Annie **PEIX**
Paul **PLANCHETTE**
Jean François **ZUCCHETTA**

Analyse d'une formation en mathématiques en licence de Sciences de l'Education

Tome 1

INSTITUT de RECHERCHE sur l'ENSEIGNEMENT des MATHEMATIQUES
Académie de Lyon

Université Claude BERNARD Lyon 1 - 43, bd du 11 novembre 1918
69622 VILLEURBANNE Cedex
Adresse électronique : iremlyon@univ-lyon1.fr
Site Internet : http://www.univ-lyon1.fr/IREM/

PREFACE

La formation des enseignants est depuis quelques années un objet de travail pour les IUFM, mais elle est également un objet de travail pour les universités à travers la création et le développement d'enseignements dits d'ouverture ou de pré-professionnalisation. Bien qu'en volume ceux-ci restent forcément marginaux par rapport à l'ensemble des cursus universitaires orientés par vocation vers des contenus disciplinaires, la création de tels enseignements et leurs développements sont souvent pensés avec une finalité de formation de futurs enseignants en complément des formations disciplinaires aux concours, elles-mêmes en évolution. Pour les étudiants qui envisagent de devenir enseignants dès leurs années de DEUG, ces enseignements donnent l'occasion de réfléchir et de se préparer à un métier dans un contexte propice à l'étude. Par ailleurs, ces enseignements peuvent faciliter l'entrée à l'IUFM par la réussite aux tests : c'est le cas pour l'enseignement présenté dans ce travail. Les étudiants leur accordent d'autant plus d'importance. Ces enseignements de pré-professionnalisation pour l'enseignement sont orientés généralement vers une approche didactique de l'enseignement pensée comme une communication de savoir.
Cependant, plusieurs enseignements de ce type sont aussi finalisés par l'approfondissement des mathématiques et de leur signification, visant entre autres une modification du rapport aux mathématiques orientée vers la découverte du processus de construction des connaissances mathématiques. Cette découverte peut se faire, pour les étudiants, à travers divers contextes et situations d'étude : études historiques, épistémologiques et/ou constructions collectives de connaissances et méthodes et de leurs significations.
Dans le travail présenté, c'est ce dernier aspect qui est privilégié avec à chaque fois un contenu mathématique consistant. Le point de vue épistémologique y est très présent à travers la réflexion sur la signification des connaissances construites et leur portée. Nous y reviendrons ci-dessous.

Mais quelques mots d'abord sur l'historique et sur l'intérêt de ce document. Comme le disent les auteurs, la formation qu'ils analysent a commencé en 94/95 pour des étudiants de sciences de l'éducation de Lyon2 dans un module de 24 heures destiné à faciliter l'entrée à l'IUFM d'abord, puis la réussite au concours de professeur des écoles ensuite. Ce module était organisé par l'ISPEF. Des modules analogues existent dans d'autres formations de Lyon 2, par exemple pour les étudiants de psychologie. En 97-98, le directeur de l'ISPEF d'alors, Philippe Meyrieu, devant l'intérêt des étudiants pour cette formation et l'investissement important des formateurs auteurs de cette brochure, leur a demandé de réfléchir dans le cadre de l'IREM à ce que pourrait être une formation scientifique et mathématique pour des étudiants d'origine littéraire. Les formateurs ont décidé de travailler cette question en la resserrant sur la mise en relation de leurs objectifs explicites et implicites de formation et de leur ingénierie, ainsi que sur une évaluation de cette dernière. Ce travail d'enseignement (dans le module considéré) et de recherche sur cet enseignement a donné lieu à une convention entre l'ISPEF et l'IREM de Lyon pour les deux années de l'étude. C'est un grand plaisir pour moi de présenter ce travail puisque j'étais alors Directeur de l'IREM et que j'ai modestement participé à quelques réunions de travail de l'équipe.

L'intérêt des rapports d'étape élaborés par cette équipe à la fin de chaque année a incité l'IREM à lui proposer de les publier, sous une forme remaniée en tant que brochures de l'IREM de Lyon.
L'intérêt d'une telle publication est multiple.
En tant que témoignage sur une conception et une pratique de la formation en pré-professionnalisation, ce travail donne à voir – et éventuellement, on peut le souhaiter, à expérimenter et retravailler – divers dispositifs et situations de formation.
De ce point de vue, cette étude a un aspect exemplaire par le fait qu'elle donne une référence pour un type d'enseignement nouveau pour lequel tout est à construire, non seulement les contenus, les situations de travail, mais la définition même des objectifs en termes d'acquisition et de modalités d'évaluation. Il est à souhaiter que d'autres travaux du même type viennent nourrir les enseignements de pré-professionnalisation qui existent maintenant. Une telle diffusion de pratique et de ses analyses n'a évidemment rien à voir avec une communication de recettes. Une des qualités de ce travail est de nous livrer un mode d'emploi avec ses présupposés et certains effets possibles sous certaines conditions, parmi lesquels la formation antérieure des étudiants apparaît comme une variable importante.
En tant que recherche, ce travail s'appuie sur des travaux en didactique dont il utilise les ingénieries et les méthodologies. En particulier, il témoigne de la pertinence de travaux antérieurs de l'IREM de Lyon sur le problème ouvert et l'initiation au raisonnement déductif qui sont heureusement exploités dans un contexte de formation professionnelle.
Comme recherche, ce travail est publié sous forme de brochure IREM, mais sa qualité et son intérêt méritent cependant une diffusion sous forme d'articles dont je souhaite vivement la réalisation.

Du point de vue de la recherche en didactique, ce travail s'inscrit dans un courant en plein développement qui vise à observer, décrire et analyser des pratiques d'enseignement et de formation. Dans ce sens, prendre l'enseignement, ici la pré-professionnalisation, comme objet d'étude est un moyen de la faire progresser. Communiquer et diffuser ces études est ainsi un moyen de capitaliser les connaissances à leur sujet.
Comme autre qualité de cette recherche, notons la clarté et l'explicitation des références et du cadre d'évaluation, l'analyse serrée des relations entre les divers observables et leurs significations. Il s'agit ainsi d'un travail expérimental contrôlé dont les résultats sont présentés avec une honnêteté rigoureuse, honnêteté intellectuelle et rigueur étant justement deux qualités que les formateurs souhaitent développer auprès de leurs étudiants.

Un autre aspect important de cette ingénierie est une organisation minutieuse du temps d'enseignement pour prendre en compte le temps d'apprentissage et faire entrer les étudiants dans une logique de réussite. La relative courte durée de la formation (24 heures sur 12 séances) semble faire une gageure de cet objectif, d'autant plus que les autres objectifs et enjeux de cette formation se situent sur plusieurs niveaux.
Les enjeux se partagent entre une formation à court terme, permettant la réussite aux tests d'entrée à L'IUFM, et une formation à plus long terme visant à développer un

rapport positif aux mathématiques. Le rapport ainsi visé inclut la compréhension de la signification du jeu mathématique et l'aptitude à mettre en œuvre une rigueur intellectuelle appropriée à la situation. Un tel rapport aux mathématiques est certainement pour un futur professeur d'école une condition de la qualité de son enseignement, mais il est aussi important en soi pour des étudiants littéraires, en tant que culture scientifique.
Ces enjeux amènent les auteurs à expliciter leurs objectifs et à les décliner en situations permettant de travailler simultanément sur plusieurs points.
La résolution en groupes de problèmes judicieusement choisis accompagnée de débats de validation soigneusement anticipés et orientés, permet d'acquérir des compétences aussi bien en résolution de problèmes que sur les contenus travaillés. Cette organisation permet également de travailler sur le sens des connaissances en jeu ainsi que sur le contrat d'enseignement des mathématiques, particulièrement pour la géométrie. L'explicitation de règles du contrat permet également de montrer la signification du jeu mathématique pour lui-même par rapport à l'objectif de certitude en termes de raisonnement déductif sur des objets dont les propriétés sont partagées.
Le travail qui se mène ainsi sur la démonstration, sa signification, ses méthodes, et les niveaux de rigueur relatifs aux contextes et situations, est de nature épistémologique et représente une composante essentielle de cette formation, aussi bien pour un futur professeur d'école, répétons-le, que comme formation et culture scientifique. Elle témoigne de la profondeur de la réflexion de l'équipe. A travers le débat de preuve, les étudiants sont ainsi amenés à travailler sur l'élaboration et la communication de résultats mathématiques.

La forte composante sociale de ce travail d'interactions et de production ainsi vécu par les étudiants, est à mettre en relation avec des formes de travail plus «ouvertes » qui se développent de plus en plus dans le système scolaire actuel, pour prendre en compte la nécessité de formation à des compétences plus complexes.
Si je ne m'étends pas sur le travail d'acquisition de savoirs-faire techniques, c'est parce qu'il est plus classique, bien que soigneusement structuré comme les fiches fournies aux étudiants le montrent. La structuration de ces fiches est en partie le fait du travail antérieur de membres de l'équipe sur les méthodes d'évaluation formatrice.

Au début de ce travail, cette équipe était composée de professeurs de collège ayant une longue et riche expérience de recherche à l'IREM dans des domaines variés, acquise aussi bien lors de travaux effectués au sein de divers groupes de l'IREM de Lyon, qu'à travers une formation en DEA de didactique des disciplines scientifiques. Depuis, Annie Peix a été recrutée à l'IUFM de Lyon, ses deux autres collègues Paul Planchette et Jean-François Zucchetta continuent à travailler dans leurs collèges et comme formateurs académiques. Ils participent tous trois à une recherche-développement sur la conduite de problèmes de recherche à l'école élémentaire. Je leur rends ici un hommage bien mérité pour ce beau travail en souhaitant qu'il soit apprécié et utilisé par les formateurs.

Claude Tisseron

Sommaire

Présentation p.2

Partie 1 : Etude des caractéristiques du public étudiant p.4

Partie 2 : Description et analyse d'une formation en mathématiques et d'une pratique de formation pour des étudiants non scientifiques de licence se destinant aux métiers de l'enseignement p.6

1. Enjeux de la formation, objectifs généraux p.7
2. Les choix de contenus p.9
3. Objectifs d'apprentissage p.11
   3.1 Arithmétique p.11
   3.2 Calcul dans D et Q p.12
   3.3 Géométrie p.13
   3.4 Proportionnalité et applications p.16
4. Choix globaux d'organisation et d'évaluation p.17
   4.1 Choix sur l'organisation globale des activités en termes de contenus p.17
   4.2 Choix sur ce qui est dit en classe par les étudiants et par l'enseignant p.20
   4.3 Choix sur l'organisation des activités des étudiants p.21
   4.4 Les modes d'évaluation p.23

Partie 3 : Description et analyse d'une séquence de formation p.24

1. Situation 1, dite du « Rectangle d'Euclide » Règles du débat mathématique p.26
2. Situation 2 : trouver une stratégie p.35
3. Situation 3 : communiquer une démonstration par écrit p.38
4. Situation 4 : les implicites dans une démonstration de géométrie p.42

Partie 4 : Cahier des fiches de cours, exercices, et corrigés, distribués aux étudiants p.44

Partie 5 : Eléments d'évaluation de la formation p.58

1. Réussite au test de sélection de l'IUFM de Lyon p.59
2. Admission à l'IUFM de Lyon p.59
3. Réussite aux concours de recrutement p.60

Bibliographie p.61

Présentation

Présentation

Ce texte présente le travail de recherche et développement d'un groupe IREM, effectué dans les années 97/98 et 98/99, grâce à un financement de l'ISPEF-Lyon 2 (Institut des Sciences et Pratiques d'Education et de Formation), dans des termes fixés par une convention qui a lié pour deux années Lyon 1 et Lyon 2, pour l'IREM et l'ISPEF.

Le point de départ de ce travail est l'élaboration et la mise en oeuvre effective d'une formation en mathématiques, pour des étudiants de licence de sciences de l'éducation (ISPEF-Lyon 2) qui se destinent aux métiers de l'enseignement, et plus particulièrement au professorat d'école. Ces étudiants sont pour la plupart d'entre eux de formation non scientifique. Chaque année, depuis sa mise en œuvre en 94/95, cette formation a donné lieu à divers ajustements et modifications, compte tenu des projets des étudiants et de leurs difficultés. Plusieurs de ces modifications ont fait l'objet de véritables expérimentations, destinées à tester l'efficacité de certains dispositifs de formation. Ce texte présente la description et l'analyse de la formation de 97/98 et 98/99 telle qu'elle a été analysée en 99.

Cinq parties composent les deux tomes du présent document :

1. Etude des caractéristiques du public étudiant
2. Description et analyse d'une formation en mathématiques et d'une pratique de formation pour des étudiants non scientifiques de licence se destinant aux métiers de l'enseignement
3. Description et analyse du déroulement de certaines séquences de formation
4. Cahier des fiches de cours, exercices, corrigés, évaluation, distribués aux étudiants
5. Eléments d'évaluation de la formation

Dans le premier tome, sont développées les parties 2, 3, 4. Quelques éléments nécessaires à la compréhension et concernant les parties 1 et 5 sont donnés. Ils seront largement complétés dans le tome 2.

Partie 1

Etude des caractéristiques du public étudiant

Partie 1
Etude des caractéristiques du public étudiant

Dans cette partie, trois domaines sont étudiés :
- l'itinéraire scolaire et universitaire des étudiants, leur projet professionnel ou culturel,
- les connaissances et compétences en mathématiques avant formation en licence, sur lesquelles ancrer les apprentissages,
- le rapport aux mathématiques des étudiants (ou du moins certains aspects de ce rapport, différents des connaissances mathématiques elles-mêmes), et son évolution sur l'année de formation. Il s'agit plus précisément ici du rapport à l'objet "faire des mathématiques".

Le dispositif d'étude du public a été en partie expérimenté dans les conditions suivantes :
- pour l'itinéraire scolaire et étudiant, le projet professionnel, les caractéristiques du rapport aux mathématiques : trois fiches ont été expérimentées en mars - avril 98, à titre de pré-test. Ce premier recueil a permis de retenir le dispositif définitif à déployer sur 98/99. Les fiches constituant ce dispositif figurent dans le tome 2.
- pour les connaissances et compétences mathématiques des étudiants en situation de résolution de problèmes (recherche et preuve), un dispositif d'observation a été expérimenté en octobre 97 pour l'arithmétique, un autre pour la preuve en géométrie en 98.

Le dispositif et les résultats concernant cette étude du public sont développés dans le tome 2.

Partie 2

Description et analyse d'une formation en mathématiques et d'une pratique de formation pour des étudiants non scientifiques de licence se destinant aux métiers de l'enseignement

Partie 2
Description et analyse d'une formation en mathématiques et d'une pratique de formation pour des étudiants non scientifiques de licence se destinant aux métiers de l'enseignement

Depuis 94/95, notre réflexion a porté sur les objectifs, l'élaboration des séquences de formation, l'analyse après mise en oeuvre. Prenant la mesure des difficultés des étudiants, nous avons procédé à des expérimentations et des modifications diverses. Notre projet est de décrire la formation telle que nous la voyons maintenant, à la fin de l'année scolaire 97/98, et de présenter notre pratique de formation, dans un double objectif de communication et d'étude.
L'analyse de la formation proposée, la confrontation entre description d'une pratique et pratique effective, et l'évaluation des effets à moyen terme de la formation en termes de compétences développées par les étudiants, donneront des outils pour évaluer et modifier la formation existante.
Ce texte clarifie nos objectifs et le paradigme dans lequel ils sont choisis, les choix d'organisation et les contenus au travers desquels ces objectifs sont instanciés, les modes d'évaluation, et la façon dont nous nous y prenons pour la mise en oeuvre.

Le cadre de description adopté est celui que propose Aline Robert dans son article intitulé "Projets longs et ingénieries pour l'enseignement universitaire : questions de problématique et de méthodologie. Un exemple : un enseignement actuel de licence en formation continue" (RDM, vol.12, n°2-3, 1992). Cet article fait suite à une recherche en didactique des mathématiques concernant l'élaboration et la description de projets longs (projets sur une année), et tient compte des différents travaux dans ce domaine.

Notre plan pour cette partie est le suivant :

1. Enjeux de la formation ;objectifs généraux
2. Choix de contenus
3. Objectifs d'apprentissage
4. Choix globaux d'organisation et d'évaluation

1. Enjeux de la formation, objectifs généraux

Les enjeux de la formation sont de contribuer au développement, chez nos étudiants de formation en général non scientifique, de compétences en mathématiques qui se situent à deux niveaux :
- d'une façon générale, notre but est d'ouvrir l'accès à la culture scientifique, et de développer des aptitudes à mettre en oeuvre une rigueur intellectuelle appropriée ;
- plus spécifiquement, il s'agit pour nous de donner aux étudiants les moyens de la réussite à l'IUFM, et de former des adultes capables de faire des mathématiques et d'apprendre des mathématiques à des élèves.

Notre réflexion s'inscrit dans le cadre théorique de la didactique des mathématiques de l'école française, dont nous rappelons les deux hypothèses fondamentales :

- l'hypothèse constructiviste, selon laquelle les apprenants construisent eux-mêmes leurs connaissances et le sens de ces connaissances, par la prise de conscience de contradictions, suivie de leur dépassement ;

- l'hypothèse épistémologique, qui consiste à considérer que ce sont les problèmes et les situations qui sont à la source de la signification des connaissances mathématiques.

Dans les recommandations de l'époque relatives au concours de recrutement des professeurs des écoles (B.O. de l'Education nationale n°43, 24/11/94), on peut lire :

> "L'épreuve de mathématiques permet de mettre en évidence d'une part les qualités de raisonnement logique du candidat, son aptitude à utiliser des outils mathématiques, à interpréter des résultats dans les domaines numériques et géométriques, et à formuler avec rigueur sa pensée à l'aide des différents modes d'expression et de représentation [...] On évaluera la rigueur du raisonnement logique, la capacité à utiliser diverses représentations, à maîtriser les relations dans l'espace."

Il faut donc former le raisonnement des étudiants, les faire entrer dans le monde scientifique, les rendre capables de mobiliser des connaissances en résolution de problèmes, les entraîner à formuler avec un niveau de rigueur "acceptable" une pensée qui diffère souvent de la pensée et de la logique naturelles.

De tels objectifs nous semblent comporter un préalable : donner aux étudiants le goût, l'envie de faire des mathématiques, et d'abord faire en sorte qu'ils se sentent capables de réussir dans cette discipline.

Les codes utilisés pour les objectifs généraux serviront à les désigner dans la suite du texte.

<u>Objectif 1</u> (RM) : Créer chez les étudiants un rapport aux mathématiques positif :

- rendre confiance dans la capacité à résoudre des problèmes de mathématiques,
- donner le goût de la recherche de problèmes,
- rendre aux mathématiques un statut de connaissance vivante, en constante évolution, où les solutions se produisent et se débattent.

<u>Objectif 2</u> (RAT) : Former le raisonnement, tant dans sa composante inductive, expérimentale, que dans la démarche de preuve :

- permettre, dans les domaines abordés, d'une part l'expérimentation et l'appropriation progressive d'une méthodologie de recherche, et d'autre part l'apprentissage de la preuve en mathématiques,
- dans les deux démarches, (recherche, preuve), développer chez les étudiants une attitude de contrôle de leur propre mode de pensée et de raisonnement, qui est pour nous la manifestation d'une démarche de type scientifique,
- développer chez les étudiants des capacités à formuler un résultat, communiquer une démarche en mathématiques, ce qui suppose l'appropriation

d'un langage et le développement de capacités d'expression spécifiques à cette discipline.

Objectif 3 (KN) : Permettre l'appropriation de connaissances nouvelles ou la réactivation d'anciennes, ancrées sur les conceptions existantes, dans une démarche s'appuyant sur des hypothèses d'apprentissage explicitées ci-dessus. Obtenir que ces connaissances soient mobilisables en recherche de problème comme en démarche de preuve.

Objectif 4 (SF) : Permettre l'acquisition de techniques, de savoirs-faire, dans les principaux domaines mathématiques étudiés à l'IUFM en première année.

2. Les choix de contenus

Les contenus sont choisis dans la double perspective de préparer les étudiants à suivre avec profit l'année suivante le programme de la préparation au Concours de Recrutement de Professeur des Ecoles (CRPE), et de permettre l'appropriation par les étudiants d'une méthodologie de recherche et de preuve, à travers l'utilisation des outils mathématiques de base du collège.
Les deux programmes, CRPE et collège, sont étroitement imbriqués, et constituent pour nous une référence à partir de laquelle effectuer les choix.
Nous utilisons le programme de mathématiques de l'IUFM de l'Académie de Lyon élaboré en septembre 1994, encore en vigueur en 97/98 et 98/99.

Les champs mathématiques abordés à l'IUFM sont les suivants :

1. Nombres et numération, arithmétique,
2. Problèmes du premier degré, et parmi eux ceux qui relèvent de la proportionnalité et de ses applications,
3. Géométrie.

Pour les champs 2 et 3, les notions abordées à l'IUFM sont essentiellement celles du collège. Mais les éléments de numération et d'arithmétique, qui se situent à un niveau élémentaire, sont nouveaux pour un étudiant ayant suivi au collège/lycée les programmes postérieurs à ceux de 1985 et antérieurs à ceux de 1996.

Comme au collège, l'accent est mis sur l'utilisation des objets mathématiques comme outils plutôt que sur les constructions théoriques et les structures. Nous adoptons cette recommandation.
Comme au collège aussi, une place importante est faite à la résolution de problèmes dans divers cadres et registres de représentation (arithmétique, géométrique, algébrique, graphique) et par divers types de méthodes. Par exemple, la mise en équation est considérée comme outil dans un processus de modélisation, mais l'aspect technique de résolution d'équation est peu développé. D'une façon générale, comme au collège, nous insistons sur la mobilisation des connaissances comme outils plutôt que sur la technicité (arithmétique, algèbre, et proportionnalité).

En géométrie, les recommandations à l'IUFM concernent le traitement des problèmes de reproduction, construction, modélisation, à partir des objets géométriques usuels du plan et de l'espace et de leurs principales propriétés, et de l'utilisation des transformations géométriques simples. Au collège, on trouve des préoccupations du même type. De plus, un passage important pour la construction du raisonnement est celui de l'initiation au raisonnement déductif et de l'apprentissage de la démonstration, principalement dans le champ géométrique.
Nous ne pouvons faire l'économie de ce passage clé dans l'apprentissage de la preuve en mathématiques. Nous faisons le choix de restreindre le champ aux objets du plan, quitte à limiter sans les éliminer les problèmes de construction, de reproduction, et de modélisation, au bénéfice d'abord d'un travail sur la nécessité de prouver (sens de la démonstration), ensuite d'un travail sur la technique. Ce dernier est autant un travail sur la stratégie (quelles étapes du raisonnement envisager ? quelle propriété mobiliser ?) que sur la forme (comment rédiger ?).

Les notions abordées dans notre formation sont les suivantes :

- Eléments simples d'arithmétique dans l'ensemble des naturels et leurs propriétés (division euclidienne, multiple, diviseur, PPCM, PGCD, nombres premiers, critères de divisibilité).

- Calcul dans D et dans Q : techniques et règles de base.

- Géométrie :
    * figures planes classiques (triangles, droites remarquables et angles du triangle, quadrilatères) et leurs propriétés usuelles,
    * constructions géométriques (médiatrice d'un segment, bissectrice d'un angle, quadrilatères particuliers),
    * transformations : symétrie orthogonale et centrale,
    * calculs de grandeurs : périmètres et aires.

- Problèmes relevant de la proportionnalité et de ses applications :
    * situations à support numérique : lien avec les applications linéaires, pourcentages, calcul de grandeurs,
    * situations à support géométrique : réduction/agrandissement, théorème de Thalès limité au triangle.

3. Objectifs d'apprentissage

La formation se déroule sur 12 séances de 2 heures chacune, soit 24 heures en tout.

3.1 Arithmétique

Avant toute introduction d'une notion, la première situation de l'année vise à la prise de conscience du fait que les mathématiciens ont dû se mettre d'accord sur les "règles du débat mathématique"[1], et à l'appropriation de trois d'entre elles :

1. Une propriété mathématique (au sens de : "un énoncé clos", en logique) est soit vraie, soit fausse.
2. Des exemples ne suffisent pas à montrer qu'une telle propriété est vraie.
3. Un contre-exemple suffit pour montrer qu'une telle propriété est fausse.

L'énoncé choisi est celui d'un problème ouvert utilisé en collège aux mêmes fins : "Dans l'expression n^2-n+11, si on remplace n par n'importe quel naturel, on obtient toujours un nombre premier".
Un tel épisode s'inscrit dans le cadre d'une initiation au raisonnement déductif, raisonnement qui n'est pas toujours en accord avec la logique naturelle. Il participe de l'objectif RAT pour le fond, et RM pour l'organisation de la situation et le choix de l'énoncé (voir infra, en particulier paragraphe 4).

Les principales notions d'arithmétique (PGCD, PPCM, division euclidienne) sont introduites comme outil de résolution de problèmes, à partir de situations permettant de viser à la fois les objectifs RM et KN.
Il s'agit de permettre l'appropriation des connaissances nouvelles ou la réactivation de connaissances anciennes (KN), non immédiatement mobilisables. Les étudiants produisent eux-mêmes la connaissance visée comme outil de résolution, alors même que l'énoncé n'induit ni la méthode, ni la solution.
Les moyens utilisés dans la visée de l'objectif RM (création d'un rapport aux mathématiques positif) seront décrits dans la partie 4 "Choix globaux" : ils s'organisent autour d'un choix d'énoncé et d'un scénario spécifiques.

Certaines des propriétés élémentaires utilisant les notions citées sont présentées sous forme d'énoncés dont la validité est à débattre par les étudiants (activités vrai-faux). C'est l'occasion du réinvestissement de ces notions, ce qui contribue à leur appropriation (KN), du réinvestissement aussi des règles du raisonnement mathématique (RAT).
Ainsi ont lieu des débats de validité des preuves produites. C'est le cas par exemple pour la propriété : "Si un entier naturel a divise deux naturels b et c, alors il divise leur somme", puis "la réciproque est-elle vraie ?", et encore pour celle-ci : "Si un naturel est divisible par a et par b, alors il est divisible par leur produit"(propriété fausse, mais dont on peut cerner le domaine de validité).
La résolution de problèmes simples de ce type fournit également l'occasion d'initier les étudiants au processus de modélisation. Notre but est que ce processus prenne pour les étudiants un sens différent de ce que peut représenter

[1] Nous faisons référence à l'ouvrage "Initiation au raisonnement déductif au collège", Arsac et al., 92.

une utilisation d'algorithmes, de formules, dont ceux-ci ont souvent pris l'habitude au lycée, sans avoir conscience des notions ou propriétés qui les sous-tendent. Par exemple une question du type : "pourquoi dans $3a+3$ peut-on mettre 3 en facteur", paraît très surprenante aux yeux des étudiants, tant pour eux cela relève d'un mécanisme qui va de soi : en mathématiques, c'est comme cela, et cela n'est pas susceptible d'explication. Le processus de modélisation doit apparaître aux yeux des étudiants comme élément moteur dans la résolution d'un problème, susceptible de produire de nouvelles connaissances.
C'est un travail sur des méthodes expérimentales de recherche de problèmes, c'est un entraînement à essayer , à tester les essais, à conjecturer, à mettre en débat les conjectures, c'est enfin un travail sur la recherche et la formulation d'une preuve qui est mis en place dès les premières séances et se poursuivra tout au long de l'année (RAT et RM).
Temps global pour l'arithmétique : 5h30 environ, réparties sur quatre séances.

En définitive, les étudiants doivent être capables :

- **de mobiliser les notions étudiées comme outil pour résoudre des problèmes simples tels que ceux qui leur ont été proposés,**
- **de mobiliser, pour produire une preuve, les règles du raisonnement mathématique mises en évidence,**
- **de débattre de la validité d'un énoncé ou d'un raisonnement,**
- **d'utiliser le calcul littéral comme outil pour établir la validité d'un énoncé.**

3.2 Calcul dans D et Q

Le premier objectif en calcul numérique est le développement de savoirs-faire techniques (SF). Les principales règles de calcul dans D et Q sont rappelées. Pour ces tâches techniques, la méthode utilisée est l'analyse d'erreurs : nous développons ce point en 4.1.5.

L'entraînement personnel au calcul est à la charge de l'étudiant, à l'aide de quatre fiches illustrant les différentes modalités d'utilisation des règles opératoires et comportant des exercices corrigés, et de deux fiches d'exercices et de leurs corrigés (SF).

Le deuxième objectif est l'entraînement à la résolution de problèmes à support géométrique (travail sur des fractions d'aires) et à support numérique. Il s'agit de développer le raisonnement utilisant les fractions de grandeurs (RAT). C'est l'occasion de travailler le processus de modélisation, et de mettre en évidence la multiplicité des démarches dans ce type de problèmes. Par ailleurs, notre objectif est de faire ressentir la nécessité de contrôler à tout moment de quelle grandeur on considère la fraction.

Temps global pour le calcul numérique : 2 heures réparties sur trois séances.

Les étudiants devront être capables de :

- **conduire un calcul dans D ou dans Q de manière efficace et rapide,**
- **obtenir un résultat exact sous sa forme la plus simple,**

- utiliser le calcul mental pour accélérer les procédures,
- déceler, identifier, et corriger des erreurs dans un calcul,
- mobiliser les capacités de raisonnement, et les savoirs-faire techniques, pour résoudre un problème où il faut manipuler des fractions de grandeurs (aire, temps, ...).

3.3 Géométrie

3.3.1 Un langage commun

Il s'agit tout d'abord d'initier les étudiants à la désignation correcte des objets de la géométrie plane classique, à leur représentation, au langage particulier associé à la description et à la construction de figures, et aux codages usuels (KN). L'accord sur un vocabulaire, un codage, et un langage, est un préalable à toute communication en géométrie. La méthode utilisée est l'analyse d'erreurs.

3.3.2 Représentation et construction de figures

Un autre objectif est le développement de savoirs-faire à propos de la représentation ou la construction de figures, à partir d'un énoncé ou d'une représentation codée, ou du mélange des deux (SF).
C'est le cas en particulier pour des énoncés faisant intervenir les droites du triangle et leurs caractéristiques, la symétrie orthogonale et centrale, la médiatrice d'un segment, la bissectrice d'un angle, les quadrilatères particuliers et leurs propriétés.
Les informations contenues dans l'énoncé peuvent être suffisantes ou non pour réaliser la construction demandée : dans tous les cas, le réinvestissement des connaissances est sollicité (KN). Si les informations sont insuffisantes, la capacité à choisir et utiliser des propriétés pour résoudre le problème de construction est aussi développée. Cette résolution suppose la mise en oeuvre même non formulée d'un raisonnement de type inductif et d'un raisonnement de type déductif (RAT).

3.3.3 Preuve et géométrie

Domaine privilégié pour l'initiation au raisonnement déductif et à l'utilisation de la démonstration comme outil de preuve, la géométrie est l'occasion de permettre aux étudiants de prendre conscience et de s'approprier deux autres "règles du débat" en mathématiques (RAT) :
- des observations ou des mesures sur un dessin sont insuffisantes à prouver un résultat en géométrie,
- pour prouver en mathématiques on construit un raisonnement qui s'appuie sur des propriétés de départ, sur la validité desquelles les mathématiciens se sont mis d'accord, et sur les informations contenues dans l'énoncé.

Citons quelques-unes des étapes clés :

- Situation 1 : elle vise à la prise de conscience des "règles du débat mathématique" à partir de la situation du rectangle d'Euclide (RAT).
Cette situation donne lieu à un débat de preuve, au cours duquel les étudiants ont à prendre en charge la responsabilité du caractère de vérité des solutions (RM).
C'est un temps fort de la formation, qui participe du passage des preuves pragmatiques aux preuves intellectuelles. Les étudiants n'hésitent pas à critiquer tout ce qui ne leur paraît pas valide. Certains d'entre eux voient leur système de raisonnement complètement déstabilisé (RM et RAT).

- Situation 2 : une première fiche de propriétés (triangles et angles) étant à la disposition des étudiants, ceux-ci procèdent à une première recherche individuelle de problème, (travail à la maison), qui à ce stade de l'apprentissage est pour eux un problème de recherche : la stratégie est à inventer. Cette recherche donne lieu à l'exposé oral des démarches, et à un débat de validation (sans passage à l'écrit). L'objectif est autant le développement de la démarche de recherche que celui de la démarche de preuve (RAT). Un autre objectif est de définir un premier contrat : d'abord prendre le temps de chercher et mettre au point une stratégie, ensuite en structurer nettement les étapes, chacune étant justifiée, à des fins de communication et de mise en débat.

- Situation 3 : elle vise à préciser la structure d'une démonstration écrite et le type de justifications attendues. A partir d'un premier raisonnement produit en groupes et rédigé sur affiches (c'est encore de problème de recherche qu'on peut parler ici), un débat autour des productions est organisé. Un premier objectif est de réinvestir les règles du débat mises en évidence précédemment (KN). Un deuxième objectif est de préciser un des éléments du contrat[2] : chaque étape doit être "justifiée" par une propriété pour être reconnue comme valide, (RAT). Un troisième objectif est de mettre en évidence les étapes manquantes, dans ces premières productions (RAT).
Autre temps fort de la formation !

- Situation 4 : elle vise à relativiser la notion de rigueur en mathématiques. Après avoir insisté dans un premier temps sur le fait que les observations sur un dessin ne prouvent pas un résultat en géométrie, un autre objectif, indissociable à nos yeux, est la mise en évidence, dès les premières recherches, des implicites liés au dessin (liés aux axiomes d'ordre et d'incidence). Nous utilisons de courts exercices (deux ou trois étapes de raisonnement) qui permettent de faire prendre conscience qu'on utilise sans le justifier les positions relatives de points, ou d'angles (hauteur à l'intérieur ou à l'extérieur, etc...). On comprend qu'il n'est cependant ni utile ni possible d'expliciter toutes les pratiques implicites d'usage des figures, comme référents d'arguments entrant dans des énoncés déductifs. Nous pouvons tout de même relativiser le niveau de rigueur des démonstrations : il est impossible d'être parfaitement rigoureux, en géométrie en particulier ! (RM et RAT)
C'est l'occasion d'élucider un autre élément du contrat à ce sujet, de préciser les critères de recevabilité d'une démonstration en géométrie : nous définissons

[2] Nous sommes bien conscients que le contrat ne peut jamais être totalement explicite.

avec les étudiants ce qu'il est légitime de lire sur un dessin et donnons des exemples de ce qui ne peut jamais être "lu" directement (parallélisme, perpendicularité, égalité d'angles ou de longueurs,...).

Et ensuite...

- Entraînement à l'usage d'une propriété et de sa réciproque, à la distinction entre les deux (RAT) : exercices utilisant les propriétés directe et réciproque de la médiatrice d'un segment ; recherche de propriétés réciproques pour les quadrilatères particuliers, examen de leur validité, activités de type vrai-faux.

- Recherche, production, confrontation et mises en débat de courts raisonnements (KN et RAT).

A partir de propriétés des figures planes usuelles, les étudiants devront être capables de :

- **construire des figures à partir de consignes de construction ou d'une représentation à main levée codée, ou du mélange des deux,**
- **conduire un raisonnement court, en deux ou trois étapes bien structurées, faisant intervenir en les nommant les propriétés adéquates.**

Ici, les connaissances doivent être mobilisables d'abord pour développer des stratégies de recherche (tâtonner, conjecturer), puis pour établir la preuve, et enfin rédiger de courtes "démonstrations", dans un but de communication et d'argumentation, pour convaincre de la validité de la preuve produite. La rédaction doit respecter les conventions de vocabulaire, de codage, de langage.

3.3.4 Calcul de grandeurs :

Les exercices de comparaison et de calculs d'aires choisis nécessitent le développement de stratégies de recherche, et la mise en oeuvre de raisonnements déductifs utilisant des propriétés. A ce niveau, les découpages à effectuer ne sont pas des découpages matériels, mais relèvent de processus mentaux. De ce fait, les objectifs dans ce domaine sont cohérents avec les objectifs généraux de la formation. Pour beaucoup d'étudiants, les raisonnements sur longueurs et aires sont d'un type nouveau.

Les étudiants doivent être capables de :

- **distinguer une aire et une longueur, et connaître les formules de périmètre et d'aires des figures planes usuelles (triangle, rectangle, carré, cercle, trapèze).**
- **mettre en oeuvre un raisonnement pour comparer et calculer des aires de figures planes par découpages, et par déplacement de surfaces, à partir des aires des figures planes usuelles.**

Les notions d'aires et périmètre sont en particulier travaillées sur QCM.
Temps pour le calcul de grandeurs : environ deux heures.
Globalement, 10 heures environ, soit l'équivalent de cinq séances, sont consacrées à la géométrie.

3.4 Proportionnalité et applications

Les étudiants disposent de l'outil coefficient de proportionnalité et de la technique du produit en croix, sans toutefois toujours avoir la vigilance nécessaire à leur utilisation.

Les objectifs concernent l'appropriation des divers aspects de la proportionnalité (KN et RAT). A partir d'une situation d'agrandissement (puzzle de Brousseau), un travail d'observation sur le tableau de nombres obtenu conduit à la mise en évidence :

- du coefficient de proportionnalité,
- du lien avec l'application linéaire associée,
- des propriétés de linéarité,
- de la propriété graphique.

Un objectif important à nos yeux est l'entraînement à la vigilance : dans un problème, est-il légitime ou non d'avoir recours à la proportionnalité, en particulier si les données se présentent sous forme d'un tableau de nombres ? Telle situation est-elle ou non une situation de proportionnalité ? (RAT).
Dans cet objectif, nous mettons en évidence la différence entre mathématiques et sciences expérimentales, pour ce qui est des interprétations qu'il est ou non légitime de faire à partir d'un tableau de nombres, compte tenu du problème posé.
A propos des pourcentages, le premier objectif est l'appropriation de la relation entre augmentation ou diminution de x% et l'application linéaire associée (KN). Les activités de résolution de problèmes comprennent un recours à la modélisation. Un autre objectif est l'entraînement au raisonnement, à la vigilance : contrôler à tout instant de quelle grandeur on utilise le pourcentage.

Les étudiants doivent être capables de :

- **reconnaître si des suites de nombres sont proportionnelles ou non, si une situation est ou non une situation de proportionnalité, soit à l'aide du coefficient, soit à l'aide des propriétés de linéarité, soit par une méthode graphique, soit à l'aide du produit en croix ;**
- **utiliser en résolution de problèmes (vitesse, débit, grandeurs diverses...) les diverses formes de la proportionnalité ci-dessus ;**
- **reconnaître les situations d'agrandissement ou réduction comme des situations de proportionnalité ; utiliser le théorème de Thalès dans le triangle ; utiliser la relation qui lie coefficient d'agrandissement ou réduction des longueurs à celui des aires et des volumes ;**
- **faire le lien entre augmentation ou réduction d'un pourcentage donné et l'application linéaire correspondante ;**
- **utiliser cette correspondance pour résoudre des problèmes où il s'agit de retrouver une quantité initiale, un pourcentage d'augmentation ou de réduction, modéliser des augmentations ou réductions successives d'un même pourcentage, trouver le pourcentage final de tel composant dans un mélange.**

Temps global pour la proportionnalité et ses applications : 3 heures.

4. Choix globaux d'organisation et d'évaluation

4.1 Choix sur l'organisation globale des activités en termes de contenus

4.1.1 L'appui sur du connu

Les étudiants sont en licence : ils sont tous titulaires du baccalauréat. Ils ont donc un certain "passé" en mathématiques, qui resurgit sous forme de connaissances, sous forme de modalités de raisonnement, et indirectement sous forme de représentations des mathématiques.
Toutes les activités sont organisées pour permettre l'expression de ces connaissances et de ces modalités de raisonnement, telles qu'elles sont spontanément utilisées par les étudiants, à seule fin de les proposer au débat et de permettre leur réorganisation voire leur remise en question.
Les énoncés des activités d'introduction de connaissances "nouvelles" ou à réactiver sont choisis pour que tous puissent engager un projet de résolution, avec les stratégies dont disposent les étudiants, même si elles sont élémentaires. Il en est de même pour les énoncés destinés à permettre la mise en évidence des "règles du débat" en mathématiques : en arithmétique comme en géométrie, la méthode est la mise en débat des règles spontanément utilisées par les étudiants pour décider de la validité d'un résultat.

4.1.2 Le cours comme réponse à des questions

Prenons l'exemple de l'arithmétique. Le point de départ pour l'introduction de chaque notion est un problème qui peut se résoudre avec des stratégies élémentaires. Ensuite le choix de valeurs pour certaines variables (passer à des grands nombres) contraint les étudiants à se donner des méthodes. Ainsi sont produites des méthodes utilisant les critères de divisibilité, des décompositions successives en produits de facteurs, des décompositions en produits de facteurs premiers, fruits de stratégies de résolution diverses. La fiche de cours qui correspond résume en les formalisant parfois et en les précisant, des connaissances en général produites par les étudiants.
Dans tous les domaines, des activités (résolution de problèmes, tâches à erreurs) précèdent le cours.
Les principaux résultats à utiliser sont pour la plupart résumés sur des fiches de cours, que nous distribuons aux étudiants : c'est pour nous un gain de temps, et l'assurance que tous ont les mêmes références.

4.1.3 L'utilisation de problèmes dits "de recherche"[3]

Nous avons recours à de tels problèmes en particulier comme situations de début en arithmétique et géométrie.

---

[3] problème "de recherche" : nous empruntons ce terme au texte des programmes alors en vigueur pour l'école élémentaire (Instructions Officielles de 95), dans lesquelles on peut lire qu'il convient de développer chez les élèves des "compétences spécifiques, d'ordre méthodologique", les activités de résolution de problèmes comportant "de véritables problème de recherche, pour lesquels l'élève ne dispose pas de démarche préalablement explorée". De notre point de vue, l'énoncé doit en outre être choisi de façon à permettre à tous de faire des essais, d'engager un projet de résolution.

Le premier objectif est de permettre aux étudiants de mettre en oeuvre une démarche expérimentale, d'entraîner à essayer, tester, conjecturer (RM). Les situations correspondantes mettent en évidence, lors des premières séances, la présence bien ancrée chez certains étudiants d'une représentation des mathématiques où le recours aux formules constitue la seule preuve mais aussi la seule démarche possible, et acceptable. Le second objectif est d'amener les étudiants à la modification de ce type de représentation.
Il faut donc conjointement faire évoluer certaines représentations erronées et créer un nouveau contrat. Il faut faire reconnaître comme légitime le recours aux stratégies élémentaires, faire ressentir la fécondité d'une démarche de type inductif, et contribuer au développement de stratégies de recherche.
Dans cette perspective, le choix de l'énoncé est chaque fois une variable capitale. Nous lui imposons les conditions suivantes :
- tous peuvent faire des essais,
- il existe des stratégies élémentaires, accessibles à tous,
- il existe des moyens de contrôle.
Les fiches d'exercices à chercher à la maison comportent de tels problèmes.
Une autre variable importante est le choix du scénario : cet aspect est développé en 4.3.1.
La variété des stratégies développées amène à leur confrontation, et à la mise en débat de leur validité.

4.1.4 Un recours systématique aux débats de validité

Un deuxième objectif, indissociable des autres, est d'engager et d'approfondir sans cesse le travail sur la preuve, dans son double aspect : nature des preuves acceptables, valides, en mathématiques, et raisons de cette nature (c'est le point de vue épistémologique), et contrat de formation (preuves attendues dans le contexte précis de formation). Depuis les situations de prise de conscience des règles "du débat" jusqu'aux débats de validité qui s'organisent autour de tous les exercices, c'est sans cesse la démarche de preuve propre aux mathématiques qui est en jeu.

Nous mettons en évidence, pour ensuite le faire pratiquer, le caractère social de la preuve :
- d'abord, en organisant une prise de conscience du fait que les mathématiciens ont dû se mettre d'accord sur des règles de validation, et sur des propriétés de départ ;
- ensuite, par des choix de scénarios, tant en problème de recherche que pour établir toute décision de validité. Il y a obligation pour chaque groupe de se mettre d'accord sur une solution et sa preuve. L'enseignant ne donne en général son avis qu'après expression des divers points de vue et des arguments correspondants émis par les représentants des groupes ;
- enfin en mettant en évidence les implicites dans tout raisonnement rédigé (en particulier en ce qui concerne la lecture du dessin en géométrie), et les niveaux de rigueur. Il s'agit de redonner à la démarche de production d'un raisonnement son caractère social : la forme choisie à des fins de communication, les implicites que l'on s'autorise, sont affaire de convention dans une communauté.

C'est l'occasion de clarifier le contrat, et de nuancer une représentation des mathématiques comme discipline de la "rigueur parfaite".

Pour permettre une pratique de la preuve dans différents registres, nous avons recours à deux modes de validation :
- des débats oraux, où c'est le type d'arguments, leur enchaînement, qui priment,
- des validations plus officielles, avec passage à l'écrit, pour clarifier le contrat sur la forme (sans négliger le fond) : c'est le cas de la situation 3 avec production sur affiches suivie d'un débat, ou des travaux effectués à partir d'exposés écrits de démarches au tableau. Nous faisons l'hypothèse, avec M-J Perrin-Glorian, (Repères n°29), que "si des exigences trop fortes de formulation peuvent gêner la recherche des élèves, il semble aussi que la formulation, y compris par écrit aide à y voir plus clair et à avancer".

L'existence de ces deux modes de validation participe pour nous d'une recherche d'un équilibre à maintenir entre une vigilance sur la nature des arguments émis et le respect d'un mode de communication commun.

La question de la validité est parfois directement posée : exercices de type "vrai ou faux ?", formulation de réciproques et débat sur leur validité.
Certains des exercices amènent à donner du sens au calcul littéral comme outil de preuve.

4.1.5 L'analyse d'erreurs

Nous utilisons en calcul numérique et en géométrie une méthode qui relève de l'évaluation formatrice[4] : dans les deux cas, il s'agit de constituer, à partir d'erreurs repérées par les étudiants, des critères de réussite de tâche, qui constituent autant de règles sur lesquelles s'appuyer.
En calcul numérique, où il s'agit avant tout de réactiver des savoirs-faire techniques, les principales règles de calcul sont mises en évidence sur des tâches de début, et résumées dans une fiche critériée. L'appropriation se poursuit par des exercices d'analyse d'erreurs (KN).
En géométrie, le travail de repérage et d'analyse d'erreurs vient après quelques situations d'initiation et de pratique de la démonstration, pour mettre en débat ce qui, aux yeux des étudiants, est conforme à une démonstration et ce qui ne l'est pas. La situation s'inscrit dans un travail sur la forme, la structure, et aussi la validité d'un raisonnement écrit. Cela conduit à la mise en évidence de "règles de la démonstration" qui sont autant de critères de réussite dans la production et la rédaction d'une démonstration. Une fiche critériée constituée avec les étudiants les résume (KN et RAT).
Ce travail est réinvesti lors de l'épreuve de milieu d'année (voir 4.4).

4.1.6 Les QCM

Dans chacun des quatre domaines, un QCM est proposé aux étudiants, avec recherche en temps limité, dans le but de préparer les étudiants au test de

[4] Nous faisons référence aux travaux de G. Nunziati dans ce domaine, ainsi qu'à la brochure "Pratique de l'évaluation formatrice", 94, IREM de Lyon.

sélection pour l'entrée à l'IUFM. Notre objectif est que les étudiants prennent conscience de l'existence de diverses stratégies face à un QCM, stratégies différentes des stratégies de résolution de problèmes : élimination de solutions, utilisation de propriétés, souvent mentalement, en dernier recours résolution du problème ou calcul effectif.
C'est une prise de distance par rapport à un problème, pour apprendre à anticiper, à définir une stratégie efficace (RAT), à décider des outils à utiliser (KN).

4.2 Choix sur ce qui est dit en classe par les étudiants et par l'enseignant

4.2.1 Explicitations sur les démarches de résolution

Elles ne viennent qu'à la suite de propositions d'étudiants, ou de blocages : nous sommes amenés à réhabiliter explicitement aux yeux des étudiants une démarche de type expérimental pour la phase de recherche. Ce sont les essais qui permettent d'entrer dans le problème, d'observer ce qui se passe, de formuler des conjectures, et quelquefois de comprendre comment construire une preuve.
Dans le même esprit, nous encourageons l'expression des stratégies élémentaires, et plaçons l'exigence au niveau de la capacité à se poser et à résoudre la question de la validité de la démarche adoptée : là encore, c'est le développement de la vigilance qui est visé.
Enfin, nous faisons accepter par la classe la production de preuves élémentaires, à la portée des étudiants.
Chaque fois que l'occasion se présente, nous mettons en débat l'équivalence de stratégies différentes de résolution, ou l'équivalence de formes de solutions différentes.
Le point de départ est toujours l'explicitation par les étudiants eux-mêmes, soit de leurs démarches, soit de leurs insatisfactions, soit de leurs questions. L'enseignant ne donne en général son avis qu'après formulation et débat entre étudiants.

4.2.2 Explicitations de divers contrats en jeu dans la formation

Nous clarifions les règles propres aux différents types de situations rencontrées par les étudiants. Comme nous l'avons indiqué en 4.1.4, les modalités de justifications diffèrent à l'oral et à l'écrit. Mais les exigences sur la validité des arguments de preuve sont les mêmes. Paradoxalement, ce sont ces exigences qui nous contraignent à utiliser sans les expliciter certaines propriétés, comme l'additivité des aires : par exemple, dans la situation du rectangle d'Euclide, des calculs d'aires sont effectués par découpage, d'après lecture du dessin. De telles procédures sont prises en charge par contrat, sans qu'il nous soit possible de préciser qu'on se permet de ne pas justifier. C'est un des paradoxes du contrat lors de l'apprentissage de la preuve en géométrie élémentaire.

A l'oral, les étudiants sont explicitement encouragés à émettre leurs avis, leurs critiques, puisque la règle de fonctionnement est le débat.

Les exposés écrits au tableau doivent constituer un support suffisamment clair pour permettre l'explicitation des démarches : c'est dans ce sens que vont nos exigences.
Pour ce qui est attendu à l'examen écrit :
- aucun résultat n'est pris en compte sans le raisonnement qui l'établit,
- la forme attendue pour les démonstrations en géométrie est clarifiée plusieurs fois, en particulier par l'analyse d'erreurs et l'élaboration de la fiche critériée.

Les activités d'analyse d'erreurs fournissent l'occasion de réhabiliter l'erreur aux yeux des étudiants, d'en faire vivre le rôle positif et le caractère nécessaire dans tout apprentissage (objectif RM).

4.3 Choix sur l'organisation des activités des étudiants

4.3.1 Le travail en classe : choix de scénarios

Pour les problèmes "de recherche", les situations d'introduction de notions, le scénario est le suivant :
- familiarisation avec l'énoncé, phase importante pour les premières situations, tant les étudiants sont surpris par les problèmes posés ; puis recherche individuelle, qui permet à l'étudiant de s'approprier le problème et à l'enseignant de tenter de lever les blocages éventuels sans donner d'indication sur laquelle les étudiants puissent se guider,
- recherche en groupe, avec confrontation des stratégies et solutions, et obligation de se mettre d'accord sur une solution à proposer à la classe : c'est l'occasion d'un premier débat entre étudiants,
- mise en débat des solutions des groupes par la classe, qui décidera de leur validité. C'est l'aspect social de la construction de connaissances qui est ici expérimenté par les étudiants, à deux niveaux : dans les groupes, indépendamment de l'enseignant, puis en classe complète.

Notre projet est de mettre en place le processus de dévolution (au sens de la théorie des situations de Brousseau), afin que les étudiants se sentent responsables d'une preuve de leur production. Un tel transfert provisoire de responsabilité vis-à-vis du savoir est de nature à contribuer à la construction d'un rapport aux mathématiques positif, au sens où nous l'avons décrit ci-dessus (RM), comme l'attestent les travaux et expérimentations en situations de problème ouvert[5].
Ce processus est mis en place sous plusieurs formes. Les productions des groupes ne prennent qu'une fois la forme d'une rédaction sur affiches (en géométrie), en raison de contraintes de temps. La clarification du contrat est alors suffisante pour varier ensuite les formes de travail. Le plus souvent, un porte-parole vient exposer la solution du groupe au tableau, ou bien la communique oralement, et l'enseignant joue alors le rôle de secrétaire et d'animateur, afin de permettre le débat sur un écrit visible par tous.

[5] Nous faisons référence aux rapports d'expérimentations figurant dans la revue "La Feuille à Problèmes", éditée par l'IREM de Lyon et à un article de Petit X n° 48 "Le problème ouvert comme moyen pour réconcilier les futurs professeurs d'école avec les mathématiques" (A. Peix et C. Tisseron).

Par manque de temps aussi, ce ne sont pas systématiquement toutes les démarches qui sont débattues. Mais tous les groupes ont une réponse à formuler, et sont susceptibles d'avoir à expliciter leur démarche. Les recherches d'exercices se déroulent selon le même principe, en un temps plus réduit.

Pendant le travail des groupes, l'enseignant circule dans la classe et intervient classiquement dans les cas suivants :
- en cas de blocage, sans pour autant guider,
- en cas d'arrêt dans la recherche, pour aider à faire le point, encourager à persévérer sans toutefois donner d'indication de piste ou de validité,
- en cas de conflit sur la preuve, pour rappeler la nécessité de l'accord sur une solution, ou les impératifs de temps.

Toute question sur la solution ou sur la validité des démarches engagées est renvoyée à la décision du groupe.
Pendant le débat, l'enseignant favorise la verbalisation des méthodes et ne donne son point de vue qu'à la fin.
L'analyse a priori des situations nous permet de prévoir les différentes procédures possibles, et les difficultés. Nous prévoyons à l'avance les relances susceptibles de faire évoluer le débat en préservant la dévolution.
Les techniques utilisées font référence à la technique d'Entretien d'Explicitation élaborée par P. Veermersch. Les questions portent sur une étape précise de la tâche à effectuer, et commencent en général par des locutions du type : "comment savez-vous que...", "qu'est-ce qui vous fait dire que...", comment êtes-vous sûr que...", "à ce moment-là, comment avez-vous vu que...". On en trouve des exemples dans la partie 3 qui décrit quatre situations de classe et leur mise en oeuvre.

4.3.2 Le travail à la maison : les fiches d'exercices et leurs corrigés

De nombreuses fiches d'exercices sont distribuées. Elles comportent à la fois des exercices techniques, des problèmes de réinvestissement, et des problèmes de recherche. Toutes sont suivies plus tard d'une fiche corrigé. Il s'agit de permettre le réinvestissement des notions, et le travail personnel d'appropriation, sans négliger le développement des capacités à chercher. Par ailleurs, ces fiches constituent avec le cours le seul matériau de travail des étudiants dispensés d'assiduité.
A chaque séance, un ou deux exercices sont repris en classe, après recherche à la maison et avant distribution du corrigé. Ils sont choisis soit parce qu'ils supposent une démarche non élémentaire, dont il n'a pas encore été question, et que les étudiants auront à rencontrer ailleurs, soit en réponse à des questions. Il s'agit alors de revenir pour les préciser sur les apports théoriques, d'élargir les points de vue et le champ des méthodes et des cadres de résolution, et par là le champ conceptuel des étudiants.
C'est en ce sens que ces temps de reprise constituent, de notre point de vue, une étape importante pour les apprentissages.

4.4 Les modes d'évaluation

L'institution impose une évaluation de fin d'année, mais non sa forme. De plus, elle donne la possibilité d'organiser une épreuve intermédiaire en milieu d'année. Nous profitons de cette possibilité pour proposer au bout de six séances une épreuve écrite du même type que celle qui sera donnée à l'examen final, utilisée uniquement à des fins d'évaluation formative : c'est une façon pour les étudiants de prendre conscience de leurs propres erreurs, de se situer par rapport aux exigences, de travailler d'après l'écart entre leurs productions et ce qui est attendu.
Nous procédons de la manière suivante : les épreuves sont corrigées et codées selon les codes adoptés avec les étudiants et indiqués sur les fiches critériées. Avant de rendre les copies, nous constituons une tâche à erreur à partir des productions, en choisissant les erreurs sur lesquelles un travail collectif nous semble le plus urgent. Les erreurs, (non codées dans cette tâche), sont décelées en groupes, puis débattues. Dans un deuxième temps, nous distribuons les copies corrigées, et les étudiants travaillent en petits groupes sur leurs propres erreurs. Ce type de travail n'est pas nouveau pour eux : ils ont été entraînés à l'analyse d'erreurs. Enfin est distribué un corrigé, constitué de réponses d'étudiants. Fréquemment, plusieurs démarches différentes sont proposées pour un même problème, en lien avec les productions des étudiants.
Nous avons constaté qu'une telle organisation contribue à améliorer notablement les résultats de la première session.

Partie 3

Description et analyse d'une séquence de formation

Partie 3
Description et analyse d'une séquence de formation

Il s'agit de la description du déroulement effectif de la séquence de formation qui concerne l'apprentissage de la démonstration en géométrie. Cette séquence comporte quatre situations qui constituent un début significatif pour cet apprentissage.

Pour bien s'entendre, il devient ici nécessaire de préciser notre terminologie : qu'entendons-nous par séance, séquence, situation de formation ? Nous proposons, pour ce texte, les conventions suivantes, à usage strictement interne :
* séance : chaque séance de formation, ou d'enseignement, dure 2 heures ; le terme "séance" se rattache au temps d'enseignement ; notre formation comprend 12 séances de 2 heures ;
* séquence : chaque objectif d'apprentissage est visé au terme du déroulement d'une séquence de formation ou d'enseignement, structurée elle-même en diverses situations de classe, au sens didactique général du terme ; par exemple, l'objectif d'apprentissage visé pour la séquence décrite en partie 3 est le développement d'une méthodologie de recherche et de preuve, en géométrie plane.
* situation : certaines situations de classe visent à l'introduction d'une connaissance nouvelle, d'autres, moins nombreuses, font simplement appel aux souvenirs des étudiants pour permettre une réactivation de connaissances rendues plus facilement disponibles. Certaines situations enfin participent du réinvestissement nécessaire.

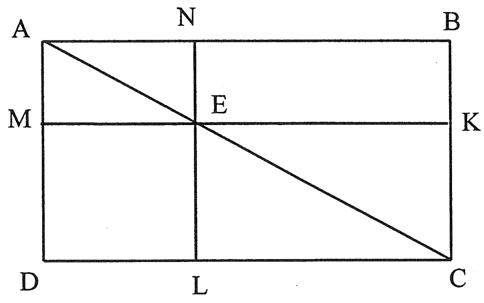
Les diverses situations rattachées à une même séquence se déroulent en général sur plusieurs séances.
Elles sont élaborées de façon à prendre en compte certaines des connaissances et compétences en mathématiques avant formation, que nous avons repérées chez les étudiants durant ces quatre années.
Par ailleurs, elles contribuent à l'explicitation, et à l'appropriation par les étudiants, du contrat didactique visé. De ce fait, elles s'insèrent dans une visée du groupe de formation, qui est de créer les conditions d'une évaluation formative.

Chaque situation visant à l'introduction d'une connaissance nouvelle est décrite selon le plan suivant :
- objectifs d'apprentissage,
- considérations a priori (quelques éléments d'une analyse a priori au sens didactique du terme),
- déroulement et gestes : scénario minuté, type de relances dans les différentes phases, institutionnalisation,
- liste d'exercices à travailler hors séance, dont certains seront repris la séance suivante.

Ces exercices sur lesquels nous choisissons de revenir permettent le réinvestissement, et donnent lieu éventuellement à une nouvelle institutionnalisation, se référant à la précédente, sur le savoir en jeu.

1. Situation 1, dite du "Rectangle d'Euclide" Règles du débat mathématique

Tracez un rectangle ABCD tel que AB = 8cm, et BC = 5 cm.
Placez le point E sur [AC] tel que AE = 3cm.
Tracez la parallèle à (AD) qui passe par E, elle coupe [AB] en N et [DC] en L.
Tracez la parallèle à (AB) qui passe par E, elle coupe [AD] en M et [BC] en K.
Parmi les deux rectangles EMDL et ENBK, quel est celui qui a la plus grande aire ?



Le dessin n'est pas réalisé en vraie grandeur

Objectifs :

- prendre conscience que la lecture directe du dessin, aussi précis soit-il, n'est pas un outil de preuve en géométrie

RAT

- prendre conscience de la distinction entre le dessin "rectangle" et l'objet mathématique "rectangle" (figure)
- produire, en géométrie, un premier raisonnement qui ait un statut de preuve pour la classe

Temps : 50 minutes

Considérations a priori :

1) Type de démarches et de preuves possibles :
- démarches s'appuyant sur des preuves de type "pragmatique"[6] : mesures, calcul d'aires. Les résultats entre groupes peuvent soit conduire à la même conclusion concernant les aires, soit à des conclusions contradictoires. Le choix des nombres permet de faire l'hypothèse de la production de résultats contradictoires, ou tout du moins différents.
- démarches s'appuyant sur des preuves de type "intellectuel", recherche d'un "raisonnement" permettant de conclure.

2) Analyse préalable des démarches de type intellectuel

2.1 Par découpage et comparaison de l'aire des morceaux

Les propriétés utilisées sont l'additivité des aires et la propriété "une diagonale d'un rectangle le partage en deux triangles de même aire".
C'est la solution classique que donnent des élèves de 5°, dans "Initiation au raisonnement déductif" (Arsac et al., 92), et accessible à ce niveau pourvu qu'on ne demande pas d'expliciter qu'on s'appuie sur l'additivité des aires, et

[6] Nous faisons référence à la terminologie employée par Balacheff dans la typologie des preuves qu'il a élaborée, laquelle est rappelée dans l'ouvrage "Initiation au raisonnement déductif au collège", cité infra.

qu'on admette la propriété mentionnée ci-dessus sur la diagonale d'un rectangle.

2.2 Par calcul de longueurs, avec utilisation de Thalès et de Pythagore

* On peut calculer AC ($\sqrt{89}$) dans ABC ou ADC, en appliquant le théorème de Pythagore. A ce niveau, **un choix** s'effectue :

- soit on garde la **valeur exacte** de AC, et on continue les calculs en valeurs exactes,
- soit une **valeur approchée** de AC est utilisée pour la suite.

* Alors, quelle que soit la position adoptée, on trouve plusieurs stratégies équivalentes pour les résultats numériques qu'elles donnent, qui mettent en jeu les propriétés de Thalès et de Pythagore :
- calcul de ME et NE en appliquant le théorème de Thalès, par exemple dans ACD et AEM, puis dans ABC et ANE,
- ou calcul de ME comme cité, puis calcul de NE dans le triangle rectangle ANE, par le théorème de Pythagore...

Ensuite, on peut calculer l'aire des rectangles NBKE et EMDL.

Si l'on a travaillé avec des valeurs exactes, on trouve ME = $\frac{24}{\sqrt{89}}$; NE = $\frac{15}{\sqrt{89}}$;

et pour les deux aires le même nombre, soit : $\frac{120\sqrt{89} - 360}{89}$.

Si l'on travaille avec des valeurs approchées, au dixième ou au centième près, les résultats sont :

NE	ME	MD	NB	**Aire ENBK**	**Aire MELD**
1,59	2,54	3,41	5,46	**8,68**	**8,66**
1,6	2,5	3,4	5,5	**8,5**	**8,8**

Remarquons dans ce cas que l'ordre de grandeur des aires est inversé selon qu'on travaille au dixième ou au centième près. Cela donne la possibilité de renvoi aux groupes si tous n'ont pas pris la même précision, ou de confrontation de résultats différents, avec obligation de se mettre d'accord sur la réponse à donner et le type d'explication qui permet d'en être sûr.

2.3 Par calcul de longueurs, avec Thalès, Pythagore, et la trigonométrie

Là encore, plusieurs stratégies, équivalentes pour les propriétés employées, et le type de résultat trouvé, sont possibles.

Et de même, il est possible de travailler en valeurs exactes ou en valeurs approchées.

Posons $\alpha = \widehat{ACD} = \widehat{AEM}$. Alors on a tan$\alpha$ = 5/8 = NE/ME (1).

* Travail avec des valeurs exactes :

<u>1° possibilité :</u>

- D'après (1), NE = 5ME/8 ; d'autre part NB = 8 - ME ;

alors aire ENBK = (8 - ME) 5ME/8 = **(1 - ME/8) 5ME.**

- MD = 5 - 5ME/8 et aire MEDL = (5 - 5ME/8) ME = **(1 - ME/8) 5ME.**

<u>2° possibilité :</u>

ME = $3\cos\alpha$, et NE = $3\sin\alpha$;
MD = 5 - NE = 5 - $3\sin\alpha$;
NB = 8 - ME = 8 - $3\cos\alpha$;
Aire MELD = $3\cos\alpha\ (5 - 3\sin\alpha) = \mathbf{15\cos\alpha - 9\sin\alpha\cos\alpha}$
Aire ENBK = $3\sin\alpha\ (8 - 3\cos\alpha) = 24\sin\alpha - 9\sin\alpha\cos\alpha$
Or $\sin\alpha = \tan\alpha\ \cos\alpha = 5\cos\alpha\ /\ 8$
donc aire ENBK = $24\ (5\cos\alpha)\ /\ 8 - 9\sin\alpha\cos\alpha = \mathbf{15\cos\alpha - 9\sin\alpha\cos\alpha}$

* Travail avec des valeurs approchées
On peut calculer une valeur approchée de α à partir de $\tan\alpha = 5/8$ puis obtenir une valeur approchée de ME et NE, et enfin des aires.
D'après (1), α vaut environ 32°.
Alors ME = $3\cos\alpha$ soit environ 2,54
NE = $3\sin\alpha$ soit environ 1,59.
Les valeurs approchées au dixième et au centième sont les mêmes que ci-dessus (2.2). C'est-à-dire que toute méthode basée sur la trigonométrie, Thalès, Pythagore, et mixant ces propriétés, donnera, pourvu qu'on travaille à précision constante, les résultats du tableau ci-dessus.

2.4 Par calcul littéral et Thalès seul

Soit x = MD et y = ME.
Aire MELD = xy.
NB = 8 - y et NE = 5 - x.
Aire NBKE = $(8 - y)\ (5 - x) = 40 - 8x - 5y + xy = 40 - 8x - 5y$ + aire MELD.
Il suffit de montrer que $8x + 5y = 40$.
Or, en appliquant Thalès, $y/8 = (5 - x)/5$ soit $5y + 8x = 40$.

Conclusion : seule la propriété de conservation des aires par symétrie centrale, ou bien celle de Thalès, apparaissent comme passage obligé pour établir la réponse. Celle-ci ne dépend ni des angles droits (la démarche 2.1 est possible dans un parallélogramme), ni de la position de E sur [AC]. Seul le parallélisme fonde l'égalité des aires.

3) Quels objectifs pour quel public ?

On peut compter, avec ce public d'étudiants très hétérogène, sur l'apparition probable des deux types de démarches, celles s'appuyant sur des mesures et celles s'appuyant sur des preuves intellectuelles.

L'enjeu de la situation n'est pas tant de répondre à la question que d'amener la conviction que des mesures ne permettent pas d'être sûr, du point de vue mathématique, de la réponse. Pour cela, il faut obtenir la mise en évidence de la différence de nature entre un objet mathématique, défini par ses propriétés, et sa trace graphique, le dessin. Pour travailler sur de tels objets, il faut alors faire apparaître la *nécessité* d'avoir recours à un type de preuve spécifique, le seul reconnu comme valide dans le monde mathématique.

Par ailleurs, il faut amener les étudiants à invalider les réponses s'appuyant sur des valeurs approchées, si de telles démarches apparaissent.
Cela permet de préciser l'importance de savoir dans quel type de problématique on se situe : s'il s'agit d'utiliser des mathématiques pour résoudre un problème pratique, les propriétés mathématiques sont un outil mais des approximations peuvent suffire à établir le résultat dont on a besoin ; par contre, s'il s'agit de résoudre un problème interne aux mathématiques, on travaille sur des objets idéaux, définis par leurs propriétés, et ce travail mathématique est inséparable du seul type de preuve qui lui est associé, c'est-à-dire une démonstration.

Les questions que nous nous posons :

La contradiction entre les conceptions qui sous-tendent les démarches de type intellectuel et les démarches de type pragmatique apparaît-elle comme telle aux yeux des étudiants ? La mise en oeuvre sur plusieurs années nous autorise à penser qu'un certain nombre de ceux qui utilisent des mesures ont l'intuition qu'ils n'ont pas démontré, mais ne savent sans doute pas :

- en quoi ce n'est pas une preuve acceptable, ce qu'on appellera la question 1.,
- ni comment prouver , ce qu'on appellera la question 2.

Si l'on veut des indications sur les conceptions des étudiants, avant le début de cette formation, à propos de mesure et preuve en géométrie, il nous faut mettre à l'épreuve et tester la solidité de l'intuition dont nous parlons plus haut : quelle confiance les étudiants accordent-ils aux mesures pour prouver un résultat en géométrie ?

4. Etude du milieu et du contrat pendant la recherche et le débat

4.1 Choix des variables

Analyse d'après l'ouvrage "Initiation au raisonnement déductif" :
- l'énoncé comporte des mesures : les étudiants ont le "même" dessin, ce qui met bien en évidence la contradiction entre des résultats différents ;
- les mesures choisies conduisent à l'impossibilité de tomber sur des mesures exactes pour les côtés des rectangles (ce sont des irrationnels). De plus les rectangles ne sont pas superposables ;
- la formulation de la question : une question du type "comparer les aires des deux rectangles EMDL et ENDK" induirait un consensus en faveur de l'égalité, qui pourrait s'établir sans débat.

Pour autant la formulation retenue n'est pas interprétée par les étudiants comme elle l'est en collège : ceux-ci ont un passé suffisant comme élèves de mathématiques pour faire l'hypothèse que les aires pourraient bien être égales : une conjecture induite par effet de contrat s'installe en faveur de l'égalité.

4.2 Preuve et mesure en géométrie

Lors des confrontations en groupes puis en débat collectif, les résultats différents voire contradictoires que donnent les mesures résout pour certains étudiants la question 1 (en quoi les mesures ne sont pas une preuve acceptable), comme au collège. Mais ce peut ne pas être le cas pour tous : si des étudiants n'ont pas conscience qu'au delà du dessin, il existe une figure, et qu'aucun dessin même très précis ne peut donner un résultat dont on est mathématiquement sûr, pourquoi seraient-ils intimement convaincus que les mesures ne permettent pas de valider des conjectures ? Les résultats contradictoires, mais très proches, suffisent sans doute pour ces étudiants à valider une conjecture en faveur de l'égalité, induite par contrat. Nous faisons l'hypothèse que de tels cas ne sont pas exceptionnels et nous nous proposons de recueillir des informations sur ce point. Ce ne peut être qu'avant le travail de groupe. Nous prenons les points de vue individuels a priori, puis après une courte recherche.

Dispositif :
Un premier point est pour nous de favoriser le fonctionnement social dans la classe. Nous inspirant des travaux de C. Reynaud et D. Favre[7], nous posons a priori comme règle de fonctionnement social dans la classe que tout point de vue est fondé sur de bonnes raisons, et que toutes ces raisons sont dignes d'intérêt. Le but est que les étudiants ressentent comme légitime et fructueux pour le débat de livrer à la classe leur propre avis.
La question posée dans le problème induit par contrat une forte probabilité pour l'égalité des aires. Ce que nous vérifions et renforçons par le test 1 : nous demandons aux étudiants *leur avis à vue d'oeil sur l'aire la plus grande et nous notons au tableau le nombre de voix pour chaque cas : $A<B$, $A>B$, $A=B$.* En mettant d'emblée les trois options, nous forçons les étudiants à donner un avis, en référence aux règles de fonctionnement posées a priori.
Au cas où le plein des voix ne soit pas réalisé, nous ajoutons une colonne "ne sait pas".
En fait ici, l'oeil ne donne pas d'indications. C'est donc bien le contrat qui est testé et même renforcé.
Le contrat résiste-t-il aux résultats que donnent les mesures ? Existe-t-il des étudiants qui ont plus confiance dans le résultat donné par la mesure que dans la réponse induite par la question ?
C'est le moment d'engager la recherche individuelle. Après une courte recherche individuelle et une production de résultats pour les aires, nous procédons au test 2. Pour favoriser l'émergence des conceptions où prévaut la confiance dans le dessin, nous attirons l'attention sur la précision du dessin effectué. Nous demandons "*Vous avez maintenant commencé à travailler, donnez votre avis : $A<B$, $A>B$, ou $A=B$? Donnez votre avis personnel sur une feuille*".
Juste après avoir ramassé les feuilles, nous demandons : "combien ont changé d'avis par rapport à la réponse donnée à vue d'oeil ?". Nous notons ce nombre.
Nous saurons ainsi quelle proportion d'étudiants ont changé d'avis en faveur de l'inégalité, ce qui ne peut être obtenu que par confiance dans les mesures en un temps aussi court. Pour les étudiants qui se laissent convaincre uniquement

[7] C. Reynaud et D. Favre (98) : L'animation des débats socio-cognitifs : les règles à respecter et les capacités à développer pour être animateur, in "Actes des XXèmes Journées Internationales sur la Communication, l'Education et la Culture Scientifiques et Techniques".

par contrat, et doutent de leur méthode de résolution, cela relance l'enjeu pour la réponse à donner.
C'est le moment de lancer le travail de groupe, avec obligation de se mettre d'accord sur une réponse et une explication permettant d'être sûr de cette réponse.

4.3 La gestion du débat

1. Nous faisons s'exprimer un représentant par groupe, d'abord sur la réponse seule. Le but est de créer à partir de là un enjeu sur les démarches : des résultats différents posent la question des méthodes permettant d'y arriver.

2. Classiquement, nous interrogeons ensuite sur les démarches et notons brièvement la méthode, en adoptant l'ordre suivant :
- type 1 : démarche s'appuyant sur des mesures, avec production de résultats contradictoires pour la comparaison, y compris égalité si elle est produite.
- type 2 : démarche s'appuyant sur des propriétés mathématiques que certains ont retrouvées, mais utilisant des valeurs approchées,
- type 3 : démarche correcte, s'appuyant sur des propriétés mathématiques, dont l'enseignant garantira l'exactitude en phase de conclusion.

3. Quelles que soient les démarches produites, il faut obliger les étudiants à trancher collectivement sur la réponse. Le but est que la conviction intime de chaque étudiant se fasse par la confrontation entre avis différents, et non en se guidant sur les attentes de l'enseignant. A ce point, il peut y avoir incertitude complète ou consensus sur la réponse, mais en général c'est le consensus sur l'égalité qui l'emporte, même si aucune preuve complète n'apparaît.

4. Dans tous les cas, le formateur insiste sur l'écart entre les résultats obtenus pour diriger le débat vers les démarches qui les sous-tendent. *"Comment être sûr de la réponse ?"*. L'expression "être sûr" renvoie à la problématique dans laquelle on se place : du point de vue de la conviction intime de chacun, ou du point de vue mathématique. C'est bien sur ce terrain que nous désirons amener les étudiants : celui de la prise de conscience de différents domaines de réalités possibles.
Les productions des groupes qui mettent en oeuvre des preuves de type intellectuel ouvre des réponses possibles à la question 2, celle de l'existence et de la nature de moyens de preuve qui n'utilisent pas la mesure.
Mais le point délicat est celui de la conviction que l'égalité des mesures pourrait être obtenue avec un dessin suffisamment précis, qui peut ne pas être exprimée devant le prestige d'une démarche s'appuyant sur des propriétés dont tous ont entendu parler autrefois en cours de mathématiques.

<u>Une proposition</u> : diriger le débat vers la comparaison entre les deux premiers types de démarches, du point de vue de leur validité. Ce peut être un moyen de faire émerger une telle conviction si elle est présente, et/ou de provoquer des interventions sur le statut du dessin. Par la confrontation, on doit au moins obtenir des éléments sur la différence de nature entre un raisonnement

s'appuyant sur des propriétés et une preuve de type expérimental (ou pragmatique).
Au long des échanges, la question *des moyens permettant d'être sûr de la réponse* apparaît comme une relance de nature à obtenir une évolution vers une invalidation des preuves de type pragmatique, pour ces étudiants qui ont un passé mathématique où la démonstration a été objet officiel de savoir.

5. Enfin, l'écart des résultats obtenus avec une démarche correcte, mais s'appuyant sur des valeurs approchées, doit permettre d'amener les étudiants à poser la question de la validité de ces résultats. Ici, ce n'est pas la démarche globale qui est en cause, mais le fait que l'égalité ne peut-être établie sur des valeurs approchées. Cet écart doit suffire à conclure, surtout si des preuves correctes sont présentes.

Déroulement et gestes

<table>
<tr><th>gestes du formateur</th><th>étapes du déroulement, consignes</th></tr>
<tr><td>Rappel éventuel des règles du débat social dans la classe.</td><td>Nous fonctionnerons comme lors des autres séances : vous avez pu voir que chacun ici a de bonnes raisons de penser ce qu'il pense, et que ces raisons sont tellement bonnes qu'elles méritent d'être formulées publiquement !</td></tr>
<tr><td></td><td>Consigne 1 : "tout d'abord, lisez simplement l'énoncé, sans rien faire d'autre"</td></tr>
<tr><td colspan="2">Test 1 : "avant de commencer, dites-moi, simplement à vue d'oeil, quel est votre avis ? A<B, A>B, ou A=B ? "
On insiste pour que chacun se prononce et on note au tableau le nombre de voix pour chaque cas ; si nécessaire, on ajoute une colonne "ne sait pas".</td></tr>
<tr><td>Pendant ce temps, faire un dessin au tableau, suffisamment grand.
On place les lettres A et B sur les surfaces dont on veut comparer l'aire.</td><td>Consigne 2 : "faites maintenant votre dessin "

Consigne 3 : "vous travaillez d'abord individuellement, pendant 5 minutes environ"</td></tr>
<tr><td>Repérer le moment où les étudiants qui mesurent ont des résultats pour passer au test 2</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Test 2 : "Vous avez maintenant commencé à travailler, donnez à nouveau votre avis : A<B, A>B, ou A=B ? Donnez votre avis personnel sur une feuille que je ramasse tout de suite"
puis, demander : "combien ont changé d'avis par rapport à leur première réponse ?"</td></tr>
<tr><td>Repérer les groupes qui trouvent des aires égales pour qu'ils ne parlent pas en premier.</td><td>Recherche en groupes : "vous travaillez maintenant en groupes, vous devez vous mettre d'accord sur une réponse, et une explication permettant d'être sûr de cette réponse".</td></tr>
</table>

	Débat
1. Noter au tableau le nombre de voix pour chacune des 3 positions, et les nombres obtenus chaque fois.	- un représentant par groupe donne oralement la réponse du groupe, uniquement en termes de « c'est EMDL, ou ENBK, qui a la plus grande aire, ou bien elles sont égales, avec des résultats éventuels pour les mesures ».
2. « comment avez-vous procédé ? » *Faire parler 2 partisans de l'inégalité, si possible avec des résultats contradictoires, puis autant de partisans de l'égalité qu'il y a de démarches pour le prouver.*	- chaque représentant donne des explications sur l'explication retenue dans chaque groupe
3. Comment êtes-vous sûrs du résultat ? Vous devez vous mettre d'accord !	- les premiers avis sont exprimés sur l'écart des résultats et sur les démarches
4. On dirige d'abord le débat vers le choix entre les démarches qui s'appuient sur la mesure et celles qui s'appuient sur des propriétés mais utilisent des valeurs approchées : *"Ces méthodes donnent des résultats proches mais différents. Comment trancher ? Qu'est-ce qui peut permettre d'être sûr de la réponse ? Vous devez-vous mettre d'accord".*	- Confrontation des points de vue sur la nature des preuves développées.
Si on obtient de telles considérations, on oblige les étudiants à se prononcer : "qu'est-ce qui vous fait dire que ?... *comment êtes-vous sûr que... ?"* *...*	- Apparition de conceptions différentes sur le statut du dessin ?
et plus tard, si nécessaire : "L'une des méthodes vous paraît-elle préférable à l'autre ? en quoi ? Vous devez vous mettre d'accord." *"Qu'est-ce qui vous fait dire que ..."*	- Dans ce cas, noter ce sur quoi se fait l'accord au tableau. - Ici on doit obtenir un débat sur le type de méthode permettant de savoir, d'être sûr de la réponse, selon la visée adoptée, c'est-à-dire le cadre de pensée dans lequel on fonctionne : veut-on un résultat valide à l'intérieur des mathématiques, ou un résultat pratique pour une réalisation concrète ?
5. Enfin on met en balance les démarches retenues comme "meilleures" et les démarches donnant vraiment l'égalité si il en existe.	

Si ce n'est pas le cas, inviter à proposer des améliorations. En cas d'absence de proposition, demander "est-on obligé de travailler en valeurs approchées ?" Si aucune démarche s'appuyant sur des propriétés n'a été présentée lire l'affiche D, p.99 (Initiation au raisonnement déductif au collège) produite par des élèves de collège.	

Institutionnalisation

1. Des mesures sur un dessin, aussi soignées soient elles, peuvent donner des réponses différentes ou égales, qui ne permettent pas de trancher. Seul un raisonnement, basé sur les données de l'énoncé, et des propriétés connues, permet de donner une réponse dont on est sûr. Lui seul peut valider, aux yeux des mathématiciens, le résultat obtenu. Ce raisonnement se fait aussi bien à partir d'un dessin précis que sur un dessin approximatif.
2. Ce dessin est la trace graphique matérielle des objets mathématiques décrits par l'énoncé. Un objet mathématique est un objet idéal, défini par ses propriétés, et représenté en géométrie par un dessin.
3. Les objets sur lesquels on travaille sont liés au type de preuve qu'on engage sur ces objets. Dans une preuve mathématique, on ne trouve jamais des expressions comme "on voit que...", "en mesurant, on obtient...", qui relèvent d'un travail sur le dessin, sur les objets physiques. De telles expressions peuvent très bien convenir par contre pour un charpentier qui travaille sur le dessin d'un architecte.
4. Ici, les propriétés qu'on peut utiliser sont (citer celles qui sont apparues):
- ***la diagonale d'un rectangle le partage en deux triangles d'aires égales,***
- ***le théorème de Thalès,***
- ***le théorème de Pythagore,***
- ***la trigonométrie,***
- ***les propriétés du calcul algébrique,...et sans doute d'autres !***

Faire compléter la fiche "Règles du débat mathématiques" :

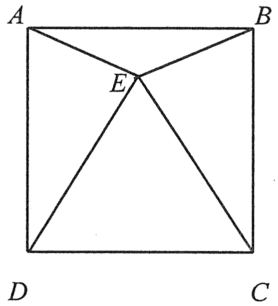
Règle n°4 : En mathématiques, quand on fait de la géométrie pure, des observations ou des mesures sur un dessin sont insuffisantes à prouver un résultat.
Règle n°5 : Pour prouver en mathématiques, on raisonne en s'appuyant uniquement sur :
- les informations contenues dans l'énoncé (les données),
- des propriétés connues, sur lesquelles les mathématiciens se sont mis d'accord.
Règle n°6 : En mathématiques, des valeurs approchées ne permettent pas de trancher sur l'égalité de deux grandeurs.

Distribuer la fiche "Illusion d'optique" qui montre bien qu'on ne peut se fier à ce qu'on voit même dans le domaine du dessin.
Distribuer la fiche "Découpage" qui montre qu'on ne peut se fier à un découpage matériel pour trouver un résultat, par opposition à ce qu'on peut faire avec un découpage mental.

Pour la séance suivante : recherche de l'exercice "Mesure de $\widehat{AEB}$ "

2. Situation 2 : trouver une stratégie
Retour sur l'exercice "mesure de $\widehat{AEB}$?", cherché à la maison

<u>Enoncé :</u>



$ABCD$ est un carré
CED est un triangle équilatéral
Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{AEB}$?

Temps : 15 minutes

Objectifs - réinvestir les différents points de l'institutionnalisation de la séance précédente :
* règles du débat, en particulier insuffisance des observations et des mesures

RAT
* écart dessin - figure
* tout raisonnement mathématique s'appuie sur les données et des propriétés reconnues par les mathématiciens

- se représenter le but à atteindre pour prouver en géométrie : le dessin comme support pour définir une stratégie, et en contrôler la validité
- s'approprier un premier contrat : dans un premier temps, travailler sur la stratégie, définir une démarche, puis en présenter les étapes clairement justifiées.

Considérations a priori

Cet exercice est proposé d'abord car nous sommes conscients qu'une seule situation ne suffit pas à déstabiliser les conceptions des étudiants qui sont dans une problématique pratique en géométrie. Il faut donc permettre le réinvestissement éventuel de ces conceptions, et dans ce cas les règles du débat institutionnalisées constituent un milieu qui donne les rétroactions suffisantes à invalider les procédures s'appuyant sur les observations ou les mesures. Les rétroactions viendront nécessairement des étudiants eux-mêmes : tous ne sont pas dans une problématique pratique. Elles donnent l'occasion de retravailler l'écart entre l'objet et sa représentation.

Le deuxième objectif est de contribuer à une représentation du but à atteindre pour prouver en géométrie, ce que ne donne pas la situation du rectangle d'Euclide. En effet, il faut d'abord trouver une stratégie, qui est indissociable à la fois d'une capacité à envisager le dessin sous divers points de vue, et d'une capacité à mobiliser les propriétés qui constituent la validation de la démarche. Le premier point, celui du cheminement, met l'accent sur les liens entre objet et représentation : le dessin, s'il ne constitue pas un élément de validation, est le support indispensable à la recherche de stratégie, et à la démarche de validation. Les autres aspects de ce qui a été institutionnalisé (sur quoi se fonde un raisonnement en géométrie) constitue un milieu susceptible de donner les moyens aux étudiants de décider de la validité des démarches proposées.

Les propriétés données aux étudiants (triangle isocèle, angles dans un triangle quelconque, isocèle, équilatéral), suffisent à bâtir une preuve étayée par ces propriétés.

Le problème est choisi car il y a une étape clé dans la stratégie, qui oblige les étudiants à résoudre d'abord ce problème de cheminement. Le passage obligé pour résoudre est de développer une capacité à regarder le dessin sous différents points de vue, jusqu'à isoler une configuration qui permet de poursuivre : repérer que le triangle CEB (ou DEA) est isocèle, et en déduire le calcul de $\widehat{CEB}$(ou $\widehat{DEA}$).

A ce moment, on peut observer :
- soit des blocages,
- soit un recours à la mesure, (réinvestissement des conceptions erronées devant une difficulté)
- soit une stratégie correcte, plus ou moins bien justifiée.

Ce noeud de stratégie sera l'occasion d'insister sur l'importance de ne pas s'enfermer dans une seule vision du dessin, et de s'obliger à l'envisager de divers points de vue, pour y lire des configurations et trouver celles qui sont efficaces : le dessin, dans cet exercice, apparaît bien alors comme le support sur lequel se développe l'intuition des objets géométriques, et sur lequel peut conjointement se construire le cheminement mental sur lequel s'appuiera la démonstration. On peut alors insister sur l'utilité du codage des informations connues ou obtenues dans cette recherche.
Par ailleurs, le degré de justification attendu sera débattu et clarifié sur ce premier exemple : on est alors dans le contrat.

Déroulement et gestes

gestes du formateur	étapes du déroulement
Est-ce que certains d'entre vous ont produit quelque chose et n'en sont pas satisfaits ? par exemple : un début de démarche, sans parvenir à poursuivre.	Un étudiant vient exposer son problème au tableau.
Quelqu'un veut-il proposer une démarche complète ? *Noter au passage les idées clés.* *Favoriser le questionnement du groupe, de façon à ce que soient posées des questions étape par étape : comment êtes-vous sûr de ceci... ?*	Verbalisation des méthodes trouvées et débat.

Institutionnalisation

Dans ce type d'exercice, il faut d'abord rechercher un cheminement, définir une stratégie. Mais comment chercher ? Il y a d'abord une période d'analyse, où on cherche à anticiper. Voilà ce qui peut se passer sur le plan méthodologique :
**** Le dessin est le premier support. On peut d'abord essayer d'envisager ce dessin sous divers points de vue, en gardant à l'esprit ce que l'on sait, mais aussi ce que l'on cherche : pour cela, un outil efficace est le codage des données ou des résultats qu'on sait pouvoir obtenir.***
**** Ce codage peut permettre d'activer des connaissances dont certaines seront efficaces, justement. Par exemple : longueurs égales renvoie à triangle isocèle, et triangle isocèle à angles égaux.***
**** Le cheminement entre les deux (ce qu'on sait, ce à quoi on veut arriver) est alors autant affaire d'analyse du dessin que de capacité à mobiliser les propriétés ou les connaissances susceptibles d'être efficaces. Ne perdez pourtant pas de vue que ceci est affaire personnelle, que chacun vit à sa façon.***
**** Il faut cependant communiquer un produit fini, sur lequel on puisse s'entendre entre mathématiciens : ce qui est attendu est un discours de type déductif.***

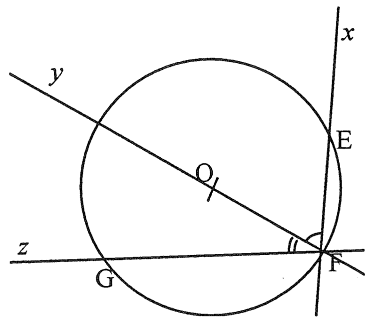
Nous définissons alors <u>oralement</u> un <u>premier contrat</u> pour le contenu d'une production écrite :

Ce qui est attendu dans un premier temps, c'est que chaque affirmation soit justifiée, et cela se fait en général par une propriété ou une définition du cours.

3. Situation 3 : communiquer une démonstration par écrit

Exercice : les points E, O, G, sont-ils alignés ?

Construire deux angles adjacents
$x\hat{F}y = 53°$ et $y\hat{F}z = 38°$.
Sur la demi-droite [*Fy*), placer le point O à 4cm du point *F*.
Tracer le cercle de centre O passant par *F*. Il coupe la demi-droite [*Fx*) en *E* et la demi-droite [*Fy*) en *G*.
Les points *E*, *O*, *G* sont-ils alignés ?
Comment en êtes-vous sûr ?



Temps 50 à 55 minutes en tout
recherche : 30 minutes, débat et conclusion : 25 minutes.

Objectifs
RM - s'entraîner à la recherche d'une stratégie en géométrie
KN - s'approprier un mode de rédaction pour une démonstration : contrat pour l'écrit

Considérations a priori

Etapes de la résolution
* EOF est isocèle, [OE] et [OF] étant rayons d'un même cercle.
* calcul de $E\hat{O}F$ dans ce triangle (angles à la base égaux et somme des angles 180°) : $E\hat{O}F = 74°$.
* même travail dans le triangle GOF : $G\hat{O}F = 104°$.
* calcul de $G\hat{O}E$ comme somme des deux angles $E\hat{O}F$ et $G\hat{O}F$: $G\hat{O}E = 178°$.
* $G\hat{O}E \neq 180°$ donc les points G, O, E ne sont pas alignés (s'ils l'étaient, ils formeraient un angle plat).

Difficultés à prévoir, enjeux du débat
Ici encore la question de la stratégie à adopter est ouverte pour les étudiants : ils n'ont pas eu cette année à répondre à ce type de question, le lien entre points alignés et angle plat n'a pas été fait. Une deuxième difficulté est que l'angle en question, $G\hat{O}E$, n'est pas tracé. Une troisième difficulté rappelle celle rencontrée lors du problème précédent : il faut calculer des angles dans des triangles isocèles, mais les côtés égaux ne sont pas immédiatement repérables ; de plus, la justification des égalités de longueurs fait appel à une propriété non encore utilisée : les côtés des triangles sont égaux comme rayons d'un même cercle.
On peut donc faire l'hypothèse qu'on obtiendra des raisonnements incomplets, ce qui mettra l'accent sur la recherche de stratégie et de justifications face aux évidences du dessin.
En fait, une première expérimentation montre que si l'obtention d'une solution n'est pas immédiate, et donne lieu à des recherches actives dans les groupes,

très peu restent sans aboutir. Il y a donc bien entraînement à la recherche, mais les étudiants finissent par trouver, ce qui valorise leur effort, leur montre qu'il est possible de trouver un problème pour lequel on ne dispose d'aucune solution connue, et encore peu d'habitudes de recherche. La question "trouver une solution" est résolue par le travail de groupe. En cela, cette situation contribue à améliorer le rapport aux mathématiques des étudiants. Reste la question de la preuve.

Une production sur affiches est demandée : l'enjeu au moment du débat porte bien sur la validité et la forme du raisonnement écrit.
On fera porter le débat successivement sur ces deux points :
- validité : y a-t-il une étape fausse ou une étape manquante ?
- forme et structure d'une démonstration : contrat à partir d'une production dont les étapes sont nettement séparées, chacune s'appuyant sur une propriété correctement explicitée.

<u>Conclusion</u>
Le corrigé de l'exercice qui a fait l'objet d'un débat oral en début de séance (situation 2, mesure de $A\hat{E}B$) est alors un support qui permet de préciser encore la forme attendue.

Déroulement et gestes

<table>
<tr><th>gestes du formateur</th><th>étapes du déroulement</th></tr>
<tr><td></td><td>Recherche individuelle
Recherche en groupes
Production des raisonnements sur affiches.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Dispositif d'observation : pendant la recherche, noter les questions que posent les étudiants, sans y répondre</td></tr>
<tr><td>Faire s'exprimer, dans l'ordre, en invitant ensuite les étudiants à donner leur avis :
- un groupe où l'on a mesuré s'il y en a,
- un groupe dont la démarche comporte une étape fausse,
- un groupe dont la démarche est incomplète avec une seule étape manquante,
- un groupe dont la démarche est correcte et complète.
L'accord doit d'abord porter sur un raisonnement reconnu comme valide pour les mathématiques (faire apparaître les implicites).
référence : les règles du débat.</td><td>Débat :
chaque groupe sollicité expose sa démarche d'après l'affiche produite

les étudiants n'ayant pas participé à l'affiche sont invités à dire s'ils sont d'accord ou non et en quoi sur les raisonnements produits.</td></tr>
<tr><td>A partir d'une affiche choisie pour la qualité de la rédaction (cf. ci-dessus), clarifier la forme attendue</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Dispositif d'observation : les affiches</td></tr>
</table>

Institutionnalisation

Quand on a trouvé un raisonnement, il faut être capable de le communiquer, pour en faire reconnaître la validité. Ce qui est attendu s'appelle une démonstration, c'est un discours de type déductif, dont la forme est définie entre mathématiciens, dans un but de communication.
Voilà comment cela se présente :
**** un raisonnement déductif est composé d'une succession d'étapes***
**** chaque étape est structurée en trois parties :***
(nous prenons comme exemple une des affiches sur laquelle on examine une ou plusieurs étapes)

- données ou résultat déjà obtenu avant, introduit(es) par "d'après l'énoncé", ou "je sais que", ou "on a démontré avant que", ...

- une propriété générale ou une définition du cours, et une seule à la fois, introduite par exemple par "or"

- un nouveau résultat, introduit souvent par "donc".

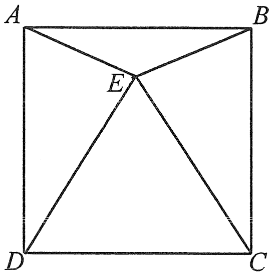
Illustrer avec les affiches : montrer des exemples, demander s'il y a des éléments manquants, ou inutiles, si des étapes sont correctes.

Distribuer la fiche corrigé pour l'exercice "Mesure de $\widehat{AEB}$" sur lequel on a travaillé en début de séance, et montrer à nouveau en quoi c'est ce qu'on appelle une démonstration : lire une étape avec les étudiants.

Pour la séance suivante : fiche d'exercices "Les angles"(ex 2 et 3 à détailler).

CALCUL DE $\widehat{AEB}$: CORRIGE

RAPPEL DE L'ENONCE



ABCD est un carré
CED est un triangle équilatéral
Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{AEB}$?

Proposition de démonstration :

Je sais que ABCD est un carré
***or* si un quadrilatère est un carré alors il possède quatre angles droits et quatre côtés de même longueur**
j'en déduis : $AB = BC = CD = DA$ (1) et $\widehat{BAD} = \widehat{ABC} = \widehat{BCD} = \widehat{CDA} = 90°$. (2)

Je sais aussi que CED est un triangle équilatéral
***or* si un triangle est équilatéral alors ses côtés ont même longueur et ses angles sont égaux à 60°**
donc $DC = CE = ED$ (3) et $\widehat{ECD} = \widehat{CDE} = \widehat{DEC} = 60°$. (4)

Je sais maintenant que $AD = DC$ (1) et que $DC = ED$ (3)
donc $AD = ED$.

Je sais que $AD = ED$
***or* si un triangle possède deux côtés de même longueur alors il est isocèle**
donc AED est un triangle isocèle de sommet principal *D*.
De la même façon je peux démontrer que *BEC* est isocèle en *C*.

Je sais aussi que $\widehat{ADC} = 90°$ et $\widehat{EDC} = 60°$ d'après (2) et (4).
j'en déduis $\widehat{ADE} = 90° - 60° = 30°$.

Je sais que AED est isocèle en *D* et que $\widehat{ADE} = 30°$.
***or* la somme des angles d'un triangle est 180° et les angles à la base d'un triangle isocèle ont même mesure**
donc $\widehat{EAD} = \widehat{AED} = \dfrac{180° - 30°}{2} = 75°$ (5)
De la même façon, dans le triangle isocèle *BEC* : $\widehat{EBC} = \widehat{BEC} = 75°$ (6)

Je sais que $\widehat{AED} = 75°$ (5), $\widehat{BEC} = 75°$ (6), et $\widehat{CED} = 60°$ (4).
***or* les quatre angles de sommet E, $\widehat{AED}, \widehat{AEB}, \widehat{BEC}, \widehat{CED}$, ont pour somme un angle plein, qui mesure 360°.**
alors : $\widehat{AEB} = 360° - \widehat{AED} - \widehat{BEC} - \widehat{CED} = 360° - 75° - 75° - 60° = 150°$.
CONCLUSION : $\underline{\widehat{AEB} = 150°}$

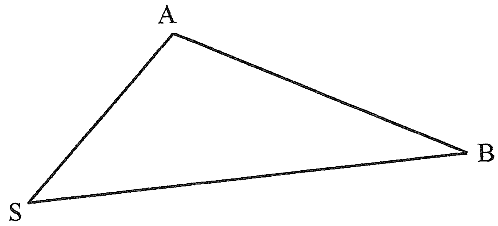
4. Situation 4 : les implicites dans une démonstration de géométrie

Retour sur l'exercice 2 de la fiche "Les angles"

<u>Enoncé</u> :

Dans le triangle ABS, on sait :
$\widehat{SAB} = 104°$ et $\widehat{ABS} = 31°$.

Tracer la hauteur [AK].
Calculer $\widehat{SAK}$.



Temps : 15 minutes

Objectifs - tracer les hauteurs dans un triangle (cas de triangle ayant un angle obtus)
KN
RAT, RM - prendre conscience des implicites liés à l'ordre des points et aux axiomes d'incidence

Considérations a priori

Cet exercice permet une clarification sur ce qu'il est légitime ou non de lire sur un dessin, mais avec des précautions : une telle distinction n'est pas facile à expliciter (alignement de points par exemple), et peut dépendre des conventions adoptées. **Ce qu'il est licite de lire sur un dessin (hauteur à l'intérieur ou à l'extérieur du triangle et conséquences) peut à un autre niveau être à démontrer en envisageant plusieurs cas de figures.**

Déroulement et gestes

gestes du formateur	étapes du déroulement
Quelqu'un veut-il proposer sa démarche ?	Un étudiant vient tracer la hauteur demandée, et exposer sa démarche au tableau.
Y a-t-il d'autres hauteurs pour SAB ? *1. Si oui, faire tracer la hauteur issue de B soit [BH].* *2. Si non, dire que "hauteur dans un triangle" a une signification qui n'est pas celle du sens commun, que ce n'est pas nécessairement une droite verticale.* *Demander alors, dans les deux cas, de formuler une définition pour hauteur dans un triangle, et faire tracer dans le cas 2 la hauteur issue de B.*	Traçage de la hauteur issue de B, qui se trouve à l'extérieur du triangle. Commentaires éventuels des autres étudiants sur le tracé. Formulation d'une définition pour hauteur dans un triangle. Traçage de la hauteur dans le cas 2.
Demander de calculer $\widehat{ABH}$.	Recherche, et écriture du calcul.

Faire remarquer que l'écriture de la première ligne du calcul suppose implicitement que H est à l'extérieur du segment [AS], donc que l'ordre des points est S, A, H. *Tout le problème sera alors à chaque fois de déterminer ce qu'il est légitime de lire sur un dessin, et ce qu'il faut prouver. Ici, on admet que H est à l'extérieur de [SA] et que K est à l'intérieur de [BS].* *A certains niveaux, on demande de justifier l'ordre des points, ou d'envisager plusieurs cas de figure si on travaille dans un cas général.*	Le plus court est : $\widehat{HAB} = \widehat{HAS} - \widehat{BAS}$ $\widehat{HAB} = 180° - 104° = 76°$ $\widehat{ABH} = 90° - 76° = 14°$ Précisions sur ce qu'on démontre toujours.

Institutionnalisation :

Par seule lecture sur un dessin, on ne s'autorise <u>jamais</u> à dire que deux droites sont parallèles, ou perpendiculaires, que deux angles ont même mesure, que deux segments ont même mesure, qu'un point est milieu d'un segment.
Pour l'alignement des points, cela dépend des cas ! Si le dessin est donné dans l'énoncé, l'alignement est parfois implicite. D'autres fois, c'est l'enjeu du problème, ou sans être explicitement l'enjeu, ce n'est pas une donnée. Nous tenterons d'éviter toute ambiguïté à ce sujet, mais ce n'est pas toujours facile ! Savoir décoder à quelles données on a droit fait partie de l'apprentissage, c'est la compréhension du contrat didactique.

Partie 4

Cahier des fiches de cours, exercices, et corrigés, distribués aux étudiants

Partie 4
Cahier des fiches de cours, exercices, et corrigés, distribués aux étudiants

Ce travail, a été réalisé progressivement au cours des quatre années de mise en oeuvre de la formation.
Les principales notions de cours sont récapitulées dans des fiches spécifiques.
Une fiche récapitule les "règles du débat mathématique" mises en évidence au cours de l'apprentissage de la preuve en mathématique, d'abord en arithmétique, puis en géométrie.
Les fiches d'exercices sont toutes accompagnées d'un corrigé, distribué seulement après reprise en classe avec les étudiants des exercices cherchés chez eux, après la séance d'introduction d'une notion.
Certaines fiches, appelées fiches critériées, constituées à partir de "tâches à erreurs" (vocabulaire de l'évaluation formatrice), participent de l'apprentissage et du type d'évaluation mis en oeuvre au cours de la formation.

Nous joignons quelques-uns de ces différents types de fiches à titre d'exemples.

REGLES DU DEBAT MATHEMATIQUE

Règle n°1 En mathématiques, une propriété qui se présente sous forme d'un "énoncé clos" est **soit vraie, soit fausse.**
Exemple d' "énoncé clos" : Si on remplace n par n'importe quel entier naturel dans l'expression : $n^2 - n + 11$, on obtient toujours un nombre premier.

Règle n°2 **Des exemples ne suffisent pas** pour prouver qu'une telle propriété est vraie.

Règle n°3 **Un contre-exemple suffit** pour prouver qu'une telle propriété est fausse.

Règle n°4 En mathématiques, quand on fait de la géométrie pure, des observations ou des mesures sur un dessin sont insuffisantes à prouver un résultat.

Règle n°5 Pour prouver en mathématiques, on raisonne en s'appuyant uniquement sur
- les informations contenues dans l'énoncé (les données),
- des propriétés connues, sur lesquelles les mathématiciens se sont mis d'accord.

Règle n°6 En mathématiques, des valeurs approchées ne permettent pas de trancher sur l'égalité de deux grandeurs.

<u>QUE D'ERREURS !</u> : comment ont-ils fait au juste ?...

Calcul à effectuer	Réponses	Code
1° calcul : 17 - 5 × 3 + 2 =	a) $12 \times 5 = 60$ b) $17 - 5 + 2 = 14$ c) $12 \times 3 + 2 = 36 + 2 = 38$ d) $17 - 15 + 2 = 0$	
2 ° calcul : 35 - 5 (18 - 6 × 3) =	a) $30 (12 \times 3) = 30 \times 36 = 1080$ b) $35 - 5 (18 - 18) = 35 - 90 - 90 = 35 - 180 = 145$ c) $35 - (90 - 30 \times 15) = 35 - (90 - 450)$ $= 35 - (- 360)$ $= 395$ d) $35 - 5 (18 - 18) = 35 - 5 = 30$ e) $30 (18 - 18) = 30$	
3°calcul $\frac{7}{12} - \frac{11}{18} + \frac{1}{9} =$	a) $\frac{7}{12} - \frac{12}{27} = \frac{5}{15}$ b) $\frac{126 - 132 + 24}{216} = \frac{18}{216} = \frac{1}{12}$ c) $\frac{21}{36} - \frac{22}{36} + \frac{4}{36} = \frac{21}{36} - \frac{26}{36} = \frac{-5}{36}$	

Réussir un calcul : *les critères*

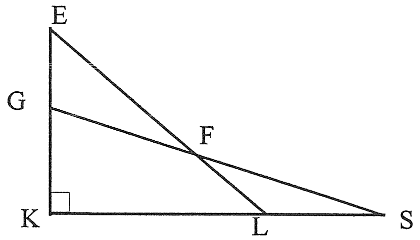
Avant	Faire	Vérifier ce que je fais...	Code
• Prendre le temps d'analyser • Décider d'une stratégie (Comment procéder astucieusement ?... Par quel calcul commencer ?...Peut-on associer des calculs ?...)	appliquer des règles de priorités	• J'ai supprimé les parenthèses en commençant par effectuer les calculs dans les parenthèses les plus emboîtées. • Si le calcul ne comporte que des produits et des sommes : j'ai effectué les produits en priorité. • Dans une suite d'additions et de soustractions, j'ai effectué les calculs en commençant par le plus à gauche ou en appliquant la règle des sommes algébriques.	P1 P2 P3
• Identifier l'opération Identifier les nombres : est-ce un calcul avec des fractions, des relatifs ? • Quelle est la règle des signes correspondant à cette opération ? • Et pour ce qui est écrit avec des chiffres ? • Identifier les nombres • Différencier somme et produit .	appliquer les règles opératoires	• ***Pour les produits*** : Dans un produit de relatifs j'ai appliqué : * pour les signes : (+)x(-) → - (-)x (-) → + Pour un produit de fractions : j'ai multiplié les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux. *Mais je n'ai pas oublié de simplifier dès que possible* (avant même d'effectuer les multiplications.) • ***Pour les sommes*** : * Dans une somme *j'ai appliqué les* règles : Pour deux nombres de même signe *j'ai gardé le signe et j'ai ajouté les parties « numériques » (valeurs absolues)*. * Pour deux nombres de signes contraires *j'ai pris le signe du nombre qui a la plus grande partie « numérique » , (valeur absolue) et j'ai soustrait les valeurs absolues*. * Quand le calcul comporte *des fractions* , je n'ai ajouté qu'après les avoir mises au *même dénominateur* et pour ajouter je n'ai ajouté que les numérateurs. • ***Pour la division de deux fractions :*** J'ai multiplié par la fraction inverse.	MR MF S AR AF DF
	changer d'écritures	• Dans un calcul comportant des fractions non décimales et des écritures décimales j'ai transformé les écritures décimales en fractions. • J'ai simplifié dès que possible mais je n'ai pas fait : $\frac{4}{\cancel{7}} - \frac{\cancel{7}}{9} = \frac{4}{9}$ • Dans une somme, pour mettre au même dénominateur j'ai cherché des fractions équivalentes ayant même dénominateur	CE S CD
• Savoir à qui s'adresse ce calcul , dans quel but, et pour quel motif il est fait.	rédiger	• J'ai écrit suffisamment d'étapes pour que le calcul soit communicable, vérifiable • Je n'ai pas oublié de signe égal • D'une ligne à l'autre je n'ai pas oublié ni changé ni rajouté de nombre ou de signe • Si le résultat est une fraction il doit être simplifié	R S

AIRES-EXERCICES

EXERCICE 1

Construire un triangle ABC tel que AB = 3,6 cm , AC = 4,8 cm , BC = 6 cm. On peut prouver, en utilisant la réciproque du théorème de Pythagore, que ce triangle est rectangle en A : on l'admettra ici. Tracer la hauteur issue de A : elle coupe [BC] en H.
Calculer AH.

EXERCICE 2



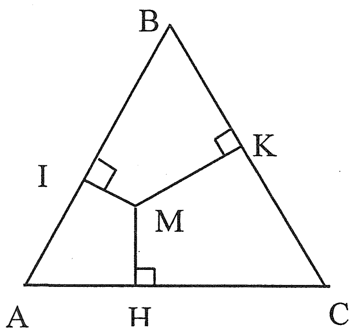
La figure n'a pas été construite à l'échelle ; elle ne respecte pas les proportions qu'aurait le dessin si on utilisait les bonnes mesures.
EG = 10 ; GK = 15 ; KL = 27 ; LS = 18.

Les triangles EFG et FSL ont-ils la même aire ?

EXERCICE 3

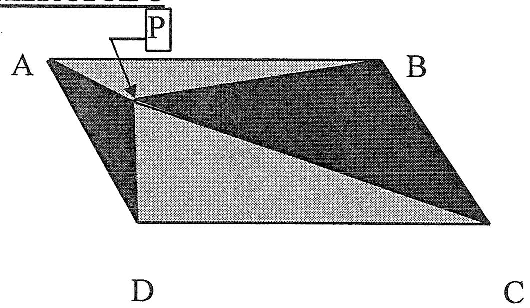
Tracer un triangle *ABC*, d'aire 30 cm^2 et tel que *AH*= 5 cm et $\widehat{HAC} = 20°$ (*H* le pied de la hauteur issue de *A)*.

EXERCICE 4



ABC est un triangle équilatéral.
Quelle que soit la position de M dans *ABC*,
la longueur *MH*+*MK*+*MI* est toujours la même
Démontrez le.

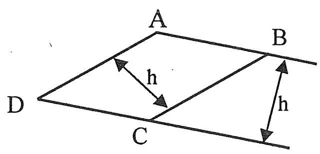
EXERCICE 5



ABCD est un parallélogramme.
Quelle que soit la position de P dans ABCD l'aire pointée est égale à l'aire noire.

Démontrez le.

Rappel :



L'aire d'un parallélogramme se calcule de deux façons :

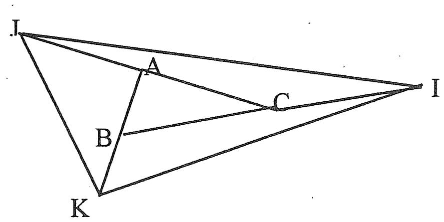
$h_1 \times BC$ ou $h_2 \times DC$

EXERCICE 6

1) Prouver qu'une médiane d'un triangle partage celui-ci en deux triangles de même aire.

2) Dans la figure ci-contre ,*I,J* et *K* sont les symétriques respectifs de *B,C,A* par rapport à *C,A* et *B*.
Montrer que l'aire du triangle *IJK* est sept fois plus grande que celle du triangle *ABC*.

Indication : tracer [*AI*] ,[*BJ*] et [*CK*].

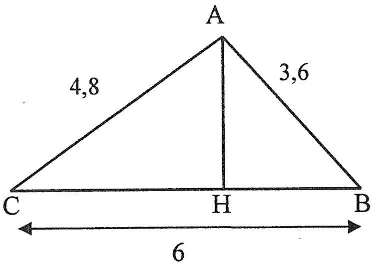


EXERCICE 7

Soit le triangle ABC, rectangle en A, tel que AC = 6,5cm et AB = 10,5cm, et le carré AIKJ de 4 cm de côté avec I ∈[AC] et J ∈[AB]. Réaliser une figure soignée.
Les points C, K, et B sont-ils alignés ? Justifier la réponse proposée.

AIRES : CORRIGE

Ex.1



* Aire ABC = $\frac{AH \times BC}{2} = \frac{AH \times 6}{2} = 3 \times AH$.

* ABC est un triangle rectangle en A donc on peut prendre [AC] comme base et [AB] comme hauteur. On a donc aussi :

Aire ABC = $\frac{AC \times AB}{2} = \frac{4,8 \times 3,6}{2} = 8,64$.

Alors $3 \times AH = 8,64$ donc $AH = 8,64 : 3 = 2,88$

<u>AH = 2,88cm.</u>

Ex.2

Aire EKL = $\frac{\frac{27 \times 25}{2}}{2} = 337,5$

Aire GKS = $\frac{15 \times (27+18)}{2} = 337,5$

donc Aire EKL = Aire GKS

soit Aire EFG + <u>Aire GFLK</u> = Aire FSL + <u>Aire GFLK</u>

donc <u>Aire EFG = Aire FSL</u>

Ex.3

Faire d'abord une figure à main levée, pour trouver par quoi commencer. Aire ABC = $\frac{AH \times BC}{2} = 30cm^2$ donc BC = 12cm.

Tracer [AH] de mesure 5cm, puis un angle $\widehat{HAx}$ de 20°, puis la perpendiculaire d à [AH] passant par H qui coupe la demi-droite [Ax) au point C. On peut alors placer <u>deux points B sur d</u> tels que BC = 12cm (un de chaque côté de C). On a alors deux triangles ABC qui sont solutions du problème.

Ex.4

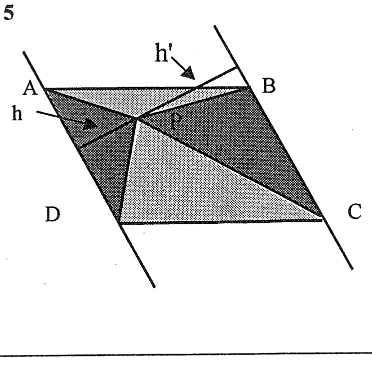
La somme des hauteurs évoque la somme des aires des triangles ABM, BMC, AMC, et cette somme est égale à l'aire de ABC, qu'on peut désigner par $\mathcal{A}$.

Donc $\mathcal{A} = \frac{MI \times AB}{2} + \frac{MH \times BC}{2} + \frac{MK \times AC}{2}$. Or ABC est un triangle équilatéral, donc AB = BC = AC = c.

Alors, $\mathcal{A} = \frac{MI \times c + MH \times c + MK \times c}{2} = \frac{c(MI + MH + MK)}{2}$. $\mathcal{A}$ et c ne changent pas pour un même triangle,

donc <u>MI+MH+MK est constant</u> quelle que soit la position de M à l'intérieur du triangle ABC.

Ex. 5



Aire ADP + Aire PBC = $\frac{AD \times h}{2} + \frac{BC \times h'}{2}$.

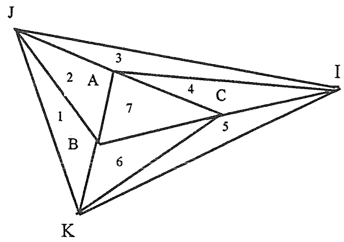
Or, si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses côtés opposés ont la même mesure, donc : AD = BC = a.

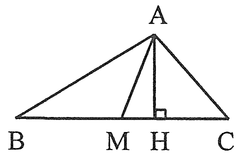
Donc, Aire ADP + Aire PBC = $\frac{a \times h}{2} + \frac{a \times h'}{2} = \frac{a \times (h + h')}{2}$.

h+h' représente l'une des hauteurs du parallélogramme : celle relative à [AD], (ou [BC]). Donc l'aire noire est la moitié de l'aire du parallélogramme.

Il suffit de faire le même travail pour l'aire pointée ... A vous !

Ex.6





1)[AM] médiane dans le triangle ABC, donc M milieu de [BC], donc BM=MC. Alors les triangles ABM et AMC ont même base (BM=MC) et même hauteur [AH], donc <u>ils ont la même aire.</u>

2)K est le symétrique de A par rapport à B donc [JB] est médiane dans AJK. Alors, d'après 1), Aire 1 = Aire 2.

On prouve de même que : Aire3 = Aire 4, Aire5 = Aire 6, Aire6 = Aire 7, puis Aire7 = Aire 4, enfin Aire2 = Aire 7. On a ainsi prouvé que chaque aire est 1/7 de Aire IJK !

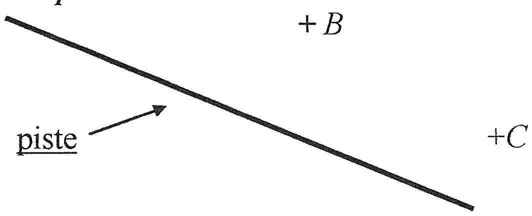
MEDIATRICES-EXERCICES

EXERCICE 1

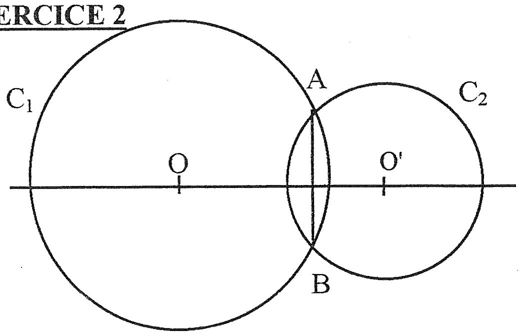
Deux motards B. IDON et C. ARTER doivent rejoindre au même moment un point A d'une piste tracée dans un désert plat. B. IDON part du village B avec sa moto de 950 cm^3, et C. ARTER part du village C avec sa moto de 1043 cm^3. Les villages sont distants de 193 km. Bien que les motos n'aient pas la même puissance, elles roulent à la même vitesse : 93km/h. Le village B est à 50 km de la piste , et le village C est à 43 km de la piste. Les motards partent tous les deux le 19 octobre 1993 à 19 h exactement.

Placer le point A sur le plan ci-dessous :

Plan de la région



EXERCICE 2



$\mathbf{C_1}$ et $\mathbf{C_2}$ sont deux cercles sécants en A et B

Prouver que (OO') est la médiatrice de $[AB]$

EXERCICE 3

Le but de l'exercice est de montrer que les trois médiatrices d'un triangle sont concourantes. On suppose donc non connue cette propriété.

Tracer un triangle KLM, puis Δ_1 la médiatrice de $[KL]$ et Δ_2 la médiatrice de $[LM]$. Δ_1 et Δ_2 se coupent en O.

Prouver que O est sur la médiatrice de $[KM]$.

En déduire que O est le centre du cercle circonscrit au triangle KLM.

EXERCICE 4

C est un cercle de centre O et de diamètre $[AB]$. D et F sont les points d'intersection de **C** avec la médiatrice du segment $[OA]$. Démontrer que DOA est un triangle équilatéral.

Pour ceux qui veulent aller plus loin :

La perpendiculaire à (DO) passant par A coupe la droite (DF) en R et le cercle **C** en P . Démontrer que (OR) est perpendiculaire à (AD).

Quelle est la nature du quadrilatère $ADPO$? Démontrer !

EXERCICE 5 : *Exercice de la tache à erreur.*

1) a) Tracer un triangle ABC tel que $AB = 6$ cm, $C\hat{A}B = 38°$ et $C\hat{B}A = 52°$
   b)Marquer le point D, symétrique de B par rapport à C.
   c)Tracer la médiatrice de $[AD]$ qui coupe (AC) en I.
2) Quelle est la nature du triangle ADB ?
3) Prouver que les triangles AID , AIB et BID sont isocèles.

EXERCICE 6

Tracer un triangle ABC. Soient K et L les pieds des hauteurs issues respectivement de B et de C dans le triangle ABC.

1) Existe-t-il un cercle passant par les quatre points B, C, K, L ?
2) Montrer que le milieu I de [BC] est situé sur la médiatrice de [KL].

<u>MEDIATRICES : CORRIGE</u>

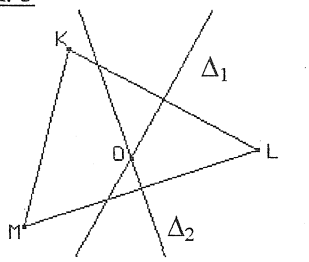
<u>Ex. 1</u>

Il suffit de tracer la médiatrice de [BC] qui coupe la piste en A (laisser les traits de construction).

<u>Ex. 2</u>

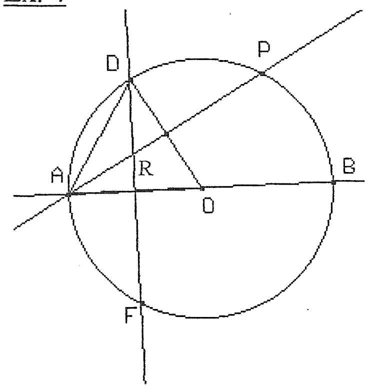
A et B sont 2 points du même cercle de centre O' donc O'A=O'B : O' est équidistant de A et de B .
Or si un point est équidistant des extrémités d'un segment, alors il est sur la médiatrice de ce segment.
Donc <u>O' est sur la médiatrice de [AB].</u> On démontre de même que <u>O est sur la médiatrice de [AB].</u>
O et O' sont sur la médiatrice de [AB] : donc <u>la médiatrice de [AB] est la droite (OO')</u>.

<u>Ex. 3</u>



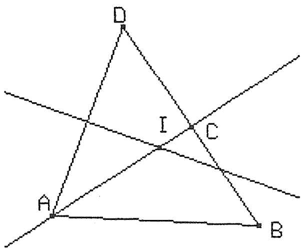
* O est à la fois sur la médiatrice de [KL] et sur celle de [LM].
Or : si un point est situé sur la médiatrice d'un segment, alors il est équidistant des extrémités de ce segment.
Donc OK = OL et OL = OM.
* Alors <u>OK = OM</u>. Donc O est équidistant des extrémités de [KM].
Or si un point est équidistant des extrémités d'un segment, alors il est sur la médiatrice de ce segment. Donc <u>O est sur la médiatrice de [KM].</u>

<u>Ex. 4</u>



1)*D et A sont 2 points du même cercle C de centre O donc <u>OA = OD</u>.
*D est sur la médiatrice de [OA]. Or : si un point est situé sur la médiatrice d'un segment, alors il est équidistant des extrémités de ce segment. Donc <u>OD = DA</u>.
*OA = OD et OD = DA donc <u>OA = OD = DA</u>.
Alors <u>le triangle DOA</u>, qui a 3 côtés de même mesure, <u>est équilatéral</u>.
2) * A est situé sur la perpendiculaire (AR) à la droite (DO). Donc (AR) est hauteur pour le triangle équilatéral DOA.
* Or un triangle équilatéral a 3 axes de symétrie : une hauteur est aussi médiatrice du côté opposé, donc (AR) hauteur, est aussi <u>médiatrice de [DO]</u> .
R est donc le point d'intersection de 2 des 3 médiatrices du triangle ADO. Or, les trois médiatrices d'un triangle sont concourantes : donc (OR) est la 3° médiatrice, celle de [AD], et<u>(OR) ⊥ (AD).</u>
*P étant sur la médiatrice de_[DO], DP=PO. D'autre part, PO=OA (rayons d'un même cercle), et OA=AD (d'après 1). Donc DP=PO=OA=AD : le quadrilatère ADPO, qui a ses 4 côtés de même mesure, est <u>un losange</u>.

<u>Ex. 5</u>



1) La figure n'est pas faite en vraie grandeur.
2) *Dans le triangle CAB : $C\hat{B}A$=52° et $C\hat{A}B$=38° .
La somme des angles est 180°, d'où $A\hat{C}B$ =180°-(52°+38°)=90°.
Alors (AC) ⊥ (CB) donc (AC) ⊥ (DB).
* D est symétrique de B par rapport à C donc C est le milieu de [BD].
* Alors (AC), qui est perpendiculaire à [BD] et qui passe par son milieu C, est la <u>médiatrice du segment [BD]</u>.
Or, tout point de la médiatrice d'un segment est équidistant des extrémités de ce segment : donc A est équidistant de B et de D, donc <u>le triangle ADB est isocèle de sommet principal A.</u>
3) I est le point d'intersection de deux des médiatrices du triangle ADB. Or les trois médiatrices d'un triangle sont concourantes et leur point d'intersection est le centre du cercle circonscrit au triangle. Donc I est le centre du triangle circonscrit à ADB : IA=ID=IB et <u>les trois triangles AID, DIB, et AIB sont isocèles en I.</u>

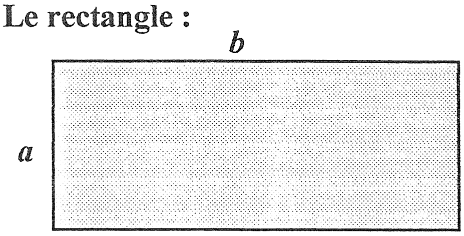
<u>Ex. 6</u>

1) * [BK] est hauteur dans ABC donc le triangle BKC est rectangle en K et a pour hypoténuse [BC].
Or, si un triangle est rectangle, l'hypoténuse est le diamètre du cercle circonscrit au triangle. Donc [BC] est diamètre du cercle circonscrit à BKC.
* De la même façon, [BC] est diamètre du cercle circonscrit au triangle BLC.
* Il existe un seul cercle ayant pour diamètre [BC]. D'après ce qui précède, ce cercle passe par K et L.

Les quatre points B, C, K, L, sont sur le cercle de diamètre [BC] .
2) Le centre du cercle qui passe par les quatre points B, C, K, L, est I, le milieu du diamètre [BC].
Or les points situés sur un cercle sont à égale distance du centre du cercle. Donc IK = IL, c'est-à-dire que I est équidistant des points K et L.
Or : si un point est équidistant des extrémités d'un segment, alors il est situé sur la médiatrice de ce segment.
Donc I, milieu de [BC], est situé sur la médiatrice de [KL] .

Comment calculer périmètres et aires des figures planes usuelles.

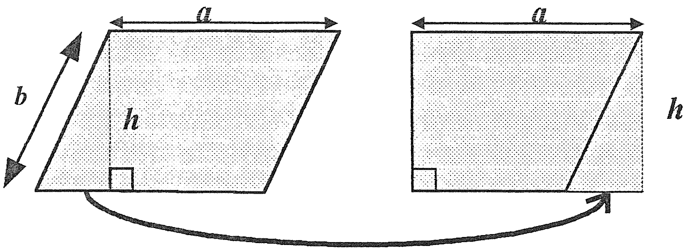
I - Le rectangle :



L'aire du rectangle est :
longueur × largeur = $\boxed{a \times b}$

Périmètre $\boxed{2\ (a + b)}$

II - Le parallélogramme :



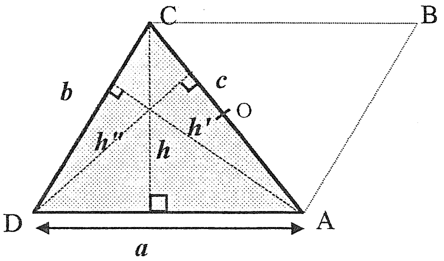
Par déplacement de surface, (du petit triangle), le parallélogramme a la même aire qu'un rectangle de longueur ***a*** et de largeur ***h***. ***h*** est la hauteur relative au côté de longueur ***a***.

L'aire du parallélogramme est : $\boxed{a \times h}$

Périmètre : comme pour le rectangle $\boxed{2\ (a+b)}$

Attention !
Dans un parallélogramme, il y a deux bases possibles, a et b, donc deux hauteurs possibles.
On a donc deux façons de calculer l'aire du parallélogramme, selon la base choisie.

III - Le triangle :

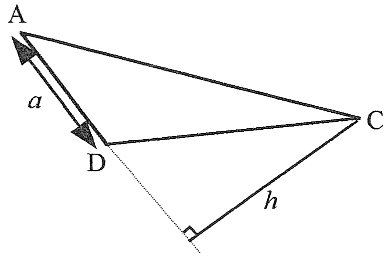


Le parallélogramme ABCD a un centre de symétrie, qui est le milieu O des diagonales. Les triangles ABC et ADC sont symétriques par rapport à O et pour cette raison ils sont superposables : ils ont la même aire, qui est égale à la moitié de l'aire du parallélogramme ABCD.
h est la hauteur relative au côté de longueur ***a***.

L'aire du triangle ADC *est :* $\boxed{\dfrac{\mathbf{a \times h}}{2}}$

Cependant, un triangle a trois côtés et trois hauteurs. On peut donc calculer l'aire de trois façons différentes, en prenant comme base le côté qu'on veut, à condition de considérer chaque fois la hauteur correspondante.
Donc

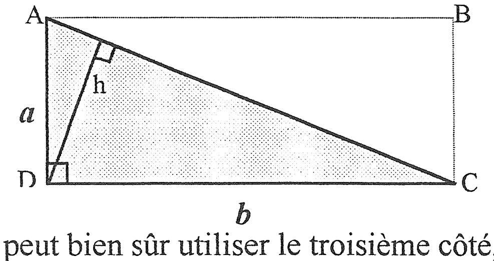
$$\boxed{Aire\ (ADC) = \frac{a \times h}{2} = \frac{b \times h'}{2} = \frac{c \times h''}{2}}$$



Cas d'un triangle ayant un angle obtus

Le périmètre d'un triangle est la somme des longueurs des trois côtés. Pour ADC : AD + DC + CA.

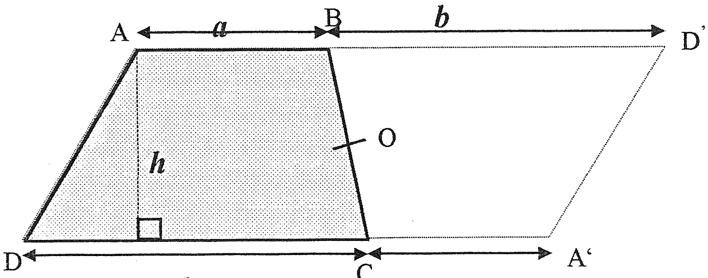
Cas du triangle rectangle



Le triangle ADC a une aire égale à la moitié de celle du rectangle ABCD, qui est un parallélogramme particulier.
Si on prend [AD] comme base et [DC] comme hauteur, on a $\boxed{Aire(ADC) = \dfrac{a \times b}{2}}$

On peut bien sûr utiliser le troisième côté, [AC], et prendre la hauteur correspondante, h..
L'aire de ADC est aussi $(AC \times h)/2$.

IV - Le trapèze :

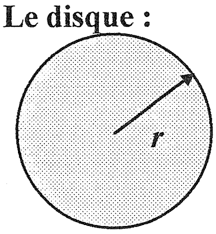


Le trapèze BD'A'C est le symétrique du trapèze ABCD par la symétrie de centre O. Son aire est donc la moitié de l'aire du parallélogramme AD'A'D.

L'aire de ABCD est : $\boxed{\dfrac{(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times\mathbf{h}}{2}}$

Comme pour tous les polygones, le périmètre est la somme des côtés.

VI - Le disque :



L'aire du disque est : $\boxed{\Pi r^2}$

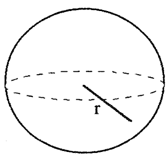
Périmètre du cercle : $\boxed{2\Pi r \text{ ou } \Pi D}$

VII - Polygones :

Il est inutile de chercher une formule pour calculer le périmètre d'un polygone quelconque. Pour une figure plane, il suffit de savoir que le périmètre est le nombre qui mesure la longueur du contour. ***Pour calculer le périmètre d'un polygone, il suffit de calculer la somme des longueurs des côtés.***
Pour ce qui est de l'aire, on peut songer à découper le polygone en question en triangles ou autres figures planes dont on sait calculer l'aire.

Volumes des solides usuels

I - Boule ou sphère



Aire d'une sphère de rayon r : $\boxed{4\,\Pi\, r^2}$

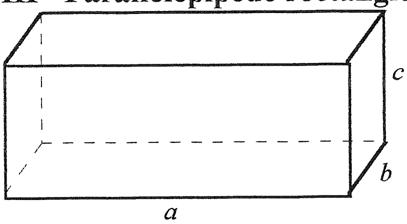
Volume : $\boxed{\dfrac{4}{3}\Pi\, r^3}$

II - Cube

Volume d'un cube d'arête *c* : $\boxed{c^3}$

Aire latérale : $\boxed{6c^2}$

III - Parallélépipède rectangle



C'est un solide qui est appelé aussi un *pavé droit*. Il possède six faces. Toutes ses faces sont des rectangles. Deux faces opposées sont parallèles, deux faces sécantes sont perpendiculaires. Deux faces opposées ont mêmes dimensions.

Volume : $\boxed{a\,.\,b\,.\,c}$ Aire latérale : $\boxed{2\,(ab + bc + ca)}$

IV - Cylindre et prisme droit

Un cylindre a pour base un disque, un prisme a pour base un polygone (triangle, quadrilatère,…)
Si B désigne l'aire de la base et h la hauteur : le volume est $\boxed{\mathrm{B}\times \mathrm{h}}$ soit $\boxed{\Pi r^2 h}$ pour le cylindre.

IV - Pyramide et cône

Le cône a pour base un disque, la pyramide a pour base un polygone.

Avec les mêmes notations que ci-dessus, le volume est $\boxed{\dfrac{\mathbf{B}\times\mathbf{h}}{3}}$ soit $\boxed{\dfrac{\Pi \mathbf{r}^2\mathbf{h}}{3}}$

DES QCM POUR S'ENTRAINER

1) Le PPCM de 36 et 45 est :

a) *108*
b) *135*
c) *180*

2) Les nombres qui divisent 97 en donnant pour reste 13, dans une division euclidienne, sont au nombre de :

a) *2*
b) *3*
c) *4*
d) *5*

3) Parmi les phrases suivantes, quelles sont celles qui sont vraies ?

a) Le chiffre 24 est multiple à la fois de 4 et de 6.
b) On considère : 538. Le nombre de dizaines est plus petit que le nombre de centaines.
c) 1538 a le même chiffre des centaines que 538.
d) 1538 a le même nombre de dizaines que 538.

4) En comptant ses billes par 4, puis par 5, puis par 6, Jacques remarque qu'il en reste chaque fois deux. Pour trouver le nombre de billes la principale notion qui entre en jeu est :

a) *le PGCD*
b) *le PPCM*
c) *la division euclidienne*

5) Si on regroupe les élèves d'un lycée par 20, par 24, ou par 18, il en reste toujours 9. Combien y a-t-il d'élèves dans cet établissement sachant que c'est un nombre compris entre 500 et 1000 ?

a) *369*
b) *729*
c) *711*
d) *720*

6) 3024 est le produit de quatre entiers consécutifs. Quels sont-ils ?

a) *7, 8, 9, 10*
b) *4, 5, 6, 7*
c) *6*, 7, 8, 9
d) *1, 2, 3, 4*

7) Qui n'a pas effeuillé la marguerite ?... « Elle m'aime un peu , beaucoup, passionnément, à la folie, pas du tout, un peu, beaucoup,... ». En effeuillant une marguerite de 31 pétales, elle m'aime :

a) *un peu*
b) *beaucoup*
c) *passionnément*
d) *à la folie*
e) *pas du tout*

8) Parmi les phrases suivantes, quelles sont celles qui sont vraies ?

a) *Le reste de la division par 9 de 111 111 111 est 2.*
b) *Le reste de la division par 5 de 111 111 111 est 1.*
c) *Le reste de la division par 6 de 111 111 111 est 3.*
d) *Le reste de la division par 15 de 111 111 111 est 11.*
e) *Le reste de la division par 15 de 111 111 111 est 6.*

Partie 5

Eléments d'évaluation de la formation

Partie 5
Eléments d'évaluation de la formation
Effets à court et moyen terme

1. Réussite au test de sélection de l'IUFM de Lyon

Pour l'épreuve préalable d'admission en formation de Professeur d'Ecole proposé par l'IUFM de Lyon (test de sélection), nous utilisons les résultats donnés par le Service Etudes/Statistiques de l'IUFM.

Année 96/97 :

Au printemps 97, 86 de nos étudiants de licence, option PME, ont passé cette épreuve. Les résultats sont donnés par série : nos étudiants sont en série 3, qui regroupe les étudiants STAPS et licence de Sciences de l'Education option "métiers de l'enseignement". **64%** de nos étudiants ayant passé ce test le réussissent, alors que la réussite moyenne dans leur série est 54,3%. Cela représente 55 étudiants venant de licence de Sciences de l'Education Lyon 2.

Si l'on regarde le détail des réussites pour chaque question du test, on constate que pour 20 questions sur 29, nos étudiants ont de meilleurs résultats que l'ensemble des étudiants, **toutes séries confondues**.

Année 97/98 :

Au printemps 98, pour 69 étudiants de licence option PME qui passent le test, **48%** réussissent, soit 33 d'entre eux. Mais nous ne disposons pas actuellement d'éléments comparatifs pour les étudiants de la même série.

2. Admission à l'IUFM de Lyon

Année 96/97 :

Parmi les 55 étudiants ayant réussi le test au printemps 97, 19 soit 22% d'entre eux sont admis en première année de Professorat d'Ecole (PE1), à Lyon, et **14 se sont effectivement inscrits pour 97/98**.
Nous ne savons pas combien sont inscrits dans les autres académies.

Par ailleurs, quatre étudiants sont admis en PLP2, à l'IUFM de Lyon.

Année 97/98 :

Parmi les 33 étudiants venant de notre licence et qui ont réussi le test au printemps 98, 15 soit 45% d'entre eux sont admis en première année de Professorat d'Ecole à Lyon

En PLP2 (Professorat de Lycée Professionnel), 6 étudiants sont admis à s'inscrire, dont 3 en vente, 2 en comptabilité, 1 en génie électrique.

Pour la filière CPE (Conseiller Principal d'Education), aucun étudiant n'est actuellement admis à s'inscrire, 7 sont sur liste d'attente.

3. Réussite aux concours de recrutement

<u>Admission au CRPE en 98</u>

Sur les 14 inscrits en PE1, et qui viennent de licence de Sciences de l'Education-Lyon 2, 10 sont admis au concours, et 2 sont sur liste complémentaire. Les deux autres ne sont pas admissibles.
Il reste à comparer ce résultat avec la réussite globale au CRPE pour l'Académie : sur les 541 inscrits à l'IUFM, 304 sont admis, soit environ 56% des stagiaires IUFM.
C'est donc un très bon résultat qu'obtiennent là nos anciens étudiants.

<u>Admission en PLP2 en 98</u>
Une seule étudiante, sur les quatre inscrits, réussit le concours de recrutement.

Bibliographie

Bibliographie

ANSELMO et al., (94), Pratique de l'évaluation formatrice, éd. IREM de Lyon

ARSAC et al., (84), La pratique du problème ouvert, éd. IREM de Lyon

ARSAC et al., (88), Problème ouvert et situation-problème, éd. IREM de Lyon

ARSAC et al., (92), Initiation au raisonnement déductif au collège, éd. PUF de Lyon

BALACHEFF N. (87), Processus de preuve et situations de validation, Educational Studies in Mathematics, vol. 18 n°2, éd. Reidel Publishing Company

CHEVALLARD Y. (88), Le concept de rapport au savoir, Rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel, Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique, n°108, Equipe de didactique des mathématiques, IREM de Grenoble

CHEVALLARD Y. (92), Concepts fondamentaux de la didactique, perspectives apportées par une approche anthropologique, Recherche en Didactique des Mathématiques, vol. 12 n°1, pp. 73-111, éd. La Pensée Sauvage

DURAND-GUERRIER V. (96), Logique et raisonnement mathématiques ; défense et illustration de la pertinence du calcul des prédicats pour une approche didactique des difficultés liées à l'implication, Thèse d'état.

FAVRE D., REYNAUD C. (98), L'animation des débats socio-cognitifs : les règles à respecter et les capacités à développer pour être animateur, Actes des XXèmes Journées Internationales sur la Communication, l'Education et la Culture Scientifiques et Techniques : Formation à la médiation et à l'enseignement

LAKATOS I. (76), Proofs and Refutations, éd. Cambridge University Press

NUNZIATI G. (90), Pour construire un dispositif d'évaluation formatrice - dossier du formateur, in Cahiers Pédagogiques n° 280

PEIX A. , TISSERON C., (98), Le problème ouvert comme moyen pour réconcilier les futurs professeurs d'école avec les mathématiques, Petit x n° 48, pp.5-21, éd. IREM de Grenoble

ROBERT A. (92), Projets longs et ingénieries pour l'enseignement universitaire : questions de problématique et de méthodologie. Un exemple : un enseignement annuel de licence en formation continue, Recherche en Didactique des Mathématiques, vol. 12 n°2-3, pp. 181-220, éd. La Pensée Sauvage

TITRE	**ANALYSE D'UNE FORMATION EN MATHEMATIQUES EN LICENCE DE SCIENCES DE L'EDUCATION**
AUTEURS	Annie PEIX, Paul PLANCHETTE, Jean-François ZUCCHETTA, Professeurs de mathématiques, chargés de cours à L'ISPEF (LYON 2)
DATE	Mai 2001
NIVEAU	Etudiants non scientifiques de licence ayant pour projet la préparation au professorat d'école.
MOTS-CLES	ingénierie de formation, rapport aux mathématiques, recherche, preuve, situations d'apprentissage niveau collège.

RESUME

Le point de départ de la recherche, menée de septembre 97 à septembre 99, est l'élaboration et la mise en œuvre effective d'une formation en mathématiques pour les étudiants de licence de sciences de l'éducation (ISPEF-Lyon 2) se destinant aux métiers de l'enseignement. Cette formation vise en particulier, pour ces étudiants en majorité non scientifiques, à modifier le rapport aux mathématiques des étudiants, à développer une méthodologie de recherche, à favoriser l'apprentissage de la preuve en mathématiques, et à permettre la réactivation ou l'apprentissage de notions mathématiques.

Dans le **tome 1**, on trouvera la description générale de la formation, la description d'une pratique de formation au travers du déroulement de certaines séquences, l'analyse a priori de ces séquences, des exemples de documents destinés aux étudiants, et une première étude des effets à court et moyen terme de la formation. Tous ces éléments sont aisément transposables à l'enseignement en collège voire en lycée, que ce soit pour le choix des situations, pour leur conduite qui inclut l'animation de débats, ou pour les documents (cours, exercices, corrigés, tâches à erreurs, QCM) utilisés lors des séances.
Tous ces éléments sont transposables aisément à l'enseignement en collège et même lycée, que ce soit pour le choix des situations, pour leur conduite qui inclut l'animation de débats, ou pour les documents distribués en cours.

Le **tome 2** présente l'étude des caractéristiques du public étudiant, en particulier l'analyse des démarches de recherche et de preuve, et d'autres éléments d'évaluation de la formation.

FORMAT	NOMBRE DE PAGES	N° ISBN
A4	62	2-906943-44-4