de la taille de la Terre. Pour placer cette ficelle régulièrement à 2 cm de la boule, quelle longueur de ficelle faudrait-il ajouter ?

49

Bien encadré

On a entouré un tableau rectangulaire d'un cadre de largeur constante.

Les deux rectangles ont-ils leurs dimensions proportionnelles ?



50

La calculatrice de Léo est vraiment en mauvais état. Les seules touches en état de marche sont

5 7 + =

Peut-il faire afficher

11?

14 ?

19 ?

Quel est le plus grand nombre que Léo ne peut pas afficher avec sa calculatrice ?

51

Quelles sont la ligne et la colonne de 795 471 ?

				1			
			2	3	4		
		5	6	7	8	9	
	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20				

52

On range les entiers à partir de 6 dans six colonnes

6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23
...					

Vrai ou faux ?

Les nombres premiers se trouvent tous dans la deuxième ou la sixième colonne.

53

Quelle salade !

Lors d'une sortie scolaire, les élèves ont été répartis en deux cars : 35 filles dans l'un, 35 garçons dans l'autre.

Au premier arrêt, 10 garçons montent dans le car des filles. Au moment de partir le chauffeur s'aperçoit que dix élèves sont debout et les fait descendre, et remonter dans l'autre car.

Au final, y-a-t-il plus de filles dans le car des garçons ou plus de garçons dans le car des filles ?

54

Bon anniversaire

Dans un bus, il y a 125 passagers.

Est-il certain que deux passagers au moins sont nés la même année ?

55

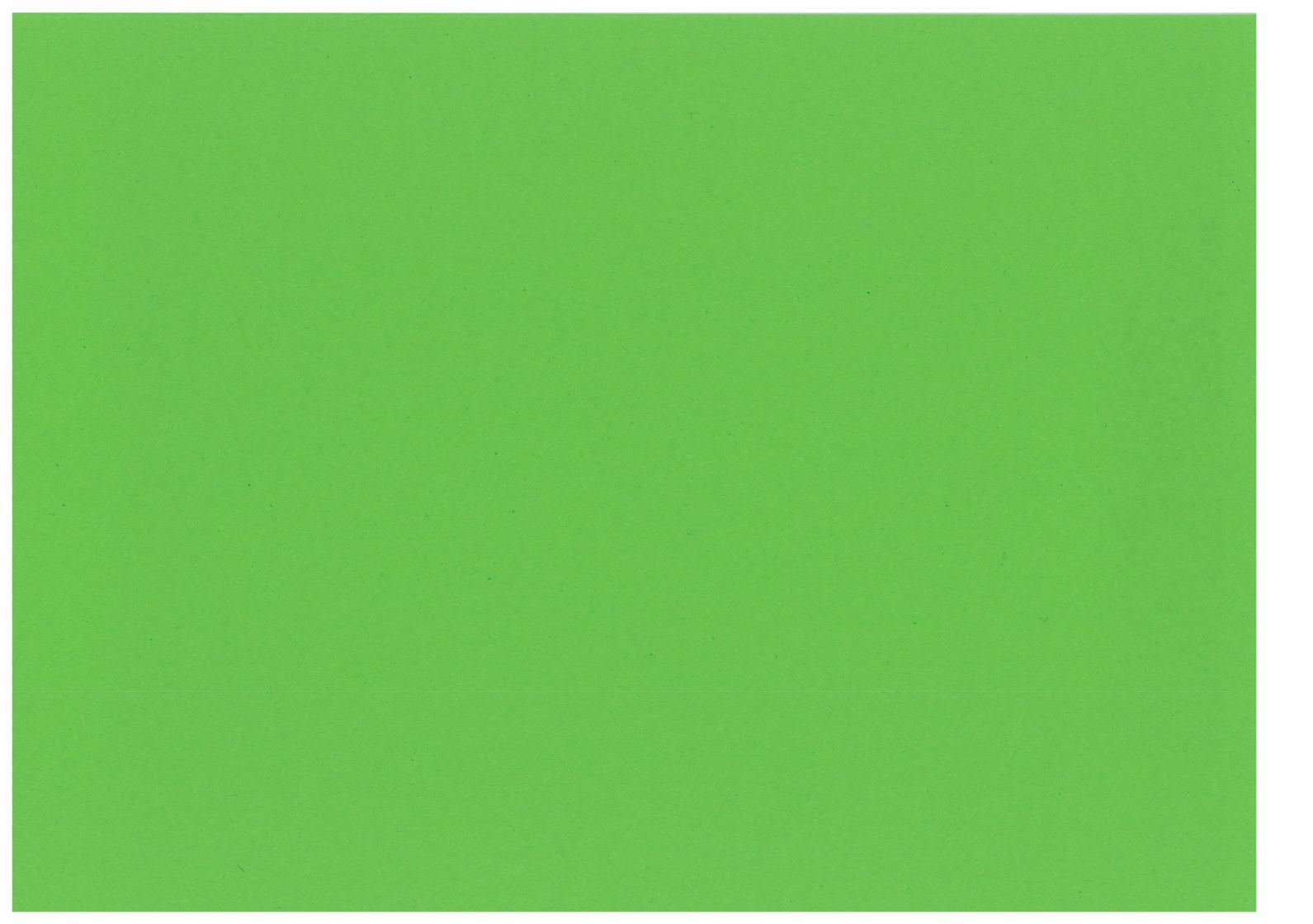
Si l'on écrit sous forme décimale le nombre

$$100^{33} - 33$$

Quelle est la somme des chiffres ?

56

Trouve les deux derniers chiffres de 2^{222}



IREM de LYON

Université Claude Bernard – Lyon 1

Bâtiment Braconnier

43, bd du 11 novembre 1918

69622 Villeurbanne cedex

Tel. 04 72 44 81 24 - 04 72 43 13 82

Fax. 04 72 44 80 67

Site : www.univ-lyon1.fr/IREM

Adresse électronique : Irem@univ-lyon1.fr

ISBN : 2 906 943-57-6

Date première parution : février 2005

Date réédition : Septembre 2011