Bernard ANSELMO
Monique BONNET
Georges COMBIER
Paul PLANCHETTE
Hélène ZUCCHETTA

DE L'ARITHMETIQUE AU COLLEGE ?

INSTITUT de RECHERCHE sur L'ENSEIGNEMENT des MATHEMARIQUES
Académie de Lyon

IREM – 8, rue Claude Bernard – 69622 Villeurbanne cedex – Bât. Darwin (ex 401 D)
Université Claude Bernard Lyon 1 - Téléphone : 04 72 44 81 24 ou 04 72 43 13 82 -Télécopie : 04 72 44 80 67
Adresse électronique : iremlyon@univ-lyon1.fr – Site Internet « http://www.univ-lyon1.fr/IREM »

DE L'ARITHMETIQUE AU COLLEGE ?

Bernard ANSELMO
Monique BONNET
Georges COMBIER
Paul PLANCHETTE
Hélène ZUCCHETTA

Mise en page : Bernard ANSELMO

Illustrations : Paul PLANCHETTE

Lyon, Mars 2004

SOMMAIRE

Pourquoi l'arithmétique au collège ?

Les programmes de collège de 1995 marquent le retour de l'arithmétique. Le document d'accompagnement du programme de la classe de 3^e laisse entrevoir deux raisons. D'une part, l'informatique qui a révolutionné les modes de calcul, fait une large utilisation des algorithmes dans « certains domaines d'application avancée, tel le chiffrage de message (cryptage et décryptage) ». D'autre part, une bonne aisance en calcul mental permet d'opérer rapidement des transformations d'écriture sur les nombres, ce qui est indispensable à la conduite de calculs numériques et algébriques.

A notre avis, **l'arithmétique**, sans occuper une place importante dans les programmes de collège **est sous-jacente à de nombreuses activités qui y sont pratiquées : calcul sur les mesures, calcul littéral, travail sur la proportionnalité.** Si les exigences des programmes sont peu nombreuses, elles nécessitent néanmoins une certaine familiarisation avec les entiers (pour l'essentiel savoir produire une décomposition additive et multiplicative d'un nombre inférieur à 100). Une bonne fréquentation des nombres et notamment des entiers est donc un atout pour réussir. Quant à l'algorithme, c'est un objet mathématique particulier, intrinsèque à l'informatique et il est nécessaire que les élèves se familiarisent avec cet objet, pour lequel l'arithmétique est indispensable.

L'acquisition de techniques et d'algorithmes est nécessaire, mais leur apprentissage ne peut pas se réduire à une acquisition formelle. Pour que les connaissances deviennent opératoires et que les élèves se les approprient, il est essentiel qu'ils puissent leur donner du sens. Donner du sens à une technique, à un algorithme, c'est d'une part connaître le type de problèmes qu'ils permettent de résoudre et d'autre part en comprendre le fonctionnement. L'arithmétique se prête bien à ce type d'activité car c'est un domaine familier à l'élève où les connaissances nécessaires sont peu nombreuses et disponibles.

L'arithmétique permet plus facilement que d'autres domaines des mathématiques de faire vivre la globalité de l'activité mathématique. Il y est en effet possible d'effectuer plusieurs essais, d'établir des conjectures, de les tester et d'engager la recherche d'une preuve, tout cela dans un temps raisonnable. L'arithmétique se prête bien à la mise en place de certaines règles du débat, à l'exploration dès le collège de différents types et niveaux de preuves, et elle permet d'aborder la question des quantificateurs dont l'emploi est souvent implicite.

L'arithmétique est propice à l'initiation à la démonstration. Le fait que dans certaines situations, des exemples même nombreux ne suffisent pas pour conclure, nécessite qu'on élabore une preuve qui soit universelle. Les élèves perçoivent mieux le caractère général de la réponse attendue quand le problème est posé dans le cadre numérique plutôt que géométrique. En effet, les élèves ont acquis une relative aisance avec les entiers naturels alors qu'en géométrie, le statut du dessin sur lequel s'appuie le raisonnement, est en cours de construction.

L'arithmétique, où l'étude exhaustive des différents cas est bien souvent impossible, légitime le recours au calcul littéral. Dans le même ordre d'idées, le travail sur les notions de multiple et de diviseur engage la transformation de l'écriture d'un nombre et par-là, prépare au calcul littéral où le travail est similaire. Suivant ce qu'on veut donner à voir d'un nombre ou d'une expression algébrique, on va en modifier l'écriture :

Ainsi l'écriture 3×176 du nombre 528 montre que ce nombre est multiple de 3, tout comme l'écriture $(x - 5)^2 + 3$ de l'expression $x^2 - 10x + 28$ permet d'affirmer que pour tout x, $x^2 - 10x + 28 \geqslant 3$.

Par ailleurs, dans la conduite d'un calcul littéral, la maîtrise que les élèves ont du calcul sur les nombres et notamment du calcul mental, leur facilite le contrôle des transformations qu'ils opèrent sur les écritures littérales.

Au-delà de l'importance prise par l'arithmétique du fait du développement de l'informatique et par conséquent de l'algorithmie, nous pensons pour les différentes raisons précédemment avancées que son enseignement au collège doit être développé. En faisant travailler nos élèves en arithmétique, nous développons chez eux une meilleure connaissance des nombres, indispensable à la réussite d'études scientifiques, ainsi que des compétences dans les domaines du raisonnement déductif et du calcul littéral qui sont des objectifs du collège et qui occupent une place de choix dans les programmes de lycée.

A propos du calcul

Dans la vie courante, la calculatrice a supplanté le calcul posé. Au collège, traditionnellement les professeurs se plaignent d'un recours systématique à la calculatrice. Toutefois le calcul mental reste performant au quotidien et indispensable dans la scolarité où il constitue une composante essentielle de l'activité mathématique.

Le calcul à la machine

Les documents d'accompagnement des programmes du cycle central recommandent l'usage des calculatrices : « *les nouveaux programmes proposés au collège font apparaître la nécessité d'un travail spécifique avec des calculatrices, tout en veillant à ce que chacun acquière des connaissances suffisantes en calcul écrit et mental. Il s'agit de conduire tous les élèves du cycle central à une maîtrise des calculatrices scientifiques élémentaires…* »

La calculatrice permet à des élèves qui ont des difficultés en calcul de se lancer dans des procédures de résolution de problèmes auxquelles ils n'auraient pas accès sans elle. De plus dans certaines situations les opérations sont nombreuses et les nombres sont grands, le calcul doit donc être assisté. Mais l'usage de la calculatrice ne se limite pas à des travaux de vérification et de calcul « ordinaire ». La calculatrice doit faire l'objet d'activités spécifiques, que ce soit pour assurer la maîtrise de son usage, la mettre au service d'une situation ou encore faire un travail sur valeur exacte et valeur approchée.

L'utilisation de la calculatrice entraîne une moindre sollicitation des techniques opératoires et par conséquent une moindre maîtrise des nombres. Par exemple, quand, en troisième, on aborde le chapitre consacré aux racines carrées, on mesure chez les élèves un déficit important de connaissances portant sur les relations arithmétiques entre les entiers (existences de différentes décompositions multiplicatives d'un nombre). Au collège, ces connaissances sont souvent sollicitées (fractions, proportionnalité, factorisation…). Aussi, les compétences construites à l'école élémentaire concernant le calcul posé et plus particulièrement le calcul mental ont besoin d'être entretenues et développées, et il est nécessaire de les travailler de la sixième à la troisième.

Le calcul mental

Le programme de sixième, dans les documents d'accompagnement, mentionne que : *« ..., le calcul mental portant sur des nombres inférieurs à 100 reste une nécessité. On visera en particulier la maîtrise des tables de multiplication, de l'addition des petits nombres et des relations arithmétiques entre les nombres notamment les multiples de 2, 3, 4, 5, 10, 12, 15 (par exemple 60 c'est 3×20 ou 4×15 ou 6×10 ou 5×12, etc.). »*

« La résolution de problèmes numériques et, plus tard, le calcul algébrique supposent une bonne maîtrise des relations arithmétiques entre les nombres inférieurs à 100. Le professeur entretiendra donc les acquis de l'école élémentaire et conduira de nombreuses activités de calcul mental pour améliorer les performances des élèves dans ce domaine. »

Le calcul mental apparaît donc aujourd'hui comme le moyen privilégié qui permet, en travaillant sur les procédures de calcul, d'acquérir, d'entretenir et de développer ces connaissances :

- il habitue par un entraînement régulier les élèves à « jongler » avec les nombres, les relations arithmétiques existantes entre les nombres, les opérations ;
- il participe à l'apprentissage du raisonnement en rendant nécessaire la mise en relation de techniques apprises et les données du problème qui précède l'élaboration d'une procédure de calcul ;
- il donne à l'élève des moyens pour acquérir une plus grande maîtrise du sens des opérations.

Tout cela concourt à développer une « culture du nombre », utile à l'élève pour se construire une représentation d'un problème et élaborer des procédures de résolution.

La compréhension de certaines notions (relatifs, fractions, proportionnalité, factorisation, racine carrée...) passe par une bonne maîtrise du calcul mental ; par exemple :

- certains élèves qui ont une mauvaise connaissance des diviseurs se donnent pour règle « simplifier c'est diviser le numérateur et le dénominateur par 2 » lorsqu'ils sont amenés à simplifier des fractions ; pour eux, la fraction $\frac{54}{48}$ ne se simplifie pas au delà de $\frac{27}{24}$ et la fraction $\frac{84}{49}$ apparaît comme irréductible.
- en troisième il est difficile d'exprimer $\sqrt{48}$ sous la forme $a\sqrt{b}$ si l'on décompose 48 en 2×24 ou 6×8 sans penser à 3×16.

La pratique du calcul mental permet aux élèves d'être performants dans l'utilisation de ces notions.

De plus sa maîtrise est une aide dans la résolution de problèmes car il permet de faire rapidement des essais et ainsi d'explorer différentes procédures pouvant conduire à la solution. En autorisant des procédures personnelles, il participe à la construction d'une meilleure représentation du problème.

Plus tard il permettra au futur citoyen un traitement rapide de certaines informations chiffrées, l'aidant ainsi à anticiper et à prendre des décisions.

Deux aspects complémentaires du calcul mental

Le calcul mental *automatisé* : c'est l'idée qu'on se fait traditionnellement du calcul mental. Les résultats de certains calculs (tels les tables de multiplication) et certaines techniques (comme la multiplication par 10 ; 100 ; 1000) sont mémorisés et directement mobilisables, la réponse est immédiate. Par exemple, l'élève doit mémoriser que 8 fois 9 font 72 ou que $\frac{3}{4}$ c'est aussi 0,75.

Le calcul mental *réfléchi* : les résultats sont obtenus par une reconstruction personnelle. Les étapes sont plus nombreuses de façon à se faciliter le calcul, on s'appuie sur des propriétés connues et bien maîtrisées et si besoin, on écrit certains calculs et résultats intermédiaires. Un individu donné, pour un calcul donné met en œuvre des procédures qui lui sont spécifiques.

Les procédures sont élaborées à partir des propriétés implicitement ou explicitement connues des opérations (commutativité, distributivité, associativité) et de résultats mémorisés. Le résultat de 6×15 peut être obtenu en effectuant :

- $2 \times 15 \times 3$;
- $10 \times 6 + 5 \times 6$;
- $(15 + 15) \times 3$;
- $6 \times 10 = 60$ et $60 : 2 = 30$ et $60 + 30 = 90$.

Les procédures dépendent aussi des conceptions de certaines notions, ainsi $2 + \frac{12}{13}$ peut être traitée :

- par une « technique » de mise au même dénominateur : $\frac{2}{1} + \frac{12}{13}$;

- en utilisant la fraction partage : 2 c'est 2 unités ; dans une unité il y a 13 treizièmes donc $2 = \frac{26}{13}$ et $\frac{26}{13} + \frac{12}{13} = \frac{38}{13}$;
- en évoquant l'image mentale de la droite graduée, $\frac{12}{13}$ c'est 1 - $\frac{1}{13}$, donc 2 + $\frac{12}{13}$ c'est aussi $3 - \frac{1}{13}$, donc $\frac{38}{13}$.

Enfin les procédures peuvent utiliser des relations arithmétiques déjà automatisées entre les nombres, et pour multiplier 16 par 1,25 par exemple, on peut penser à faire :

- 16 + 16 : 4 ;
- ou 2 × 8 × 125 :100 ;
- ou 160 : 8 ;
- ou 3 × 2 × 1,25 + 10 × 1,25.

Le calcul automatisé demande peu d'effort, si ce n'est de la mémoire et rencontre les limites de la mémoire. Le calcul réfléchi permet d'élargir le champ de calcul. Mais l'enchaînement des procédures peut conduire à une saturation de la mémoire de travail. **Pour la soulager, il est utile d'automatiser certains calculs.**

En permettant à certains élèves de réussir temporairement un calcul mental par des procédures personnelles avant de s'approprier une procédure automatisée, le calcul réfléchi est un moyen de gérer l'hétérogénéité. Au lieu d'enseigner des recettes, le professeur peut s'appuyer sur la diversité des procédures pour permettre à chacun d'enrichir les siennes. Le débat autour des procédures permet de travailler le raisonnement, de construire du sens à propos de certaines propriétés et de développer les connaissances arithmétiques.

Selon le moment de l'apprentissage, l'individu, ou la notion à installer, le résultat d'un même calcul mental peut relever d'un calcul réfléchi ou automatisé. Ces deux formes de calculs évoluent, cohabitent. Le calcul réfléchi se nourrit du calcul automatisé et sa pratique pousse à mémoriser, par souci d'économie, toujours plus de résultats et à devenir ainsi de plus en plus performant en calcul mental.

QUELQUES OUVRAGES TRAITANT DU CALCUL MENTAL

BOULE F. (1994), *Jeux de calcul, cycle des apprentissages fondamentaux et des approfondissements,* Collection Pratique pédagogique, Armand Colin

Les activités d'entretien pour aider à la mémorisation des tables sont bien souvent perçues comme ingrates. L'objet de cet ouvrage, conçu pour l'école primaire et le début du collège, est de rendre attrayant ces exercices numériques indispensables à tous les échelons de la scolarité. Les jeux de calcul proposés dans cet ouvrage permettent aux élèves, seuls ou à plusieurs, de s'exercer et d'utiliser des propriétés numériques importantes : ordres de grandeur, commutativité, associativité, critères de divisibilité...

CHARNAY R., COMBIER G., DUSSUC M.-P. (2003), *Cap maths CM1, le guide des activités pour l'enseignant,* Hatier

CHARNAY R., COMBIER G., DUSSUC M.-P. (2004), *Cap maths CM2, le guide des activités pour l'enseignant,* Hatier

Dans cette collection, le calcul mental fait l'objet, tout au long de l'année, d'activités régulières quotidiennes sous diverses formes : interrogations orales, jeux collectifs ou en groupes, activités d'apprentissage ou d'entraînement... Le travail est conduit dans trois directions :

- la maîtrise des répertoires additifs et multiplicatifs et d'autres calculs qui doivent être exécutés mentalement et automatiquement ;
- l'apprentissage et l'utilisation du calcul réfléchi ;
- une première initiation au calcul approché.

La résolution purement mentale de « petits problèmes » posés oralement complète ces activités.

LETHELLIEUX C. (1993), *Le calcul mental au cycle des approfondissements,* Collection Pratique pédagogique, Armand colin

L'auteur propose tout d'abord des conseils méthodologiques pour animer les séquences de calcul mental, puis une progression accompagnée de commentaires pédagogiques visant à préciser les objectifs, les étapes à franchir et les liens entre les différents thèmes. Cet ouvrage comporte par ailleurs de très nombreux exercices présentés avec différentes procédures utilisées par les élèves, Une série de jeux sur les nombres complète l'ensemble.

CANEY Jacqueline et 5 autres auteurs (1994), *Calcul Mental et Automatismes*, IREM de Clermont Ferrant

Des activités directement utilisables en classe, brièvement analysées par les auteurs. L'originalité de ce travail réside entre autres dans les sujets : calcul mental couvrant tout le collège (dont fractions, proportionnalité, problèmes, en 6^e^, 5^e^, 4^e^ et 3^e^) et des activités d'automatisation mentale en calcul algébrique, équations, calculs d'aires, géométrie en 5^e^, 4^e^, 3^e^.

GRF " Hétérogénéité en sixième ". Grt. ; Ansquer Annie ; Clech Françoise ; Corre Annick ; Gueguen Michèle ; Parant Tanguy ; Bourgeais Sandrine (1997), *le Calcul mental en sixième,* IREM de Brest

Partant du constat que le calcul élémentaire joue un rôle fondamental en mathématiques et que sa maîtrise insuffisante est un facteur important d'hétérogénéité, les auteurs proposent d'y remédier par une pratique régulière du calcul mental en sixième. Le déroulement des séances est décrit ainsi que la conception des fiches de calcul rapide ou d'interrogations de calcul mental qui figurent dans la brochure. Cette dernière se termine par quelques témoignages d'élèves.

L'arithmétique dans les programmes officiels de mathématiques du collège : lecture et commentaires

I Contenus

Dans la rédaction des programmes, arithmétique et algèbre se retrouvent dans la même partie "Travaux numériques".

Explicitement, le mot "arithmétique" n'apparaît que dans le commentaire de la partie numérique sur les "nombres entiers et rationnels" du programme de la classe de 3^{e} . Cela voudrait-il dire que l'arithmétique a été bannie des programmes ? Certainement pas, mais il faut chercher son utilisation dans plusieurs domaines où "connaître les relations entre les nombres entiers" est nécessaire.

Les contenus de programmes concernant les nombres sont repris en détail en annexe mais nous pouvons citer plus particulièrement quelques-uns d'entre eux :

- au cycle d'observation (6^{e}) : techniques opératoires de la multiplication et de la division euclidienne, multiples et diviseurs d'un nombre, critères de divisibilité, fractions, calcul mental avec des nombres inférieurs à 100... L'objectif principal est de faire acquérir aux élèves "une bonne maîtrise des relations arithmétiques entre des nombres inférieurs à 100". La pratique du calcul mental permet la mise en place de relations arithmétiques entre les nombres, en particulier pour les multiples et diviseurs.
- au cycle central (5^{e} et 4^{e}) : simplification de fractions, recherche de multiples communs pour la somme de fractions, distributivité, initiation et pratique du calcul littéral. Pour donner du sens au calcul littéral, nous pourrons proposer des problèmes où interviennent l'écriture de nombres consécutifs, celle de nombres pairs, de multiples.....
- au cycle d'orientation (3^{e}) : "maîtrise des calculs sur les nombres rationnels", calculs avec des racines carrées et des carrés (écrire $75 = 3 \times 25$, reconnaître un carré), fractions irréductibles, distinction entre le calcul exact et le calcul approché, diviseurs communs et PGCD de deux entiers, exemples simples d'algorithmes. Une bonne pratique des nombres est aussi nécessaire pour factoriser et développer.

II Activité mathématique

Le texte "Accompagnement du programme de 3^{e} " propose dans un dernier paragraphe IV Au terme du collège (p101 "Programmes et accompagnement Mathématiques" CNDP Ministère de l'Education Nationale) :

> "En mathématiques, comme dans d'autres disciplines, les élèves ont eu tout au long du collège l'occasion de pratiquer une démarche scientifique : conjecture et expérimentation sur des exemples, recherche de contre-exemples ou construction d'une argumentation, contrôle des résultats et évaluation de leur pertinence en fonction du problème étudié, analyse critique. Les élèves y développent des qualités d'initiative, d'imagination et de créativité, en même temps qu'ils font l'apprentissage de la rigueur et de la recherche de preuves, d'écoute des arguments d'autrui et d'analyse critique. Ils ont rencontré et ont eu l'occasion d'élaborer, au cours de démonstrations, différents types de raisonnement : raisonnement déductif, raisonnement par disjonction des cas lors de l'examen de l'effet de la multiplication sur l'ordre, infirmation par mise en évidence d'un contre-exemple, approche du raisonnement par l'absurde lorsqu'il s'agit de reconnaître si une configuration est une configuration de Thalès ou si un triangle est rectangle."

Les programmes insistent sur la mise en place du raisonnement déductif plus particulièrement dans le domaine géométrique.

Pourtant, le domaine numérique et l'arithmétique se prêtent bien à des problèmes dans lesquels l'élève peut entrer rapidement et où la réponse n'est pas forcément évidente. Dans le domaine des nombres entiers :

> "il est possible de se livrer, à partir d'un nombre limité de connaissances, à une activité mathématique véritable, avec son lot de questions ouvertes, de recherches pleines de surprises, de conclusions dont on parvient à se convaincre". (Finalités et Objectifs Généraux des programmes, p.15)

Cette phrase s'applique particulièrement bien à l'arithmétique.

III Raisonnement

Tout au long du collège, les élèves sont amenés à élaborer différents types de raisonnement, comme il est précisé dans les Accompagnements de 3e. Dans les problèmes où interviennent les nombres et l'arithmétique, nous pouvons citer plus particulièrement quelques exemples de raisonnement :

- Raisonnement déductif par l'utilisation du calcul littéral pour écrire des nombres ou des relations entre des nombres (nombres consécutifs, nombres pairs et impairs, multiples...) Par exemple : démontrer que le carré d'un nombre se terminant par 5, se termine par 25.
- Recherche d'un contre-exemple pour prouver qu'un énoncé général est faux ou différencier une propriété de sa réciproque. Par exemple : "Si un nombre est multiple de 6, alors il est multiple de 3" est une proposition vraie mais la réciproque est fausse.
- Raisonnement par disjonction des cas dans des problèmes de comptage ou de divisibilité. Par exemple, "la somme de deux multiples de 5 est un multiple de 5" peut se traiter à partir du dernier chiffre du multiple de 5 (0 ou 5) et en envisageant les différentes sommes possibles.
- Une approche du raisonnement par l'absurde, par exemple en 3e pour prouver que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

La pratique d'une démarche scientifique et en particulier la recherche de conjectures et l'expérimentation sur des exemples nous amènent à ajouter à cette liste le raisonnement inductif. Il intervient quand on reconnaît l'existence d'une même relation à partir de plusieurs cas particuliers et qu'on la généralise à l'ensemble des cas souvent sous forme littérale. Ainsi, le problème « A partir des calculs $12^2 - 11^2$ et $13^2 - 12^2$, émettez une conjecture sur la différence des carrés de deux entiers consécutifs », fait intervenir une "expérience" sur des cas particuliers avec peut-être un test avec des grands nombres pour établir la loi : "la différence des carrés de deux nombres consécutifs est égale à la somme de ces deux nombres". Bien sûr, la résolution de ce problème ne sera satisfaisante du point de vue mathématique qu'à condition de fournir une preuve.

Signalons qu'un même problème peut amener, suivant les élèves et le niveau de la classe, à mettre en évidence plusieurs types de raisonnement et plusieurs types de preuve. Par exemple, dans le problème "Le carré d'un nombre impair peut-il être pair ?", le mathématicien écrira $(2n + 1)^2$ (raisonnement déductif) mais l'élève, lui, pourra envisager plusieurs exemples pour trouver et se convaincre de la réponse (raisonnement inductif). Ensuite, il pourra examiner les cinq chiffres par lequel se termine un nombre impair et envisager chacun des cas de la multiplication du nombre par lui-même (disjonction des cas).

Extraits des programmes officiels de mathématiques du collège sur le thème de l'arithmétique

Sans prétendre être exhaustif, nous avons relevé dans différentes parties (objectifs généraux, contenus, accompagnements...) du programme de mathématiques du collège, tout ce qui nous semble utiliser l'arithmétique. Notons que, dans les Accompagnements des programmes, nous trouverons plus de précisions concernant l'arithmétique que dans la partie Contenus des programmes.

Les numéros des pages indiquées sont celles de la brochure "Programmes et accompagnement Mathématiques" CNDP Ministère de l'Education Nationale réédition juillet 1999

Programme de 6^{e}

III Explication des contenus

2.1 Nombres entiers et décimaux : écriture et opérations (p 24)

Techniques opératoires

COMPÉTENCES EXIGIBLES	COMMENTAIRES
Calculer le quotient et le reste de la division euclidienne d'un nombre entier par un nombre entier d'un ou deux chiffres.	La division est une opération en cours d'acquisition en début de collège. On la reliera aux problèmes d'encadrement d'un entier (ou d'un décimal) par des multiples d'un entier et on entraînera les élèves à donner aussi bien l'approximation entière d'un quotient par excès que par défaut. L'objectif principal est l'acquisition du sens de l'opération, au travers d'une pratique et de diverses utilisations.

2.2 Quotient de deux nombres entiers (p 25)

Ecriture fractionnaire

COMPÉTENCES EXIGIBLES	COMMENTAIRES
Reconnaître, dans des cas simples, que deux écritures fractionnaires différentes sont celles d'un même nombre.	On dégagera et on utilisera le fait qu'un quotient ne change pas quand on multiplie son numérateur et son dénominateur par un même nombre. A l'occasion de simplifications, on pourra faire intervenir des critères de divisibilité, sans nécessairement les justifier.

Accompagnement du programme de 6^{e} :

I Conception générale de l'enseignement

E.1. Calculatrices (p 31)

Dans ce contexte, le calcul mental portant sur les nombres inférieurs à 100 reste une nécessité. On visera en particulier la maîtrise des tables de multiplication, de l'addition des petits nombres et des relations arithmétiques entre les nombres notamment les multiples de 2, 3, 4, 5, 10, 12, 15 (par exemple 60 c'est 3×20 ou 4×15 ou 6×10 ou 5×12, etc.)

II. Expression et maîtrise de la langue en mathématiques

A. Vocabulaire, notation et concepts (p 32)

Les élèves doivent être capables d'employer correctement le vocabulaire de l'arithmétique,...

V. Activités numériques

A. Calcul mental et ordre de grandeur (p 33)

La résolution de problèmes numériques et, plus tard, le calcul algébrique supposent une bonne maîtrise des relations arithmétiques entre les nombres inférieurs à 100. Le professeur entretiendra donc les acquis de l'école élémentaire et conduira de nombreuses activités de calcul mental pour améliorer les performances des élèves dans ce domaine.

Programmes du cycle central

III Explicitations des contenus de la classe de 5e

2. Nombres en écriture fractionnaire (p 47)

Comparaison, addition et soustraction, les dénominateurs étant égaux ou multiples.

COMPÉTENCES EXIGIBLES	COMMENTAIRES
Comparer, additionner et soustraire deux nombres en écriture fractionnaire dans le cas où les dénominateurs sont les mêmes et dans le cas où le dénominateur de l'un est un multiple du dénominateur de l'autre. *Modifier la taille de la police*	La classe de 5e s'inscrit, pour le calcul avec des écritures fractionnaires, dans un processus prévu sur toute la durée du collège. En 6e , le produit et la somme de fractions n'ont été envisagés qu'à propos de nombres décimaux. La simplification y a été abordée et pourra donc être utilisée en 5e ; ce sera l'occasion d'obtenir des fractions irréductibles mais aucune compétence n'est exigible à ce sujet. La systématisation de la réduction au même dénominateur est traitée en 4e .

III Explicitations des contenus de la classe de 4e

1. Nombres et calcul numérique (p 55)

Opérations sur les nombres relatifs en écriture décimale ou fractionnaire (non nécessairement simplifiée)

COMPÉTENCES EXIGIBLES	COMMENTAIRES
Calculer la somme de nombres relatifs en écriture fractionnaire *Modifier la taille de la police*	L'addition de deux nombres relatifs en écriture fractionnaire peut demander un travail sur la recherche de multiples communs à deux ou plusieurs nombres entiers. La recherche du plus petit commun multiple pour l'obtention d'un dénominateur commun et celle du plus grand diviseur commun pour l'obtention de la forme irréductible ne sont pas exigibles.

Accompagnement des programmes du cycle central

Première partie

Nombres et calcul numérique (p 63)

Les questions posées par le calcul sur les nombres fractionnaires amènent à élargir le travail effectué à propos de la division en classe de 6e, classe où le calcul du quotient et du reste dans la division euclidienne d'un entier par un autre entier, à un ou deux chiffres, est une compétence exigible. On travaille, au cycle central, sur multiples et diviseurs et, au passage, sur des critères de divisibilité, que ce soit à propos des fractions ou à propos de la recherche d'un ordre de grandeur. On prépare ainsi le travail, pour la classe de 3e, sur les fractions irréductibles; en particulier, on maintient les acquis de 6e sur la division euclidienne de a par b, en vue de la recherche de leur plus grand commun diviseur en classe de 3e, en exploitant la représentation, sur la droite, des différents multiples de b.

Les commentaires du programme insistent sur le maintien, tout au long du collège, de l'entraînement à la pratique des diverses opérations à la main, mentalement et à la machine. En particulier, le calcul mental permet la consolidation de connaissances, dont celle des tables de multiplication, ainsi que le contrôle de l'utilisation de la calculatrice, en déterminant l'ordre de grandeur du résultat.

Programmes de 3^e^

I Présentation (p 75)

Le programme de la classe de 3^{e} a pour objectif, dans le domaine numérique,

- d'assurer la maîtrise des calculs sur les nombres rationnels,
- d'amorcer les calculs sur les radicaux,
- de faire une première synthèse sur les nombres avec un éclairage historique et une mise en valeur de processus algorithmiques,
- de compléter les bases du calcul littéral et d'approcher le concept de fonction;

II Explicitations des contenus de la classe de 3^{e}
B Travaux numériques (p 81, 83)

CONTENUS	COMPETENCES EXIGIBLES	COMMENTAIRES
4. Nombres entiers et rationnels		Cette partie d'arithmétique permet une première synthèse sur les nombres, intéressante tant du point de vue de l'histoire des mathématiques que pour la culture générale des élèves.
Diviseurs communs à deux entiers	Déterminer si deux entiers donnés sont premiers entre eux.	
Fractions irréductibles	Savoir qu'une fraction est dite irréductible si son numérateur et son dénominateur sont premiers entre eux. Simplifier une fraction donnée pour la rendre irréductible.	Depuis la classe de cinquième, les élèves ont pris l'habitude de simplifier les écritures fractionnaires: la factorisation du numérateur et du dénominateur se fait grâce aux critères de divisibilité et à la pratique du calcul mental. Reste à savoir si la fraction obtenue est irréductible ou non. On remarque que la somme et la différence de deux multiples d'un nombre entier sont eux-mêmes multiples de cet entier. On construit alors un algorithme, celui d'Euclide ou un autre, qui, donnant le PGCD de deux nombres entiers, permet de répondre à la question dans tous les cas. Les activités proposées ne nécessitent donc pas le recours aux nombres premiers. Les tableurs et les logiciels de calcul formel peuvent, sur ce sujet être exploités avec profit.

Accompagnement des programmes de 3^e :

I Contenus de la classe de 3^e

B. Calcul numérique (p 94-95)

En 3^e, les élèves affinent leur maîtrise des fractions et abordent les premiers calculs sur les radicaux. Ce travail peut donner lieu à une synthèse intéressante sur les nombres rencontrés depuis le début de leur scolarité.
Dès la classe de 6^e, les élèves ont été amenés à travailler sur des nombres en écriture fractionnaire et en particulier sur des quotients d'entiers. Ils ont ainsi utilisé des nombres (rationnels) exprimés sous diverses formes: forme fractionnaire (réduite ou non) ou forme décimale (limitée ou non); ils ont pu constater que certains d'entre eux sont des entiers, d'autres des décimaux non entiers et d'autres encore ni des entiers ni des décimaux.
Les changements d'écriture pour la forme fractionnaire ou les passages de la forme fractionnaire à la forme décimale permettent d'assurer un lien avec la division euclidienne et la division décimale, exacte ou approchée. Les différentes significations de la division (recherche de la valeur d'une part ou du nombre de parts) seront à nouveau mises en évidence en fonction des situations étudiées. A cette occasion, on soulignera les liens entre des écritures comme $17 = 5 \times 3 + 2$; $\frac{17}{5} = 3 + \frac{2}{5}$; $\frac{17}{3} = 5 + \frac{2}{3}$
Les élèves ont déjà eu l'occasion de simplifier les écritures fractionnaires, mais sans disposer de critères pour déterminer si la fraction obtenue est irréductible ou non. Les problèmes proposés à ce sujet en 3^e sont l'occasion d'enrichir les connaissances des élèves en arithmétique. Après avoir travaillé au cycle central sur les notions de multiples et de diviseurs, il est nécessaire de savoir si deux entiers sont ou non premiers entre eux. Pour l'obtention du PGCD de deux entiers, le programme préconise l'algorithme d'Euclide ou éventuellement un algorithme de différence - la répétition de la transformation qui à un couple d'entiers (a, b) fait correspondre le couple constitué de leur minimum et de leur écart, par exemple qui à (285,630) fait correspondre (285,345) - plutôt que le recours à la décomposition en facteurs premiers.
Il n'est pas inutile de rappeler que l'arithmétique avait été bannie des programmes de mathématique du collège précisément à cause de l'abus du recours à la décomposition en produit de facteurs premiers. Certes les facteurs premiers de petits nombres, 924 ou 1999 pour donner des exemples, s'obtiennent facilement. Mais il n'en est plus du tout de même pour de plus grands nombres, dont l'ordinateur rend aujourd'hui naturelle la considération. C'est ainsi qu'il sera par exemple beaucoup plus facile d'établir directement que les deux nombres 12345678910111213 et 10000000000000007 ne sont pas premiers entre eux que d'essayer de trouver leur décomposition en facteurs premiers. Certains domaines d'application avancée, tel le chiffrage de messages (cryptage et décryptage), s'appuient largement sur la difficulté pratique d'obtention de certaines décompositions.
Il convient ici de souligner que, dans toutes les activités, la pratique du calcul mental doit être prédominante. Ainsi pour passer de la forme $3 + \frac{2}{7}$ à la forme $\frac{23}{7}$, les élèves devraient être capables de fournir la réponse directement, sans passer par la forme $\frac{3}{1}$ pour exprimer le nombre 3 et sans écrire explicitement les deux fractions avec le même dénominateur. De la même façon, la réduction d'une écriture comme $\frac{36}{48}$ doit pouvoir être réalisée rapidement (en une ou deux étapes) sans recourir à des décompositions explicites de 36 et 48 en facteurs premiers, ni à un algorithme pour calculer le PGCD de deux nombres : l'utilisation consciente de la seule égalité $\frac{ka}{kb} = \frac{a}{b}$ (éventuellement plusieurs fois) est suffisante.

La synthèse sur les nombres rencontrés au collège permet par ailleurs de donner un nouvel éclairage sur les nombres rationnels, en mettant en évidence le fait que tous les nombres ne sont pas rationnels.

DES ACTIVITES POUR LA CLASSE

PRESENTATION

Nous pratiquons un certain nombre d'activités autour de l'arithmétique. Nous vous en présentons ici quelques unes, accompagnées de commentaires sur la façon dont cela peut se passer en classe. Ces activités peuvent être reprises, modifiées, utilisées différemment : ce sont des pistes pour pratiquer de l'arithmétique à tous les niveaux du collège.

ACTIVITES	*NIVEAU*	*TYPES D'ACTIVITE*	*OBJECTIFS*
L'IMPRIMEUR	6^e	***Problème de recherche***	• utiliser la numération ; • différencier chiffre et nombre ; • construire un algorithme et le faire fonctionner.
JEU DE LA COURSE A 20	6^e	***Problème de recherche***	• élaborer une stratégie gagnante ; • construire un algorithme et le faire fonctionner ; • reconnaître et utiliser la régularité d'une suite de nombres.
	3^e	***Problème de réinvestissement***	• revoir la notion de multiple « en acte » ; • produire des écritures littérales de multiples d'un nombre ou d'une somme de multiples et d'un entier..
JEU DE PENELOPE	6^e	***Problème de réinvestissement***	• entretenir et développer la connaissance des tables ; • envisager un nombre comme un produit de plusieurs facteurs ; • obtenir plusieurs décompositions multiplicatives d'un même entier .
LES NOMBRES INTERESSANTS	3^e	***Problème de réinvestissement***	• utiliser les décompositions multiplicatives d'un nombre pour exprimer $\sqrt{n}$ où n est un entier, sous la forme $a\sqrt{b}$ avec a et b entiers ; • faire prendre conscience que cette transformation n'est possible que pour certains nombres ; • élaborer une stratégie en vue de simplifier l'écriture d'une racine carrée.
LES NOMBRES RECTANGLES	6^e ou 5^e	***Apprentissage de nouvelles notions***	• produire des décompositions multiplicatives d'un entier ; • revoir la notion de multiple ; • introduire la notion de diviseur d'un entier.
ARITHMETIQUE ET RAISONNEMENT DEDUCTIF	5^e ou 4^e	***Apprentissage de nouvelles notions***	• utiliser les notions de multiple, diviseur et les critères de divisibilité ; • donner du sens à la notion de justification ; • découvrir différents types de preuves dont le contre-exemple ; • introduire le calcul littéral comme un outil efficace pour prouver.
LA CONJECTURE DE SYRACUSE	5^e ou 4^e	***Problème de recherche***	• utiliser un algorithme ; • émettre une conjecture et chercher à vérifier sa validité ; • utiliser les notions d'exemple, de contre-exemple, de preuve ; • prendre conscience que les mathématiques constituent une science vivante.

CHERCHER A ETABLIR UN ALGORITHME : L'IMPRIMEUR

D'après une activité de *Apprentissages numériques et résolution de problèmes,* CM2, ERMEL-INRP, chez HATIER

C'est un problème de recherche qui peut être l'occasion de mener un premier travail de groupe en sixième et d'aborder des notions d'ordre méthodologique.
La construction de cet algorithme n'est pas l'objet d'une étude pour elle-même.

Objectifs :
- utiliser la numération ;
- différencier chiffres et nombres ;
- construire un algorithme et le faire fonctionner.

Matériel :
- le professeur doit avoir à sa disposition un livre et un dictionnaire ;
- les élèves peuvent utiliser leur cahier de brouillon ;
- la calculatrice est autorisée.

Déroulement :

1° séance :
1/ Le professeur montre un livre comportant par exemple 256 pages numérotées[1] aux élèves et leur dit « Il faudra trouver une méthode qui permet de trouver combien de chiffres ont été tapés pour numéroter les pages de ce livre, ou d'un autre livre par exemple un dictionnaire » .
Les élèves ont parfois du mal à s'approprier immédiatement le problème, le professeur propose alors de numéroter les pages d'un cahier de brouillon par exemple et de compter les chiffres utilisés.
2/ Après ce premier exemple dont le but est la compréhension de l'énoncé et si c'est nécessaire après d'autres explications, les élèves recherchent individuellement une solution sur leur cahier de brouillon.
3/ Le travail en groupes de 3 ou 4 est ensuite organisé avec comme consigne ; « Il s'agit de vous mettre d'accord sur le résultat, puis sur une méthode qui permet d'y parvenir . Vous rédigerez votre méthode sur une feuille et l'un d'entre vous la présentera à la classe ».
Certains groupes proposent rapidement des démarches erronées du type 256 x 3 ou 256 : 3. Pour éviter que ces élèves arrêtent de chercher, l'enseignant relance dans les groupes concernés la recherche avec des questions du type : « Comment sait-on que toutes les pages ont trois chiffres ? Il y a donc moins de chiffres que de pages ?» pour amener les élèves à ré-envisager le problème.

A la fin de la première séance le professeur recense les résultats au tableau et collecte les productions.

2° séance :
1/ Entre les deux séances, le professeur sélectionne 4 productions parmi celles proposées par les élèves afin d'organiser un débat centré sur la méthode qui a permis d'obtenir le résultat.

[1] Dans la pratique les pages des livres ne sont pas toujours numérotées à partir de la première page, mais on considérera qu'elles le sont.

Le but de ce débat est de mettre en évidence un ou plusieurs algorithmes permettant de résoudre le problème. Il est important de présenter, sans prendre parti, deux méthodes fausses ou inabouties parmi les quatre proposées afin que le débat ait lieu dans la classe.

Voici les méthodes que l'on peut rencontrer :

- Méthodes fausses

1. Il peut encore subsister des 256 x 3 ; il faudra reprendre l'exemple du cahier de brouillon.
2. On peut trouver 200 x 3 + 50 x 2 + 6 = 706 ; il suffit de prendre le suivant qui donne 707 chiffres alors qu'on en a utilisé 3 de plus.
3. La procédure de décomposition en suites de nombres de 1 chiffre, de deux chiffres, de trois chiffres est bien employée mais il y a des erreurs dans le comptage des nombres par famille de nombres : par exemple 89 nombres de deux chiffres au lieu de 90, et surtout 156 nombres de trois chiffres au lieu de 157 (problème d'intervalle). On peut alors réciter la comptine 100 (un), 101 (il y en a deux), 102 (il y en a trois) etc.
4. L'écriture de tous les nombres est commencée, mais devant l'ampleur de la tâche, certains élèves ont pensé à la proportionnalité : jusqu'à 128 il faut 276 chiffres donc pour 256 il en faut 276 × 2. On peut alors proposer « pour numéroter de 1 à 9 il faut 9 chiffres, et pour numéroter jusqu'à18 ? ». Les élèves peuvent écrire tous les chiffres.
5. L'écriture de la liste de tous les nombres est complète mais il y a des erreurs de comptage.

- Méthodes conduisant au bon résultat :

1. Tous les nombres sont écrits et les élèves ont procédé par comptage, mais la méthode est trop longue.
2. Pour compter les chiffres jusqu'à 256
   de 1 à 9 on a 9 chiffres
   de 10 à 19 on a 20 chiffres
   de 20 à .... et cela de dizaines en dizaines
   puis à partir de 100 on ajoute un chiffre de plus…
3. Pour compter les chiffres jusqu'à 256
   de 1 à 9 on a 9 chiffres
   de 10 à 99 on a 180 chiffres (2 x 90)
   de 100 à 256 on a 471 chiffres (3 x 157)
4. Pour compter les chiffres jusqu'à 256
   on fait (256-99) x 3 pour les nombres de trois chiffres
   à ce résultat on ajoute les chiffres des nombres de deux chiffres (90 x 2)
   puis les 9 chiffres des nombres de un chiffre.

Les méthodes ci-dessus n'apparaissent pas forcément toutes dans une même classe. Les méthodes justes 3 et 4 semblent identiques mais pour les élèves elles sont différentes : beaucoup préfère commencer par compter les nombres de 3 chiffres plutôt que ceux de 1 chiffre.

Les méthodes sélectionnées sont présentées une à une. Pour chaque production, la classe est invitée à se prononcer sur la validité des différentes étapes.
Les méthodes fausses sont réfutées par l'argumentation des élèves ou par recours à l'exemple introductif du cahier de brouillon.
Dans le cas d'une méthode inaboutie, après avoir pointé les réussites, les élèves d'eux-mêmes ou avec l'aide du professeur complètent la démarche.

2/ A la fin de la deuxième séance le professeur propose de noter sur le cahier un ou deux exemples de nombres à trois ou quatre chiffres :

Dans un livre de 1853 pages

1853-999=854 il y a 854 nombres à 4 chiffres

854 x 4 =	*3 416*	*il y a 3416 chiffres pour écrire les nombres à 4 chiffres*
900 x 3 =	*2 700*	*il y a 2700 chiffres pour écrire les nombres à 3 chiffres*
90 x 2 =	*180*	*il y a 180 chiffres pour écrire les nombres à 2 chiffres*
9 x 1 =	*9*	*il y a 9 chiffres pour écrire les nombres à 1 chiffre*
	6 305	

- On sait maintenant que :
  - *Si on prend tous les nombres de 1 chiffre, il y en a 9 ;*
  - *si on prend tous les nombres de 2 chiffres, il y en a 90 ;*
  - *si on prend tous les nombres de 3 chiffres, il y en a 900 ...*

3/ Travail à la maison : faire fonctionner l'algorithme sur quelques exemples du type :
Combien y a-t-il fallu de chiffres pour numéroter les 656 pages de « Harry Potter et la Coupe de Feu » ?

Commentaires :

- Cette situation permet d'aborder les révisions sur la numération des entiers de manière différente et de bien différencier chiffre et nombre.
- C'est un moment fort au cours duquel sont établies les règles de fonctionnement de la classe pendant un travail de groupe et pendant le débat (qualité de l'écoute, validité des arguments…).
- C'est aussi l'occasion de travailler la recherche de problème (possibilité de faire des essais, diversités des méthodes de résolution, nécessité de vérifier ...).
- Suivant les classes ou les années, le nombre de méthodes justes trouvées par les élèves est très variable. Il se peut que dans une classe aucune méthode juste ne soit trouvée, le professeur devra alors veiller à invalider les méthodes fausses, à relancer la recherche, et sera peut être conduit à proposer une solution lui-même.
- Lors des 4 ou 5 séances qui suivent on peut faire fonctionner cet algorithme. Les élèves n'ont d'ailleurs pas trop de mal à le retenir et si certains ne s'en souviennent pas il y en a toujours quelques-uns pour le rappeler à la classe. Il ne s'agit pas pour autant d'en faire un objet d'enseignement ni d'évaluation notée.
- Cette activité, en tant que problème de recherche, permet de mettre en œuvre certaines compétences et en particulier celle de décomposer un problème complexe en sous problèmes. Cependant, comme souvent dans les problèmes de recherche, l'algorithme pour les élèves est très contextualisé et ils ont du mal à le reproduire quand on change de contexte comme dans l'exercice : « Combien de fois faut-il taper sur les touches numériques d'un ordinateur pour écrire tous les nombres de 1 à 2787 ? ».
- Comme prolongement, on peut proposer le problème inverse : « On a utilisé 663 chiffres pour numéroter toutes les pages d'un livre. Combien ce livre a-t-il de pages ? »

JEU DE LA COURSE A 20

Règle du jeu de la course à 20 :

Ce jeu se joue à deux. Le premier joueur est tiré au sort, il annonce 1 ou 2 comme nombre de départ. Puis l'autre joueur ajoute 1 ou 2 au nombre annoncé par le premier joueur et annonce son résultat. Ensuite, chaque joueur, à son tour, choisit un nombre 1 ou 2, l'ajoute au résultat précédent et annonce le nouveau résultat. Le joueur qui annonce 20 a gagné.

Remarque : On peut proposer une nouvelle partie où le second joueur commence.
On peut aussi décider d'une autre règle en disant 1, 2 ou 3 au lieu de 1 ou 2.

Origine du jeu :

Le jeu de la course à 20 est inspiré du jeu de NIM à un seul tas qui se joue à deux avec des petits objets comme des allumettes : on enlève, chacun à son tour, un deux ou trois objets, le gagnant est celui qui ramasse le dernier objet. Il semblerait que ce jeu fut très apprécié durant des siècles jusqu'à ce que le mathématicien Charles Bouton en 1901 démontre que tout se réduisait à une formule mathématique qui assurait la victoire à celui qui la connaissait.

Eléments d'analyse dans la recherche d'une stratégie gagnante :

Nous analyserons, de façon succincte, le résultat de la recherche d'une stratégie gagnante dans deux cas particuliers puis dans le cas général.

Nous appelons ici n le nombre à atteindre et p le plus grand nombre que l'on peut énoncer et ajouter à chaque tour (nous appellerons "pas" un nombre entier compris entre 1 et p). Ainsi, nous avons d'une part $n = 20$ et $p = 3$ (pas 1, 2 ou 3) et d'autre part $n = 20$ et $p = 2$ (pas 1 ou 2).

La recherche d'une stratégie gagnante peut passer par la mise en évidence d'une suite de nombres qu'il faut énoncer pour être sûr de dire 20. Cette suite est en général trouvée à rebours par un raisonnement qui prévoit les réponses possibles de l'adversaire (pour que je dise tel nombre x, il faut que l'adversaire ait dit $(x - 1)$ ou $(x - 2)$ ou ....$(x - p)$). Cette suite de nombres est plus ou moins facile à déterminer suivant la valeur de p donnée au départ ($n = 20$ étant fixé).
Pour faciliter la lecture, nous appellerons "$p = 3$" la règle où l'on ajoute 1, 2 ou 3 au résultat précédent et "$p = 2$" la règle où l'on ajoute 1 ou 2 au résultat précédent.

Dans le cas de la règle "$p = 3$", la suite des nombres recherchée est : 4, 8, 12 et 16 (celle des multiples de 4). Par conséquent, comme 20 est un multiple de 4, la stratégie gagnante consiste à jouer en second et à ajouter le complément à 4 du pas utilisé par l'adversaire.

Dans le cas de la règle "$p = 2$", la suite de nombres qu'il faut dire est : 2, 5, 8, 11, 14 et 17 pour être sûr de dire 20. Bien que les nombres aillent de 3 en 3, on ne trouve pas les multiples de 3 car 20 n'est pas multiple de 3. Il faut donc diviser 20 par 3 pour savoir par quel nombre commencer (ici 2). La stratégie gagnante consiste à commencer en annonçant 2 puis à ajouter le complément à 3 du pas utilisé par l'adversaire, c'est-à-dire énoncer tous les nombres de la forme $3 \times k + 2$.

On verra que modifier la règle n'est pas anodin pour les joueurs, car la règle "$p = 2$" achoppe sur le fait que 20 n'est pas un multiple de 3. La découverte de la suite des nombres est plus ou moins aisée suivant le choix de la valeur du pas : en effet reconnaître et caractériser sur les premiers termes de la suite à rebours des multiples de 4 est plus facile que de caractériser la suite $3 \times k + 2$.

Dans le cas plus général, on ne peut pas énoncer la suite des nombres, il faut la caractériser par des relations.

Pour être le gagnant, il faut annoncer n, ce qui nécessite que l'adversaire ait annoncé un nombre compris entre $(n - 1)$ et $(n - p)$. Le gagnant aura donc annoncé $n - (p + 1)$ le coup précédent. En répétant ce raisonnement, on reconnaît qu'il faut énoncer tous les $n - i \times (p + 1)$ positifs avec i entier pour gagner. Le reste de la division de n par $(p + 1)$ est alors le premier nombre de la suite.

Par conséquent, le nombre à atteindre n s'écrit sous la forme :

$$\boxed{n = k \times (p + 1) + r \text{ avec } 0 \leqslant r \leqslant p\ .}$$

Donc, pour mettre en œuvre la stratégie gagnante :

- si r est différent de 0,
  le premier nombre est r, puis $r + (p + 1)$, puis $r + 2 \times (p + 1)$ ... $r + k \times (p + 1)$, soit les termes consécutifs d'une suite arithmétique de premier terme r et de raison $p + 1$, le joueur gagnant doit nécessairement engager la partie en annonçant r.

- si r est égal à 0,
  la suite correspond aux multiples de $(p + 1)$,
  comme on ne peut pas commencer par 0, il faut être le deuxième joueur à engager la partie pour gagner en annonçant $p + 1$.

- Ensuite, dans les deux cas, il suffit de repérer ce que l'adversaire ajoute et d'ajouter soi-même le complément à $p + 1$.

Nous décrirons dans la suite deux mises en place différentes une en classe de 6^e^ et l'autre en classe de 3^e^.

JEU DE LA COURSE A 20 EN SIXIEME

C'est un problème de recherche en sixième.

Objectifs :
- élaborer une stratégie gagnante ;
- construire un algorithme et le faire fonctionner ;
- reconnaître et utiliser la régularité d'une suite de nombres.

Matériel :
- une feuille (ou le tableau) pour écrire les résultats intermédiaires.
- (*On veut garder ainsi une trace des différents jeux. Ce jeu peut se faire seulement à l'oral mais alors l'objectif « élaborer une stratégie gagnante » est plus difficile voire impossible à atteindre).*

Déroulement possible :

1/ Les élèves sont répartis en groupes hétérogènes.
Le professeur annonce : « *l'objectif du travail de groupe est d'élaborer une stratégie gagnante pour un jeu dont la règle va vous être expliquée. Cette stratégie existe bien, vous devrez pouvoir gagner et arriver à expliquer comment vous avez fait pour trouver la stratégie. Je choisirai au hasard un élève pour représenter le groupe. Par conséquent il faut que dans chaque groupe la mise en place de la stratégie choisie soit comprise par tous et c'est celle-ci qui devra être utilisée dans une partie entre deux élèves de deux groupes différents.* ».
Pour expliquer la règle " p = 3 ", le professeur choisit 2 élèves dans deux groupes différents, qui viennent au tableau :
« *On part de 0. Chaque élève annonce à son tour un nombre choisi entre 1, 2 ou 3 et l'ajoute au nombre précédent en l'écrivant dans sa colonne au tableau ; le premier qui arrive à 20 a gagné.* ».

2/ Dans les groupes, la règle étant comprise, la discussion s'amorce.
Le professeur choisit alors deux nouveaux élèves en précisant :
« *Vous devez appliquer la stratégie mise en place dans votre groupe et la mettre à l'épreuve. Vous pourrez l'améliorer ou la changer après de nouvelles discussions.* ».
On pourra jouer quelques parties pour préciser la règle de la course à 20 et la présentation des résultats. Puis on pourra donner un temps de réflexion pour trouver « *comment être sûr de gagner ?* ». Les parties jouées restent au tableau. Si aucune stratégie n'apparaît au bout de quelques parties (au moins 8), susciter la réflexion sur les parties jouées en demandant par exemple de repérer : « *A quel moment pensez-vous que votre camarade aurait pu mieux jouer ?* ».
Aucune relance ne doit suggérer une recherche de liste de nombres, on risquerait de dénaturer la recherche.
Le professeur décide d'arrêter le déroulement des parties quand tous les élèves sont passés ou quand un élève réussit à mettre en pratique la stratégie de son groupe et à l'expliciter .

Suivant le temps restant, la règle "p = 2", est proposée à faire à la maison ou en classe :
« *Le premier arrivé à 20 a gagné. Trouver la nouvelle stratégie gagnante en ajoutant seulement 1 ou 2 et trouver qui doit commencer pour gagner.* ».

Commentaires :

- Le choix d'ajouter 1, 2, ou 3 a été fait pour permettre la reconnaissance des multiples de 4 dans une classe en difficulté.

- Il apparaît très vite que 16 est un passage obligé pour gagner mais les élèves ne poussent pas la réflexion à la recherche d'autres nombres (12, 8, 4 et être le deuxième à jouer).

- Pour le travail suivant (choix d'ajouter 1 ou 2), beaucoup d'élèves pensent qu'ils trouveront des multiples de 3.
  Même avec un raisonnement à rebours (comme pour dire 20, il faut avoir dit 17, pour dire 17, il faut avoir dit 14...) beaucoup d'élèves sont en difficulté pour établir plusieurs fois le même raisonnement. La confrontation avec un élève qui a trouvé la liste complète leur fait prendre conscience de leur stratégie incomplète.
  Ensuite, caractériser cette série de nombres (ils vont de 3 en 3 mais ce ne sont pas les multiples de 3 !) va à l'encontre de l'idée qu'ils ont très souvent des multiples d'un nombre. Les élèves ont beaucoup de peine à comprendre que le nombre de départ est très important (ici 2 pour gagner).

- Pour le professeur, un point délicat est de faire admettre et comprendre qu'il existe une stratégie gagnante depuis le début et que ce jeu n'est pas un jeu de hasard : les élèves préfèrent jouer pour jouer plutôt que jouer et réfléchir !

- Les parties précédentes, qui restent au tableau, ne sont pas vraiment observées et utilisées comme appui pour la réflexion.

- La discussion dans les groupes est très vive car les élèves veulent être les gagnants. Les uns sont surpris de s'apercevoir que ce qu'ils ont compris, n'est pas forcément acquis pour les autres du groupe, et que par conséquent, il était important de s'assurer de la compréhension par tous de la stratégie proposée. Néanmoins, la trace écrite des parties permet de trouver une stratégie gagnante, en particulier par l'observation des derniers nombres et des erreurs repérées (malheureusement par des hurlements contre le malheureux qui n'applique pas la bonne méthode). Certains remarquent que, dans les parties gagnantes, la somme des deux nombres additionnés par les adversaires est 4.

Conclusion :

- C'est une séance un peu mouvementée et bruyante, mais où tous les élèves s'impliquent ; elle permet de faire le point sur des savoirs (les multiples d'un nombre, l'importance du premier nombre pour par exemple compter de 4 en 4, démarrer la division euclidienne...). Mais surtout, dans une classe agitée et peu scolaire, cette séance permet aux élèves de comprendre l'utilité des comportements essentiels d'apprenants : écouter les autres, comprendre ce qui est dit par les camarades, se faire comprendre par les autres, respecter une règle, réfléchir avant d'agir, utiliser l'écrit comme une mémoire des recherches...

- L'objectif de recherche d'une stratégie est un enjeu fort qui était celui de gagner. Il semble atteint par beaucoup d'élèves, même les plus en difficulté. Les élèves essayent tous (avec plus ou moins d'efficacité) de réinvestir la démarche de recherche de la suite des nombres dans la règle qui est donnée en travail à la maison.

- À l'occasion de cette activité, ces élèves découvrent une liste de nombres qui n'est pas la table de trois mais où les nombres vont de trois en trois, et le fait qu'on puisse déterminer des nombres par des relations, est marquant pour ces élèves.

- Mais l'aspect jeu reste trop présent pour beaucoup et la prise de distance nécessaire à la réflexion n'est faite que par certains dans la recherche d'une autre stratégie gagnante avec la règle "p = 2" : par une recherche à rebours d'une nouvelle liste de nombres plutôt qu'un lien avec multiples et diviseurs.

- Le lien avec la division euclidienne[1] peut être fait par le professeur, en particulier sur l'existence d'un reste si le nombre n'est pas multiple de $p + 1$.

- Certains élèves ont des difficultés à mémoriser les tables de multiplication et à comprendre la technique de la division, cette activité peut leur permettre de donner un sens à la recherche des multiples pour trouver le quotient et le reste dans une division. Le lien avec la division posée semble en revanche plus délicat à faire.

- Avec des classes postérieures à la classe de sixième ou si l'objectif est de faire comprendre que la division euclidienne est un outil efficace pour trouver la stratégie gagnante, on peut faire varier les deux variables didactiques qui interviennent dans le jeu : le nombre n à atteindre et le pas maximum p.

- Un prolongement intéressant en sixième pourrait être de changer le nombre à atteindre sans changer le pas et sans trouver la suite des nombres pour obliger les élèves à recourir à la division.

[1] Il existe un enregistrement de 1973, dans la série “Atelier de pédagogie”, d'une émission de télévision dont le titre est : “Qui dira vingt ?”. Cette émission est décrite dans “La Division à l'école élémentaire” (ELEM-MATH III), publication APMEP. Le jeu y est expérimenté en classe de CM2 sur une adaptation de Guy Brousseau (Division euclidienne aux cours élémentaire et cours moyen dans “la mathématique à l'école élémentaire”)

JEU DE LA COURSE A 20 EN TROISIEME

C'est une activité d'introduction à l'arithmétique en troisième.

Objectifs de l'activité :
- revoir la notion de multiple « en acte » ;
- produire des écritures littérales de multiples d'un nombre ou d'une somme de multiples et d'un entier.

Matériel :
- la fiche jointe en annexe ; elle expose la règle du jeu en opérant par pas de 1, 2 ou 3 et fixe le but de l'activité.

Déroulement :

1ère phase

La fiche élève est distribuée et les élèves sont invités à se placer en groupes de 3 ou 4 élèves ; dans chaque groupe, 2 élèves jouent une partie, le 3ème note les nombres énoncés ; 2 autres élèves jouent, le 3ème note, etc. Au bout de 3 ou 4 parties, les listes de nombres sont analysées par le groupe de manière à trouver une stratégie gagnante ou un début de stratégie ; on rejoue autant de fois que nécessaire, jusqu'à ce que le groupe ait trouvé sa stratégie.
On peut alors la tester en échangeant certains membres d'un groupe contre des membres d'autres groupes (c'est le professeur qui organise l'échange). Analyse des réussites et des difficultés par le groupe d'origine.

Dans la pratique, certains groupes s'arrêtent au résultat (rapidement trouvé) : « il faut dire 16 ». L'intervention du professeur est alors nécessaire pour prolonger la recherche ; que faut-il dire avant 16, pour être sûr de dire 16 ? le professeur peut jouer une partie pour faire sentir la nécessité de démarrer tôt la stratégie gagnante ; il peut aussi susciter la question du choix du premier ou du deuxième joueur : lequel gagnera le plus facilement ?

Quand la stratégie est au point, le groupe l'écrit de la façon la plus succincte possible. Le professeur peut arrêter l'activité quand plusieurs groupes ont trouvé et exprimé leur stratégie gagnante.

A ce stade, les élèves peuvent écrire :
- *il faut dire 16*
- *il faut dire 4, 8, 12, 16*
- *il faut dire les nombres de 4 en 4*
- *il faut dire 4 et compter de 4 en 4*
- *il faut dire les nombres de la table de 4*
- *il faut commencer en second et dire les multiples de 4*

Notons que le mot « multiple » n'est pas d'usage courant chez les élèves...

Une mise en commun en grand groupe des différentes stratégies, met en évidence leur degré de pertinence.

Le professeur demande alors une écriture littérale qui convienne pour tous les nombres de la liste : c'est l'écriture « 4 × k » qui va être proposée.

Cette phase permet de redonner du sens au mot « multiple » ; certains élèves n'ont plus conscience que compter de 4 en 4 à partir de 0, c'est donner les multiples de 4. Mais l'activité proposée ne permet pas aux élèves à ce stade, de prendre conscience que les 2 notions ne sont liées **que** si on commence à compter à partir de 0 ; c'est la prochaine activité qui va mettre l'accent sur ce fait.

2ème phase
Après cette synthèse, munis du vocabulaire commun « multiple », les élèves recommencent à jouer par pas de 1 ou 2.

La liste des nombres gagnants (2, 5, 8, 11, 14, 17) est facilement trouvée. Le problème se pose alors de l'exprimer littéralement.
L'analyse de la série de nombres laisse facilement apparaître qu'il faut compter de 3 en 3, donc les élèves comprennent qu'il y a un lien avec les multiples de 3 ; puis ils mettent en évidence qu'il faut rajouter toujours le nombre 2 ; d'où l'écriture $3 \times k + 2$.
Compter de 3 en 3 ne donne la série des multiples de 3 que si on commence à 0.

3ème phase
Le professeur propose ensuite d'exprimer littéralement les multiples de 5, de 11 ; le terme général de la suite de nombres 3, 10, 17, 24... ; les nombres pairs (de nombreux élèves ne se rappellent plus ce que veut dire « pair »...) ; les nombres impairs ; des entiers consécutifs...
Il fait noter dans le cahier une synthèse de ces expressions pour initier le cours d'arithmétique.

Commentaires

Des suites possibles :

- L'activité présentée ici vise à atteindre l'écriture littérale, mais on peut la généraliser en posant des questions du type : « trouver, sans jouer, la stratégie gagnante pour atteindre 54 par pas de 1, 2 ou 3 ? et par pas de 1, 2, 3 ou 4 ? Quel est le premier nombre à dire pour atteindre 365 par pas de 1, 2 ou 3 ? ». Le rôle du nombre obtenu en ajoutant 1 au pas maximum est alors mis en évidence.
  On peut ainsi mettre en place, en lui donnant du sens, la caractérisation algébrique de la division euclidienne : $a = bq + r$ avec $r < b$.

- En prolongement, le professeur peut proposer de petits problèmes d'arithmétique utilisant les notations algébriques :
  - la somme de 2 nombres impairs est-elle paire ? impaire ? ni l'un ni l'autre ?
  - le produit d'un multiple de 2 et d'un multiple de 3 est un multiple de 6. Vrai ou faux ?
  - le produit de 3 nombres entiers consécutifs est multiple de 4. Vrai ou faux ?
  - la somme de 2 nombres impairs consécutifs est-elle multiple de 4 ?

  Il peut ainsi proposer de démontrer dans un autre cadre que le cadre géométrique, et d'utiliser le calcul algébrique dans un autre but que de faciliter la résolution d'équations.

Le vécu :

- Cette activité a été proposée en première heure de cours de l'année scolaire avec une classe de 3^{e}. Elle avait comme intentions « pédagogiques » d'entrer de façon ludique en arithmétique (premier chapitre choisi), de souder la classe par une activité de groupe, et de démarrer l'année en douceur…
  D'après un bref questionnaire renseigné un mois et demi plus tard, les élèves disent avoir apprécier l'aspect jeu de l'activité pour débuter l'année, mais « la course à 20 » ne laisse pas la même trace en mémoire pour tous. Si tous les élèves se souviennent de l'activité, de la demande d'une stratégie gagnante, la moitié établissent un lien avec l'arithmétique (13 sur 25). Certains indiquent que l'activité les a aidés à mieux manipuler les nombres (entiers, pairs ou impairs, les listes de diviseurs, les rapports entre les nombres, à compter de 2 en 2 !, à diviser sans calculette). Pour d'autres, elle les a aidés à entrer dans la logique du raisonnement arithmétique de façon ludique..
  Il semble donc que pour une moitié des élèves le but de faciliter le contact avec l'arithmétique a été atteint .
  Quant aux écritures littérales visées, si elles ont été facilement produites au cours de l'activité, elles ne sont pas disponibles pour tous par la suite… La nécessité de l'écriture littérale n'est pas du tout évidente pour les élèves, s'il veut l'obtenir le professeur doit clairement la demander.

- Il semble important de laisser les élèves utiliser leurs propres mots avant d'installer le vocabulaire mathématique adapté et d'arriver à l'expression littérale : pour les élèves, la diversité même des façons de s'exprimer donne du sens au vocabulaire spécifique.

- Pour trouver la stratégie gagnante, il est efficace de faire jouer les différents membres d'un groupe contre ceux d'un autre groupe ; cela déstabilise les stratégies incomplètes sans intervention du professeur et relance la recherche.

- Par comparaison avec des plus jeunes, les élèves de 3^{e} trouvent assez rapidement une stratégie gagnante et sortent plus facilement de l'aspect « jeu » (une fois qu'ils ont trouvé comment gagner, ils n'ont plus envie de jouer). On peut donc assez facilement passer à une autre phase de l'activité.

JEU DE LA COURSE A VINGT

Règle du jeu de la course à 20 :

Ce jeu se joue à deux. Le premier joueur est tiré au sort.

Le premier joueur annonce 1 ou 2 ou 3 comme nombre de départ, puis l'autre joueur ajoute mentalement soit 1, soit 2, soit 3 au nombre annoncé et annonce lui-même son résultat. Ensuite, chaque joueur à son tour rajoute mentalement 1 ou 2 ou 3 et annonce son résultat : le joueur qui annonce 20 a gagné.

But de l'activité :

1/ jouer à la course à 20 : 2 élèves jouent parmi un groupe de 4 (faire varier les joueurs) ; un observateur prend en notes les nombres annoncés ;

2/ trouver pour ce jeu une **stratégie gagnante** à tous les coups, à partir de l'observation des parties jouées ;

3/ décrire par écrit cette stratégie gagnante de la façon la plus précise et la plus succincte possible, de façon à pouvoir la communiquer rapidement à d'autres ;

4/ jouer contre quelqu'un qui ne connaît pas la stratégie gagnante et… GAGNER à coup sûr !

5/ recommencer en modifiant la règle du jeu : on n'ajoute plus 1, 2, 3 mais seulement 1 ou 2.

6/ exprimer la stratégie gagnante par une écriture littérale.

JEU DE LA COURSE A VINGT

Règle du jeu de la course à 20 :

Ce jeu se joue à deux. Le premier joueur est tiré au sort.

Le premier joueur annonce 1 ou 2 ou 3 comme nombre de départ, puis l'autre joueur ajoute mentalement soit 1, soit 2, soit 3 au nombre annoncé et annonce lui-même son résultat. Ensuite, chaque joueur à son tour rajoute mentalement 1 ou 2 ou 3 et annonce son résultat : le joueur qui annonce 20 a gagné.

But de l'activité :

1/ jouer à la course à 20 : 2 élèves jouent parmi un groupe de 4 (faire varier les joueurs) ; un observateur prend en notes les nombres annoncés ;

2/ trouver pour ce jeu une **stratégie gagnante** à tous les coups, à partir de l'observation des parties jouées ;

3/ décrire par écrit cette stratégie gagnante de la façon la plus précise et la plus succincte possible, de façon à pouvoir la communiquer rapidement à d'autres ;

4/ jouer contre quelqu'un qui ne connaît pas la stratégie gagnante et… GAGNER à coup sûr !

5/ recommencer en modifiant la règle du jeu : on n'ajoute plus 1, 2, 3 mais seulement 1 ou 2.

6/ exprimer la stratégie gagnante par une écriture littérale.

LE JEU DE PENELOPE

D'après une activité de *Apprentissages numériques et résolution de problèmes*, CM2, ERMEL-INRP, chez HATIER

Règle du jeu :

On part d'un nombre entier, on l'écrit sous forme de produits, un produit par ligne :

- à chaque ligne, on a toujours une écriture du même nombre ;
- à chaque ligne, le produit doit contenir un facteur de plus qu'à la ligne précédente ;
- tous les facteurs sont entiers ;
- le facteur 1 ne figure pas.

Quand on est sûr de ne plus pouvoir continuer, on recompose le nombre :

- à chaque ligne, le produit doit contenir un facteur de moins qu'à la ligne précédente ;
- on ne doit pas retrouver une décomposition déjà écrite.

Exemples :

24	24
3×8	6×4
$3 \times 2 \times 4$	$2 \times 3 \times 4$
$3 \times 2 \times 2 \times 2$	$2 \times 3 \times 2 \times 2$
$6 \times 2 \times 2$	$6 \times 2 \times 2$
12×2	12×2
24	24

Objectifs :

- entretenir et développer la connaissance des tables de multiplication et des résultats dérivés ;
- envisager un nombre comme un produit de plusieurs facteurs ;
- obtenir plusieurs décompositions multiplicatives d'un même nombre.

Matériel :

- papier, crayon ; on peut commencer à travailler sur ardoise ;
- éventuellement, une règle du jeu à coller dans le cahier.

Avertissement :

A l'école primaire, un gros travail est conduit sur les décompositions additives d'un nombre, le faisant apparaître comme la somme de 2 ou plusieurs termes ; pour la multiplication, le travail se limite essentiellement au produit de 2 facteurs.

L'activité décrite ici nécessite d'envisager un entier comme le produit de ***plus de 2 facteurs*** ($24 = 2 \times 3 \times 2 \times 2$) et il se peut qu'un tel produit n'ait pas de sens pour certains élèves. En effet, il est courant de représenter 3×5, par exemple comme $5 + 5 + 5$ ou bien par 3 rangées de 5 cases (voir p 53 « les nombres rectangles ») ; mais comment représenter $3 \times 5 \times 2$ à des élèves n'ayant pas la notion de volume, sans parler de $3 \times 5 \times 2 \times 7$! ?

De plus, les élèves n'ayant pas utilisé de produit de plusieurs facteurs, la propriété d'associativité de la multiplication n'est pas construite pour eux. Cette activité peut être l'occasion de vivre cette propriété en acte.

Ces difficultés rencontrées par les élèves ont peut-être été sous-estimées lors de la mise en place de l'activité suivante, expérimentée dans de « bonnes » sixièmes.
Dans d'autres classes ou pour des élèves plus faibles, il semble nécessaire d'envisager des activités préalables pour montrer qu'un produit de trois nombres existe et lui donner du sens, comme par exemple :

- Lancer trois dés et faire le produit des nombres obtenus sur les faces ; combien de résultats différents peut-on obtenir ? J'ai obtenu 60, quels triplets de nombres pouvais-je avoir sur les 3 dés ?
- J'ai une boîte de sucres : il tient 8 sucres sur la longueur, 6 sucres sur la largeur et 4 sur la hauteur. Combien y a-t-il de sucres dans la boîte quand elle est pleine ?

Déroulement :
(au cours de séances de calcul mental en sixième, les élèves ont déjà travaillé les tables de multiplication, d'addition)

1/ Le professeur donne un exemple au tableau, en partant de 24 ; il demande qu'un élève indique un produit égal à 24, qu'il écrit en dessous de 24 ; puis il demande une décomposition en produit d'un des 2 facteurs ; il écrit alors en dessous de la décomposition en 2 facteurs, une autre décomposition en 3 facteurs ; il continue ainsi, jusqu'à ce que les élèves ne puissent plus aller plus loin (décision de la classe, sous contrôle du professeur).
Alors, le professeur demande une « recomposition », et il élimine les produits qui figurent au-dessus : ces produits sont considérés comme « hors jeu ». Le jeu continue jusqu'à retrouver 24.
On peut recommencer avec une autre décomposition et recomposition.
Le professeur demande aux élèves ce qu'ils ont compris de la règle du jeu, éclaircit les points obscurs et remet aux élèves la règle en question, écrite.

2/ Les ardoises sont distribuées ; individuellement, chaque élève essaie le jeu sur son ardoise, avec le nombre 48. La compréhension de la consigne est difficile car les contraintes sont nombreuses et les élèves font beaucoup d'erreurs : l'ardoise est pratique à cette occasion, car ils peuvent effacer facilement et recommencer autant de fois que nécessaire pour comprendre. Le professeur est très actif pendant cette phase car il lui faut commenter individuellement les erreurs commises et surveiller qu'elles ne sont pas reproduites…
Au bout d'une dizaine de minutes, le professeur collecte au tableau les « pénélopes » réussies, pour les comparer, il aide à mettre en mots les techniques employées par les élèves ; il collecte aussi les remarques, par exemple sur la décomposition la plus longue : les élèves s'aperçoivent vite que pour un même entier, à part l'ordre des nombres, elles sont toutes identiques.

3/ On recommence avec les nombres 72 et 30 ; pour les élèves les plus rapides, on peut proposer de trouver plusieurs décompositions différentes du même nombre (il est alors préférable de travailler au brouillon). En guise de correction, on présente au tableau l'ensemble des « pénélopes », les élèves rejetant au fur et à mesure celles qui sont erronées. On observe que, au cours de la « recomposition », on voit apparaître des facteurs auxquels personne n'avait pensé pour démarrer.

4/ Le jeu se poursuit avec 26 ; 210 ; 31 ; 105. Les élèves constatent que certains nombres ont plusieurs décompositions possibles, et qu'elles sont longues ; d'autres nombres ont des décompositions très courtes, voire pas de décomposition. De plus, cela ne dépend pas de la taille du nombre.

5/ En prolongement, on peut poser les problèmes suivants :

- Un nombre, au cours du jeu de Pénélope, a été écrit sous la forme : $2 \times 5 \times 3 \times 7$. Trouver toutes les écritures qui pourraient se situer à la ligne suivante.
- Voici 2 décompositions : $14 \times 11 \times 5$ et 20×77. Sans calculer le nombre de départ, peut-on savoir si ce sont 2 décompositions du même nombre ?

6/ Bilan :

On peut faire noter sur le cahier que :

Un nombre peut se décomposer en produit de 2 ou plusieurs facteurs.

Exemples : $5 = 5 \times 1$;

$$36 = 9 \times 4 = 6 \times 6 = 9 \times 2 \times 2 = 2 \times 3 \times 6 = 3 \times 3 \times 2 \times 2 = 2 \times 3 \times 2 \times 3$$

Pour calculer un produit de plusieurs facteurs, on peut associer les facteurs de la façon la plus pratique :

$$2 \times 7 \times 5 \times 3 = 2 \times 5 \times 7 \times 3 = 10 \times 21 = 210$$

Commentaires :

Les difficultés des élèves :

Ils pensent, au départ, que c'est facile, mais en fait, ils se heurtent à un certain nombre de difficultés :

- Ils connaissent mal les tables de multiplication, et cela génère des erreurs de calcul.

- Ils ont du mal à ordonner les facteurs de façon à ne pas se perdre et ils recopient mal, par conséquent ils font de nombreuses erreurs. Par exemple, ils écrivent en début de ligne le nombre qu'ils choisissent de décomposer, et ne savent plus alors quels sont les nombres à recopier (14×30 devient $6 \times 5 \times 30$).

- Il y a des erreurs sur le nombre de facteurs, qui passe de 2 à 4 sans qu'ils remarquent quoi que ce soit, et ils ne reconnaissent pas 2 lignes de facteurs identiques, dès que les facteurs ne sont pas dans le même ordre.
  Ces deux contraintes pourtant essentielles à la découverte de facteurs nouveaux, auxquels les élèves n'auraient pas forcément pensé ; s'ils décomposent facilement 48 en $2 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2$ à partir de 6×8 ou de 2×24, il leur est plus difficile de trouver 16×3, produit qu'ils trouvent à la recomposition, à condition de respecter les règles du jeu.

- Ils perdent de vue le nombre de départ, et quand ils font des erreurs, ils ne s'aperçoivent pas que le produit écrit n'est plus égal au nombre à décomposer. Ils ne vérifient pratiquement pas l'égalité au cours du jeu, ni même à la fin.
  Cette difficulté est liée à la perte de sens quand on passe à des produits comportant plus de 2 facteurs.

- Ils confondent souvent 2 × 5 et 2 + 5, ou 5 × 5 (2 × 5 devient 7 ou 10 devient 5 × 5).

- Ils ont des difficultés à reconnaître le stade intermédiaire, où on ne peut plus décomposer : par exemple, pour beaucoup, 9, n'est pas décomposable en produit, en tout cas pas spontanément ; 14 leur pose aussi des problèmes, 35, etc … A contrario, avec des nombres à peu de diviseurs (26), ils n'osent pas arrêter et écrire 26 sous 2 × 13 ; cela leur paraît impossible.
On touche là à la difficulté de la connaissance des « dérivés des tables de multiplication » : les élèves savent que 3 × 3 fait 9, mais pas que 9 vaut 3 × 3 ; bien souvent les tables ne sont sues que dans un seul sens. Pourtant pour conduire un calcul, pour travailler avec des fractions et plus tard, des racines carrées, il est utile de décomposer un nombre en produit, de savoir trouver par exemple, par quel nombre on multiplie 3 pour trouver 48…

- Les élèves en difficulté ont du mal à recomposer les produits de plusieurs facteurs. quand ils envisagent le calcul d'un produit en associant deux facteurs, ils ne pensent pas qu'il puisse exister d'autres associations possibles conduisant au même résultat : que 2 × 3 × 5 soit à la fois égal à 6 × 5, à 2 × 15 ou bien à 3 ×10, étonne bon nombre d'élèves ; pour beaucoup, seul le calcul des 3 expressions est convaincant, et cela ne veut pas dire qu'ils sont convaincus pour d'autres combinaisons.
Il s'agit là de leur première rencontre avec l'associativité de la multiplication, combinée avec la commutativité ; pour l'élève performant, cette découverte est immédiate ; pour l'élève qui n'est pas à l'aise avec les nombres et les opérations, ces propriétés de la multiplication posent problème et n'ont pas de sens ; il est d'autant plus important de pratiquer au préalable des activités à ce sujet.

- Des nombres un peu grands, comme 210, ne sont pas faciles : spontanément les élèves privilégient le partage en deux, et s'appuient sur leur connaissance des tables. Quand le nombre « sort » des tables usuelles, nombreux sont les élèves en difficulté. Pour certains, le professeur autorise les calculs posés ou la calculatrice…
C'est un instrument de différenciation entre les élèves de donner des outils différents (calcul posé ou mental, calcul posé ou calculette) ou bien des nombres différents (210 est difficile, mais 72 ou 96 le sont moins).

Les réussites des élèves :

- Le jeu est motivant pour les élèves et ils s'investissent bien ; ils pratiquent à cette occasion du calcul mental sans même s'en rendre compte ; c'est une façon de faire pratiquer les tables « à l'envers ».

- Sur des nombres « faciles », ils travaillent tous, personne ne reste sans réponse ; il n'y a pas d'élève en échec.

- Ils réussissent à tenir compte d'un grand nombre de consignes à la fois.

- Ils ont tous perçu qu'un nombre peut souvent être décomposé de plusieurs façons en produit.

- Ils perçoivent en actes, les propriétés de commutativité et d'associativité de la multiplication, même si le vocabulaire n'est pas mis en place.

Le vécu :

- Il faut prévoir une séance complète pour que les élèves rentrent dans le jeu sans plus faire trop d'erreurs dommageables (on gagnera certainement du temps à mener au préalable une activité donnant du sens à un produit de plusieurs facteurs).

- Les élèves demandent comment définir les nombres « non décomposables » (ceux qui forment la plus longue décomposition) : « comment peut-on savoir qu'on a fini de décomposer ? comment reconnaît-on qu'un nombre n'est plus décomposable en produit ? ». Mis en situation de répondre eux-mêmes, ils proposent les nombres impairs, puis les nombres qui se terminent par 1 ; mis en présence de contre-exemples à chaque fois (proposés par le professeur quand les élèves n'en proposent pas), ils finissent par dire qu'il faudrait les apprendre par cœur… *On peut leur indiquer que ces nombres « ne figurent pas comme résultats dans les tables ». Mais pour l'activité qui ne nécessite pas d'utiliser une grande quantité de nombres premiers, on peut effectivement déterminer une liste à savoir par cœur.*

- A propos des problèmes proposés en prolongement, les élèves réagissent vite et bien à la première question (la ligne suivant une autre ligne) ; ils demandent s'il faut décomposer ou recomposer, mais répondent seuls à cette question, à laquelle le professeur refuse de répondre ; un seul élève propose de décomposer encore (il propose une décomposition additive, $7 = 2 \times 5$). Et ils trouvent plusieurs réponses sans difficulté (ils recomposent plus facilement qu'ils ne décomposent).

- En revanche, pour le 2ème problème : « Voici 2 décompositions : $14 \times 11 \times 5$ et 20×77. Sans calculer le nombre de départ, peut-on savoir si ce sont 2 décompositions du même nombre ? », personne ne démarre. Le professeur propose alors la même question avec deux décompositions où un seul nombre est « décomposable » (14×5 et 10×7), et là, les élèves trouvent, en décomposant en $2 \times 7 \times 5$ et $2 \times 5 \times 7$.
  Puis, après la relance sur la question du départ, certains trouvent en décomposant totalement ; d'autres proposent une recomposition partielle ($14 \times 11 \times 5 = 77 \times 10$). Un élève propose une recomposition en 2 facteurs, les 2 facteurs de l'un étant tous les deux plus grands que les deux facteurs de l'autre (14×55 et 20×77) : il en conclut que le 1er produit est plus grand que le 2ème. Les autres élèves ont un peu de mal à suivre l'explication…

- A la fin de l'activité, une nouvelle interrogation s'installe dans la tête de plusieurs élèves : « un même nombre peut avoir des décompositions différentes, alors comment reconnaître si 2 décompositions différentes sont égales ? », $2 \times 2 \times 5 \times 7$ et $2 \times 4 \times 5 \times 7$ sont-ils égaux ou différents ? Ils ne savent pas… en tout cas pas sans calculer le nombre final.

- Bien que ce soit une activité issue d'un ouvrage de CM2, cette activité telle quelle n'est absolument pas adaptée à un but de remédiation, avec un groupe d'élèves tous en difficulté : l'amoncellement des contraintes et des difficultés dépasse leurs possibilités.

Prolongement possible :

On peut poursuivre cette activité en définissant pour les élèves le mot de « diviseur » au sens arithmétique du terme (qui n'est pas étudié en primaire et qui relève du programme de 6e).

- On peut alors élaborer collectivement la liste des diviseurs pour chaque nombre. L'enjeu de trouver tous les diviseurs d'un nombre plaît bien aux élèves.

- Il est utile ensuite de faire chercher ***individuellement*** tous les diviseurs d'un nombre, en lui appliquant plusieurs fois le jeu de Pénélope . Cette activité permet la différenciation : les plus forts trouvent seuls tous les diviseurs, mais personne ne se sent en échec sur cette recherche car chacun en trouve au moins quelques-uns.

- A l'occasion de vérifications, les élèves comprennent vite que les diviseurs vont 2 par 2, et ils inventent 1 et le nombre de départ comme diviseurs complémentaires sans difficulté, très spontanément.

- Il est intéressant de faire prendre conscience du nombre de diviseurs possibles (26 n'a que 4 diviseurs, et ils trouvent que ce n'est pas un nombre intéressant). Ils sont alors capables de trouver des nombres à 2 diviseurs et d'identifier 1 comme n'ayant qu'un seul diviseur.

LES NOMBRES INTERESSANTS

C'est une activité visant à enrichir la connaissance des nombres. Elle répond à la difficulté constatée pour décomposer un nombre sous forme multiplicative en vue de simplifier l'écriture de sa racine carrée.

Objectifs de l'activité

- utiliser les décompositions multiplicatives d'un nombre pour exprimer $\sqrt{n}$ où n est un entier, sous la forme $a\sqrt{b}$ avec a et b entiers ;
- faire prendre conscience que cette transformation n'est possible que pour certains nombres ;
- élaborer une stratégie en vue de simplifier l'écriture d'une racine carrée.

Matériel :

- la fiche jointe en annexe et une calculatrice pour les élèves ;
- éventuellement la fiche comportant le tableau photocopié sur un transparent.

Déroulement :

(Au cours des séances précédentes, les élèves ont découvert la nécessité des transformations d'écriture et la propriété $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$)

1/ Le professeur propose dans un premier temps de chercher toutes les décompositions sous forme d'un produit de deux entiers des nombres 50, 32, 49, et 10.
Il demande ensuite, parmi ces décompositions, lesquelles sont intéressantes pour simplifier :
$\sqrt{50}$; $\sqrt{32}$; $\sqrt{49}$; $\sqrt{10}$.

Puis il introduit le vocabulaire propre à cette activité :

Dans cet exercice, on dira que : 49 est « *un carré parfait* », 50 est « *un nombre intéressant* », 32 « *un nombre très intéressant* » et 10 est « *un nombre non intéressant* »

49 est : « *un carré parfait* », $\sqrt{49} = 7$.

On peut écrire sa racine carrée sous la forme d'un entier.

50 est : « *intéressant* » car on peut écrire $\sqrt{50} = \sqrt{25} \times \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$.

On obtient une seule écriture simplifiée du type $a\sqrt{b}$ avec $a \neq 1$.

32 est : « *très intéressant* » car on peut écrire $\sqrt{32} = \sqrt{4} \times \sqrt{8} = 2\sqrt{8}$ ou $\sqrt{32} = \sqrt{16} \times \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

On peut obtenir deux écritures simplifiées du type $a\sqrt{b}$ avec $a \neq 1$.

10 est : « *non intéressant* », $\sqrt{10} = \sqrt{10}$.

On ne peut pas écrire sa racine sous la forme simplifiée $a\sqrt{b}$ avec $a \neq 1$.

2/ L'enseignant distribue alors le tableau et invite les élèves à le compléter :
- en mettant une croix pour les racines carrées des nombres *«non intéressants»* ;
- en écrivant le nombre entier correspondant à la racine carrée pour les nombres qui sont des carrés parfaits (on peut aussi donner d'autres écritures pour certains de ces nombres, par exemple $\sqrt{16} = 4 = 2\sqrt{4}$) ;
- en écrivant la ou les écritures différentes pour les autres racines carrées.

Le travail peut se faire individuellement ou par deux. Le professeur précise qu'il sera à terminer à la maison.
Les élèves commencent par décomposer les nombres un à un. Un certain nombre d'élèves perçoivent rapidement que les multiples de 4, puis de 9 sont au moins « intéressants ».

A partir de ce moment, le professeur peut procéder à une première mise en commun portant uniquement sur les méthodes justes proposées par les élèves, qui permettent de remplir plus rapidement le tableau. Avant de remettre les élèves au travail, il rappelle qu'il faut aussi chercher les nombres *« très intéressants »*.

3/ A la séance suivante, la mise en commun peut être conduite au rétroprojecteur. Le tableau est rempli au fur et à mesure des interventions des élèves, en mettant l'accent sur les stratégies employées. Le professeur demande par exemple : « Comment avez vous procédé ? Qu'avez vous remarqué ? Qu'est ce qui vous a permis de gagner du temps ?... »
Les échanges doivent faire apparaître :
- des régularités dans le remplissage de la grille (de 4 en 4, de 9 en 9, ...) ;
- la faible fréquence des nombres « *intéressants* » ;
- des désaccords pour la décomposition de certains nombres en particulier 72. On peut trancher en exhibant toutes les décompositions produites. Ce qui fait de 72 un nombre *« très très intéressant »* ($72 = 4 \times 18 = 9 \times 8 = 36 \times 2$), sa racine possède 3 écritures simplifiées.

4/ L'activité se termine par la recherche des exercices proposés en annexe.

<u>Commentaires :</u>

- Bien qu'au premier abord, cet exercice présente un côté répétitif, les élèves sont actifs et participent beaucoup au débat.

- Les élèves apprécient la grille qu'ils trouvent très utile lors des premiers exercices. Le danger est, bien sur, qu'ils n'arrivent pas à s'en passer. Il convient d'être vigilant et de limiter son usage.

- Comme prolongement, on peut proposer des exercices type brevet :
$2\sqrt{112} - 3\sqrt{175} + 7\sqrt{63} = \ldots$ où on ne « souffle » pas le 7 facteur commun aux 3 nombres écrits sous le radical.

- Les élèves gardent de cette activité le réflexe de tester si un nombre sous un radical est divisible par 4 et par 9 (plus rarement, par 16 et 25) ; ils se sentent moins démunis devant une simplification de racine carrée. Dans les exercices d'addition de nombres sous forme de racines, ils ont une méthode pour trouver le diviseur commun et réussissent mieux les exercices type brevet.

- On peut imaginer d'adapter « le jeu de Pénélope » (voir p 41 de cette brochure), et de proposer aux élèves une méthode analogue. On part d'un nombre, on veut l'écrire sous la forme d'un produit et on lui applique les transformations suivantes :

  règle 1 : A chaque ligne, le produit doit contenir un nombre de plus qu'à la ligne précédente et un des facteurs du nouveau produit doit être **un carré parfait**. Lorsqu'on ne peut plus continuer, on passe à la règle 2.

  règle 2 : A chaque ligne, le produit doit contenir une ligne de moins qu'à la ligne précédente et un des facteurs est **un carré parfait**. D'autre part, on ne doit pas retrouver une décomposition déjà écrite (8×4 est la même décomposition que 4×8).

Pour 32

32

4 x 8

4 x 2 x 4

16 x 2

32

Pour 50

50

2 x 25

50

Pour 10 il n'existe pas de décomposition

$\sqrt{1}$		$\sqrt{25}$		$\sqrt{49}$		$\sqrt{73}$		$\sqrt{97}$		$\sqrt{121}$	
$\sqrt{2}$		$\sqrt{26}$		$\sqrt{50}$	$5\sqrt{2}$	$\sqrt{74}$		$\sqrt{98}$		$\sqrt{122}$	
$\sqrt{3}$		$\sqrt{27}$		$\sqrt{51}$		$\sqrt{75}$		$\sqrt{99}$		$\sqrt{123}$	
$\sqrt{4}$		$\sqrt{28}$		$\sqrt{52}$		$\sqrt{76}$		$\sqrt{100}$		$\sqrt{124}$	
$\sqrt{5}$		$\sqrt{29}$		$\sqrt{53}$		$\sqrt{77}$		$\sqrt{101}$		$\sqrt{125}$	
$\sqrt{6}$		$\sqrt{30}$		$\sqrt{54}$		$\sqrt{78}$		$\sqrt{102}$		$\sqrt{126}$	
$\sqrt{7}$		$\sqrt{31}$		$\sqrt{55}$		$\sqrt{79}$		$\sqrt{103}$		$\sqrt{127}$	
$\sqrt{8}$		$\sqrt{32}$	$2\sqrt{8}$ $4\sqrt{2}$	$\sqrt{56}$		$\sqrt{80}$		$\sqrt{104}$		$\sqrt{128}$	
$\sqrt{9}$		$\sqrt{33}$		$\sqrt{57}$		$\sqrt{81}$		$\sqrt{105}$		$\sqrt{129}$	
$\sqrt{10}$		$\sqrt{34}$		$\sqrt{58}$		$\sqrt{82}$		$\sqrt{106}$		$\sqrt{130}$	
$\sqrt{11}$		$\sqrt{35}$		$\sqrt{59}$		$\sqrt{83}$		$\sqrt{107}$		$\sqrt{131}$	
$\sqrt{12}$		$\sqrt{36}$		$\sqrt{60}$		$\sqrt{84}$		$\sqrt{108}$		$\sqrt{132}$	
$\sqrt{13}$		$\sqrt{37}$		$\sqrt{61}$		$\sqrt{85}$		$\sqrt{109}$		$\sqrt{133}$	
$\sqrt{14}$		$\sqrt{38}$		$\sqrt{62}$		$\sqrt{86}$		$\sqrt{110}$		$\sqrt{134}$	
$\sqrt{15}$		$\sqrt{39}$		$\sqrt{63}$		$\sqrt{87}$		$\sqrt{111}$		$\sqrt{135}$	
$\sqrt{16}$		$\sqrt{40}$		$\sqrt{64}$		$\sqrt{88}$		$\sqrt{112}$		$\sqrt{136}$	
$\sqrt{17}$		$\sqrt{41}$		$\sqrt{65}$		$\sqrt{89}$		$\sqrt{113}$		$\sqrt{137}$	
$\sqrt{18}$		$\sqrt{42}$		$\sqrt{66}$		$\sqrt{90}$		$\sqrt{114}$		$\sqrt{138}$	
$\sqrt{19}$		$\sqrt{43}$		$\sqrt{67}$		$\sqrt{91}$		$\sqrt{115}$		$\sqrt{139}$	
$\sqrt{20}$		$\sqrt{44}$		$\sqrt{68}$		$\sqrt{92}$		$\sqrt{116}$		$\sqrt{140}$	
$\sqrt{21}$		$\sqrt{45}$		$\sqrt{69}$		$\sqrt{93}$		$\sqrt{117}$		$\sqrt{141}$	
$\sqrt{22}$		$\sqrt{46}$		$\sqrt{70}$		$\sqrt{94}$		$\sqrt{118}$		$\sqrt{142}$	
$\sqrt{23}$		$\sqrt{47}$		$\sqrt{71}$		$\sqrt{95}$		$\sqrt{119}$		$\sqrt{143}$	
$\sqrt{24}$		$\sqrt{48}$		$\sqrt{72}$		$\sqrt{96}$		$\sqrt{120}$		$\sqrt{144}$	

Exercices :

1) 72 est un nombre « *très très intéressant* » car : $\sqrt{72} = 2\sqrt{18} = 3\sqrt{12} = 6\sqrt{2}$. Y en a-t-il d'autres dans le tableau ? Lesquels ?

2) Trouver les nombres « *très très intéressants* » compris entre 144 et 200.

3) Trouver un nombre impair « *très très intéressant* ».

4) Trouver le plus petit nombre se terminant par 5 qui soit « *intéressant* », puis le plus petit nombre se terminant par 5 qui soit « *très intéressant* ».

5) Trouver un nombre « *très intéressant* » dont une décomposition est $7 \times \sqrt{\ldots}$.

Exercices :

1) 72 est un nombre « *très très intéressant* » car : $\sqrt{72} = 2\sqrt{18} = 3\sqrt{12} = 6\sqrt{2}$. Y en a-t-il d'autres dans le tableau ? Lesquels ?

2) Trouver les nombres « *très très intéressants* » compris entre 144 et 200.

3) Trouver un nombre impair « *très très intéressant* ».

4) Trouver le plus petit nombre se terminant par 5 qui soit « *intéressant* », puis le plus petit nombre se terminant par 5 qui soit « *très intéressant* ».

5) Trouver un nombre « *très intéressant* » dont une décomposition est $7 \times \sqrt{\ldots}$.

Exercices :

1) 72 est un nombre « *très très intéressant* » car : $\sqrt{72} = 2\sqrt{18} = 3\sqrt{12} = 6\sqrt{2}$. Y en a-t-il d'autres dans le tableau ? Lesquels ?

2) Trouver les nombres « *très très intéressants* » compris entre 144 et 200.

3) Trouver un nombre impair « *très très intéressant* ».

4) Trouver le plus petit nombre se terminant par 5 qui soit « *intéressant* », puis le plus petit nombre se terminant par 5 qui soit « *très intéressant* ».

5) Trouver un nombre « *très intéressant* » dont une décomposition est $7 \times \sqrt{\ldots}$.

LES NOMBRES RECTANGLES

C'est une activité d'introduction à la notion de diviseur d'un entier.

Le mot diviseur a plusieurs significations. En primaire c'est un terme de vocabulaire : il désigne le nombre placé en haut à droite dans une division posée, c'est le nombre par lequel on divise. Au collège le mot « diviseur » prend un autre sens : un entier b non nul est dit *diviseur* d'un entier a si a = bq avec q entier.

Objectifs de l'activité :
- produire des décompositions multiplicatives d'un entier ;
- revoir la notion de multiple ;
- introduire la notion de diviseur d'un entier.

Matériel :
- la fiche jointe (annexe 1) ; elle propose une grille sur laquelle on dessinera des jetons disposés en rectangles.

Déroulement :

1/ La fiche élève est distribuée et le professeur explique qu'il a disposé 24 jetons de façon à former des rectangles. Il a pu les disposer en 4 rangées de 6, 2 de 12, 3 de 8 ou 1 de 24. Il précise que les rectangles comportant 2 rangées de 12 ou 12 rangées de 2 sont considérés comme identiques. Les élèves sont ensuite invités à réaliser chacun sur leur feuille le plus grand nombre possible de rectangles différents, avec 18 jetons (on peut en réaliser 3). Après correction, un concours est organisé dans la classe : « Qui arrive à former le plus grand nombre possible de rectangles avec 84 jetons ? avec 25 jetons ? 17 jetons ? »

Dans la pratique, les élèves commencent par recourir au dessin : certains essaient de disposer les jetons en 2, 3 ...rangées , certains utilisent leur connaissance des tables (18 = 2 × 9 = 3 × 6 ou 25 = 5 × 5), d'autres effectuent des divisions successives surtout pour les 84 jetons. Pour 25 la disposition en carré (5 × 5) pose question aux élèves : peut-on la considérer comme une disposition en rectangle ? C'est l'occasion d'engager une discussion sur le fait qu'un carré est ou n'est pas un rectangle.

2/ Le même exercice est proposé avec les nombres 108 puis 120 mais le recours au dessin, cette fois, est interdit (la calculatrice est autorisée mais seulement si les élèves en font la demande). Ce travail peut être terminé à la maison.

Différentes stratégies sont possibles : on peut procéder par divisions successives ou jouer sur les décompositions multiplicatives de l'entier en faisant par exemple :

$$120 = 10 \times 12 = 2 \times 5 \times 6 \times 2 = 5 \times (6 \times 2 \times 2) = 5 \times 24$$
$$\text{ou } 2 \times 5 \times 6 \times 2 = (2 \times 2)\times (6 \times 5) = 4 \times 30.$$

La mise en commun porte sur les stratégies utilisées pour trouver les rectangles, on présentera sous forme de multiplication ou de division la validation des différents rectangles :
par exemple, avec 108 jetons, il est possible de former un rectangle de 36 sur 3 car 36 × 3 = 108 ou 108 : 36 = 3 ou 108 : 3 = 36.

La synthèse porte sur le vocabulaire : multiple, diviseur, divisible. Le professeur fait noter cette synthèse dans le cahier pour initier le cours d'arithmétique (voir annexe 2).
Le terme diviseur peut être explicité en s'appuyant sur l'idée qu'un premier entier est diviseur d'un second si dans la division euclidienne du second par le premier, le reste est nul ou encore si le second est dans la table de multiplication du premier, c'est-à-dire si le second est multiple du premier.

Commentaires

Des suites possibles :

- L'activité décrite ici est suivie d'exercices d'application pour acquérir le vocabulaire (voir exercice 1, annexe 2). Ces exercices peuvent être oraux à partir de la donnée d'une multiplication ou d'un quotient exact, ou écrits, comme les 2 premiers exercices de la fiche donnée en annexe 2.

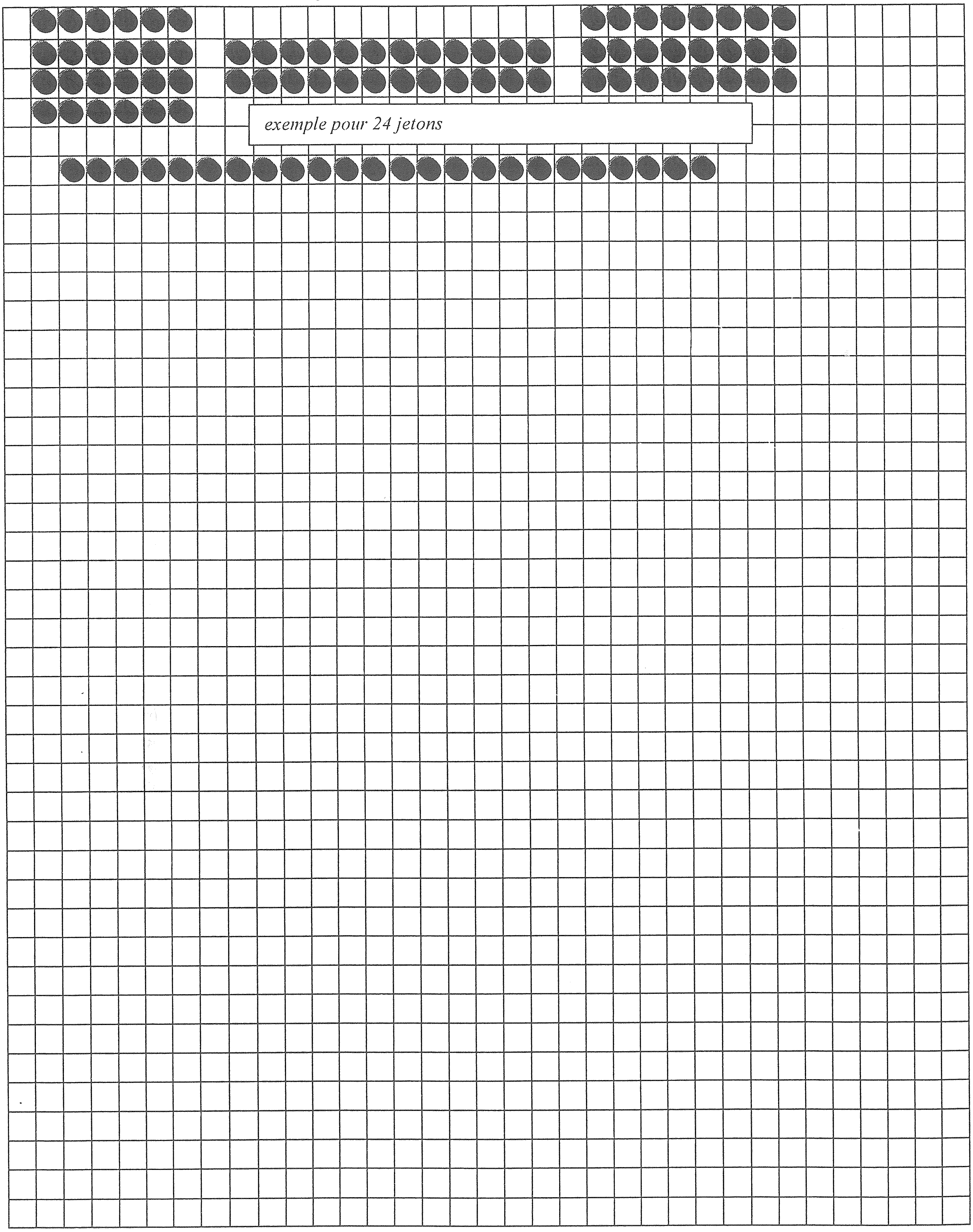
- L'étude ou le rappel des caractères de divisibilité par 2, 5, 10, 3, 9, semble venir naturellement à la suite de cette activité ; certains exercices de l'annexe 2 sont proposés dans ce but.

- La notion de multiple (ou de diviseur) d'un nombre peut être l'occasion de raisonnements simples, recourant à différents types de preuves (voir Arithmétique et raisonnement déductif). Cette activité peut donc être poursuivie par une initiation au raisonnement déductif.

Et pourquoi pas des nombres pavés :

- Avec des cubes « emboîtables[1] », on peut demander aux élèves de réaliser des parallélépipèdes rectangles. On peut commencer par chercher tous les pavés réalisables avec 24 cubes, puis faire varier le nombre de cubes jusqu'à obtenir des parallélépipèdes que l'on ne peut plus fabriquer par manque de matériel. L'objectif est de décomposer un nombre en un produit de 3 facteurs et de mobiliser les propriétés d'associativité et de commutativité de la multiplication.

[1] On peut trouver de tels cubes dans les catalogues de matériel pour les mathématiques.



On place des jetons sur une grille de façon à former le plus grand nombre de rectangles de dimensions différentes. Dans l'exemple ci-dessus, on disposait de 24 jetons.

1. ***Faire le même exercice avec 18 jetons, puis avec 84 jetons, puis 25 jetons, puis 17 jetons.***
2. ***Sans utiliser la grille : combien pourrait-on construire de rectangles avec 108 jetons ? Et avec 120 jetons ?***

Multiples et diviseurs

Vocabulaire :

$3 \times 5 = 15$

- 3 est un nombre **entier,** 5 est un nombre **entier,** 15 est l'**entier** obtenu en multipliant 3 par 5.
- On dit que **15 est un *multiple* de 3** (**15 est aussi *multiple* de 5**).
- On peut dire aussi que **15 est *divisible* par 3 (et par 5)** ou dire que **3 est un *diviseur* de 15.**

C'est à dire que le quotient exact de 15 par 3 est un nombre entier.

(autrement dit la division de 15 par 3 se termine avant la virgule et le reste de cette division est 0 ou encore la division euclidienne de 15 par 3 a pour reste 0)

Exercice 1 :

a) **35 = 5 × 7**. En utilisant ces 3 nombres, écrire le plus possible de phrases en utilisant les mots : **multiple, divisible , diviseur**.
b) **36 : 9 = 4**. En utilisant ces 3 nombres, écrire le plus possible de phrases en utilisant les mots : **multiple, divisible , diviseur**.

Exercice 2 :

a) Ecrire les 5 premiers multiples de 10.
b) Trouver un multiple de 7 compris entre 50 et 60.

Exercice 3 :

Sans effectuer de division, répondre aux questions ci-dessous et justifier :

1. 82 est-il divisible par 2 ?
2. 335 est-il divisible par 5 ?
3. 343 est-il divisible par 3 ?
4. 106 a-t-il 2 et 3 pour diviseurs ?
5. 198 est-il multiple de 9 ?
6. 315 est-il un diviseur de 5 ?

Exercice 4 :

Chercher ***tous*** les diviseurs des nombres suivants : 18, 16, 24, 105, 91, 53.

Exercice 5 :

La calculatrice n'est pas autorisée, il peut y avoir plusieurs possibilités, il faudra toutes les trouver.
Dans cet exercice **241A** désigne un nombre dont les chiffres sont 2, 4, 1, A.

Remplacer A par un chiffre pour que :

1. 241A soit multiple de 2
2. 52A2 soit multiple de 3
3. 71A2 soit multiple de 9
4. 42325A soit divisible par 9 et par 5
5. 913A soit divisible par 3 et par 2
6. 55A soit divisible par 5 et par 3

ARITHMETIQUE ET RAISONNEMENT DEDUCTIF

C'est une activité d'initiation au raisonnement déductif qui prend appui sur les notions de multiple et diviseur.

Objectifs de l'activité :
- utiliser les notions de multiple, diviseur et les critères de divisibilité ;
- donner du sens à la notion de justification ;
- découvrir différents types de preuves dont le contre-exemple ;
- introduire le calcul littéral comme un outil efficace pour prouver.

Matériel :
- la fiche jointe (annexe 1) avec 8 affirmations.

Déroulement :

a) ***affirmation a :*** *Si l'on enlève un entier à son carré et que l'on ajoute 11, alors on obtient obligatoirement un nombre qui a exactement deux diviseurs*[1].

Le professeur fait lire la phrase et laisse un moment d'appropriation aux élèves, il explique ensuite les mots qui peuvent paraître difficiles comme carré et diviseur, puis en choisissant 2 comme entier, il exemplifie l'affirmation : $2^2 - 2 + 11 = 13$, 13 n'a que deux diviseurs 1 et 13.
Les élèves cherchent alors si l'affirmation est toujours vraie, toujours fausse, parfois vraie ou fausse.
Le professeur peut alors répertorier les avis de la classe en comptant le nombre de réponses de chaque catégorie, il organise ensuite le débat en commençant par donner la parole à ceux qui pensent que l'affirmation est toujours vraie, puis aux autres. Après chaque argumentation, il demande si des élèves ont changé d'avis et continue ainsi jusqu'à ce que l'argument attendu emporte l'adhésion de tous.

Dans cette activité, les entiers de 0 à 10 vérifient tous l'affirmation, par conséquent les élèves pensent souvent majoritairement que l'affirmation est toujours vraie, l'argument utilisé étant « j'ai essayé avec 2 ou 3 ou 5 ou ... ». L'apparition du premier contre-exemple peut faire croire que l'affirmation est parfois vraie, parfois fausse : seule la référence au quantificateur (ici « obligatoirement ») permet d'affirmer que la phrase est fausse.

La mise en commun porte sur les règles du débat mathématique ainsi découvertes que l'on note sur le cahier :

- En mathématique la majorité n'a pas forcément raison.
- Une affirmation du type « Si A est vérifié, alors B est obligatoirement vérifié » est soit toujours vraie, soit fausse.
- Des exemples, même nombreux, qui vérifient une telle affirmation ne suffisent pas à prouver qu'elle est vraie.
- Un seul contre-exemple (pour lequel A est vérifié mais pas B) suffit à prouver qu'une telle affirmation est fausse.

[1] D'après **INITIATION AU RAISONNEMENT DÉDUCTIF AU COLLÈGE** IREM de Lyon 92
Gilbert ARSAC, Gisèle CHAPIRON, Alain COLONNA, Gilles GERMAIN, Yves GUICHARD, Michel MANTE

b) ***affirmation b :*** *Si deux entiers sont multiples de 5, alors leur somme est obligatoirement un multiple de 5.*

On peut proposer le même déroulement qu'au a).

Les élèves pensent majoritairement que l'affirmation est vraie mais beaucoup utilisent encore l'argument « j'ai essayé sur plusieurs exemples et c'est toujours vérifié ». Certains arrivent à formuler « c'est obligé car les nombres se terminent forcément par 0 ou 5 » mais il faudra souvent l'aide du professeur pour arriver à étudier tous les cas possibles : les deux nombres se terminent par 0, par 5, un nombre se termine par 0 et l'autre par 5. Le recours au calcul littéral n'est pas envisagé ici.

Le professeur fait noter sur le cahier :

• On peut prouver qu'une affirmation est vraie, en listant tous les cas possibles et en vérifiant qu'elle est vraie dans chacun des cas.

c) ***affirmation c :*** *Si la somme de deux entiers est un multiple de 5, alors les deux nombres sont obligatoirement multiples de 5.*

Après un déroulement similaire au a) ou b), le professeur fait comparer cette affirmation avec la précédente : Qu'ont-elles d'identique ? de différent ? Il précise que ces 2 phrases sont dites réciproques l'une de l'autre.

On note sur le cahier :

• Lorsqu'une phrase « Si A est vérifié alors B est obligatoirement vérifié » est vraie, sa réciproque « Si B est vérifié alors A est obligatoirement vérifié » n'est pas forcément vraie.

d) ***affirmation d :*** *La somme de 2 multiples de 5 est obligatoirement un multiple de 10*

Avant de mettre les élèves en activité, le professeur propose de reformuler l'énoncé sous la forme d'une affirmation « si ...... alors obligatoirement ..... ». Il fait ensuite tester sa véracité. Cet exercice peut être terminé à la maison.

e) ***affirmation e :*** *La somme du double et du triple d'un nombre est toujours divisible par 5.*

Après avoir reformulé l'énoncé, les élèves cherchent si l'affirmation est vraie.

Il est possible de prouver que l'affirmation est vraie en répertoriant tous les cas possibles : si un nombre se termine par 1, son double se termine par 2, son triple par 3, la somme de son double et de son triple par 5. Elle est donc divisible par 5...Mais cette méthode est longue, et certains élèves préfèrent argumenter que : « quand on ajoute 2 fois et 3 fois ça fait forcément 5 fois ». On peut profiter de cette occasion pour proposer de traduire l'affirmation en langage mathématique, et poser la question de la désignation du même nombre dans une formule. La réponse fait apparaître qu'un même symbole est nécessaire et que par convention, on utilise une lettre.

On note sur le cahier :

- Pour prouver qu'une affirmation est vraie. on peut utiliser le calcul littéral.

f) ***affirmation f :*** *Si deux nombres sont divisibles par 7, alors leur somme est toujours divisible par 7.*

L'étude de chacun des cas possibles ne permet pas de prouver la véracité de l'affirmation, le recours au calcul littéral devient obligatoire : $7\times n + 7\times n' = 7 \times (n + n')$.
Trois difficultés sont prévisibles : traduire « est divisible par 7 » par « peut s'écrire $7 \times n$ *où n est un entier», utiliser deux lettres différentes pour désigner deux nombres différents, et admettre que* $n + n'$ *est un nombre entier.*

La mise en commun permet d'insister sur quelques notions de bases de l'arithmétique.

On note sur le cahier :

- La somme de 2 entiers est un entier . Si a et b sont des entiers alors a + b est obligatoirement un entier que l'on peut noter c par exemple.
- Le produit de 2 entiers est un entier . Si r et s sont des entiers alors $r \times s$ est obligatoirement un entier que l'on peut noter k par exemple.

(On a ainsi la formulation conventionnelle en mathématique et la formulation : « si... alors... »).

- L'affirmation « a est multiple de 7 » ou « a est divisible par 7 » peut se traduire par « a est un entier qui peut s'écrire $7 \times n$ avec n entier».
- L'affirmation « a est un entier qui peut s'écrire $7 \times n$ avec n entier» peut se traduire par « a est multiple de 7 » ou « a est divisible par 7 ».

Après que la question de l'écriture d'un nombre pair a été posée aux élèves et qu'un temps de réflexion leur a été donné.

- L'affirmation « p est un nombre pair » ou « p est divisible par 2 » peut se traduire par « p est un entier qui peut s'écrire $p = 2 \times n$ avec n entier ».
- L'affirmation « p est un entier qui peut s'écrire $p = 2 \times n$ avec n entier » peut se traduire par « p est un nombre pair » ou « p est divisible par 2 ».

g) ***affirmations g et h** : Le produit de deux multiples de 3 est obligatoirement un multiple de 9. Tous les multiples de 21 sont multiples de 3.*

Ces 2 exercices d'application utilisent les propriétés d'associativité et de commutativité de la multiplication. On peut facilement en imaginer d'autres utilisant la distributivité.

Commentaires :

Des suites possibles :

- Les activités décrites ici constituent une initiation au raisonnement déductif en classe de 5ème, les règles de débat sont aussi à travailler dans un cadre géométrique.

- Les notions d'arithmétique peuvent être enrichies tout au long du collège : en fin de collège, on peut envisager qu'un élève sache écrire n + 1 comme suivant de l'entier n, n - 1 comme l'entier précédent n, un nombre impair sous la forme 2n + 1, 3 entiers consécutifs n - 1, n, n + 1,....

A propos de quantificateurs :

- Le programme de collège propose de formuler les propriétés sous la forme « si .. alors... ». Cette formulation peut prêter à confusion : la logique naturelle conduit en effet l'élève à penser qu'une telle affirmation peut être parfois vraie, parfois fausse (l'affirmation « si un nombre est multiple de 3 alors il est multiple de 2 » n'est pas vérifiée avec 9, mais elle l'est avec 6). Pour imposer la dualité « vrai ou faux », le choix a été fait ici de formuler, en début d'apprentissage, les énoncés référents en ayant recours au terme « obligatoirement ». Plus tard, voire l'année suivante, on sous-entendra le « obligatoirement » et on se ramènera à la formulation des manuels.

- Cependant, pour que les élèves se constituent une liste d'énoncés type, les différents énoncés de la fiche ne sont volontairement pas tous formulés sous la forme « si ... alors obligatoirement ...» ; il est alors utile de montrer qu'on peut les reformuler sous cette forme.

- Le quantificateur « quel que soit » est volontairement évité car son emploi dans la phrase « si ...alors ... » peut prêter à confusion : par exemple, dans la formulation « quel que soit l'entier choisi, si il est multiple de 5 ... », l'expression « quel que soit l'entier choisi » mène à choisir n'importe quel nombre, tandis que l'expression « si il est multiple de 5 ... » restreint le choix aux seuls multiples de 5. Les élèves peuvent entendre là deux consignes contradictoires.

Multiples et diviseurs

Dans tout cet exercice les nombres sont des nombres entiers

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est toujours vraie, toujours fausse, ou parfois vraie parfois fausse? justifier.

a) Si l'on enlève un entier à son carré et que l'on ajoute 11, alors on obtient obligatoirement un nombre qui a exactement deux diviseurs.

b) Si deux entiers sont multiples de 5, alors leur somme est obligatoirement un multiple de 5.

c) Si la somme de 2 entiers est un multiple de 5, alors les deux nombres sont obligatoirement multiples de 5.

d) La somme de 2 multiples de 5 est obligatoirement un multiple de 10.

e) La somme du double et du triple d'un nombre est toujours divisible par 5.

f) Si deux nombres sont divisibles par 7, alors leur somme est toujours divisible par 7

g) Le produit de deux multiples de 3 est obligatoirement un multiple de 9.

h) Tous les multiples de 21 sont multiples de 3.

Multiples et diviseurs

Dans tout cet exercice les nombres sont des nombres entiers

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est toujours vraie, toujours fausse, ou parfois vraie parfois fausse? justifier.

a) Si l'on enlève un entier à son carré et que l'on ajoute 11, alors on obtient obligatoirement un nombre qui a exactement deux diviseurs.

b) Si deux entiers sont multiples de 5, alors leur somme est obligatoirement un multiple de 5.

c) Si la somme de 2 entiers est un multiple de 5, alors les deux nombres sont obligatoirement multiples de 5.

d) La somme de 2 multiples de 5 est obligatoirement un multiple de 10.

e) La somme du double et du triple d'un nombre est toujours divisible par 5.

f) Si deux nombres sont divisibles par 7, alors leur somme est toujours divisible par 7

g) Le produit de deux multiples de 3 est obligatoirement un multiple de 9.

h) Tous les multiples de 21 sont multiples de 3.

L'ALGORITHME DE COLLATZ [1]
LA CONJECTURE DE SYRACUSE [2]

D'après *Jeux et malices 96 (jeux et découvertes mathématiques p 16-17)*

C'est un problème de recherche en cycle central.

Présentation

L'algorithme de Collatz peut s'énoncer ainsi :

Choisir un entier différent de zéro ; s'il est pair le remplacer par sa moitié ; s'il est impair le remplacer par son triple auquel on ajoute 1. Poursuivre en appliquant les mêmes consignes aux nombres successivement obtenus.

Présenté ainsi, c'est un algorithme sans critère d'arrêt.

Par exemple, choisissons 3, entier différent de 0.
3 est impair, on le remplace par $3 \times 3 + 1 = 10$;
10 est pair, on le remplace par 5 ;
5 est impair, on le remplace par $3 \times 5 + 1 = 16$;
16 est pair, on le remplace par $16 : 2 = 8$;
8 est pair, on le remplace par $8/2 = 4$;
4 est pair, on le remplace par 2 ;
2 est pair on le remplace par 1 ;
on peut s'arrêter ici car la suite est prévisible : 1 va donner 4 , qui va donner 2, qui va redonner 1.
Le cycle 4, 2, 1 se poursuit indéfiniment.

La conjecture de Syracuse peut se formuler ainsi :

L'algorithme de Collatz amène toujours au cycle 4, 2, 1 quelque soit l'entier choisi.

A l'heure actuelle, la conjecture de Syracuse a été vérifiée pour tous les nombres inférieurs à mille milliards (à titre d'information, tous les entiers jusqu'à 2^{40} ont déjà été testés à l'Université de Tokyo par Nabuo Yoneda), mais il n'a pas été prouvé qu'elle est vraie pour tous les entiers.

Objectifs :
- utiliser un algorithme ;
- émettre une conjecture et chercher à vérifier sa validité ;
- utiliser les notions d'exemple, de contre-exemple, de preuve ;
- prendre conscience que les mathématiques constituent une science vivante.

Matériel :
- la calculette ;
- la fiche annexe « l'algorithme de Collatz »

[1] Lothar Collatz fut étudiant à Hambourg au début des années 30.
[2] Syracuse ne désigne pas ici la ville de Sicile, mais fait référence à l'université de Syracuse (aux Etats-Unis), où le problème fut introduit par Helmut Hollaz, un ami de Collatz, vers 1950. Pendant un mois tout le monde à Yale a travaillé sur ce problème, sans résultat.

Déroulement :
(Dans les séances précédentes les élèves ont découvert ou revu les règles du débat mathématique, et en particulier ce qu'est une affirmation vraie).

1/ Le professeur distribue la feuille annexe et propose de faire fonctionner l'algorithme avec 3. Il demande ensuite aux élèves d'essayer individuellement avec un entier de leur choix inférieur à 20. Une première mise en commun montre que pour chacun l'algorithme aboutit au cycle 4, 2, 1.

2/ Les élèves sont groupés par 3 ou 4, le professeur leur soumet alors la question : « l'affirmation *l'algorithme de Collatz conduit obligatoirement au cycle 4, 2, 1*, est-elle vraie ou fausse ? ». Ils disposent d'une calculette et d'un temps limité. Le débat peut ensuite s'organiser en commençant par invalider les contre-exemples des groupes qui pensent que l'affirmation est fausse .
Certains pensent alors que l'affirmation est toujours vraie. La classe devra leur rappeler que des exemples même nombreux ne suffisent pas pour prouver qu'une affirmation est vraie.
Le consensus peut alors se faire pour dire qu'on ne peut pas se prononcer dans la classe sur la véracité de l'affirmation. Le professeur peut alors clore le débat en insistant sur le grand nombre d'exemples testés à Tokyo, qui ne permettent pourtant pas de prouver la conjecture.

On note sur le cahier :

- L'absence de contre-exemple ne suffit pas à prouver qu'une affirmation est toujours vraie.
- Une affirmation vérifiée sur un grand nombre d'exemples constitue une **conjecture**. Elle n'est pas pour autant obligatoirement vraie.
- Une grande partie de l'activité mathématique consiste à :
  - émettre des conjectures ;
  - tenter de prouver qu'elles sont vraies (ou qu'elles sont fausses).
- Une conjecture dont on a prouvé qu'elle était vraie devient un **théorème**.

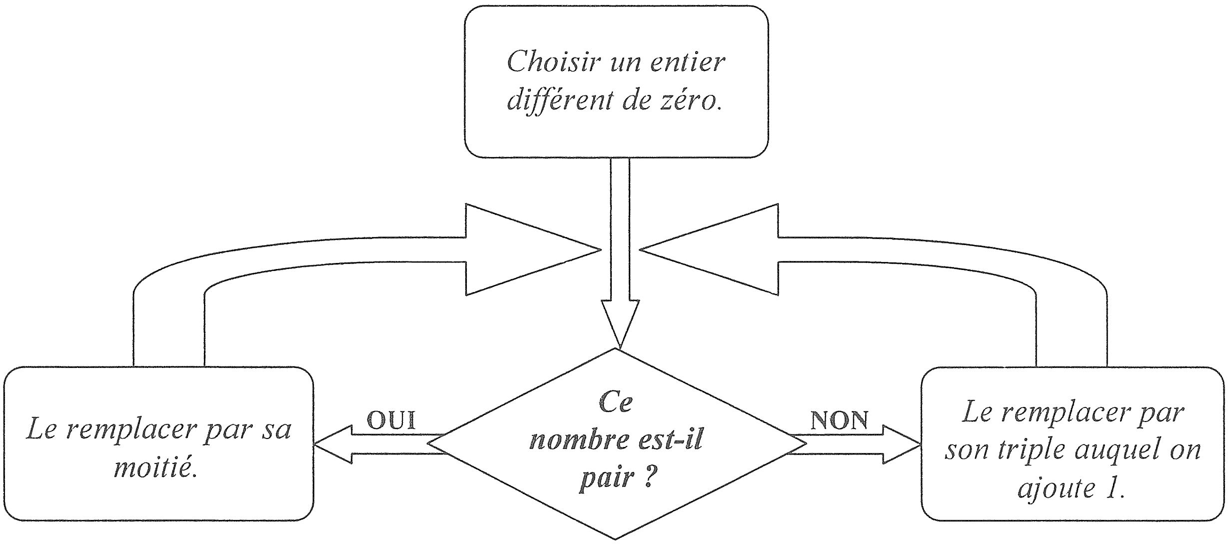
Commentaires :

- Les nombres inférieurs à 50 réservent déjà pas mal de surprise : parmi eux 27, 31, 41, 47 sont intéressants... En effet, avec ces entiers, il faut plus de 100 pas de calcul pour arriver à 1 !

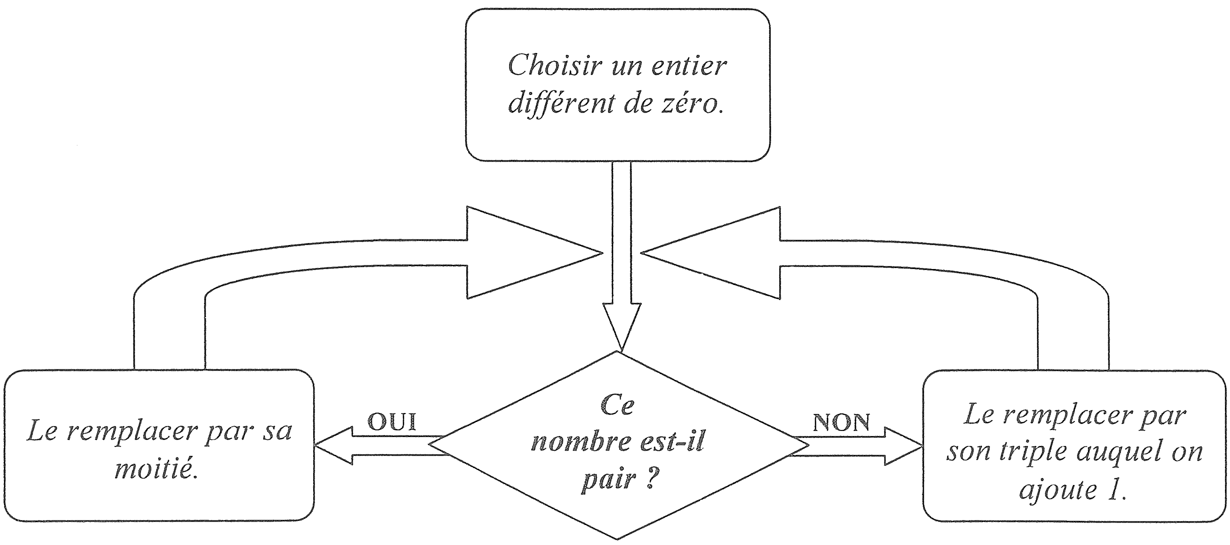
- Les calculs de l'algorithme peuvent être effectués à la calculette, mais sont aussi l'occasion d'utiliser un tableur (EXCEL permet de programmer facilement l'algorithme avec l'instruction SI(MOD(AI;2)=0;AI/2;1+3*AI), AI désignant la cellule où figure le nombre choisi ou le dernier résultat obtenu).

- Durant leur scolarité au collège, les élèves rencontrent rarement des problèmes dont la solution est encore l'enjeu de recherches ; pour eux « les maths » constituent une science figée où tout est « sûr ». L'algorithme de Collatz est une activité facilement abordable qui peut permettre de modifier cette image et de montrer que « les maths » sont vivantes.

L'ALGORITHME DE COLLATZ



L'ALGORITHME DE COLLATZ



La course à 20

DES JEUX POUR REINVESTIR

JEU DE CARTES DES TABLES DE MULTIPLICATION

(Pour 2 à 5 joueurs)

D'après « Arithmétique au collège » IREM de Grenoble (1979-réédition 1988)

MATERIEL

- Un jeu constitué des 45 cartes données en annexe et collées sur du carton (éventuellement plastifiées).

REGLES DU JEU

Les nombres inscrits sur les cartes sont ceux qui apparaissent dans les tables de multiplication du 2 au 10.

- Un joueur distribue une à une, six cartes à chacun des joueurs.
- Le paquet de cartes restantes est posé sur la table : il servira de pioche.
- On tourne dans le sens des aiguilles d'une montre.
- Le joueur n°1 pose une carte de son jeu sur la table et annonce un des diviseurs du nombre qu'il a posé ; le joueur n°2 doit fournir une carte portant un multiple de ce diviseur (on considère uniquement les diviseurs supérieurs à 1 et inférieurs à 11).
- Le joueur n°2, s'il peut le faire, fournit et annonce un des diviseurs du nombre qu'il a posé. Le joueur n° 3 doit alors fournir à son tour une carte portant un multiple de ce diviseur.
- Si un joueur ne peut pas fournir, il pioche une carte et passe son tour…
- Et ainsi de suite…
- Le joker remplace n'importe quelle carte du jeu. Le joueur qui le pose annonce sa valeur.

Le gagnant est le joueur qui le premier n'a plus de cartes (ou bien celui qui garde en main le moins de cartes).

Exemple :

- Le premier joueur pose un 60, il doit demander au second de poser un multiple d'un des diviseurs de 60 (les diviseurs de 60 supérieurs à 1 et inférieurs à 11 sont 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 et 10).
  Supposons qu'il choisisse un multiple de 10, il annonce : « table du 10 ».
- Le second joueur peut alors poser le 10, ou le 20,ou le 30 …
  Supposons qu'il pose le 20. Il doit demander au suivant de poser un multiple d'un des diviseurs de 20 (les diviseurs de 20 supérieurs à 1 et inférieurs à 11 sont 2 ; 4 ; 5 et 10).
  Supposons qu'il choisisse un multiple de 5, il annonce : « table du 5 ».
- Le troisième joueur peut alors poser le 5, ou le 10 ou le 15 …
  S'il ne peut pas fournir et s'il n'a pas de joker, il pioche à son tour. Le quatrième joueur doit alors fournir ce qui était demandé au troisième.

15

15

15

16

16

16

18

18

18

20

20

20

21

21

21

24

24

24

25

25

25

27

27

27

28

28

28

32

32

35

35

35

35

36

36

36

45

45

45

48

48

48

49

49

49

50

50

50

54

54

54

56

56

56

4	5 5 5	<u>6</u> <u>6</u> <u>6</u>
7 7	8 8 8	<u>9</u> <u>9</u> <u>9</u>
10 10	12 12 12	14 14 14

100

100

100

90

90

90

81

81

81

80

80

80

72

72

72

70

70

70

64

64

64

63

63

63

60

60

60

2

2

2

3

3

3

42

42

42

40

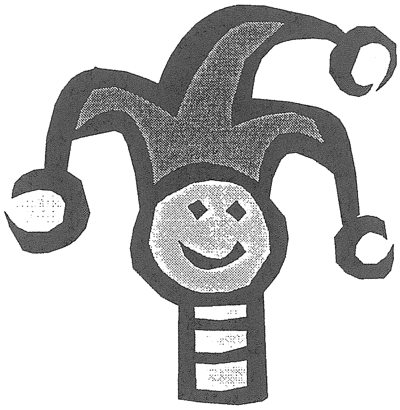
30

30

30

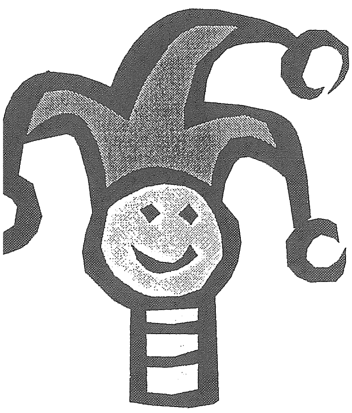
30

J



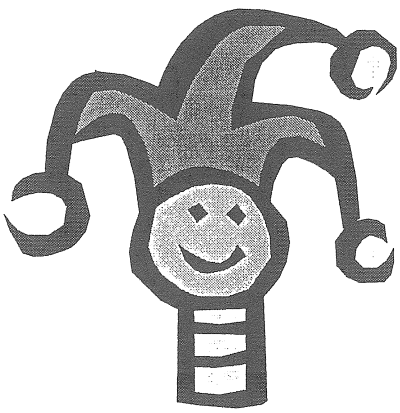
J

J



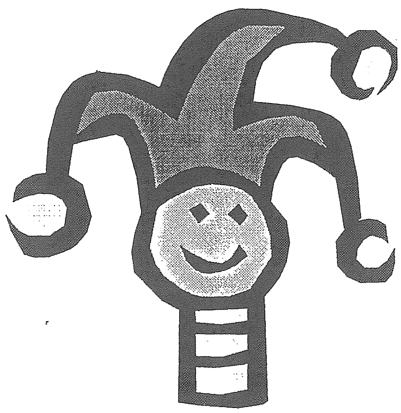
J

J



J

J



J

JEU DE JUNIPER GREEN

(Pour 2 joueurs)

D'après la revue « Pour la science n° de juillet 97 ». Ian Stewart y décrit le jeu développé à l'origine par Richard Porteous, enseignant à l'école de Juniper Green.

MATERIEL

- un plateau de jeu (annexe 1 : nombres de 1 à 20 ; annexe 2 : nombres de 1 à 40 ; annexe 3 : nombres de 1 à 100) ; *on pourra photocopier l'une des annexes et la glisser dans une pochette transparente ou bien travailler directement sur des transparents ;*
- des feutres effaçables.

REGLES DU JEU

- Le joueur qui commence barre un nombre pair.
- Ensuite, chaque joueur, à tour de rôle, barre un nombre parmi les multiples ou les diviseurs du nombre barré par son adversaire.

Un joueur est déclaré gagnant lorsque son adversaire ne peut plus jouer.

Exemple : Sur un plateau de 20 nombres

- Si le joueur A barre le 12, le joueur B doit barrer un multiple ou un diviseur de 12.
  Il n'y a pas de multiple de 12 sur le plateau, il a donc le choix entre les diviseurs de 12 : 1 ; 2 ; 3 ; 4 et 6 . Supposons que le joueur B barre le 3.
- Le joueur A peut alors barrer le 1 , le 6 , le 9, le 15 ou le 18. Supposons qu'il barre le 9.
- Le joueur B ne peut plus barrer que le 1 ou le 18. Supposons qu'il barre le 1.
- Le joueur A peut alors barrer n'importe quel nombre restant sur le plateau. Supposons qu'il barre le 19. Le joueur B ne peut plus jouer. Le joueur A est déclaré gagnant.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16
17	18	19	20

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16
17	18	19	20
21	22	23	24
25	26	27	28
29	30	31	32
33	34	35	36
37	38	39	40

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

LE MULTISCRABBLE

(Pour 2, 3 ou 4 joueurs)

Ce jeu élaboré par le groupe collège de l'I.R.E.M de Lyon a été adapté et présenté dans :
JEUX 6 - brochure A.P.M.E.P. n° 144- 2002 sous le nom « Jeu des multiples »

BUT DU JEU

- Réaliser le maximum de points en formant des nombres de 2, 3 ou 4 chiffres qui sont tous des multiples de 3. Si ces nombres sont aussi des multiples de 2, 5 ou 9, des bonus sont attribués.

MATERIEL

- un plateau de jeu (annexe 1) ; 150 pions (annexe 2) ; des feuilles de marque pour compter les points (annexe 3).

DEBUT DE PARTIE

- Chaque joueur tire un pion "chiffre". Celui qui a le plus grand commence la partie, et on tourne dans le sens des aiguilles d'une montre.
- Chaque joueur tire 8 pions. Le premier joueur doit occuper des cases successives incluant la case centrale en formant un nombre de 3 chiffres multiple de trois (Figure 1).

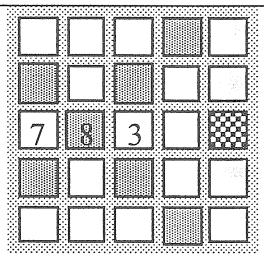


Figure 1

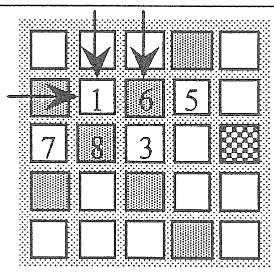


Figure 2

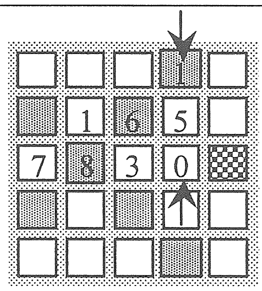


Figure 3

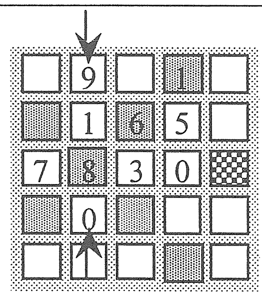


Figure 4

REGLES DU JEU

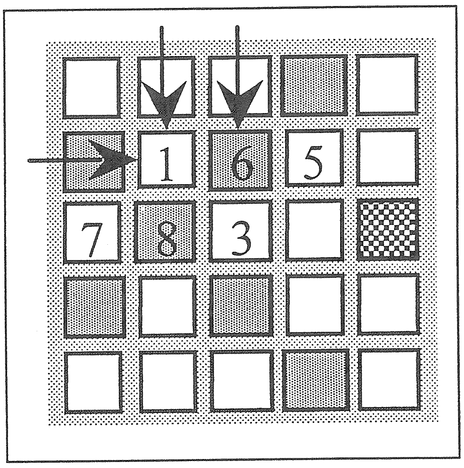
- Chaque nombre formé doit avoir 2, 3 ou 4 chiffres et être un multiple de 3. Un nombre ne commence jamais par zéro.
- On ne peut déposer que 1, 2 ou 3 pions en utilisant au moins un chiffre déjà posé pour former un ou plusieurs nombres (Figure 2).
- Les pions déposés sont obligatoirement alignés, horizontalement ou verticalement mais pas en diagonale, d'un même côté ou de part et d'autre d'un ou deux pions déjà posés. Ces nombres sont lus de gauche à droite ou de haut en bas. On peut ainsi à la fois former un nombre et en compléter plusieurs (Figures 3 et 4).
- Un joueur qui ne peut pas jouer ou qui ne veut pas jouer (stratégie) pioche un pion et passe son tour.

FIN DE PARTIE

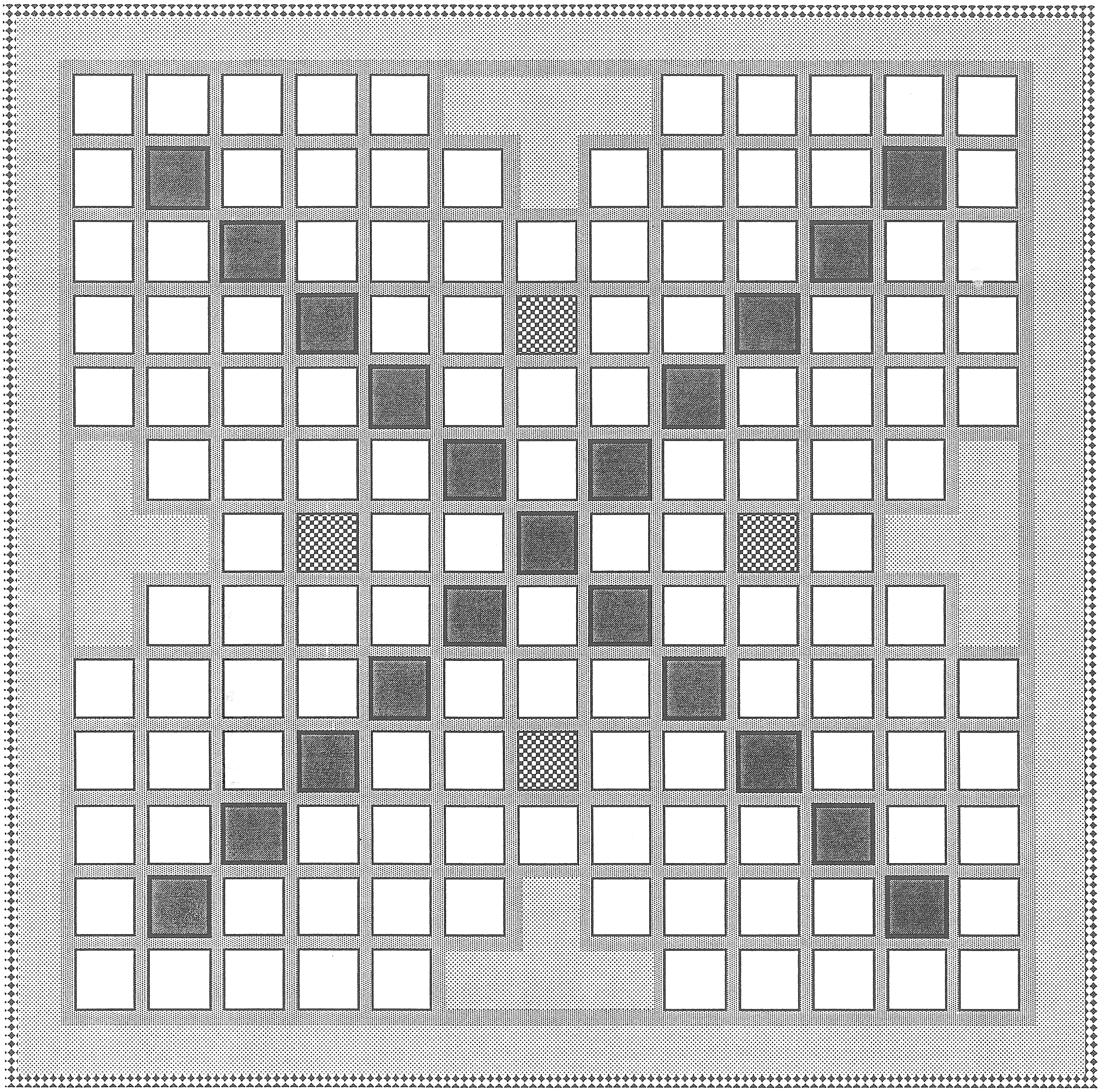
- Le jeu s'arrête à la fin du tour où un joueur a épuisé tous ses pions. En finissant le tour, les autres joueurs jouent s'ils le peuvent. Ils décomptent alors de leur total les points qui leur restent, et le gagnant est celui qui totalise le plus de points.

COMPTAGE DES POINTS

- Un ou plusieurs nombres étant formés, on ajoute les chiffres du ou des nombres formés.
- Un pion posé sur une case grise compte double, triple sur une case quadrillée, et ceci au moment où il est joué. Si ce pion participe à deux nombres, il compte double pour chacun des deux nombres, au moment où il est posé.
- Un nombre qui est aussi multiple de 9 donne 5 points de bonus ;
- Un nombre pair ou multiple de 5 donne 2 points de bonus. Un multiple de 10 donne donc 4 points de bonus.
- Pour chaque coup, le joueur indique sur sa feuille de marque les différents gains et totalise en bout de ligne.
- Avec 1, 6 et 5 (Figure ci-contre), le deuxième joueur obtient d'abord les points donnés par les trois nombres qu'il a formés :
  $(1 + 6 + 5) + (1 + 8) + (6 + 3) = 30$.
  Le 6 est posé sur une case grise : il compte double à la fois pour 165 et pour 63, donc il faut compter 12 points de plus, puis 10 points de bonus pour les deux multiples de 9 (18 et 63) et 2 points de bonus pour le multiple de 5 (165), ce qui lui fait un total de $30 + 12 + 10 + 2 = 54$.



Plateau de jeu



Réalisation du jeu

Photocopier le plateau ci-dessus en utilisant l'agrandissement A4-A3, le coller sur du carton et éventuellement le plastifier pour mieux le protéger.

Photocopier les pions de la fiche suivante en taille réelle. Leurs dimensions sont prévues pour le plateau agrandi comme indiqué ci-dessus. Les coller sur du carton, éventuellement les plastifier et les découper.

150 Pions

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Feuille de marque

Coup n°	Nombres formés	Points du nombres	Multiple de 9 (+5)	Nombre pair (+2)	Multiple de 5 (+2)	Cas double ou triple	Total
						Points à soustraire	
						TOTAL	

Feuille de marque

Coup n°	Nombres formés	Points du nombres	Multiple de 9 (+5)	Nombre pair (+2)	Multiple de 5 (+2)	Cas double ou triple	Total
						Points à soustraire	
						TOTAL	

L'arithmétique au collège : éléments de bibliographie

Arithmétique :

- A.P.M.E.P., (2002), *Jeux 6*, Brochure n° 144
- Emile Fourrey, (réédition 1899), *Récréations arithmétiques,* ACL-Editions, 50 rue des Ecoles 75005 Paris
- IREM d'Aix-Marseille, Groupe Collège, (2000), *L'apport du numérique dans l'apprentissage du raisonnement au collège,*
- IREM de Bordeaux, *(*1999), *Initiation à l'arithmétique*
- IREM de Grenoble, (1979, réédition 1988), *Arithmétique au collège*
- IREM de Montpellier, (1995), *Arithmétique, le retour*
- IREM de Montpellier, (1999), *Fragments d'arithmétique*
- IREM d'Orléans-Tours, (1986), *Démarches algorithmiques en maths (au collège),* I.O. n°25

Calcul mental

- Boule F. (1994), *Jeux de calcul, cycle des apprentissages fondamentaux et des approfondissements,* Collection Pratique pédagogique, Armand Colin
- Boule F., (1996), *Regards sur le calcul mental*, Grand N, n°58 p. 39-52, IREM de Grenoble
- Butlen D., Pezard M. (2000), *Calcul mental et résolution de problèmes numériques au début du collège*, Repères IREM n° 41. p. 5-24, Topiques éditions - Metz
- Charnay R., Combier G., Dussuc M.-P. (2003), *Cap maths CM1, le guide des activités pour l'enseignant*, Hatier
- Charnay R., Combier G., Dussuc M.-P. (2004), *Cap maths CM2, le guide des activités pour l'enseignant*, Hatier
- ERMEL, (1999), *CM 2 : Apprentissages numériques et résolution de problèmes,* INRP, Hatier
- IREM de Brest, Groupe Hétérogénéité en sixième, (1997), *Le Calcul mental en sixième,*
- IREM de Clermont-Ferrand, (1994), *Calcul mental et automatismes*
- IREM de Dijon, (1997), *Le Calcul Mental à l'Ecole*
- IREM de Lorraine,(1995), *Dominos mathématiques une Activité ludique au collège*
- Lethellieux C., (1993), *Le calcul mental au cycle des approfondissements*, Collection Pratique Pédagogique, A. Colin

Un jeu de société

- Trouillot E., (1999), Mathador, SARL Mathador Oiselay

itre : DE L'ARITMETIQUE AU COLLEGE ?

uteurs : Bernard Anselmo, Monique Bonnet, Georges Combier, Paul Planchette, Hélène Zucchetta

diteur : IREM de Lyon

ate : Juin 04

.ésumé : L'arithmétique n'occupe pas une place importante dans les programmes de collège de 1995 ; cependant elle est sous-jacente à de nombreuses activités qui y sont pratiquées : calcul sur les mesures, calcul littéral, la proportionnalité… qui requièrent une bonne maîtrise des nombres et en particulier des entiers. L'enseignement de l'arithmétique, tout en contribuant à développer cette maîtrise, permet de construire des compétences dans les domaines du raisonnement déductif et du calcul littéral. Plus facilement que d'autres domaines des mathématiques, l'arithmétique permet de faire vivre aux élèves la globalité de l'activité mathématique (effectuer des essais, établir des conjectures, les tester, engager la recherche d'une preuve…), et tout cela dans un temps raisonnable.

Après une première partie consacrée à une réflexion sur les objectifs de l'enseignement de l'arithmétique et sur la place du calcul au collège, cette brochure propose dans une seconde partie, des activités analysées pour les différents niveaux de classe. Ces activités qui prennent des formes variées : résolution de problèmes, construction d'algorithme, recherche de preuve, jeu, ont toutes fait l'objet d'expérimentation.

Aots clés : Arithmétique, Calcul, Multiples et Diviseurs, Raisonnement déductif, Jeux, Algorithmes

'ormat : A4

Iombre de pages : 100

I°ISBN : 2 906 943 55-9

'rix HT : 10 euros