

dessiner l'espace

SOLUTIONS

irem
de
lorraine

topiques

dessiner l'espace

irem de lorraine

solutions des **exercices**

La loi du 11 mars 1957 n'autorisant, au terme des alinéas 2 et 3 de l'article 41, d'une part, que les copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective, et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droits ou ayants cause, est illicite (alinéa 1^{er} de l'article 40). - Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code pénal.

© Les Editions Topiques, Metz, 1989
Dépôt légal : 2^e trimestre 1989
ISBN : 2-87796-001-3

Imprimé en France

SOMMAIRE

	page
avant-propos : représentation en perspective	4
la perspective fuyante	5
la perspective cavalière	5
projections droites ou obliques	6
les propriétés de base	7
première série d'exercices	8
deux remarques simples	8
<i>Corrigés des exercices 1 à 28</i>	9
deuxième série d'exercices	24
les objectifs fondamentaux	24
la projection d'un angle droit	25
construire une perpendiculaire	26
sections d'un cylindre	27
<i>Corrigés des exercices 29 à 61</i>	28
troisième série d'exercices	44
les objectifs fondamentaux	44
quelques points importants	45
<i>Corrigés des exercices 62 à 81</i>	46
thème : introduction à l'orthogonalité dans l'espace	56
les objectifs fondamentaux	56
le concept de perpendiculaires	57
la trace sur un plan	57
<i>Corrigés des exercices 82 à 92</i>	59

Avant-propos

REPRESENTATION EN PERSPECTIVE CAVALIERE

S'il est bien rare de constater qu'un chapitre de mathématiques comme *la géométrie dans l'espace* puisse s'enseigner sous forme de cours magistral, on observe de plus en plus, en revanche, un intérêt manifeste des élèves pour les activités intégrant *le dessin* ou *les calculs* aux raisonnements et aux démonstrations classiques.

Cet intérêt provient d'abord du fait que chacun peut trouver dans des exercices de ce type le sentiment de pouvoir faire quelque chose *à sa mesure*, même si une partie des objectifs purement mathématiques du professeur lui ont échappé. L'élève pourra, par exemple s'attacher au simple aspect esthétique des figures et des résultats des constructions, il pourra aussi s'affranchir des nécessités de rédaction et de formulation, trop pesantes à son gré, pour se contenter de donner la liste des tracés successifs ...

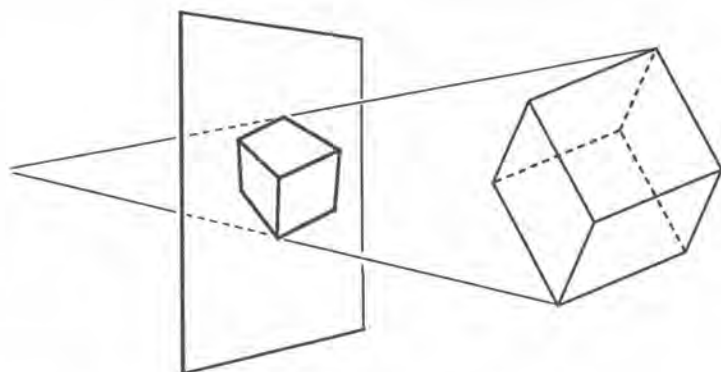
Même si le professeur, de son côté, ne saurait considérer que ces différents niveaux aient la même valeur, il dispose là d'un outil capable de s'adapter à un large éventail d'élèves, dans des classes à fort « gradient de niveau ».

Le parti-pris du présent fascicule est essentiellement celui des *figures* et de l'exploitation des figures (à travers les *constructions*) au niveau de la pensée logique. On s'apercevra vite que, du dessin à l'imagination, de la réflexion à la découverte et au calcul, de l'anticipation et de la conjecture à la validation et à la démonstration, toutes les compétences habituelles de la géométrie sont mises en œuvre. On observera d'entrée de jeu que le moindre exercice est une excellente motivation pour le réinvestissement de multiples connaissances (parallélisme, orthogonalité, volumes, proportionnalité, équations dans un repère, etc.), et que, même en l'absence de formalisation rigoureuse, les démarches nécessaires ne sont rien d'autre que des *démarches logiques*, au sens le plus « mathématique » du terme.

Il reste à l'enseignant à intégrer ces activités dès le début de l'année à sa propre progression en conservant les caractères spécifiques : d'abord dans leur aspect le plus ludique possible, qui n'est rien d'autre que l'appel à une sensibilité quasiment « corporelle » des élèves, mise en jeu lors des constructions géométriques, ensuite — et surtout — dans le choix des thèmes étudiés, dont la *pertinence*, au regard des études ultérieures, nous semble constituer le problème majeur de toute formation scientifique.

la perspective fuyante

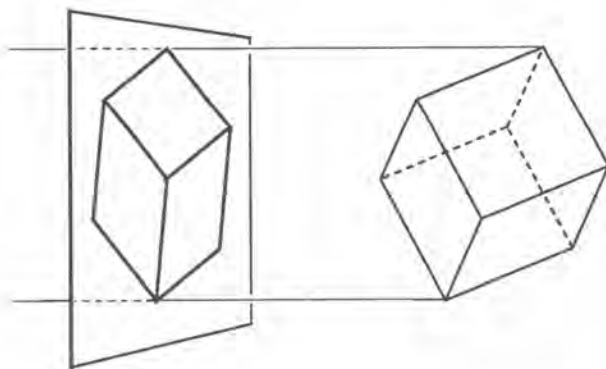
Le mot « perspective » désigne généralement le système de représentation de l'espace introduit à la Renaissance, qui repose sur le principe de la *projection centrale* : le dessin d'un objet est en quelque sorte la trace sur un écran transparent des rayons lumineux joignant l'œil du spectateur et les différents points de l'objet. On parle plutôt aujourd'hui, pour désigner ce système, de *perspective fuyante* ou encore de *perspective centrale*.



Le phénomène des « points de fuite » permet généralement de rendre avec un certain réalisme les effets de profondeur, mais nous n'utiliserons jamais ce système car il rend difficiles les constructions les plus élémentaires sur lesquelles reposent les activités de ce fascicule. Nous utilisons uniquement une *variante* plus simple à mettre en œuvre.

la perspective cavalière

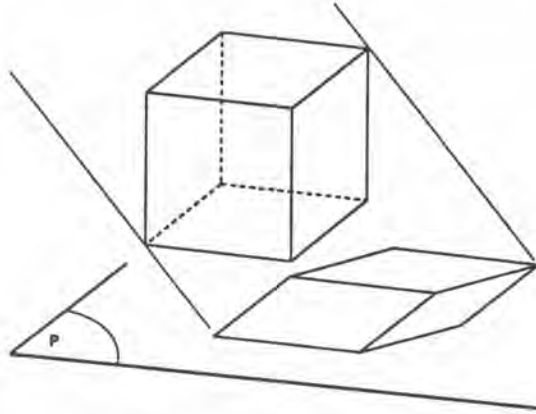
Si l'on modifie le système de la perspective centrale en « éloignant à l'infini » le centre de projection (ou, si l'on préfère, en éloignant suffisamment la position du spectateur pour considérer que les rayons lumineux deviennent parallèles), la projection de l'objet sur le plan du dessin doit être regardée comme une *projection parallèle*.



Les images obtenues ne présentent plus de points de fuite, mais les règles de dessin sont plus simples. C'est la *perspective cavalière*, appelée aussi *perspective parallèle*.

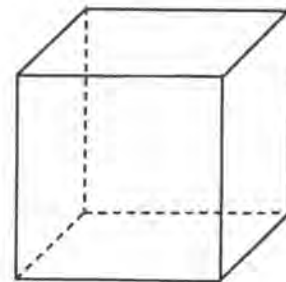
projections droites ou obliques

On notera que le système de la projection parallèle ne suppose en rien des conditions sur la direction de la projection par rapport au plan du dessin. Ainsi un quelconque phénomène d'ombre au soleil, même sous une grande incidence réalise une représentation en perspective cavalière.



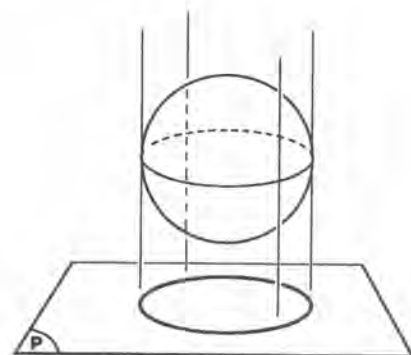
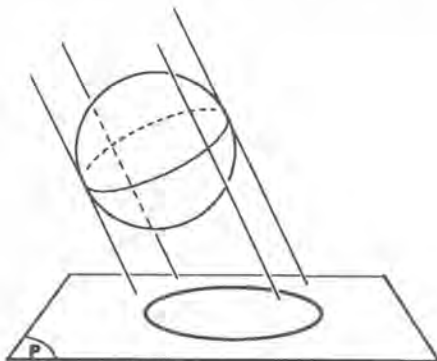
Ce sont d'ailleurs des images en projection oblique qui sont le plus généralement utilisées, et c'est notamment le cas de la représentation classique d'un cube dans la figure ci-dessous ...

On se convaincra aisément, en effet qu'à partir du moment où la face avant est représentée par un carré, il ne peut plus s'agir d'une projection orthogonale de l'objet sur le plan du dessin.



Cette façon de procéder n'entraîne pas, dans la plupart des cas une atteinte intolérable au « réalisme », bien que des projections très obliques puissent donner parfois des résultats surprenants. Elle a l'avantage de ne pas nécessiter la recherche précise des conditions propres aux projections orthogonales.

On pourra noter cependant que certains cas de figure peuvent devenir relativement gênants, notamment lorsque l'on veut représenter une sphère : seule une projection perpendiculaire au plan du dessin donne un contour apparent circulaire ...

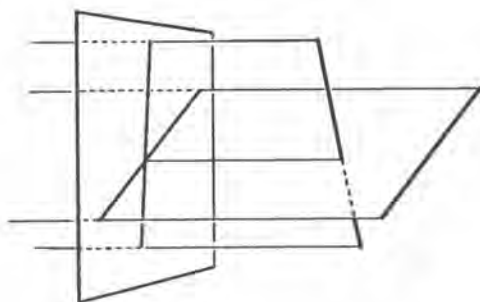


les propriétés de base

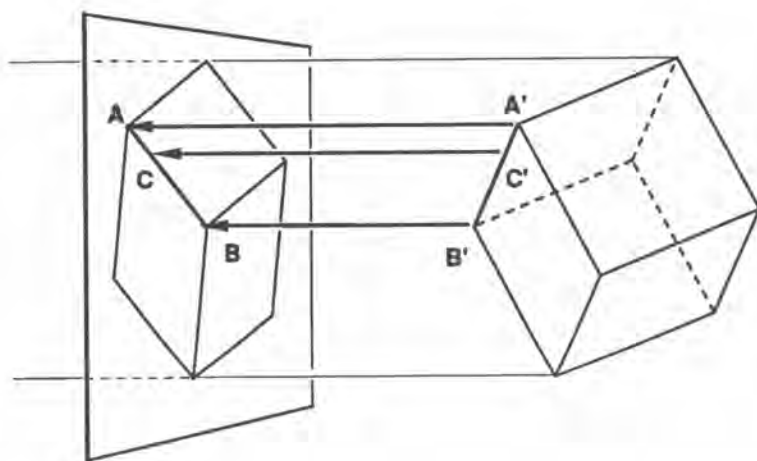
Qu'il s'agisse d'une projection orthogonale ou d'une projection oblique, le système de représentation en *perspective cavalière*, possède les mêmes propriétés simplificatrices par rapport à la perspective fuyante, et d'abord la propriété de représenter des droites parallèles qui ne sont pas dans la direction de la projection, par des droites parallèles.

Cela étant, il n'en reste pas moins, évidemment, que la principale difficulté du travail sur la figure réside dans les classiques ambiguïtés de lecture : des droites qui apparaissent comme sécantes ou parallèles sur le dessin ne sont peut-être ni sécantes, ni parallèles dans la configuration spatiale étudiée.

L'apprentissage visé par les présentes activités est en premier lieu celui de la gestion de ces écueils. Ce n'est rien d'autre qu'apprendre à « voir » dans l'espace.



En second lieu, les figures en perspective cavalière permettent un travail à partir des mesures sur le dessin. La projection parallèle conserve en effet les rapports de longueurs sur une même direction de droite, si bien qu'il devient possible de déterminer la position « exacte » d'un point relativement aux extrémités d'un segment ou encore, inversement, de construire un point donné à partir d'informations de cette nature. Appliquées aux calculs sur les volumes, ces possibilités peuvent donner lieu à des applications intéressantes, elles invitent d'autre part à tenir compte des propriétés de proportionnalité lorsque l'on a affaire à des figures *homothétiques*.

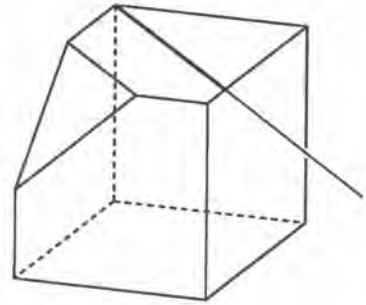


On notera que l'erreur essentielle à éviter serait de ne pas tenir compte des limites de la méthode, qui ne doit évidemment être employée que *direction par direction* sous peine d'aboutir à des raisonnements complètement injustifiés. Ici encore il s'agit, à force d'entraînement, d'acquérir le « sens de la figure » qui permet de se débarrasser des *réflexes métriques* valables uniquement pour les figures de la géométrie plane.

Première série d'exercices

PROPRIETES D'INCIDENCE

Les exercices 1 à 28 demandent de construire des intersections de plans avec des plans de référence qui sont essentiellement les plans des faces d'un cube, d'un parallélépipède ou d'une pyramide. Il est prudent de tracer les droites intéressantes, puis de souligner les portions de l'intersection avec les faces proprement dites. Il n'est pas rare, au moins au début, de mener d'abord, sans trop réfléchir, des parallèles aux droites données ... avant de se demander dans quel plan on travaille.



deux remarques simples

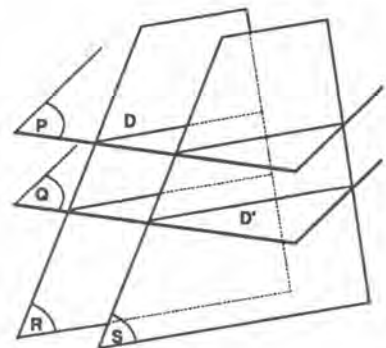
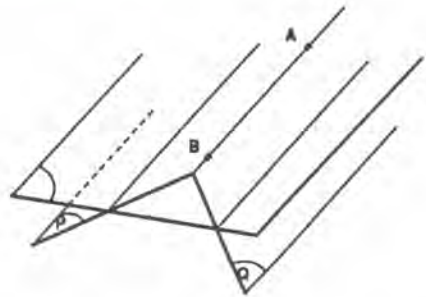
La propriété sur laquelle reposent avant tout les activités proposées est la propriété (IVb) exprimant qu'un plan coupe deux plans parallèles suivant deux droites parallèles.

Les autres propriétés sont suffisamment immédiates pour ne pas demander une référence explicite.

Signalons cependant qu'il peut être utile de formuler dès les premières rencontres deux conséquences des propriétés de base :

(Id') Si on connaît deux points A et B distincts, appartenant à deux plans distincts, alors la droite AB est l'intersection de ces deux plans.

(IVd) Soient P, Q et R, S quatre plans parallèles deux à deux, alors les droites $D = P \cap R$ et $D' = Q \cap S$ sont des droites parallèles.



1. On a dessiné un cube, avec un coin coupé.

Trace la section de ce cube par le plan parallèle au plan MNP, et passant par C.

La parallèle à NP passant par C coupe PH en C_1 (IVb),

La parallèle à NM passant par C coupe AM en C_2 (IVb),

Le segment C_1C_2 est l'intersection du plan considéré avec la face MAEHP (Id').

Noter que C_1C_2 est automatiquement parallèle à MP.

1 bis : a) Les arêtes du cube ont pour longueur 8 cm ;
AM = 5 cm, CN = 4 cm et HP = 5 cm. Dessine le triangle MNP en vraie grandeur.

b) Quel est le volume du solide dessiné ?

Soit D le sommet manquant du cube initial.

a) Les longueurs MN, NP et PM peuvent être calculées à l'aide du théorème de Pythagore appliqué aux triangles rectangles DMN, DNP et DPM.

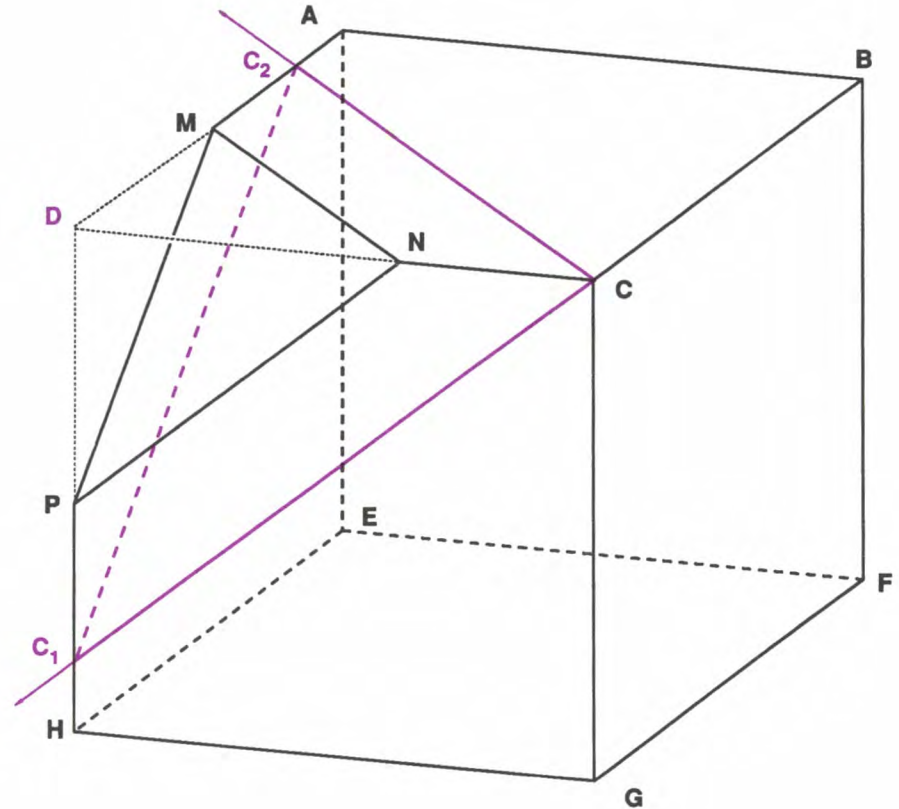
On trouve : $MN = NP = 5$; $MP = 3\sqrt{2}$.

b) Le volume du coin coupé est donné par :

$$\left(\frac{1}{3}\right) \times \left[\left(\frac{1}{2}\right) \times 3^2 \times 4\right] = 6 \text{ cm}^3.$$

Le volume du solide restant est donc de :

$$8^3 - 6 = 506 \text{ cm}^3.$$



2. On a dessiné deux cubes accolés, dont l'un a un coin coupé.
Trace l'intersection des deux cubes avec le plan π parallèle au plan MNP et qui passe par L.

La parallèle à PN passant par L coupe EK et ED en T et R (IVb).

La parallèle à NM passant par R coupe EB et MA en S et Q (IVb).

Les intersections de π avec les faces EBHK et MAGLP sont les segments TS et LQ.

2 bis. a) Les arêtes des cubes ont pour longueur 6 cm ; EN = 2 cm , AM = 4,5 cm et LP = 3 cm . Dessine en vraie grandeur l'intersection du plan π et du cube de gauche.
b) Quel est le volume du solide dessiné ci-dessus ? Quel est le volume de la partie gauche ?
c) Le plan π coupe la partie gauche en deux morceaux. Quel est le volume de chacun des deux morceaux ?

Soit F le sommet manquant.

a) Comme FL = 2.FP, le triangle QRL est homothétique de MNP dans une homothétie de rapport 2.

On peut d'autre part utiliser les triangles rectangles FPM, FNP et FMN pour calculer : NP = 5 cm , PM = 3,35 cm , MN = 4,3 cm . Ceci permet de tracer le triangle QRL.

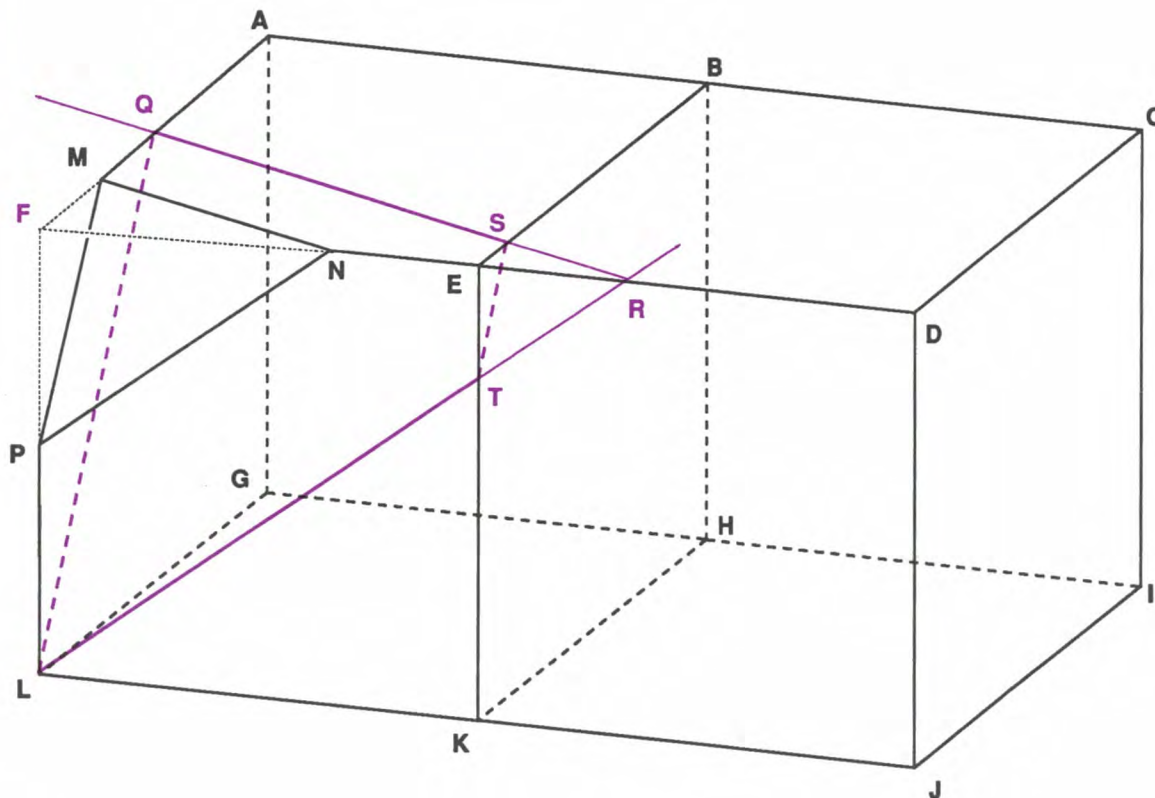
Par ailleurs FR = 2.FN = 8 , donc ER = 2 cm , donc :

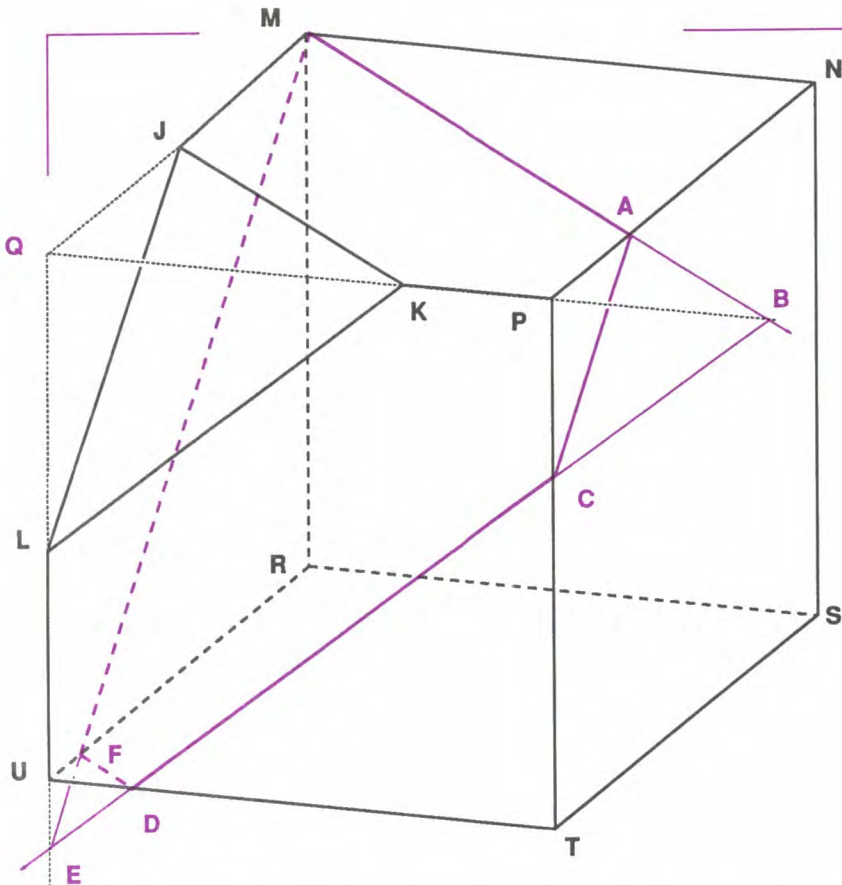
$$ER / FR = SR / QR = TR / LR = 0,25 .$$

Ceci permet enfin de tracer la parallèle ST au côté QL.

b) $\text{vol}(\text{FMNP}) = (1/3) \times (1/2) \times 3 \times 4 \times 1,5 = 3 \text{ cm}^3$,
volume total = $2 \times 6^3 - 3 = 429 \text{ cm}^3$,
vol. gauche = $6^3 - 3 = 213 \text{ cm}^3$.

c) Par homothétie de rapport 2 : $\text{vol}(\text{FLRQ}) = 2^3 \times \text{vol}(\text{FPNM}) = 24 \text{ cm}^3$,
Par homothétie de rapport 1/4 : $\text{vol}(\text{REST}) = 0,25^3 \cdot \text{vol}(\text{RFQL}) = 0,375 \text{ cm}^3$.
 π coupe la partie gauche en deux parties de $20,625 \text{ cm}^3$ et $192,375 \text{ cm}^3$.





3. On a dessiné un cube, avec un coin coupé.

a) Dessine l'intersection de ce cube avec le plan π passant par M et parallèle au plan LJK.

b) Les arêtes du cube ont pour longueur 7 cm. En mesurant sur la figure, dessine en vraie grandeur le triangle LJK, puis l'intersection du cube et du plan π .

a) Mêmes méthodes qu'aux exercices 1 et 2. Noter qu'en prolongeant les arêtes, le tracé de deux parallèles suffit (par exemple MB et ME). On peut aussi effectuer les constructions de MA, AC, CD, ... dans cet ordre en alternant l'utilisation de (IVb) et de (IVd).

b) Soit Q le sommet manquant. A partir des mesures, on obtient : QB = 10 cm et QE = 8 cm.

Comme QM = 7 cm, le théorème de Pythagore implique dans QMB, QBE et QEM :

$$MB = 12,2 \text{ cm},$$

$$BE = 12,8 \text{ cm},$$

$$ME = 10,6 \text{ cm}.$$

On peut donc tracer MBE et il reste à noter que :

— ACB est homothétique de MEB dans le rapport BP/BQ = 3/10,

— EFD est homothétique de EMB dans le rapport EU/EQ = 1/8.

4. On a pris un morceau de beurre de 250 g, et on en a coupé un morceau.

a) En mesurant sur la figure, détermine la masse du morceau que l'on a coupé.

b) Notons L le coin du pavé qui n'est pas dessiné ; place le point K' de l'arête LM tel que LK' = 2 LK ; trace la section du pavé par le plan passant par K' et parallèle au plan LJK. Quelle est la masse du morceau ainsi coupé ?

c) On se propose d'enlever (au morceau dessiné) un morceau de 15 g, en coupant par un plan parallèle au plan LJK. Comment faut-il faire ?

a) La masse m du parallélépipède construit sur LKJI s'obtient à partir de la masse totale :

$$m = 250 \times (LJ/LP) \times (LK/LM) \times (LI/LT).$$

La masse de LKJI est donc :

$$m/6 = (250/6) \times (2/8,8) \times (0,7/2,8) \times (1,3/4) = 0,77 \text{ g}.$$

b) La masse de LK'J'I' est 8 fois celle de LKJI, soit 6,15 g.

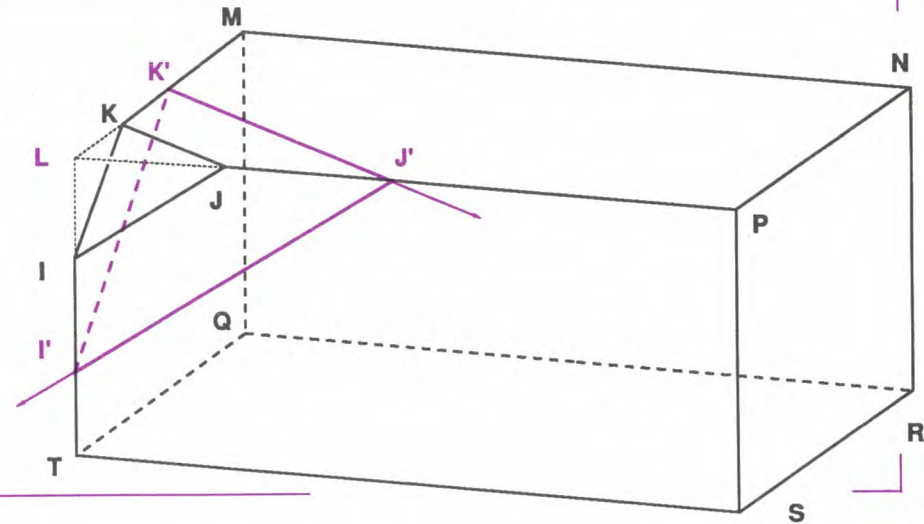
c) Soit K''J''I'' le plan cherché, avec LK'' = k . LK. On a :

$$\text{masse}(LK''J''I'') = k^3 \cdot \text{masse}(LKJI).$$

Donc le nouveau morceau enlevé pèse : $(k^3 - 1) \cdot 0,77 \text{ g}$. Pour obtenir 15 g, il faut :

$$k^3 - 1 = 15 / 0,77 = 19,48,$$

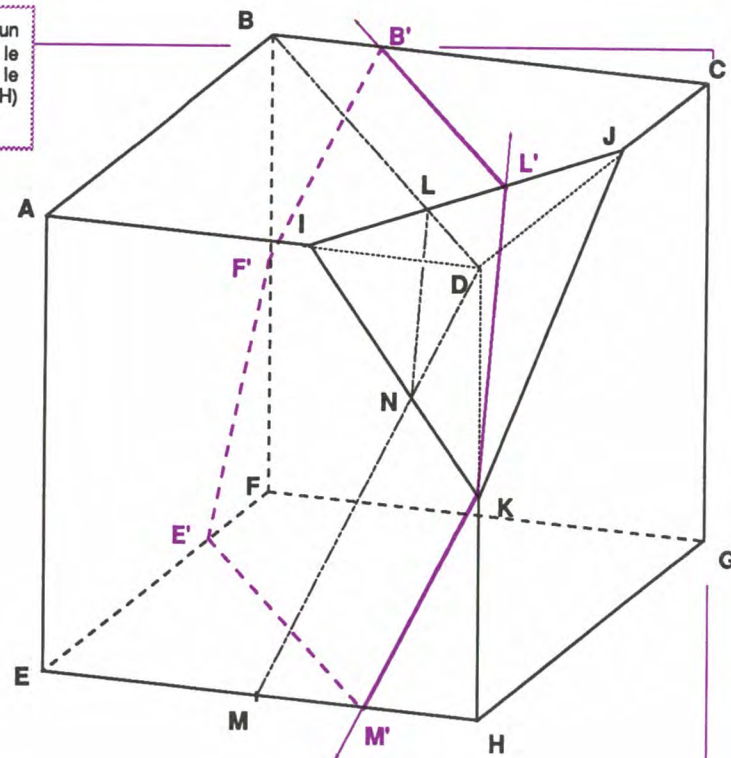
c'est-à-dire : $k = 2,73$.



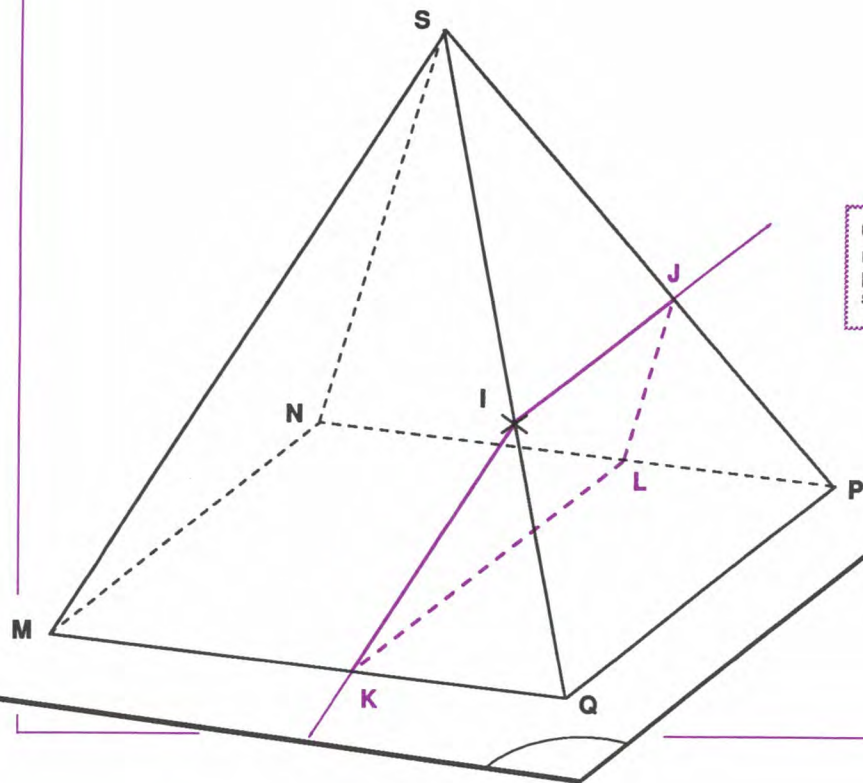
Il convient tout d'abord de tracer l'intersection $BLNM$ du plan BDM avec les faces visibles du solide. Cela étant fait :

- la parallèle menée par K à NM coupe EH en M' (IVb),
- la parallèle menée par K à NL coupe IJ en L' (IVb),
- la parallèle menée par L' à LB coupe BC en B' (IVb),
- par B' , on mène la parallèle à KM' , elle coupe BF en F' ,
- par M' , on mène la parallèle à $L'B'$, elle coupe EF en E' ,
- on trace enfin le segment $E'F'$.

5. On a dessiné un cube dont on a coupé un coin. Trace l'intersection de ce solide avec le plan parallèle au plan BDM (où D est le sommet du coin coupé, et M le milieu de EH) et qui passe par K .



6. Le point I est sur l'arête SQ de la pyramide $SMNPQ$. Le plan Z passe par I et est parallèle aux droites PQ et SM . Trace l'intersection de la pyramide et du plan Z .



Par I on trace la parallèle à QP , qui coupe SP en J .

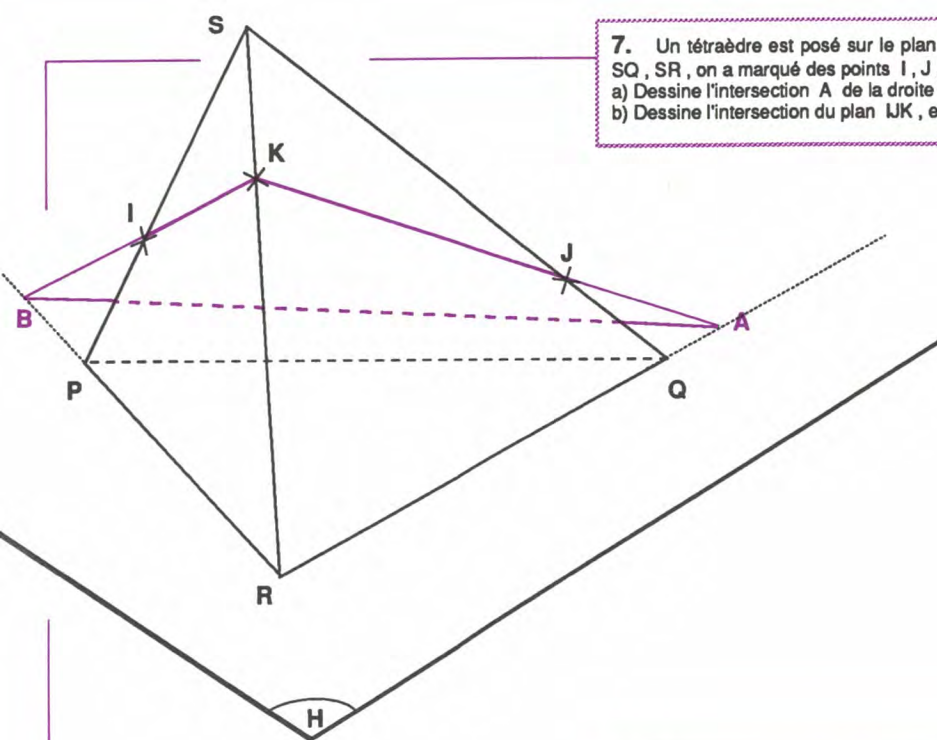
Par I on trace la parallèle à SM , qui coupe MQ en K .

Par K on trace la parallèle à QP , qui coupe NP en L (IVc).

Noter que le plan Z , qui est parallèle aux droites PQ et SM , est en fait parallèle au plan MNS . Donc il est parallèle à SN .

7. Un tétraèdre est posé sur le plan H . Sur les arêtes SP , SQ , SR , on a marqué des points I , J , K .

- Dessine l'intersection A de la droite KJ et du plan H .
- Dessine l'intersection du plan IJK , et du plan H .



a) La droite KJ est dans le plan SRQ . Ce plan coupe H suivant la droite RQ . Le point A est donc l'intersection de KJ et de RQ .

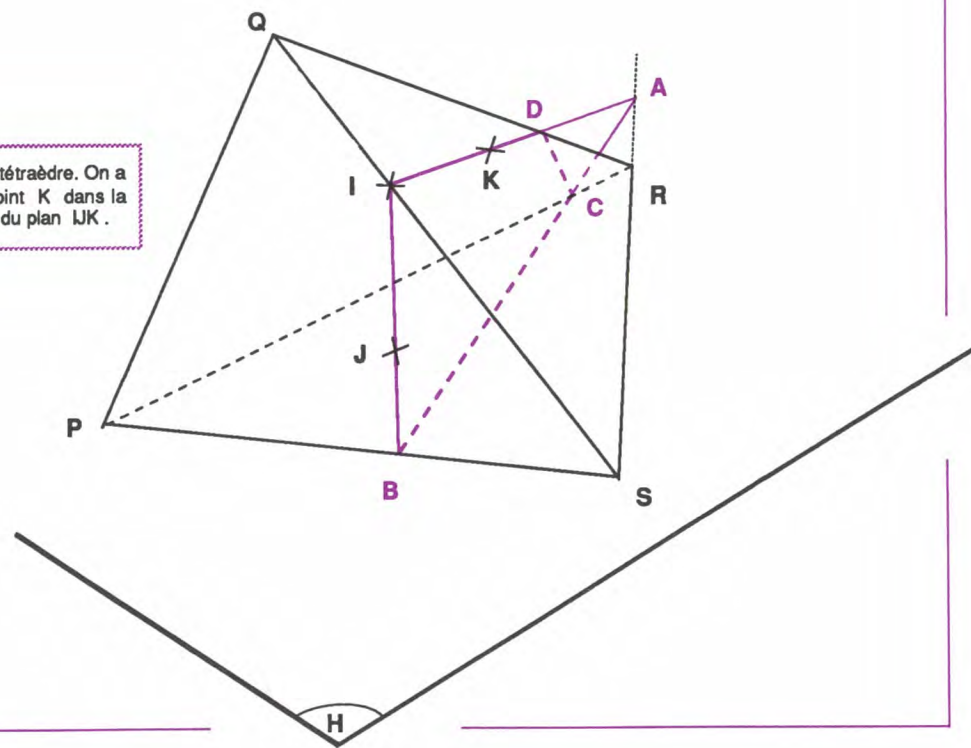
b) De même, la droite IK coupe H au point B où elle rencontre la droite PR (qui est l'intersection de H et du plan SPR).

Les points A et B appartiennent tous deux aux plans H et IJK , la droite AB est donc l'intersection cherchée (Id').

8. On a marqué un point I sur l'arête QS du tétraèdre. On a marqué un point J dans la face PSQ et un point K dans la face RQS . Dessine l'intersection du tétraèdre et du plan IJK .

La droite IJ coupe H au point B où elle rencontre PS (cf. exercice 7). On obtient l'intersection de IK avec H en prolongeant l'arête RS et en considérant l'intersection A des droites IK et RS dans le plan QRS .

Le plan IJK coupe H suivant la droite AB , donc la face PRS est coupée suivant le segment BC et la face QRP suivant le segment DC , où D est l'intersection des droites IK et QR .



a) Dans le plan SAD, la droite IJ coupe en U le prolongement de l'arête AD (qui est dans H).

b) Dans le plan SCD, la droite KJ coupe en V le prolongement de l'arête CD (qui est dans H).

La droite UV est l'intersection de IJK avec H.

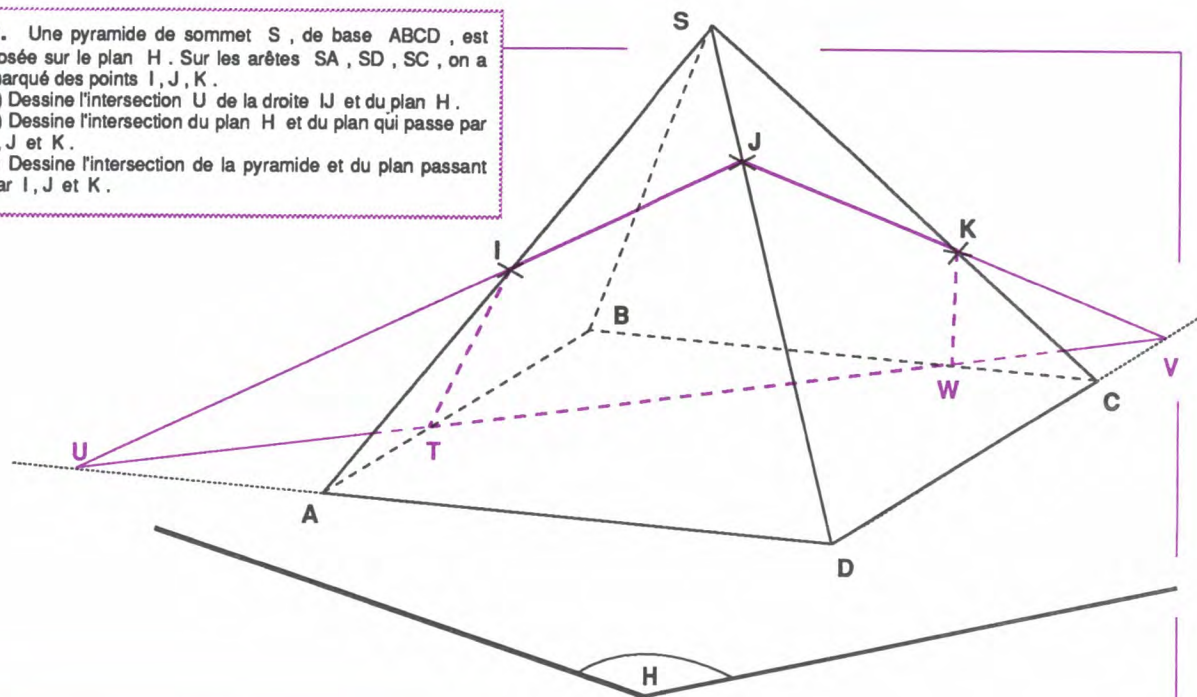
c) Dans le plan H, la droite UV coupe AB et BC en T et W. L'intersection cherchée est IJKWT.

9. Une pyramide de sommet S, de base ABCD, est posée sur le plan H. Sur les arêtes SA, SD, SC, on a marqué des points I, J, K.

a) Dessine l'intersection U de la droite IJ et du plan H.

b) Dessine l'intersection du plan H et du plan qui passe par I, J et K.

c) Dessine l'intersection de la pyramide et du plan passant par I, J et K.

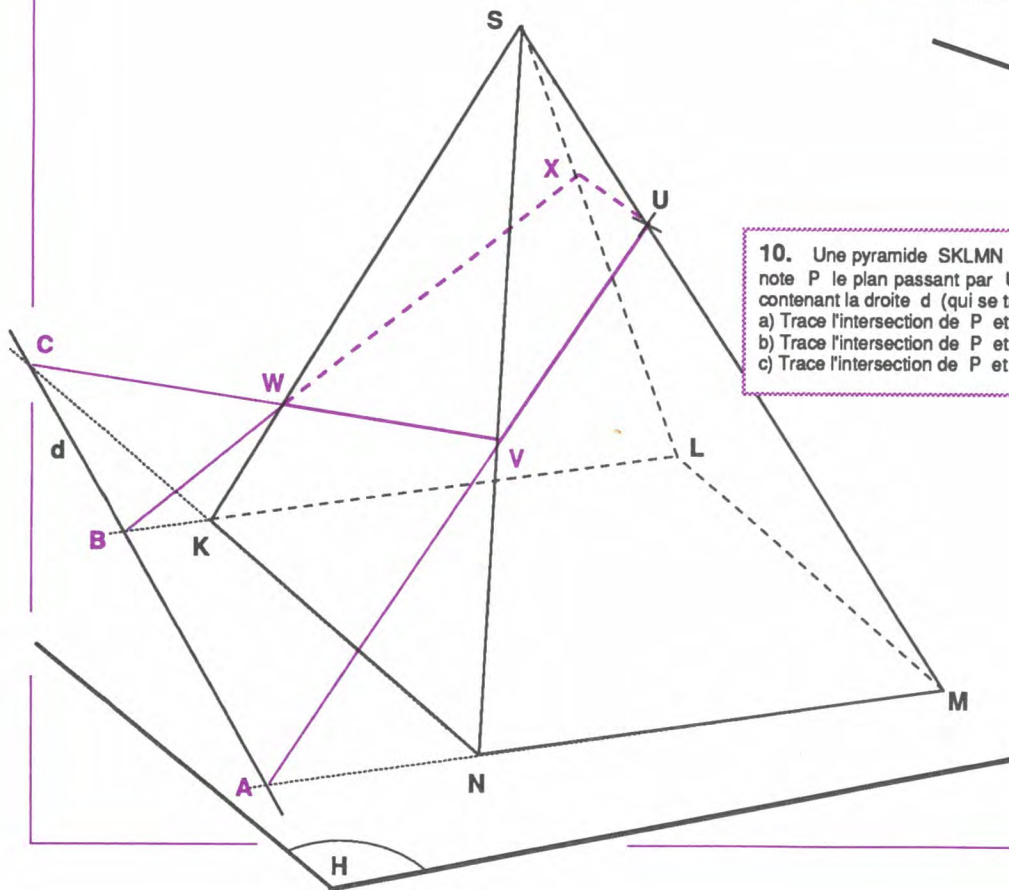


10. Une pyramide SKLMN est posée sur un plan H. On note P le plan passant par U (qui est sur l'arête SM) et contenant la droite d (qui se trouve dans le plan H).

a) Trace l'intersection de P et de la face SMN.

b) Trace l'intersection de P et du plan SKN.

c) Trace l'intersection de P et de la pyramide.



a) les droites MN et d appartenant à H se coupent en A, donc AU est l'intersection de P et de la face SMN. Soit $V = SN \cap AU$.

b) De même, KN coupe d en C, donc VC est l'intersection de P et de SKN. Soit $W = SK \cap CV$.

c) Enfin, KL coupe d en B et l'intersection cherchée est le quadrilatère XUVW, où $X = SL \cap BW$.

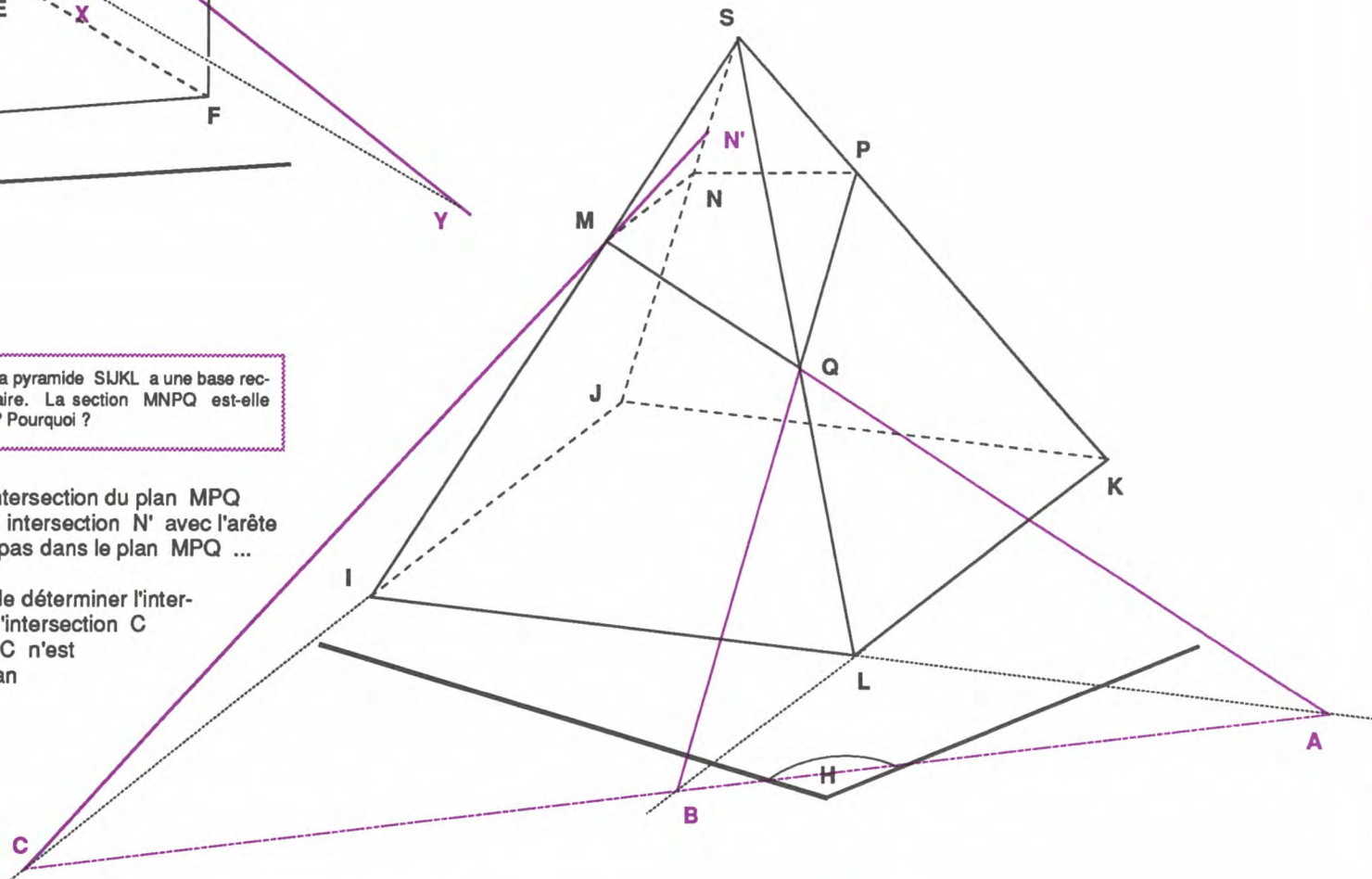
11. On a dessiné un pavé, dont un morceau a été découpé. Cette section est-elle plane ? Pourquoi ?

Les points U, V, W, T ne sont pas coplanaires.
Plaçons les sommets manquants D et C , puis traçons l'arête DC , si U, V, W et T étaient dans un même plan, celui-ci couperait le prolongement de DC en un (seul) point qui serait aligné avec T et W dans le plan $DCGH$, mais aussi aligné avec U et V dans le plan $ABCD$...

12. La pyramide $SJKL$ a une base rectangulaire. La section $MNPQ$ est-elle plane ? Pourquoi ?

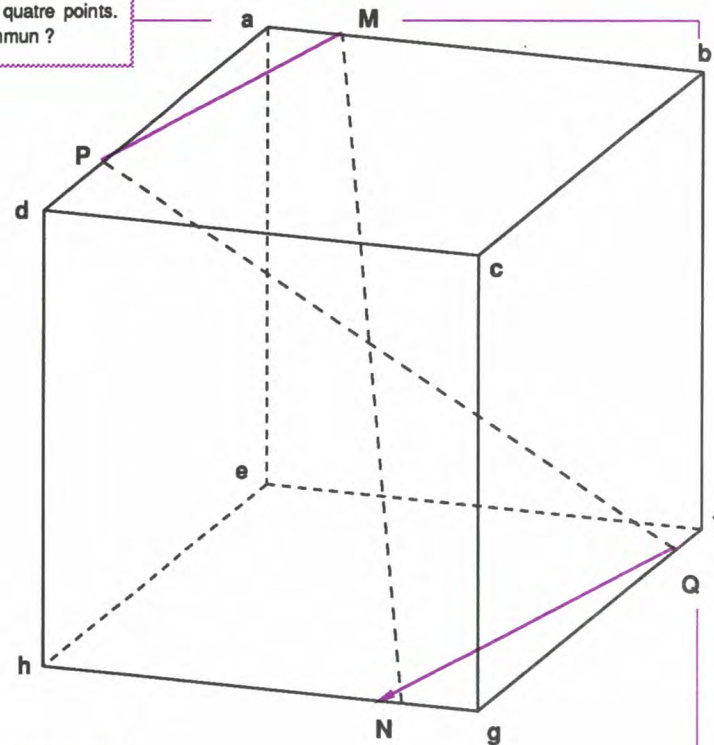
On peut (par exemple) chercher l'intersection du plan MPQ avec la pyramide, et notamment son intersection N' avec l'arête SJ . On constate alors que N n'est pas dans le plan MPQ ...

Pour construire le point N' , il suffit de déterminer l'intersection AB de MPQ avec H , puis l'intersection C de AB avec l'arête IJ . La droite MC n'est autre que la trace de MPQ sur le plan de la face SJ .

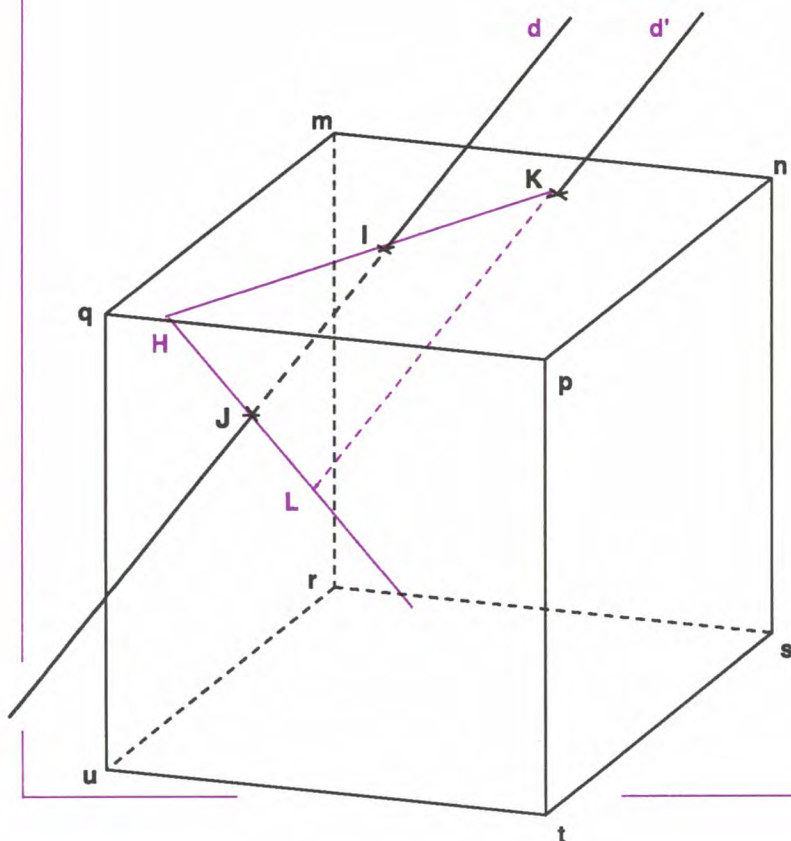


On cherche l'intersection du plan MPQ avec le cube, et en particulier avec l'arête hg. Il suffit de mener par Q la parallèle à MP, elle coupe hg en un point distinct de N, donc les droites MN et PQ ne sont pas coplanaires.

13. Sur les arêtes du cube, on a marqué quatre points. Les droites MN et PQ ont-elles un point commun ?



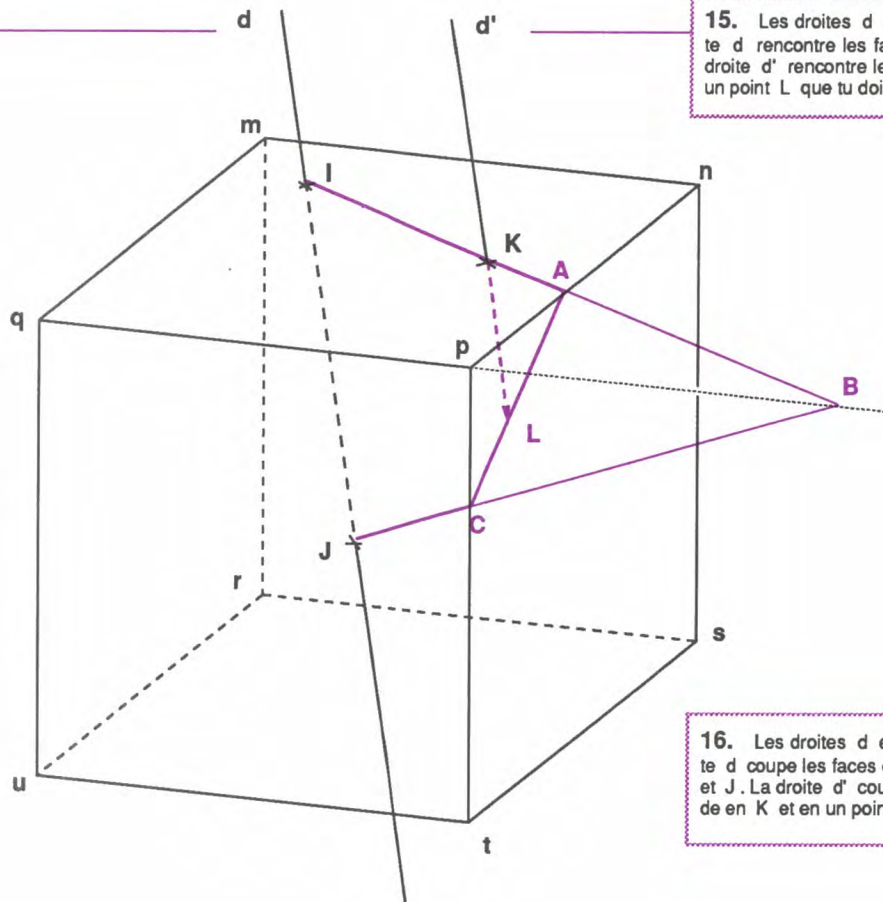
14. Les deux droites d et d' sont parallèles. La droite d rencontre les faces du cube en I et J. La droite d' rencontre les faces du cube en K, et en un point L que tu dois dessiner.



La droite IK coupe l'arête qp en un point H. Donc la droite HJ est l'intersection de la face qptu avec le plan contenant d et d'.

La droite d' coupe HJ (donc le cube) en L.

15. Les droites d et d' sont parallèles. La droite d rencontre les faces du cube en I et J . La droite d' rencontre les faces du cube en K , et en un point L que tu dois dessiner.

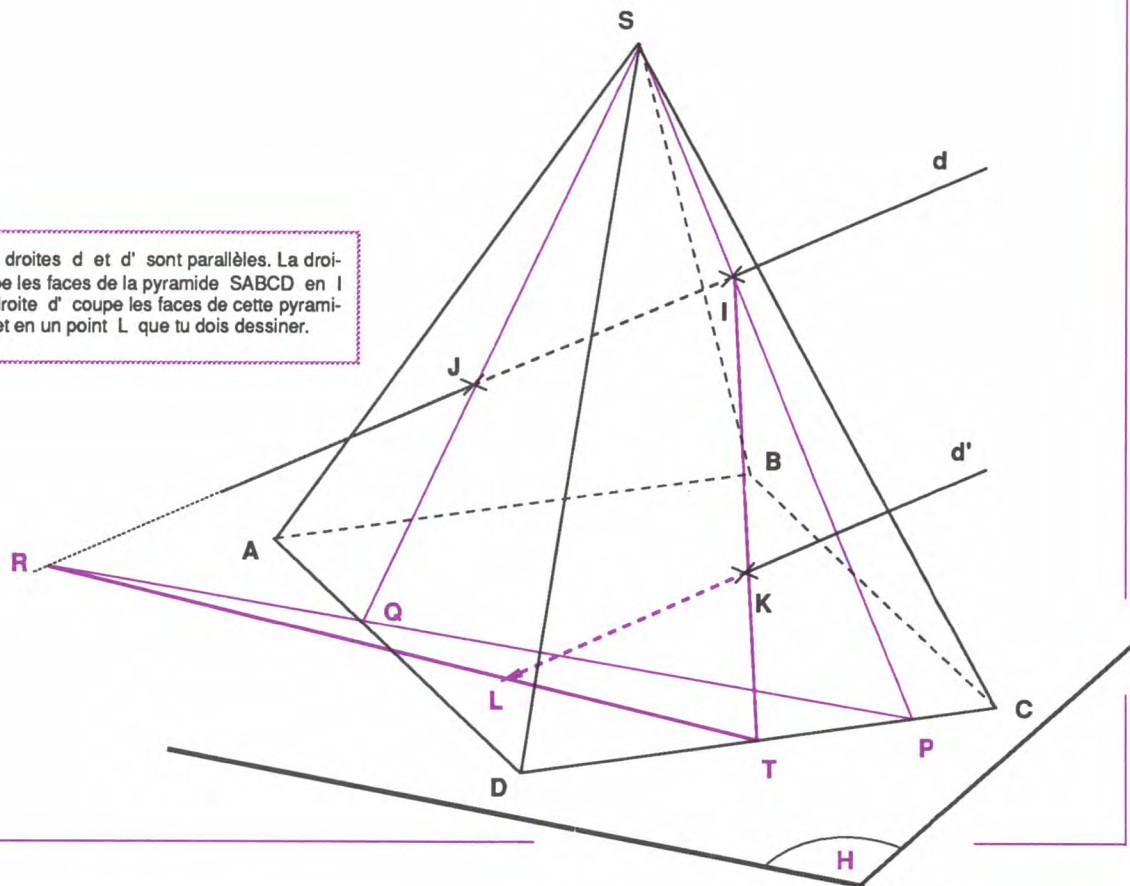


La droite IK coupe l'arête qp en B , donc le plan IKJ coupe la face avant $pntu$ suivant la droite JB .

On obtient ainsi le segment AC , intersection de IKJ avec la face $pntu$.

Comme d' et AC sont coplanaires le point le point L cherché est l'intersection de ces deux droites.

16. Les droites d et d' sont parallèles. La droite d coupe les faces de la pyramide $SABCD$ en I et J . La droite d' coupe les faces de cette pyramide en K et en un point L que tu dois dessiner.



Cherchons tout d'abord l'intersection de d avec le plan H en considérant le plan SIJ qui contient d et coupe H suivant la droite QP . On obtient ainsi le point R .

D'autre part, le plan IJK coupe DC (donc le plan H) au point T , c'est-à-dire que l'intersection de H avec le plan IJK est la droite RT .

Enfin, comme d' et RT sont coplanaires, d' coupe H en un point L . C'est l'intersection cherchée avec la face $ABCD$.

17. Les droites d et d' coupent les faces du pavé en I , J et en K , L . Les droites d et d' sont-elles parallèles ?

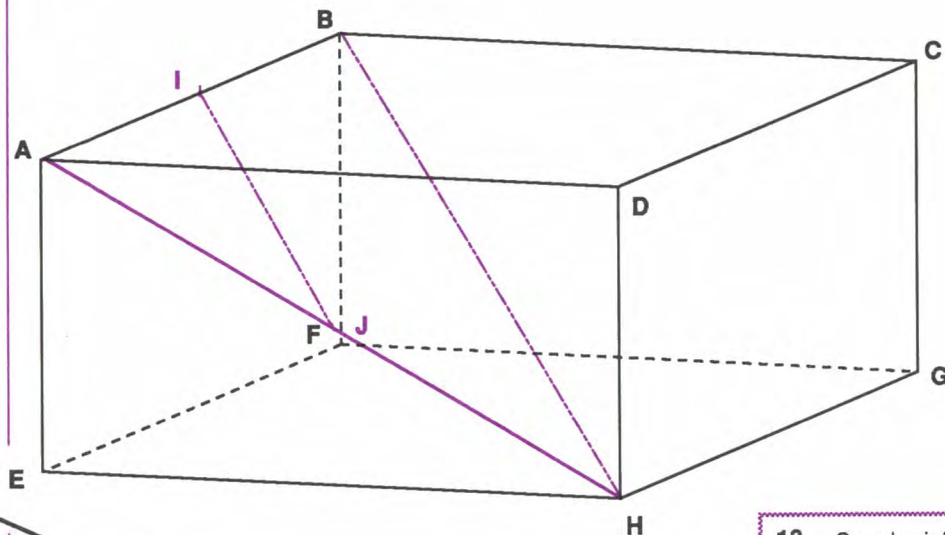
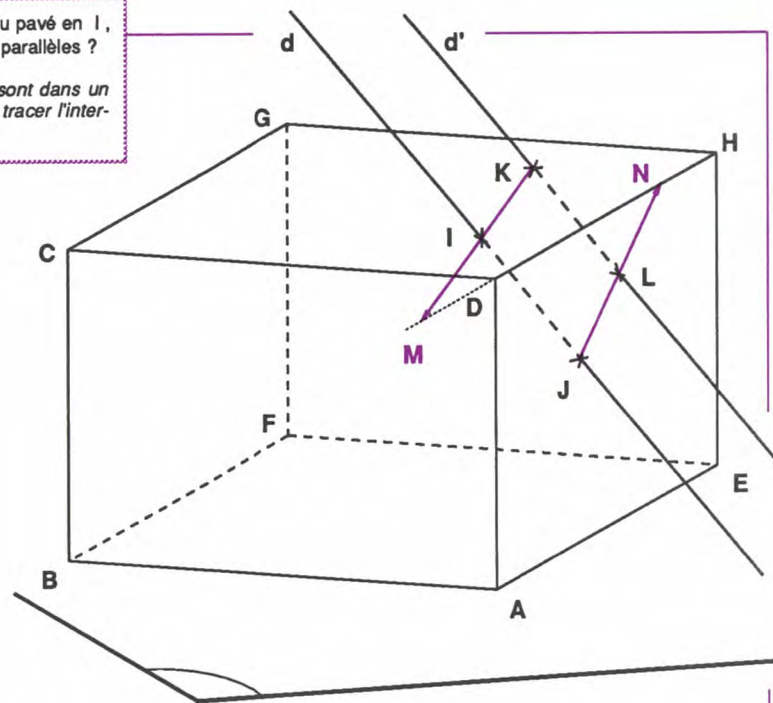
Solution : si d et d' sont parallèles, elles sont dans un plan P . Tu disposes de deux méthodes pour tracer l'intersection de ce plan et de la droite DH

Supposons d et d' parallèles, c'est-à-dire dans un même plan P .

L'intersection de P avec l'arête DH n'est autre que $M = IK \cap DH$.

Mais c'est aussi l'intersection N de JL avec DH si on se place dans la face $ADHE$...

Il est clair que M et N sont distincts, donc que d et d' ne sont pas parallèles.



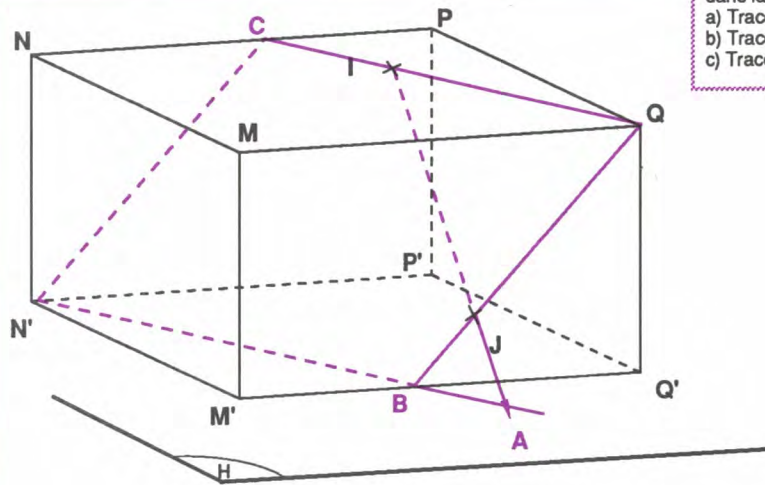
Le plan qui contient BH et d coupe le parallélépipède suivant le quadrilatère $ABGH$.

Dans ce plan d coupe AH en J .

Comme I est le milieu de AB , le point J est le milieu du segment AH .

18. On a dessiné un pavé. Trace la parallèle d à BH qui passe par le milieu I de AB . Quelle est l'intersection J de d et de la face $ADHE$?

(Conseil : trace d'abord l'intersection du pavé et du plan qui contient BH et d).



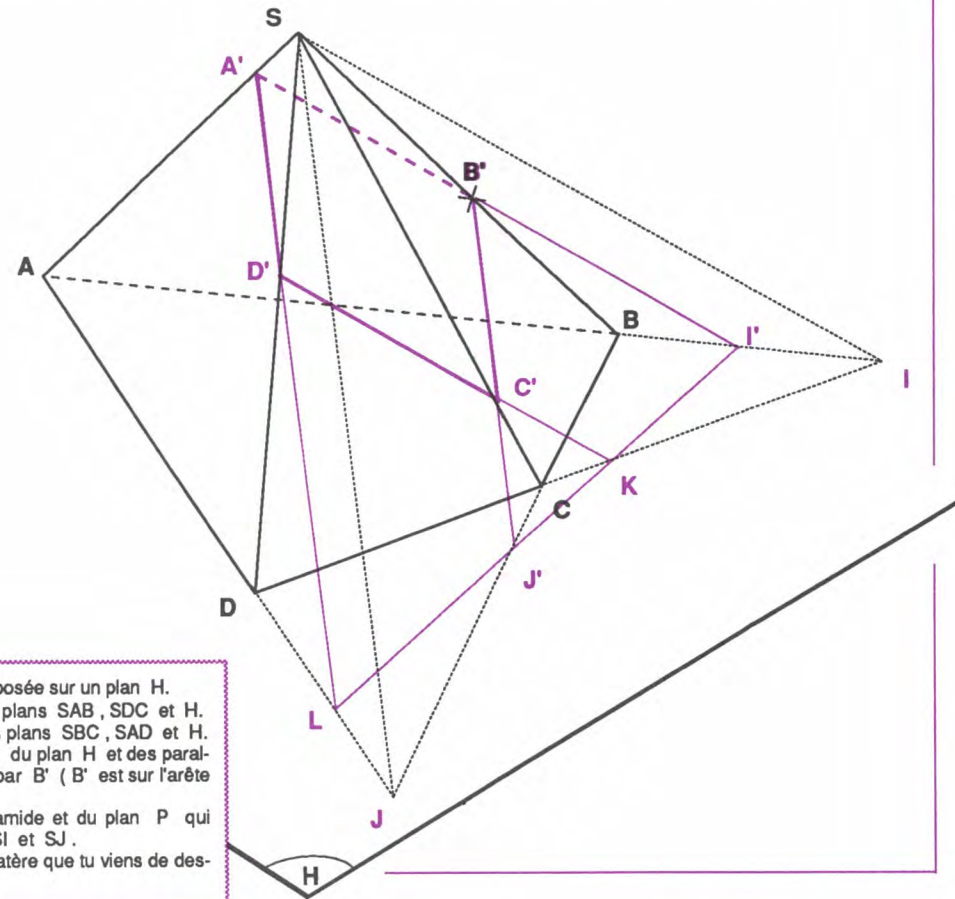
19. Le pavé est posé sur le plan H . Le point I est dans la face $MNPQ$, le point J dans la face $MQQ'M'$.

- Trace l'intersection du plan H et du plan IJQ .
- Trace l'intersection A du plan H et de la droite IJ .
- Trace la section du pavé par le plan IJQ .

a) La droite QJ coupe l'arête $M'Q'$ en un point B , ce point est dans l'intersection du plan IJQ et de H .

D'autre part, la droite IQ est l'intersection avec la face $MNPQ$, qui est parallèle à H ; la droite d'intersection de H et de IJQ est donc la parallèle à IQ menée par B .

b), c) Dans le plan IJQ , la droite précédente coupe IJ en un point A . C'est l'intersection de IJ avec le plan H . Il suffit de compléter l'intersection avec la face $NPP'N'$.



a), b) I est le point d'intersection des arêtes AB et CD ; J est le point d'intersection des arêtes AD et BC .

c) La parallèle à SI passant par B' est dans le plan SAB , elle coupe donc H au point où elle rencontre l'arête AB . De même, la parallèle à SJ passant par B' coupe H sur l'arête BC .

d) Par hypothèse, le plan considéré est le plan $B'I'J'$. Il coupe les arêtes AD et DC en des points L et K .

Il reste donc à placer, dans l'ordre : $C' = B'J' \cap SC$, $D' = KC' \cap SD$ et $A' = LD' \cap SA$.

e) Les plans SAD et SBC se coupent suivant une parallèle au plan $B'I'J'$, donc d'après (IVa), les intersections $A'D'$ et $B'C'$ de SAD et SBC avec $B'I'J'$ sont parallèles. De même $A'B'$ est parallèle à $D'C'$...

20. Une pyramide $SABCD$ est posée sur un plan H .

- Trace l'intersection I des trois plans SAB , SDC et H .
- Trace l'intersection J des trois plans SBC , SAD et H .
- Trace les intersections I' et J' du plan H et des parallèles à SI et à SJ qui passent par B' (B' est sur l'arête SB).
- Trace l'intersection de la pyramide et du plan P qui passe par B' et est parallèle à SI et SJ .
- Quelle est la nature du quadrilatère que tu viens de dessiner ?

21. On a dessiné un cube.

- Dessine en pointillé les arêtes cachées, et le huitième sommet P.
- Dessine l'intersection de ce cube avec le plan π passant par le milieu de LK, et parallèle au plan LNR.
- Dessine en vraie grandeur l'intersection que tu viens de tracer (les arêtes du cube mesurent 6 cm). Que peux-tu dire de cette intersection ?

b) Soit I le milieu de KL.

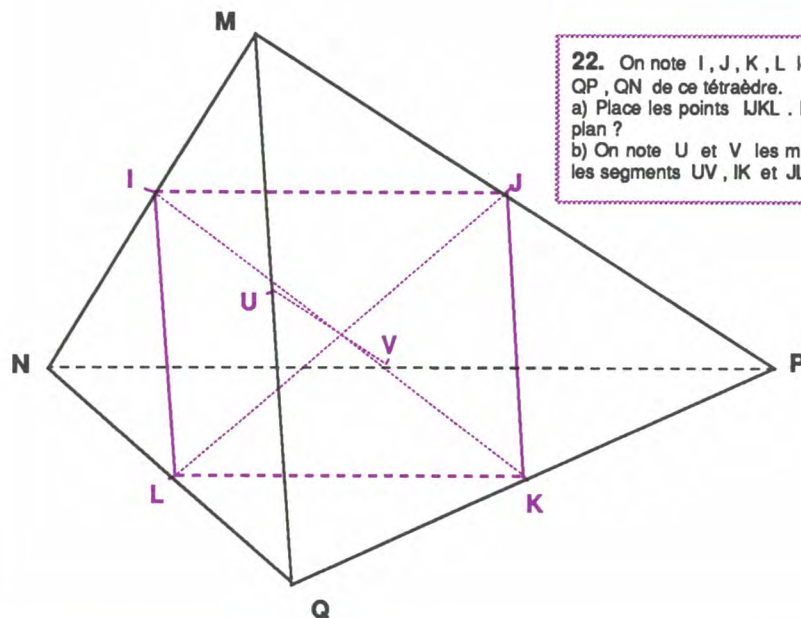
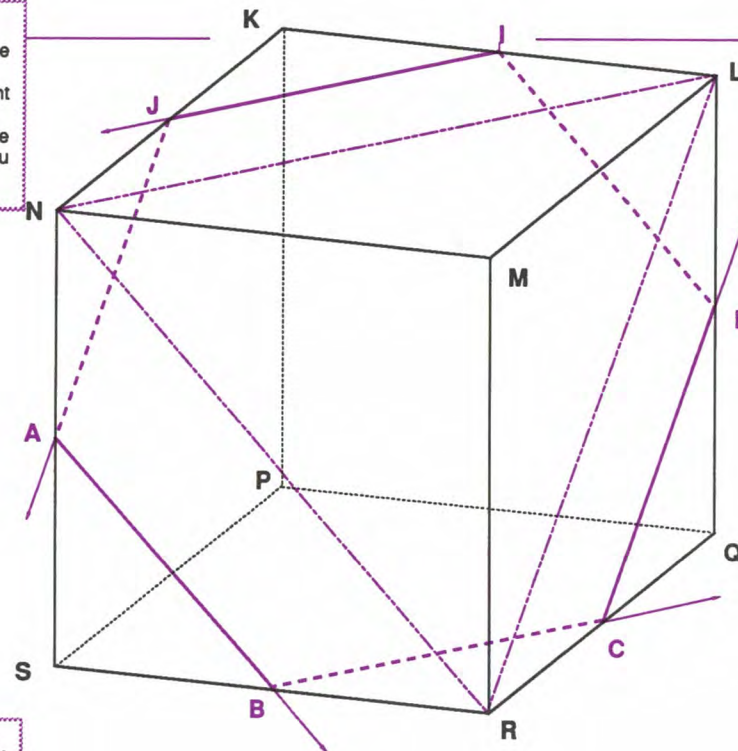
D'après (IVb), on obtient l'intersection J avec KN en menant par I la parallèle à LN.

D'après (IVd), on obtient l'intersection A avec NS en menant par J la parallèle à LR.
Etc.

c) Les points obtenus I, J, A, B, C, D sont évidemment les milieux des arêtes.

L'hexagone est régulier :

- ses côtés sont égaux,
- ses angles s'obtiennent en considérant les différents parallélismes avec les côtés du triangle équilatéral NLR.



22. On note I, J, K, L les milieux des arêtes MN, MP, QP, QN de ce tétraèdre.

- Place les points IJKL. Pourquoi sont-ils dans un même plan ?
- On note U et V les milieux de MQ et NP. Pourquoi les segments UV, IK et JL ont-ils même milieu ?

Application du théorème de la droite des milieux dans un triangle.

a) IJKL est un parallélogramme :

- IJ est parallèle à NP dans MNP,
- LK est parallèle à NP dans QNP, etc.

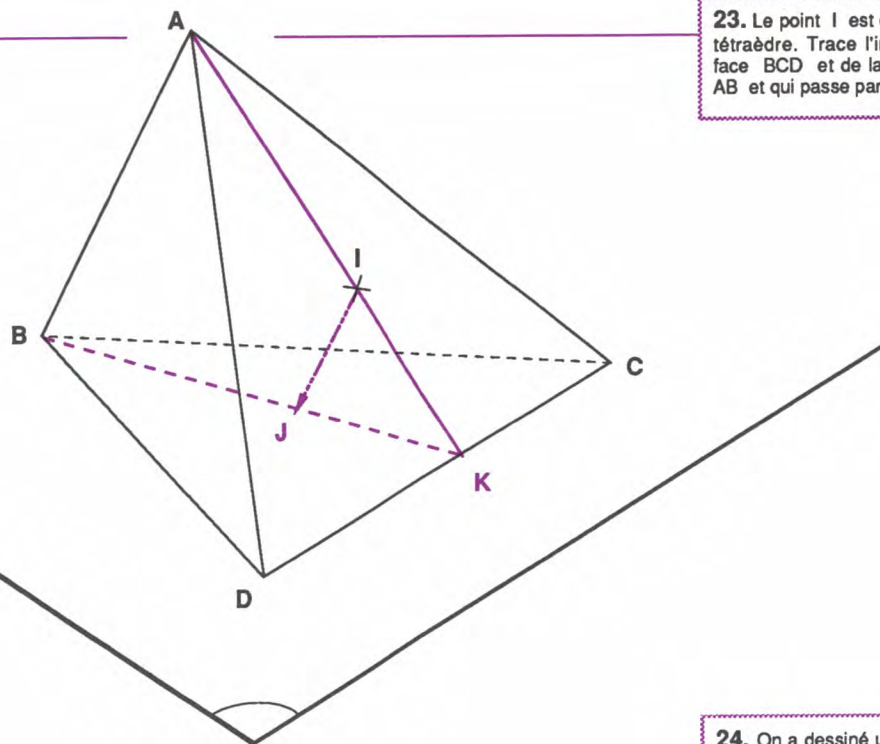
En particulier, IK et JL se coupent en leur milieu.

b) Considérer de façon analogue le parallélogramme UJVL.

23. Le point I est dans la face ACD du tétraèdre. Trace l'intersection J de la face BCD et de la droite d parallèle à AB et qui passe par I .

La droite considérée est dans le plan ABI , qui coupe la face BCD en B et au point K , intersection de l'arête DC avec la droite AI .

Il suffit alors d'effectuer la construction de J dans le triangle ABK .

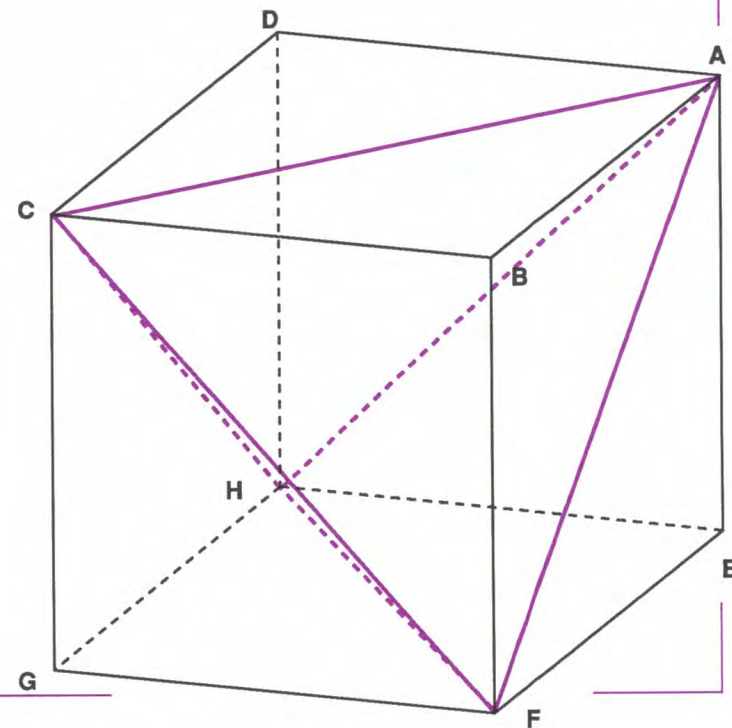


24. On a dessiné un cube $ABCDEFGH$; on notera a la longueur de ses arêtes. Démontre que A, C, F, H sont les sommets d'un tétraèdre régulier. Quelles sont les longueurs des arêtes de ce tétraèdre ? Quel est le volume de ce tétraèdre ?

Chacune des arêtes de $ACFH$ est une diagonale d'une des faces du cube. Elles sont égales et mesurent toutes $a\sqrt{2}$.

Pour déterminer le volume avec un minimum de calculs, on peut considérer son complémentaire :

- le volume du tétraèdre $ABCF$ est le sixième du volume du cube,
- le tétraèdre $ACFH$ s'obtient en enlevant au cube quatre tétraèdres égaux à $ABCF$,
- finalement : $\text{vol}(ACFH) = a^3/3$.

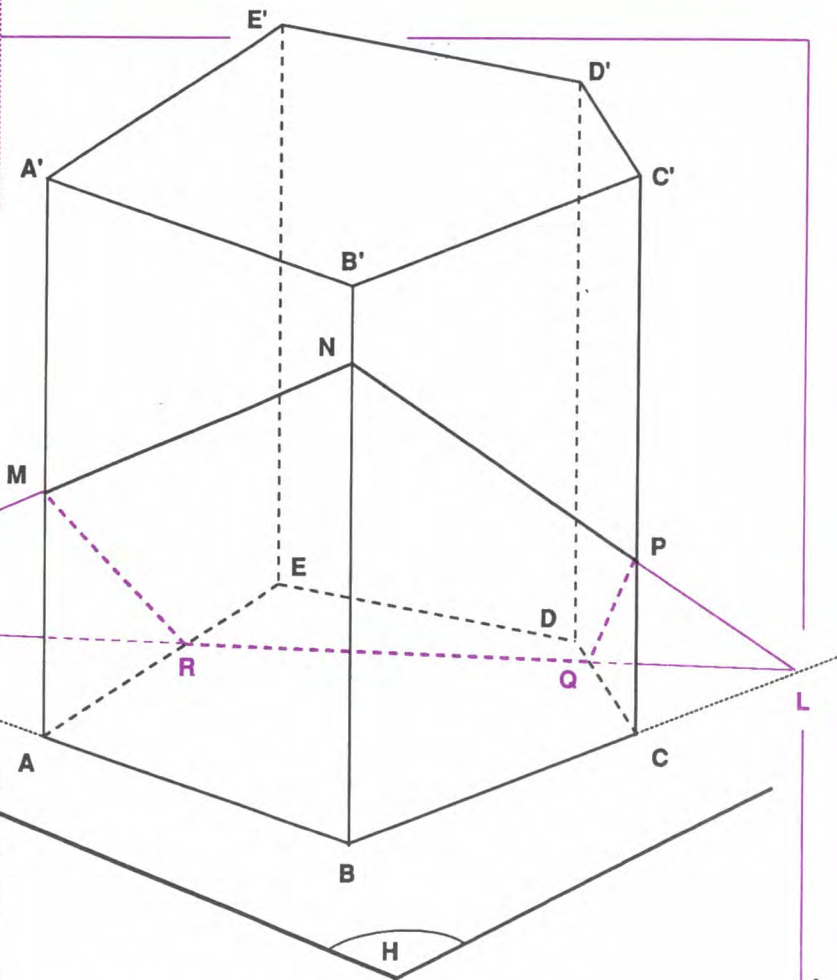


Soit H le plan $ABCDE$.

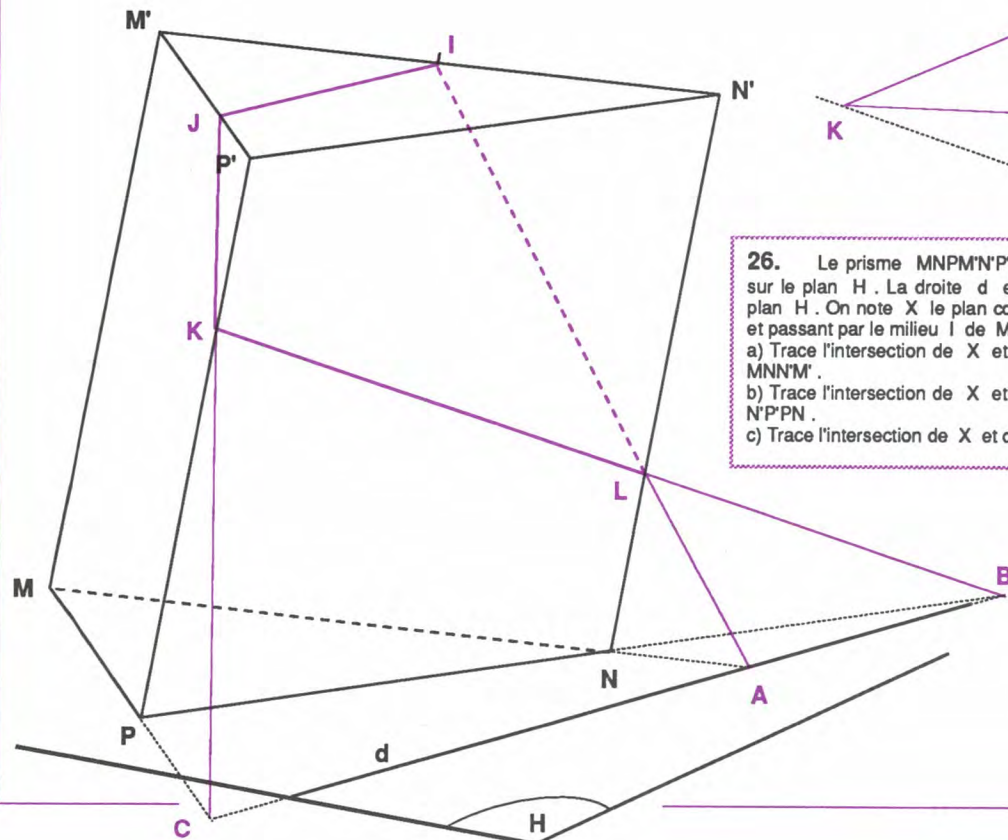
a) Dans $B'C'CB$, NP et BC se coupent en L ,
dans $A'B'BA$, NM et BA se coupent en K .
 LK est donc l'intersection de π et de H .

b) La droite KL coupe les arêtes AE et DC en
 R et Q .
Le pentagone $MNPQR$ est l'intersection cherchée.

25. Un prisme à base pentagonale $ABCDEA'B'C'D'E'$, est coupé par un plan π . Ce plan π coupe les arêtes AA' , BB' et CC' en M , N et P .
a) Dessine l'intersection du plan π et du plan $ABCDE$.
b) Dessine l'intersection du plan π et du prisme.



26. Le prisme $MNPM'N'P'$ est posé sur le plan H . La droite d est dans le plan H . On note X le plan contenant d et passant par le milieu I de $M'N'$.
a) Trace l'intersection de X et de la face $MNNM'$.
b) Trace l'intersection de X et de la face $N'P'PN$.
c) Trace l'intersection de X et du prisme.

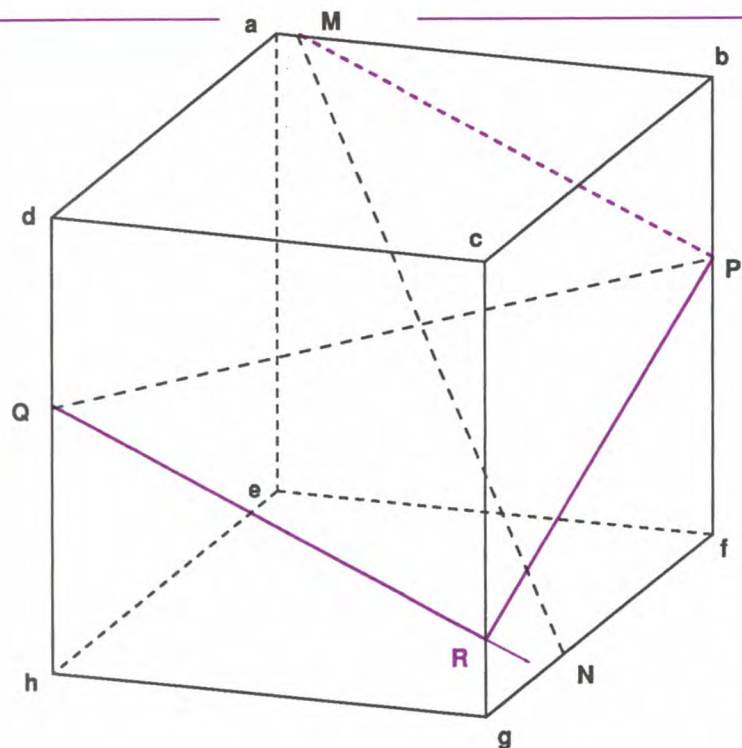


a) Dans le plan H , MN et d se coupent en A .
La droite IA coupe NN' en L .
Donc X coupe la face $M'N'NM$ suivant la droite IL .

b) Même méthode : X coupe la face $N'P'PN$ suivant KL .

c) L'intersection J avec $M'P'$ peut s'obtenir de deux façons différentes :

- c'est l'intersection de KC avec $M'P'$ (cf. a) et b)),
- c'est l'intersection de $M'P'$ avec la parallèle à d menée par I (IVb).



27. Sur les arêtes du cube, on a marqué des points $MNPQ$. Les droites MN et PQ ont-elles un point commun ?

Cherchons l'intersection de la face $dcgh$ avec le plan MPQ : c'est la parallèle menée par Q à la droite MP (IVb). Elle coupe l'arête cg en R .

Cela montre que le plan MPQ coupe la face $bcgf$ suivant la droite PR , et par conséquent que MPQ ne contient pas N . Les droites MN et PQ ne sont pas coplanaires.

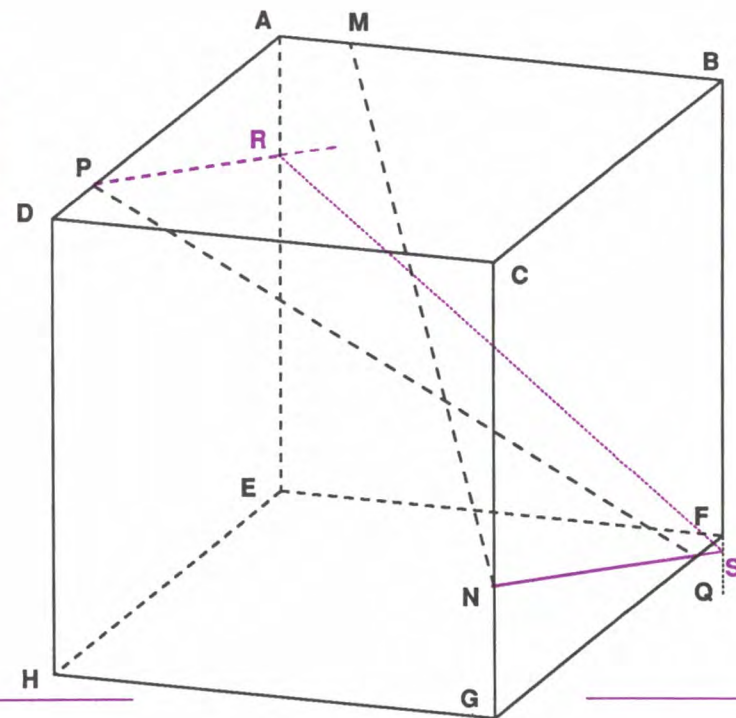
(*autre méthode* : on peut vérifier que l'intersection des projections de MN et PQ sur la face $efgh$ n'est pas la projection du point d'intersection apparent de MN et PQ .)

On cherche l'intersection du plan PNQ avec la face $ABFE$.
La droite NQ coupe l'arête BF en S ; la parallèle à NQ passant par P coupe l'arête AE en R .

Comme la droite d'intersection RS ne contient pas M , ce point n'est pas dans le plan NPQ , donc les droites MN et PQ ne se coupent pas.

(même variante possible que pour l'exercice 27 .)

28. Sur les arêtes du cube, on a marqué des points $MNPQ$. Les droites MN et PQ ont-elles un point commun ?



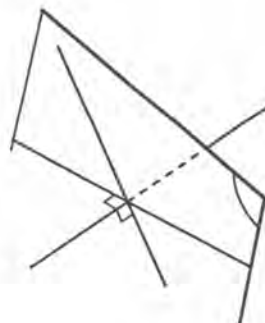
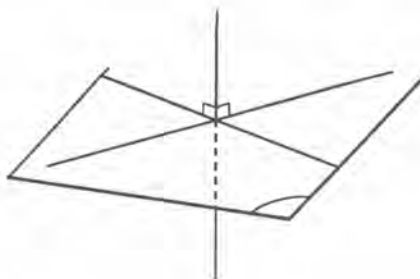
Deuxième série d'exercices

HORizontALES ET VERTICALES

les objectifs fondamentaux

Traiter pour elles-mêmes les notions d'*horizontales* et de *verticales* peut surprendre, si l'on a tendance à considérer qu'il ne s'agit au fond que d'un cas particulier de la notion de droites et de plans perpendiculaires, ou même que ces concepts relèvent plus de la physique que des mathématiques ...

En réalité, la maîtrise des situations « horizontales- verticales » est un *passage obligé* pour aborder les configurations plus générales (et plus complexes) mettant simultanément en jeu des associations de droites et plans perpendiculaires qui sont de « directions différentes » .

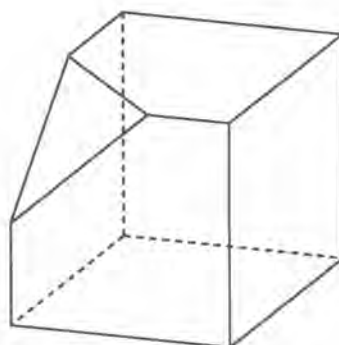


L'existence du « cas particulier » constitué par le concept d'horizontalité est, inversement, une sorte d'aubaine pour l'apprentissage de la géométrie de l'orthogonalité dans l'espace à trois dimensions. On se rend vite compte, en effet, que des deux figures ci-dessus la première est d'emblée la plus « parlante » à l'imagination, et quelle induit de façon naturelle les propriétés de perpendicularité qui auront besoin d'être utilisées dans un raisonnement (cf. p. 27).

On ne saurait légitimement se priver d'une telle occasion. D'abord parce que l'habitude de chacun l'amène à ressentir les situations ou les images faisant appel à des directions horizontales et verticales comme familières et *stables*, ensuite parce que, dans ce cas particulier, les notions de perpendicularité ou d'orthogonalité sont conceptualisées de façon particulièrement naturelles.

Cela tient notamment à l'idée intuitive qu'une horizontale et une verticale quelconques *sont orthogonales*.

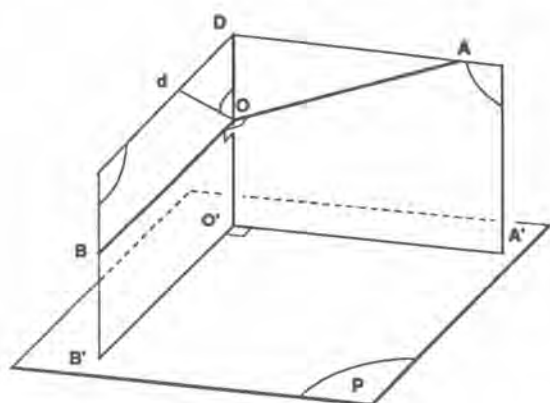
Il est loin d'en aller pareillement lorsque les directions mises en jeu sont perçues comme « obliques ». Ainsi l'image d'un solide se décode sans grandes difficultés lorsqu'il apparaît comme « posé » sur un plan horizontal. De même, dans un raisonnement qui met en jeu des droites orthogonales non coplanaires, il est toujours délicat de situer la position de la perpendiculaire commune ou de se référer à un plan perpendiculaire à l'une et contenant l'autre. Cette difficulté disparaît en revanche si l'une des droites est verticale.



On s'en convaincra aisément en analysant les difficultés d'explication qui surgissent dans les exemples qui suivent lorsque l'on ne dessine plus la situation horizontalement.

la projection d'un angle droit

Les exceptions à la règle de non-conservation des angles en perspective mettent en jeu toutes les ressources de la notion de perpendicularité. Il n'est pas question d'en avoir assimilé, à ce niveau, les démonstrations, mais le phénomène sera si fréquemment rencontré dans la pratique (à commencer par le fait qu'il est inutile et même nuisible d'avoir une équerre pour construire un angle droit ...), qu'il est indispensable de parvenir à le trouver *naturel*.



Soit un angle AOB et soit $A'O'B'$ sa projection orthogonale sur un plan P , il est possible d'énoncer trois propositions distinctes :

(VII d) Si AOB est droit et si l'un de ses côtés est parallèle à P , alors $A'O'B'$ est droit,

(VII e) Si l'un des côtés de AOB est parallèle à P et si $A'O'B'$ est droit, alors AOB est droit,

(VII f) Si AOB et $A'O'B'$ sont droits, alors un des côtés de AOB est parallèle à P .

Rappelons-en la démonstration; nous noterons par D la perpendiculaire à P en O' :

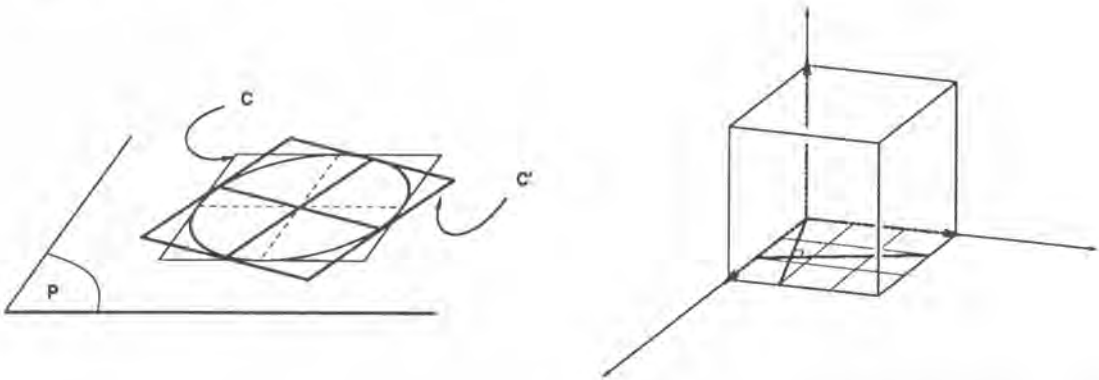
démonstration de (VII d) : Par hypothèse, le côté OB est perpendiculaire à la droite OA , supposons de plus qu'il est parallèle à P , il est alors perpendiculaire à D . Dès lors les droites OB et $O'B'$ sont perpendiculaires au plan projetant OAA' , et donc perpendiculaires à $O'A'$ qui est une droite de ce plan. C'est que $A'O'B'$ est droit.

démonstration de (VIIe) : Supposons OB parallèle à P , donc perpendiculaire à D . Par hypothèse, $O'B'$ et OB sont aussi perpendiculaires à $O'A'$. La droite OB est ainsi perpendiculaire à deux droites du plan projetant OAA' , donc perpendiculaire à la droite OA contenue dans celui-ci.

démonstration de (VIIIe) : Supposons OA non parallèle à P , c'est-à-dire, ici, non parallèle à $O'A'$. Par hypothèse, OB est perpendiculaire à OA . Mais OB est aussi perpendiculaire à $O'A'$, car $O'A'$ est perpendiculaire au plan projetant déterminé par D et $O'B'$, droites qui sont, par hypothèse, orthogonales à $O'A'$. Finalement, la droite OB apparaît comme une perpendiculaire au plan projetant OAA' , elle est donc perpendiculaire à D qui est contenue dans celui-ci, et cela signifie qu'elle est parallèle au plan P .

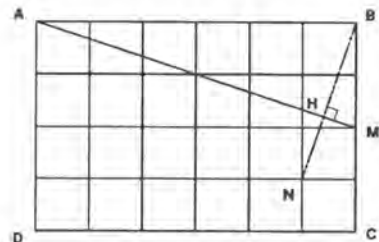
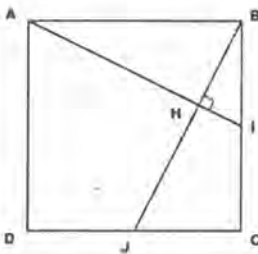
construire une perpendiculaire

Si la seule donnée d'une figure en perspective ne permet pas de se faire une idée des propriétés d'angles de la configuration spatiale considérée, il n'en va plus de même lorsque l'on dispose, *en plus*, d'informations précisant (par exemple) que tel quadrilatère est un *carré*, ou que telle ellipse est un *cercle*.



Dans ces conditions en effet, on dispose par exemple de la notion de *diamètres conjugués* pour obtenir la perpendiculaire à n'importe quelle droite contenue dans le plan du cercle donné ... Il est, bien entendu, hors de question de faire appel ici à de telles connaissances. Il est en revanche fondamental de comprendre que la donnée d'un carré permet de construire un quadrillage (ou mieux, un système de coordonnées) à partir duquel *toutes* les constructions habituelles deviennent possibles.

On dégagera notamment une propriété élémentaire fort pratique qui peut ensuite être généralisée à des cas plus difficiles sur quadrillage (cf. figure ci-dessous à gauche) :



(VIIIId) Etant donné un carré $ABCD$ et le milieu I du côté BC , la hauteur BH du triangle ABI passe par le milieu J du côté DC . (démonstration élémentaire)

sections d'un cylindre

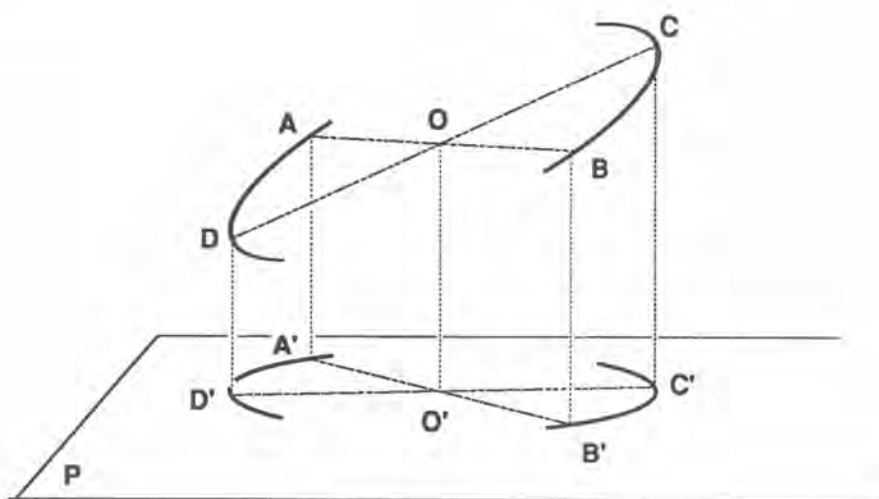
Quelques exercices invitent enfin à étudier l'intersection d'un cylindre de révolution et d'un plan. Comme on sait, cette intersection est, en général, une ellipse. Il ne s'agit évidemment pas, à ce niveau, d'en donner une démonstration !

L'activité proposée consiste au contraire à comprendre le principe d'un tracé point par point de l'intersection et à découvrir progressivement une courbe que l'intuition laisse normalement imaginer à l'avance ... Les élèves les plus entraînés pourront même sentir la symétrie centrale propre à la courbe et en conjecturer le centre. Rappelons à cet égard les quelques propriétés suivantes :

- (E1) L'intersection d'un plan qui coupe l'axe d'un cylindre quelconque ayant pour base un cercle ou une ellipse est une ellipse,
- (E2) Cette ellipse est représentée en perspective cavalière par une ellipse,
- (E3) Le centre de l'ellipse intersection n'est autre que le point d'intersection de l'axe du cylindre avec le plan sécant,
- (E4) Dans une perspective cavalière, l'image du centre de l'ellipse intersection est le centre de l'ellipse image.

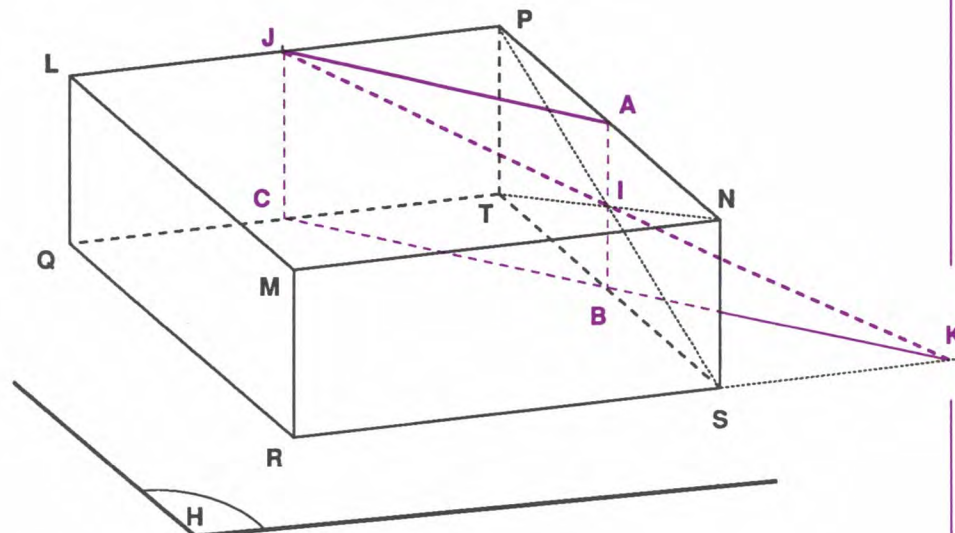
On notera que la première de ces quatre propriétés est la seule à relever d'une démonstration non élémentaire. En effet, si l'on se réfère à la définition de la perspective cavalière comme projection parallèle sur un plan, la deuxième propriété est une simple application de (E1), la dernière est de même une simple application de (E3) ...

Enfin (E3) résulte de la remarque évidente selon laquelle la projection du milieu d'un segment n'est autre que le milieu du segment image :



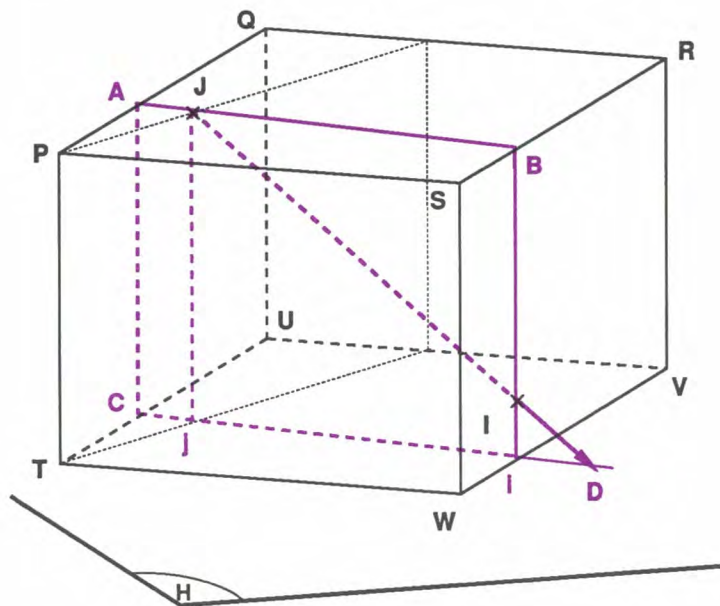
Noter que la propriété (E4) serait fausse dans une représentation en perspective fuyante, car dans une projection centrale le milieu d'un segment n'est pas conservé.

29. Le pavé droit $LMNPQRST$ est posé sur le plan horizontal H .
 a) Trace le centre I de la face $NPTS$. Trace le milieu J du segment LP .
 b) Trace l'intersection du pavé (et de H) par le plan vertical passant par I et J .
 c) Trace l'intersection K de la droite IJ et de H .
 d) Le point K est-il sur la droite RS ?



a) , b) La verticale passant par I coupe, dans le plan $NSTP$, les arêtes PN et TS en A et B . Dans le plan $LPTQ$, la verticale passant par J coupe QT en C . Le quadrilatère $JABC$ est l'intersection cherchée avec le cube et l'intersection de H et du plan vertical passant par I et J est évidemment la droite BC .

c) , d) Soit K l'intersection (dans le plan ABC) de IJ et de BC . C'est l'intersection de IJ avec le plan H . Dans le rectangle $ABCJ$, comme I est le milieu de AB et comme les droites AJ et BC sont symétriques par rapport à I , on a : $IJ = IK$. Ceci implique, dans le plan $LPSR$, que SK est symétrique de JP par rapport à I , donc que SK est bien la droite RS .



30. Le pavé droit $PQRSTUW$ est posé sur un plan horizontal H . Le point I est dans la face $SRVW$. Le point J est dans la face $PQRS$.
 a) Trace les intersections i et j de H et des droites verticales passant par I et J .
 b) Trace l'intersection du pavé et du plan vertical passant par I et J .
 c) Trace l'intersection de la droite IJ et du plan H .

a) La construction de i est évidente. Celle de j revient à la construction du parallélogramme $PJiT$.

b) La droite ij coupe, dans H , l'arête TU en un point C . Il suffit ensuite de mener les verticales CA et Bi , ou simplement la parallèle AB à Ci passant par J .

c) La construction de D est facile dans le plan $ABiC$.

31. Une pyramide $SABCD$ est posée sur un plan horizontal H . La verticale du point S coupe H en s . Soit V le plan vertical passant par les points C' et B' (situés sur les arêtes SC et SB).

a) Trace les intersections c et b de H et des droites verticales passant par C' et B' . b) Trace l'intersection de H et de V . c) Trace l'intersection de V et de la pyramide.

a) Comme Ss est verticale, la verticale passant par B' est dans le plan SsB , elle coupe H au point b où elle rencontre la droite sB .

(même construction pour la projection c à l'aide du triangle SsC .)

b) Le plan V est le plan déterminé par les verticales $B'b$ et $C'c$, son intersection avec H est évidemment la droite bc , qui coupe les arêtes AB et DC en des points A' et D' .

c) L'intersection de V et de la pyramide n'est autre que le quadrilatère $A'B'C'D'$.

32. La pyramide $SABCD$ est posée sur un plan horizontal H . La base $ABCD$ est un rectangle de largeur $BC = 4,5$ cm et de longueur $AB = 6$ cm. La projection horizontale s de S est le centre de ce rectangle ; et la longueur de Ss est 5,7 cm.

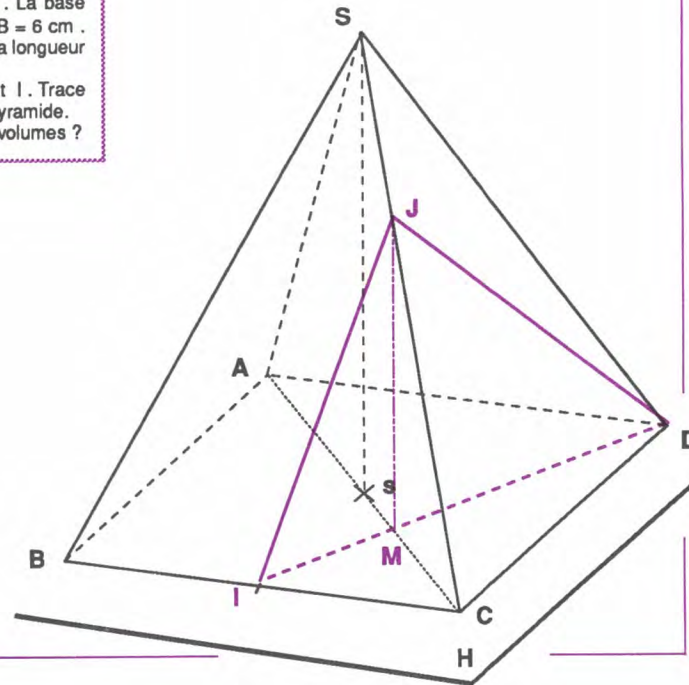
a) Soit I le milieu de BC . Soit V le plan vertical qui contient D et I . Trace l'intersection M de V et de AC , puis l'intersection de V et de la pyramide.

b) Le plan V partage la pyramide en deux parties. Quels sont leurs volumes ?

a) Comme le plan SAC contient la droite verticale Ss , c'est un plan vertical qui coupera le plan vertical V suivant une droite verticale d .
Par construction, M est sur d et donc la droite d est la parallèle à Ss menée par M . Elle coupe l'arête SC en un point J qui permet de tracer l'intersection de la pyramide et du plan V .

b) Le rapport $k = CM/Cs = CJ/CS = MJ/sS$ vaut $2/3$. L'aire du triangle IDC est manifestement le quart de celle du rectangle $ABCD$.
Cela étant, le volume de la pyramide $JICD$ est égal à un sixième du volume de la pyramide totale. Les deux parties obtenues ont donc des volumes égaux à $8,55 \text{ cm}^3$ et $42,75 \text{ cm}^3$.

Tout revient finalement à une détermination satisfaisante du rapport k ... Les erreurs de mesure sur la figure peuvent, dans une bonne classe, servir de motivation à un calcul intéressant : il s'agira de travailler dans le plan H avec le repère (C, CD, CB) pour trouver les équations, puis l'intersection, des droites CA et ID .



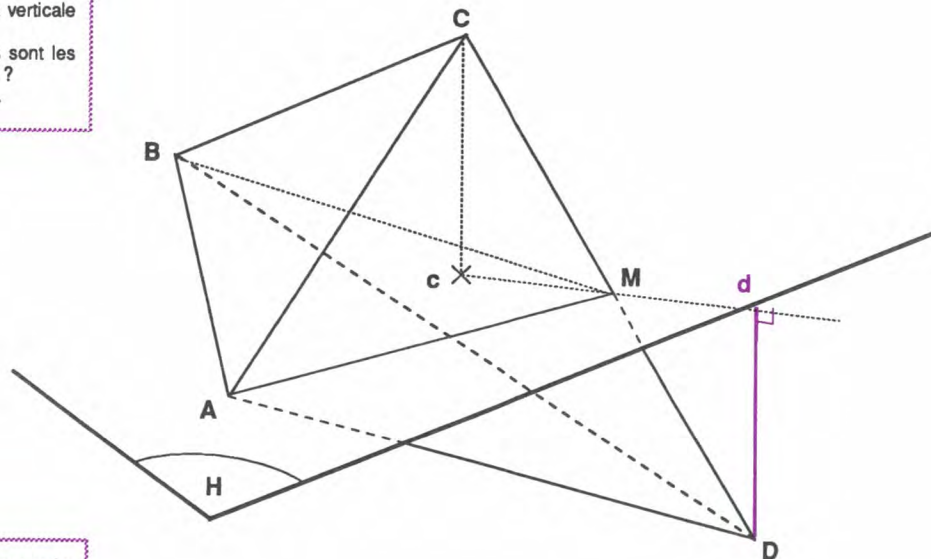
a) La verticale passant par D est contenue dans tout plan vertical passant par D, et en particulier dans le plan CcD . Celui-ci coupe H en c et M, donc suivant la droite cM . Il reste à mener par D la parallèle à Cc , elle coupe cM au point d cherché.

b) Soit a l'aire du triangle ABM .

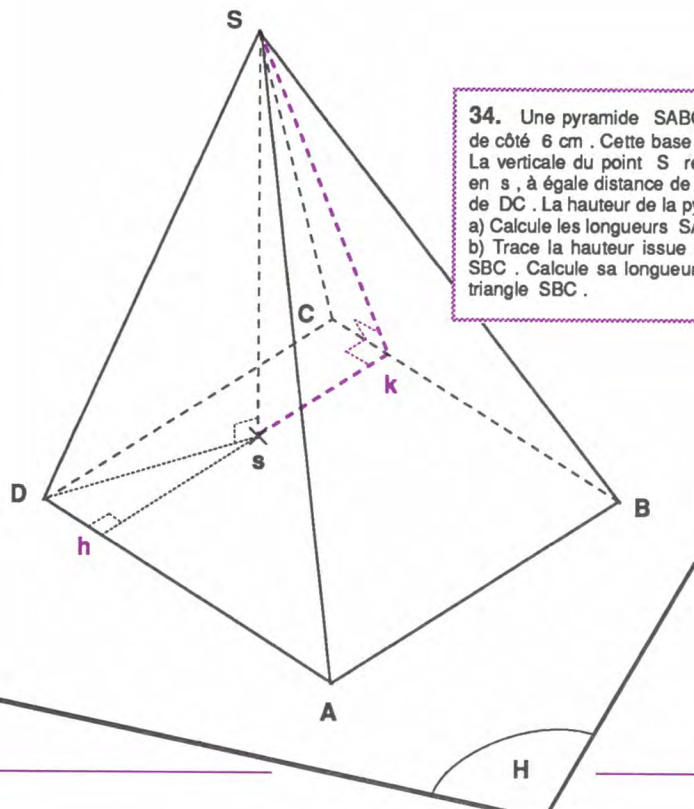
On a : $\text{vol}(ABCD) = \text{vol}(CBAM) + \text{vol}(DABM)$,
d'où : $3 \cdot \text{vol}(ABCD) = a \cdot Cc + a \cdot Dd = a \cdot Cc (1 + Dd/Cc)$.

Il suffit donc de noter que $Dd/Cc = DM/CM$.

33. L'arête AB du tétraèdre $ABCD$ est horizontale. Le plan horizontal H qui contient AB coupe le tétraèdre suivant le triangle ABM . La verticale du point C coupe H en c .
a) Trace l'intersection d de H et de la verticale qui passe par D .
b) Soit V le volume de $ABCD$. Quels sont les volumes des tétraèdres $ABCM$ et $ABDM$? (Prends $CM = MD$ puis $CM/MD = 3/2$).



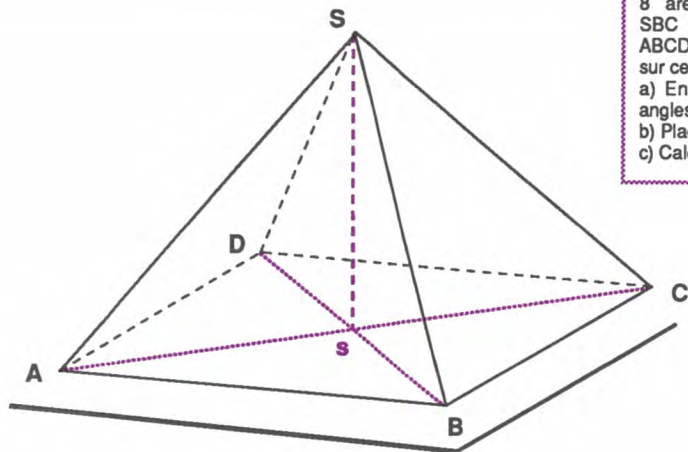
34. Une pyramide $SABCD$, a une base carrée $ABCD$ de côté 6 cm. Cette base $ABCD$ est horizontale. La verticale du point S rencontre le plan $ABCD$ en s , à égale distance de AD et BC , et à 1 cm de DC . La hauteur de la pyramide est 8 cm.
a) Calcule les longueurs SA, SB, SC, SD .
b) Trace la hauteur issue de S dans le triangle SBC . Calcule sa longueur ; puis calcule l'aire du triangle SBC .



Se reporter à l'exercice 36.

$$SB = SA = 9,9 \text{ cm}, \quad SC = SD = 8,6 \text{ cm}.$$

$$Sk = 8,5 \text{ cm}, \quad \text{aire}(SBC) = 25,6 \text{ cm}^2.$$



35. La pyramide SABCD a une base carrée, et ses 8 arêtes mesurent 6 cm (donc les triangles SAB, SBC, SCD et SDA sont équilatéraux). Le plan ABCD est horizontal. Et on note s la projection de S sur ce plan.

- En appliquant le théorème de Pythagore aux triangles SsA et SsB, démontre que $sA = sB$.
- Place le point s sur la figure. Calcule sA puis sS.
- Calcule le volume de la pyramide.

a), b) L'égalité de sA et sB est immédiate. Il s'ensuit par analogie que s est équidistant des sommets A, B, C et D ; c'est le centre du carré de base, et on a :

$$sA = sB = sC = sD = 3 \cdot \sqrt{2} \text{ cm.}$$

En utilisant de nouveau le théorème de Pythagore, il vient :

$$sS = 3 \cdot \sqrt{2} \text{ cm.}$$

$$c) \text{ Volume (SABCD) } = (1/3) \times (3 \cdot \sqrt{2}) \times 6^2 = 50,9 \text{ cm}^3.$$

a) Soit h la projection de s sur l'arête AB.

$$\text{On a : } sA^2 = sh^2 + Ah^2 = 4^2 + 5^2 = 41.$$

On considère ensuite le triangle rectangle SAs :

$$SA^2 = sA^2 + Ss^2 = 41 + 8^2 = 105.$$

Par cette méthode, on obtient :

$$SA = 10,2 \text{ cm, } SB = 9,2 \text{ cm,}$$

$$SC = 8,8 \text{ cm, } SD = 9,9 \text{ cm.}$$

$$b) \text{ Vol (SABCD) } = (1/3) \times 8 \times 7^2 = 130,7 \text{ cm}^3.$$

c) D'après (VIIIc), Sh est la hauteur du triangle SAB. On obtient :

$$\text{aire (SAB) } = 31,3 \text{ cm}^2,$$

$$\text{aire (SBC) } = 28,9 \text{ cm}^2,$$

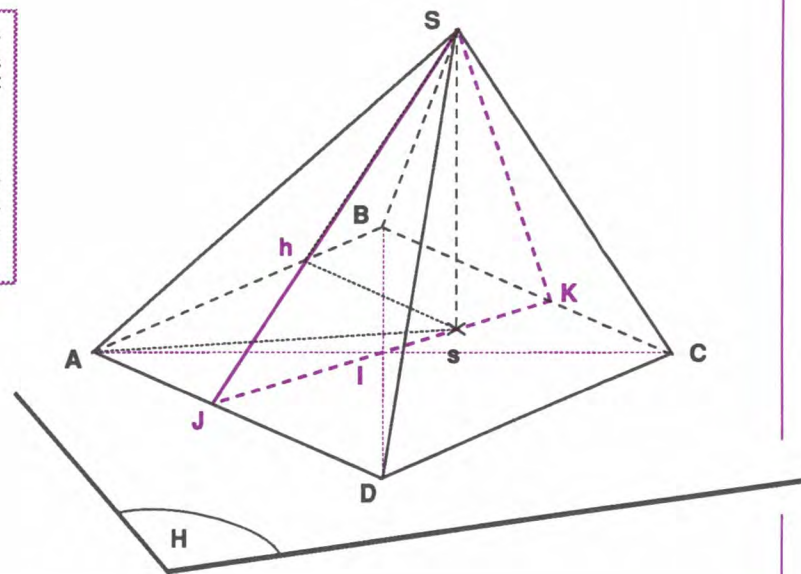
$$\text{aire (SCD) } = 29,9 \text{ cm}^2,$$

$$\text{aire (SDA) } = 33 \text{ cm}^2.$$

d) Les deux pyramides auront même hauteur. Il suffit donc de considérer la droite horizontale passant par s et par le centre I de ABCD, car elle partage ce carré en deux trapèzes qui s'échangent dans la symétrie de centre I, et qui, de ce fait, ont même aire.

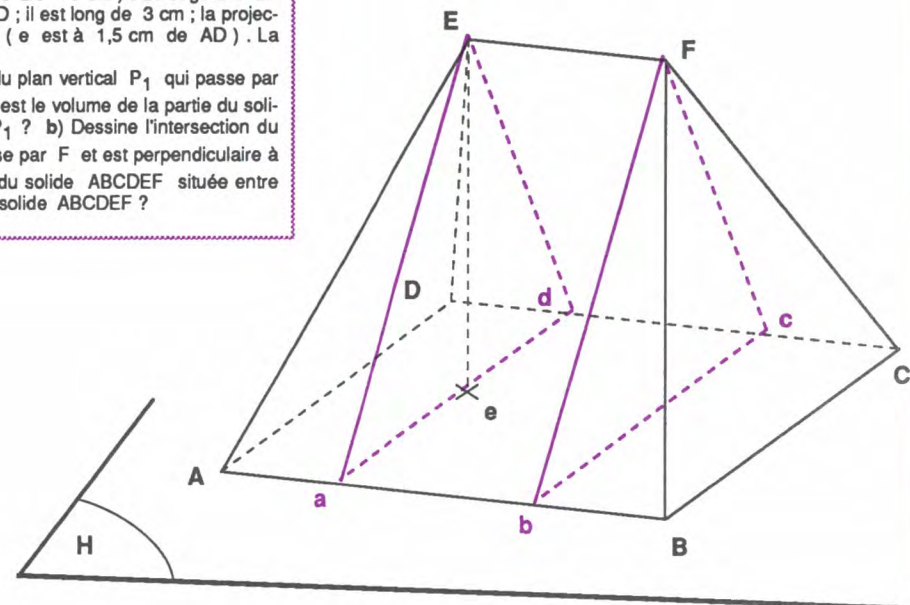
36. La pyramide SABCD est posée sur le plan horizontal H. La base ABCD est carrée de côté 7 cm. La projection horizontale s de S, est à 2 cm de BC et à 3 cm de CD. La hauteur Ss mesure 8 cm.

- Calcule les longueurs des arêtes SA, SB, SC, SD.
- Calcule le volume de la pyramide.
- Calcule les aires des faces SAB, SBC, SCD, SDA.
- On veut couper la pyramide par un plan vertical V passant par S qui la partage en deux parties de même volume. Comment faut-il choisir V ? Dessine l'intersection de V et de la pyramide.

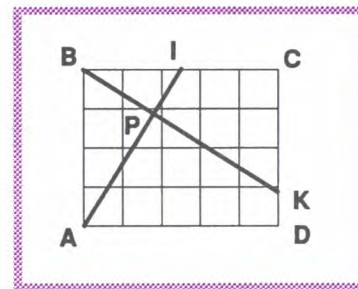
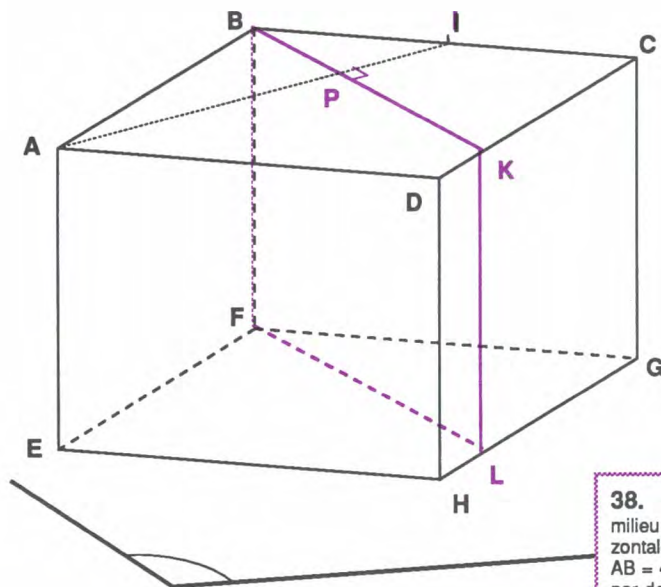


37. Voici un solide. La base ABCD est posée sur le plan horizontal H ; c'est un rectangle ($AB = 6 \text{ cm}$ et $BC = 5 \text{ cm}$). Le segment EF est horizontal et parallèle à AB et CD ; il est long de 3 cm ; la projection horizontale de E est le point e (e est à 1,5 cm de AD). La hauteur Ee est 4,5 cm .

a) Dessine l'intersection du solide et du plan vertical P_1 qui passe par E et est perpendiculaire à EF . Quel est le volume de la partie du solide ABCDEF située à gauche de P_1 ? b) Dessine l'intersection du solide et du plan vertical P_2 qui passe par F et est perpendiculaire à EF . Quel est le volume de la partie du solide ABCDEF située entre P_1 et P_2 ? c) Quel est le volume du solide ABCDEF ?



- a) $\text{vol} (ADEda) = 11,25 \text{ cm}^3$.
 b) $\text{vol} (EFcbad) = 33,75 \text{ cm}^3$.
 c) $\text{volume total} = 56,25 \text{ cm}^3$.



38. La face EFGH de ce pavé droit est horizontale. On note I le milieu de BC. Le plan vertical P est perpendiculaire à la droite horizontale AI , et il passe par B . On suppose $AE = 4 \text{ cm}$, $AD = 5 \text{ cm}$ et $AB = 4 \text{ cm}$. a) Trace l'intersection du pavé et du plan P (commence par dessiner en vraie grandeur la face ABCD , et son intersection par P) . b) Le plan P coupe le cube en deux morceaux, quels sont leurs volumes ? c) Quelle est la distance de A au plan P ?

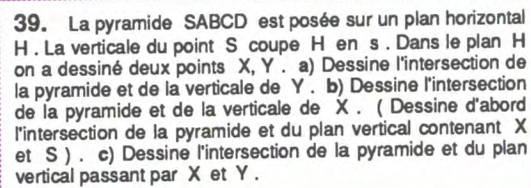
a) Dans le repère orthonormé construit sur (A , AD , AB) , AI et BK ont pour équation :
 $8x - 5y = 0$ et $5x + 8y = 32$.

On en déduit les coordonnées de K et P :
 $K (5 ; 0,875)$, $P (1,8 ; 2,9)$.

b) $\text{vol} (BCKFGL) = 31,25 \text{ cm}^3$.

$\text{vol} (ABKDEFLH) = 48,75 \text{ cm}^3$.

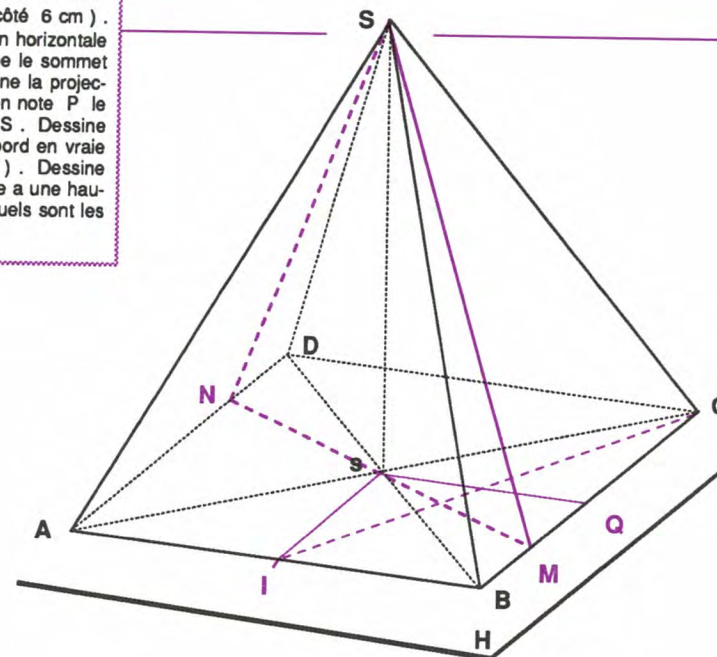
c) On peut utiliser le produit scalaire à partir des coordonnées de P : $AP = 3,4 \text{ cm}$.



- 40.** Le pavé oblique ABCDA'B'C'D' est posé sur le plan horizontal H. La verticale du point C' coupe H en m. a) Soit V le plan vertical qui contient C' et A'. Trace l'intersection de V et de H; puis l'intersection de V et du pavé. b) Trace l'intersection de V et de DB'.

-

41. SABCD est une pyramide à base carrée (de côté 6 cm) . La base est dans un plan horizontal H . La projection horizontale de S est le centre s du carré ABCD . a) Dessine le sommet caché. Dessine en pointillé les arêtes cachées. Dessine la projection horizontale de S . b) Soit I le milieu de BA , on note P le plan vertical perpendiculaire à CI , et qui passe par S . Dessine l'intersection de P et de H (tu peux dessiner d'abord en vraie grandeur, la partie de la figure qui se trouve dans H) . Dessine l'intersection de P et de la pyramide. c) La pyramide a une hauteur h . Le plan P la coupe en deux morceaux ; quels sont les volumes de ces deux morceaux ?

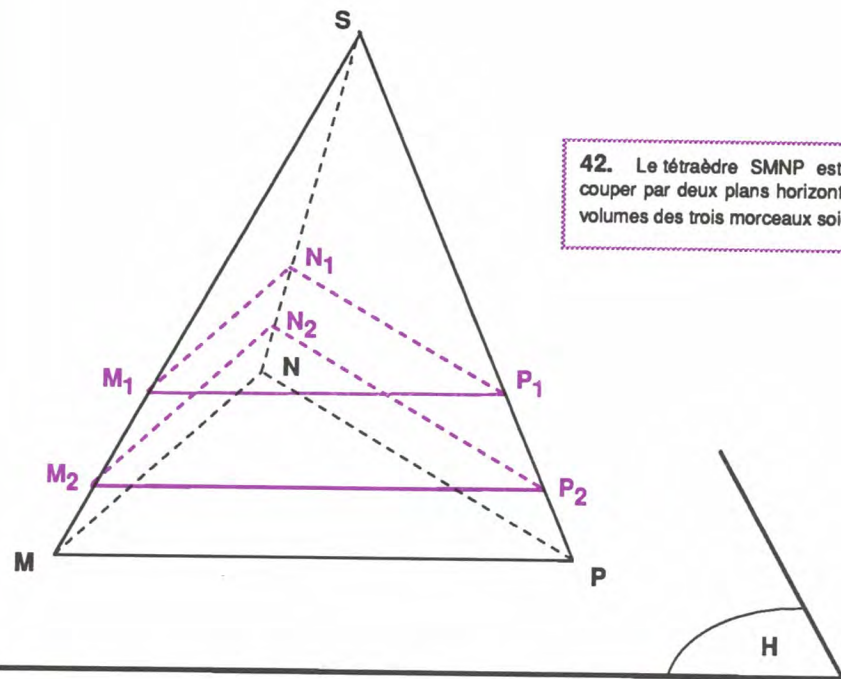


b) Soit Q le milieu de BC . Il est clair que CI coupe sQ en son milieu .

En appliquant (VIII d) au carré IsQB , on voit que, si M est le milieu de BQ , la droite sM est perpendiculaire à CI .

L'intersection de P avec la pyramide est donc le triangle MSN , où M et N sont situés au quart des arêtes BC et DA .

c) Les deux volumes sont égaux (cf. exercice 36) .



42. Le tétraèdre SMNP est posé sur le plan horizontal H . Le couper par deux plans horizontaux H_1 et H_2 , de façon que les volumes des trois morceaux soient égaux.

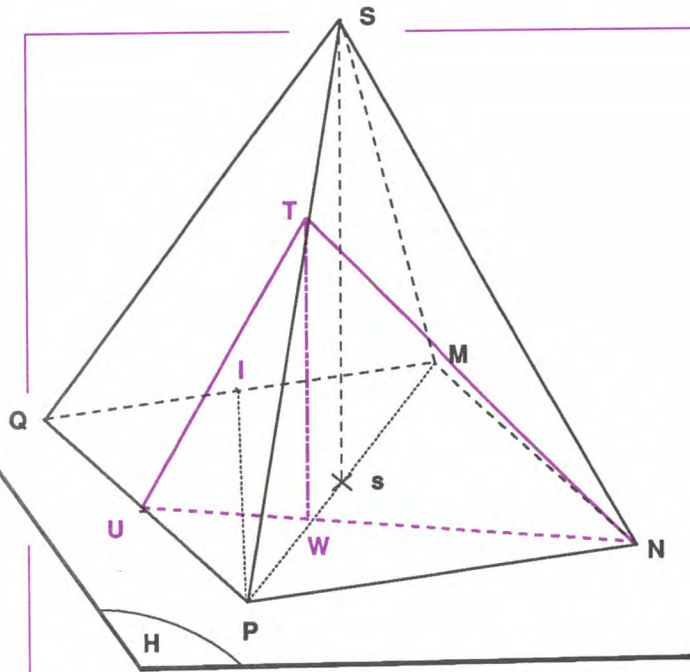
On obtient des tétraèdres homothétiques .

$$\text{vol} (\text{SMPN}) = 3 . \text{vol} (\text{SM}_1\text{P}_1\text{N}_1) = 1,5 . \text{vol} (\text{SM}_2\text{P}_2\text{N}_2) ,$$

Il faut donc :

$$— \text{SM}_1 / \text{SM} = 0,69 ,$$

$$— \text{SM}_2 / \text{SM} = 0,87 .$$



43. La base $MNPQ$ de cette pyramide est dans un plan horizontal H . La projection horizontale du sommet S est le centre s du carré. Le plan V est vertical et perpendiculaire à PI (I est le milieu de MQ) ; il passe par N .
a) Trace l'intersection de V et du plan vertical MSP . On note T l'intersection de V et de SP . b) Trace l'intersection de V et de la pyramide.

a) Par hypothèse, le plan V coupe H suivant la perpendiculaire à PI menée par N .
D'après (VIII d), c'est la droite NU , où U est le milieu de PQ .

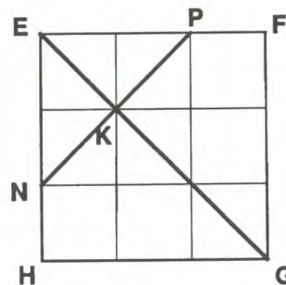
b) Se reporter à l'exercice 32. a) .

a) En utilisant le théorème de Pythagore :
 $MP = MN = 5,3 \text{ cm}$, $NP = 5,6 \text{ cm}$.

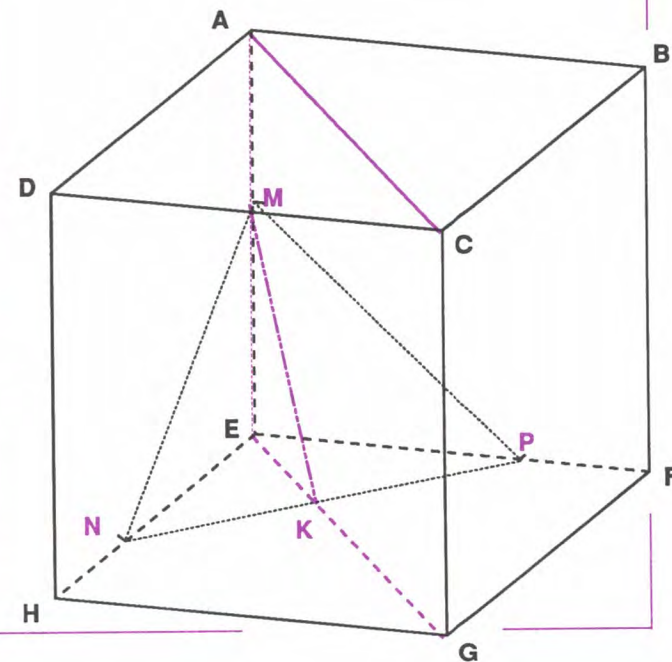
b) Comme $EN = EP$, la droite NP est parallèle à la diagonale HF , donc V coupe H suivant la diagonale EG du carré $EFGH$.
L'intersection de V et du cube est évidemment le rectangle $ACGE$.

c) Soit $K = EG \cap NP$. On vérifie aisément que $EK = EG/3 = 2 \cdot \sqrt{2} \text{ cm}$.
Le tétraèdre $EMNP$ est coupé par V suivant le triangle rectangle EMK .
 $EM = 3,5 \text{ cm}$, $EK = 2,8 \text{ cm}$, $MK = 4,5 \text{ cm}$.

d) MK est une ligne de pente du plan MNP .
On a :
 $\tan(\text{EKM}) = 1,25$, $\text{EKM} = 51^\circ$.

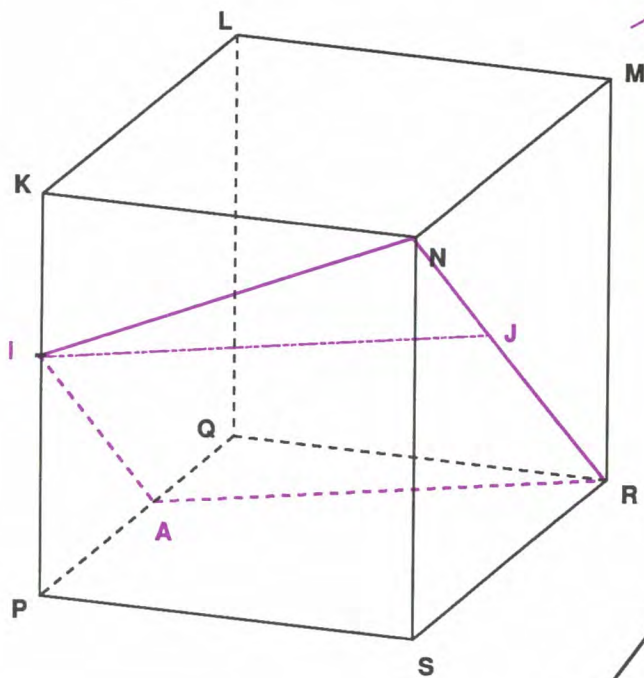


44. Ce cube a 6 cm de côté. La face $ABCD$ est horizontale. Place sur AE le point M tel que $EM = 3,5 \text{ cm}$, sur HE le point N tel que $EN = 4 \text{ cm}$, et sur FE , le point P tel que $EP = 4 \text{ cm}$. a) Calcule MN , NP et PM . b) Trace l'intersection du cube et du plan MNP par le plan vertical V passant par E et perpendiculaire à NP . (Dessine en vraie grandeur la face $EFGH$ avec P et N). c) Ce plan V coupe le tétraèdre $EMNP$ suivant un triangle. Calcule les longueurs des côtés de ce triangle. d) Quelle est la pente du plan MNP ?

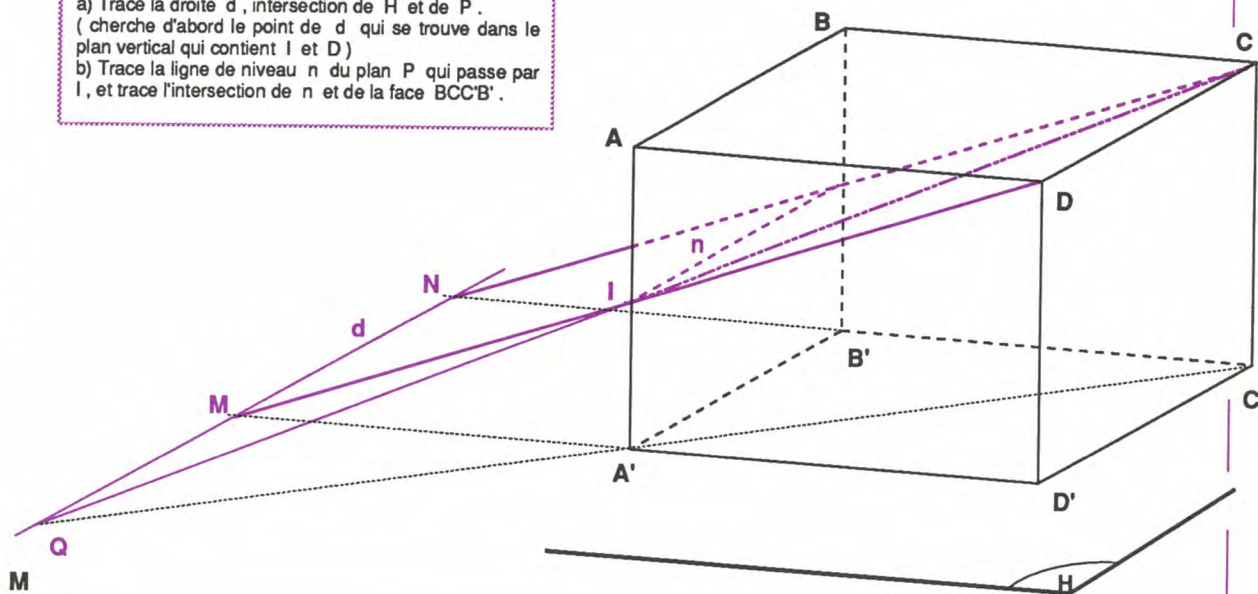


a) Comme IA' est une parallèle à DD' et comme $DD' = 2 IA'$, la droite DI coupe $A'D'$ au point M tel que A' et I soient les milieux de $D'M$ et DM .
 d est la parallèle à DC menée par M , elle coupe $B'C'$ et $A'C'$ en des points N et Q tels que $QA' = A'C'$ et $NB' = B'C'$.

b) La droite d est une ligne de niveau de P .
 La ligne de niveau n passant par I est donc parallèle à d , c'est-à-dire à CD . Elle est dans le plan de la face $ABB'A'$.
 Pour ces raisons, l'intersection de n et de la face $BCC'B'$ est située sur l'arête BB' .

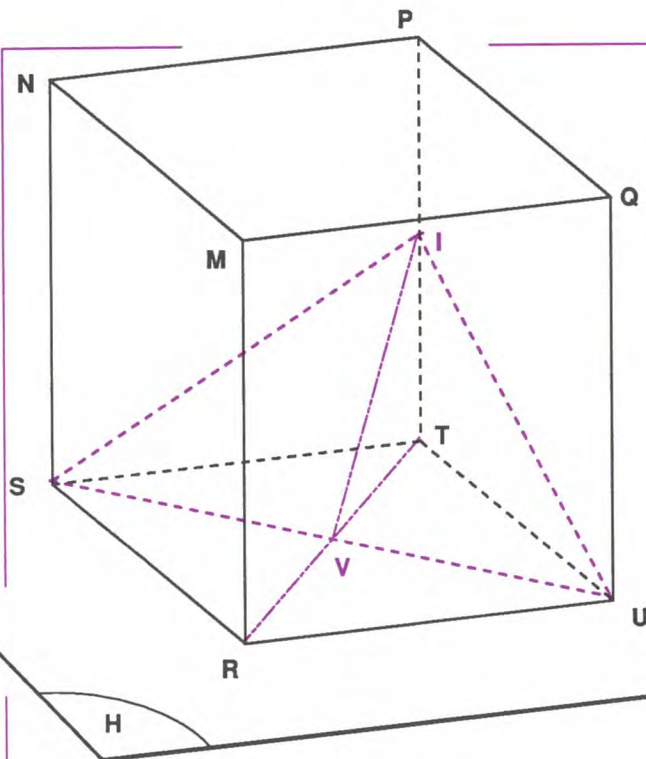


45. Le pavé droit $ABCD A'B'C'D'$ est posé sur le plan horizontal H . Le plan P passe par C, D et I (où I est le milieu de AA').
 a) Trace la droite d , intersection de H et de P . (cherche d'abord le point de d qui se trouve dans le plan vertical qui contient I et D)
 b) Trace la ligne de niveau n du plan P qui passe par I , et trace l'intersection de n et de la face $BCC'B'$.



46. On a dessiné un cube de côté 6 cm posé sur le plan horizontal H . Le plan Z passe par N, R et I (I est sur l'arête KP et $KI = 2/5 KP$).
 a) Trace l'intersection du cube et du plan Z .
 b) Trace la ligne de niveau de Z qui passe par I .
 c) Quelle est la longueur de la portion de cette ligne de niveau qui se trouve à l'intérieur du cube ?

a) Le plan Z coupe $KNSP$ et $NMRS$ suivant les droites IN et NR . Il coupe la face $KLQP$ suivant la parallèle à NR menée par I . Celle-ci coupe l'arête PQ en un point A qui fournit l'intersection $INRA$. Noter que $PI = PA$.
 b) La droite AR est une ligne de niveau, donc la ligne de niveau passant par I est parallèle à AR . Elle coupe NR en un point J .
 c) $IJRA$ est un parallélogramme donc $IJ = AR = 6,46$ cm.



47. On a dessiné un cube posé sur le plan horizontal H. Le plan Z contient U, S et le milieu I de TP. a) Trace la droite qui est perpendiculaire à SU et passe par T (et qui est dans le plan H). b) Quelle est la pente du plan Z ?

Exercice facile ... On trouve :

$$\tan (TVI) = 0,7,$$

$$TVI = 35,3^\circ.$$

a), b) La droite d est la parallèle menée par A à la diagonale L'N'.

c) Le plan vertical AMM' coupe P suivant la droite AM et contient KK'. Le plan P coupe donc l'arête KK' en B = KK' ∩ AM.

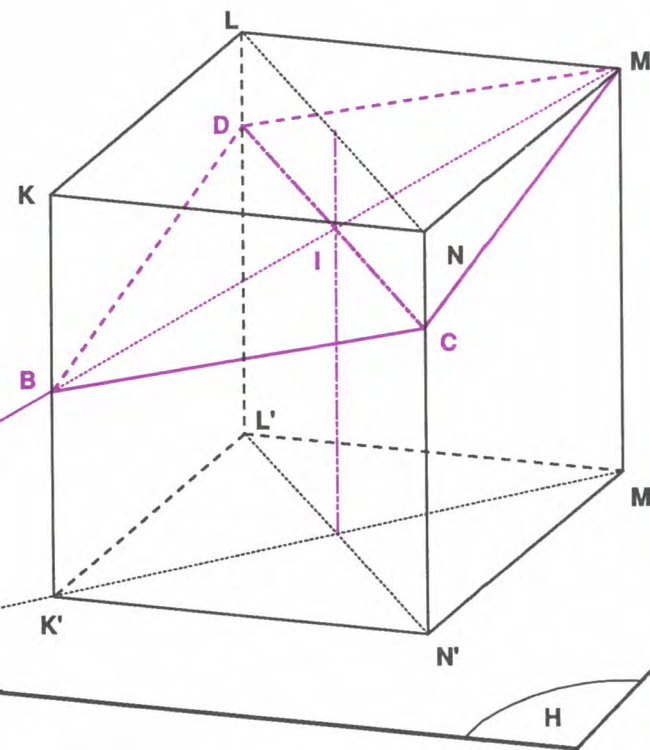
Le plan vertical LL'N' coupe P suivant une parallèle à L'N' et la droite AM en un point I situé sur la verticale du centre de la face K'L'M'N'. On obtient ainsi les points D et C qui donnent l'intersection BDMC avec le cube.

d) Les droites d et DC sont des lignes de niveau de P. La droite AM est une ligne de pente.

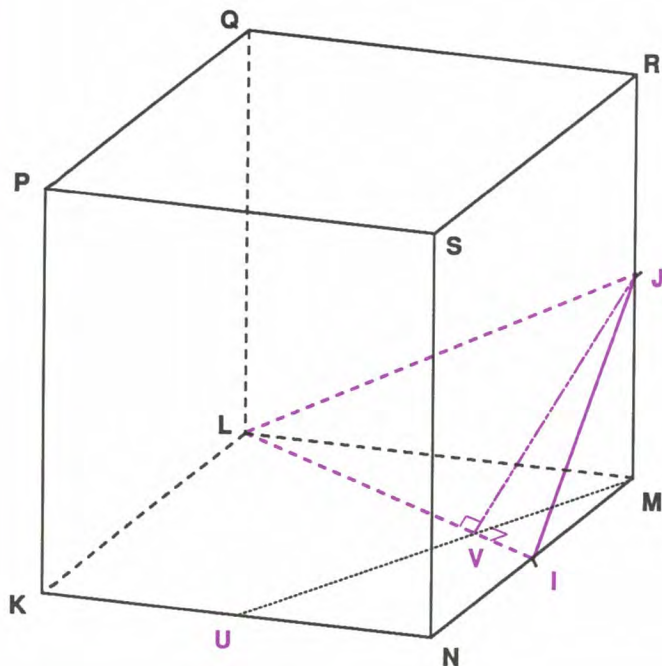
$$\tan (MAM') = 0,35,$$

$$MAM' = 19,5^\circ.$$

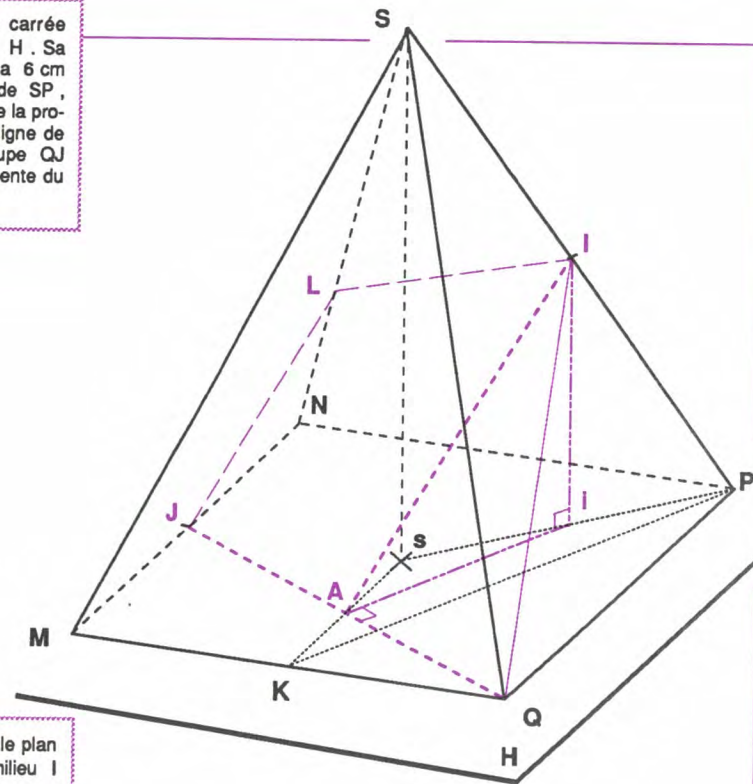
48. On a dessiné un cube posé sur le plan horizontal H. a) Trace le point A du plan H tel que K' soit le milieu de AM'. b) Trace la droite d du plan H qui est perpendiculaire à AM' en A. c) Le plan P contient d et M. Trace l'intersection de P et du cube. d) Quelle est la ligne de pente du plan P qui passe par M. Quelle est la pente de P ?



- a) Construire I dans le triangle SPS . C'est le milieu de SP et $II = 3,5 \text{ cm}$.
- b) D'après (VIIIc), il faut trouver le point A de H tel que IA soit orthogonal à JQ . En se reportant à l'exercice 31, on voit que la perpendiculaire à JQ menée par P contient le milieu K de MQ . Dès lors A est l'intersection de s_K avec JQ et c'est le milieu de s_K . De plus $Ai = KP/2$ (droite des milieux dans s_{KP}).
- c) $Ai = 3,35 \text{ cm}$, $\tan (IAi) = 1,04$.



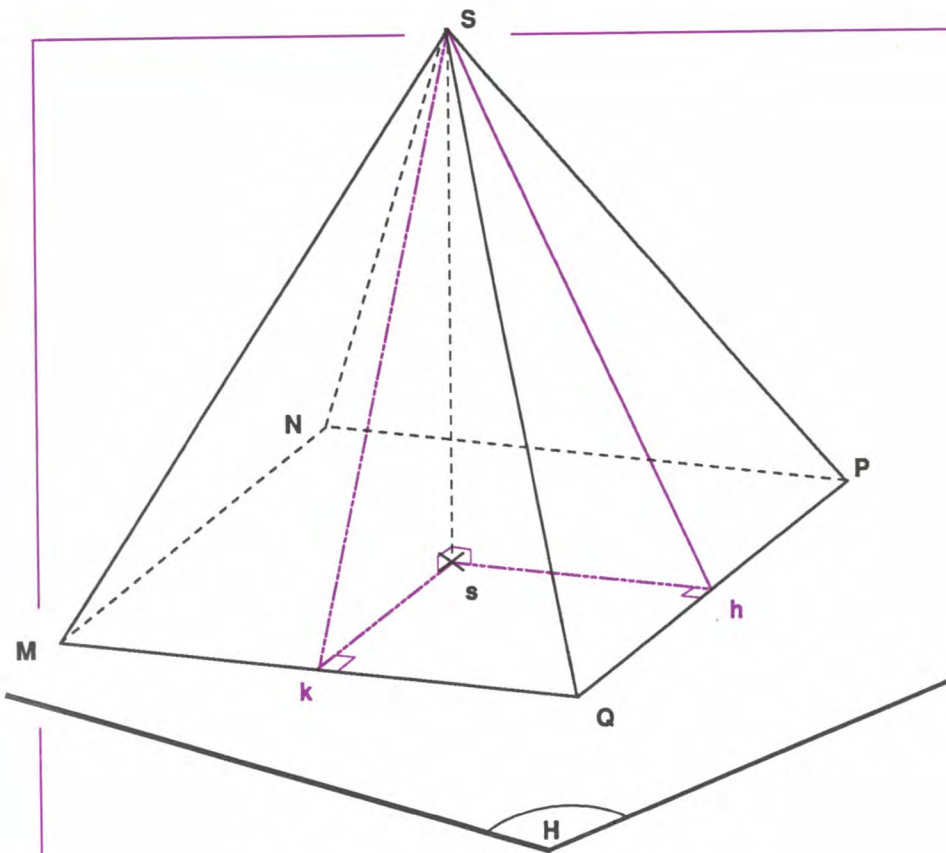
49. La pyramide régulière à base carrée SMNPQ est posée sur le plan horizontal H. Sa hauteur Ss est 7 cm. Le carré MNPQ a 6 cm de côté. Le plan Z passe par le milieu I de SP, par le milieu J de MN et par Q. a) Trace la projection horizontale I de I. b) Trace la ligne de pente de Z qui passe par I. c) Elle coupe QJ en A. Calcule Ai et li. Quelle est la pente du plan Z ?



50. Le cube KLMNPQRS est posé sur le plan horizontal H. Le plan Z contient L, le milieu I de MN et le milieu J de RM.

- Trace l'intersection de Z et du cube.
- Trace la ligne de pente de Z qui passe par J.
- Calcule la pente du plan Z.

- a) Immédiat.
- b) Application de (VIII d) : MV passe par le milieu U de KN .
- c) Supposons $LM = 2 \text{ cm}$, alors $LI = 2,24 \text{ cm}$ et, comme MVI et LMI sont des triangles semblables, $MV = 0,89 \text{ cm}$.
- $\tan (JVM) = 1,12$.

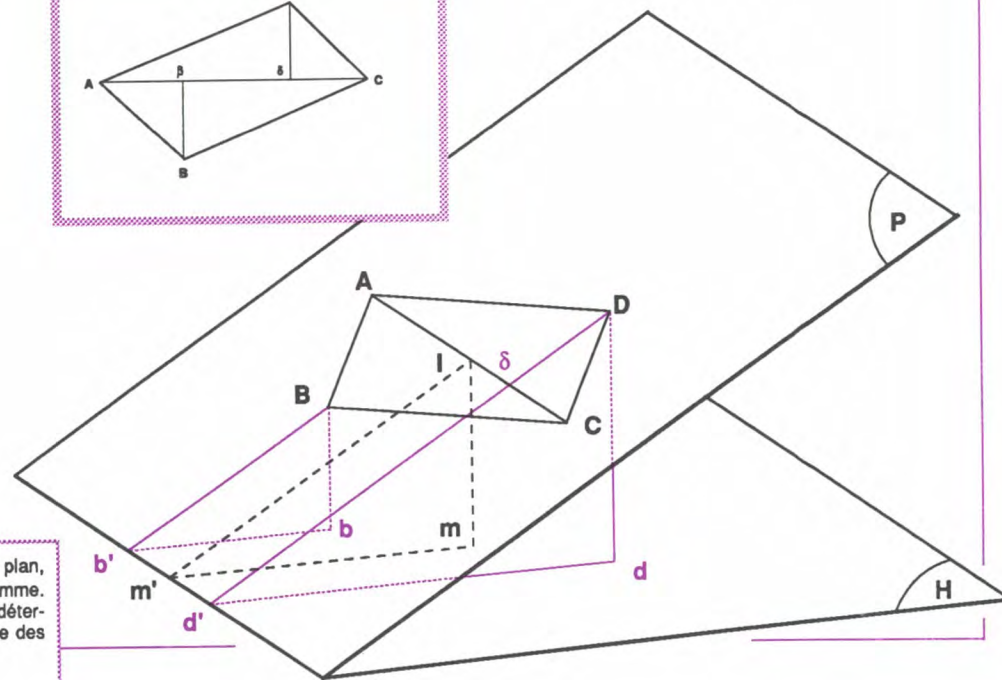
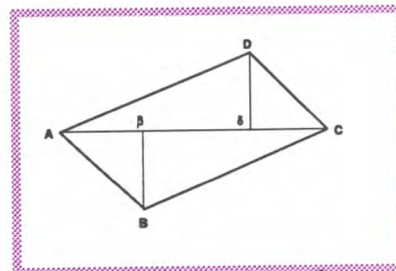


51. La base MNPQ de cette pyramide est dans le plan horizontal H ; c'est un rectangle de longueur MQ = 8 cm, et de largeur NM = 6 cm. Le point s est le centre de ce rectangle ; Ss est verticale et Ss = 6 cm. a) Trace la ligne de pente de la face SMQ, qui passe par S. Quelle est la pente de cette face ? b) Trace la ligne de pente de la face SPQ, qui passe par S. Quelle est la pente de cette face ?

Application immédiate de (VIIIc) :

$$\tan (Sks) = 2, \quad Sks = 63,4^\circ,$$

$$\tan (Shs) = 1,5, \quad Sks = 56,3^\circ.$$



$$\begin{aligned} lm &= 3,18 \text{ cm}, & lm' &= 6,18 \text{ cm}. \\ dD &= 4,2 \text{ cm}, & bB &= 2,1 \text{ cm}. \\ d'D &= 8,3 \text{ cm}, & b'B &= 4,1 \text{ cm}. \\ B\beta &= D\delta = 2,1 \text{ cm}. & A\beta &= \delta C = 2,1 \text{ cm}. \end{aligned}$$

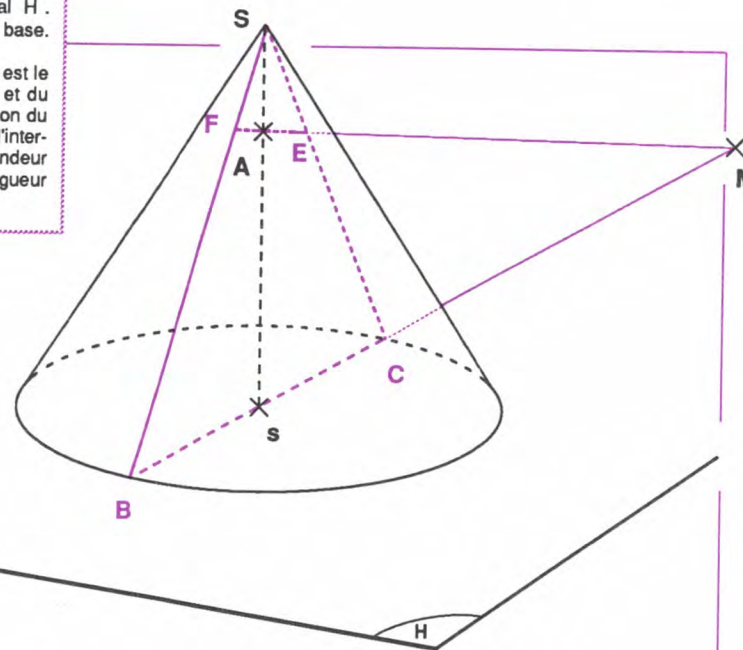
52. Le plan H est horizontal. Le plan P a pour pente 0,6. Dans ce plan, la droite AC est horizontale. Le quadrilatère ABCD est un parallélogramme. On donne mm' = 5,3 cm et AC = 7 cm. a) En mesurant sur la figure, détermine la cote au-dessus de H des points B et D. Calcule la distance des points B et D à la droite AC. b) Dessine ABCD en vraie grandeur.

a) volume du cône : 57 cm^3 .

b), c) La droite sM étant dans H , elle coupe le cercle de base en deux points B et C , où C est l'intersection du cercle et du segment sM . Le triangle SBC est l'intersection du cône avec le plan SsM et comme la droite AM est dans ce plan, elle coupe les génératrices SB et SC en des points F et E .

d) Construction facile. On détermine auparavant BM et sA en mesurant sur la figure les rapports $sA / sS = 0,72$, $BC / BM = 0,42$.

53. Un cône de sommet S est posé sur le plan horizontal H . La verticale du point S passe par le centre s du cercle de base. Le point A est sur Ss . Le point M est dans H .
a) $Ss = 5 \text{ cm}$. Le rayon du cercle de base est $3,3 \text{ cm}$. Quel est le volume du cône ? b) Trace l'intersection du segment sM et du cône. Quelle est la distance de s à M ? c) Trace l'intersection du cône et du plan V vertical passant par S et M . Puis trace l'intersection de la droite AM et du cône. d) Dessine en vraie grandeur la partie de la figure qui se trouve dans V . Et mesure la longueur de la portion de la droite AM qui est intérieure au cône.

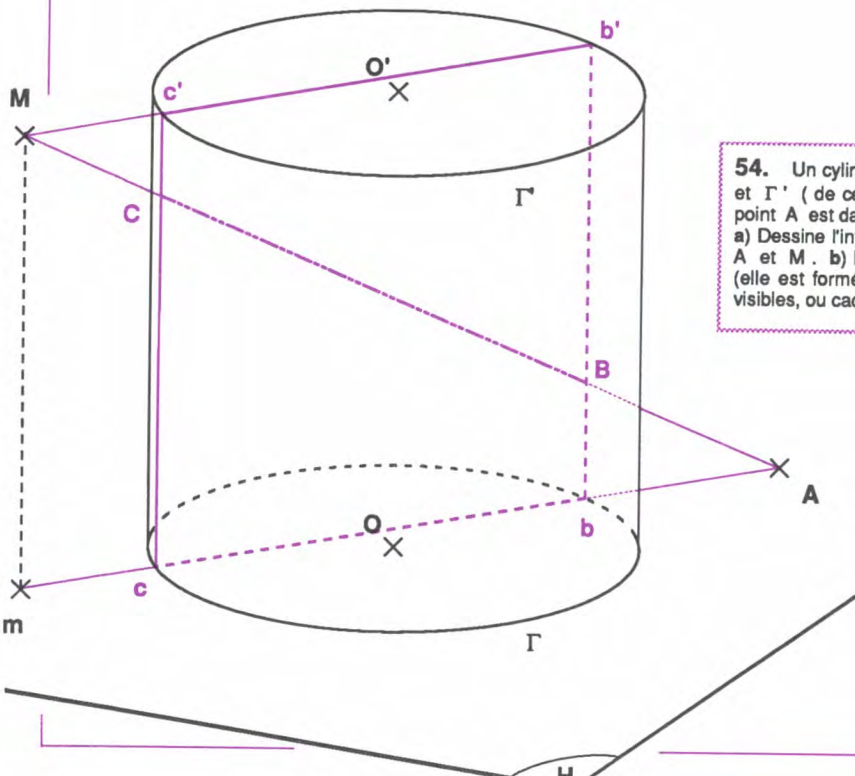


54. Un cylindre droit, a pour base les cercles Γ (de centre O) et Γ' (de centre O') ; il est posé sur le plan horizontal H . Le point A est dans H . La verticale de M coupe H en m .
a) Dessine l'intersection du cylindre et du plan vertical qui contient A et M . b) Dessine l'intersection du cylindre et de la droite AM (elle est formée de deux points, on précisera si ces points sont visibles, ou cachés sur la figure).

a) La droite Am est dans H , elle coupe le cercle de base en deux points c et b .

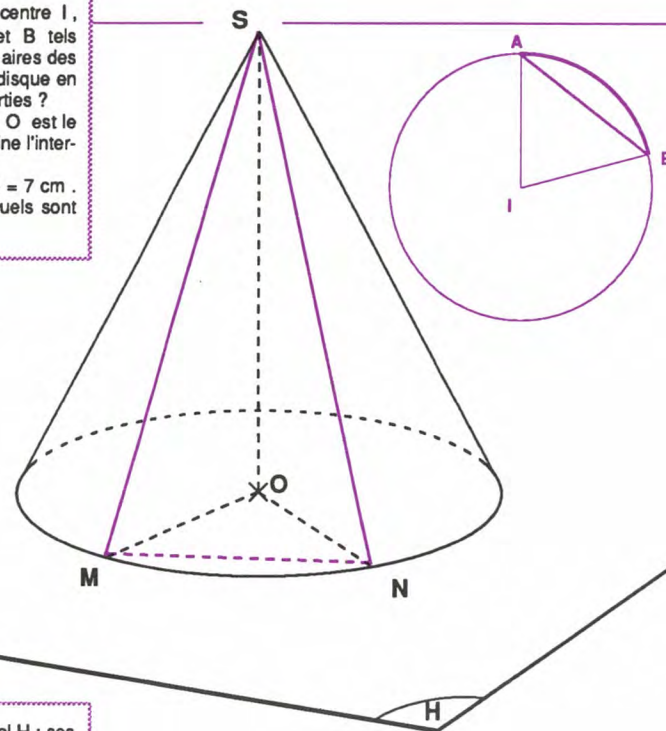
Le plan vertical contenant AM contient Mm et les deux génératrices cc' et bb' .

b) La droite MA coupe les génératrices précédentes aux points C et B .



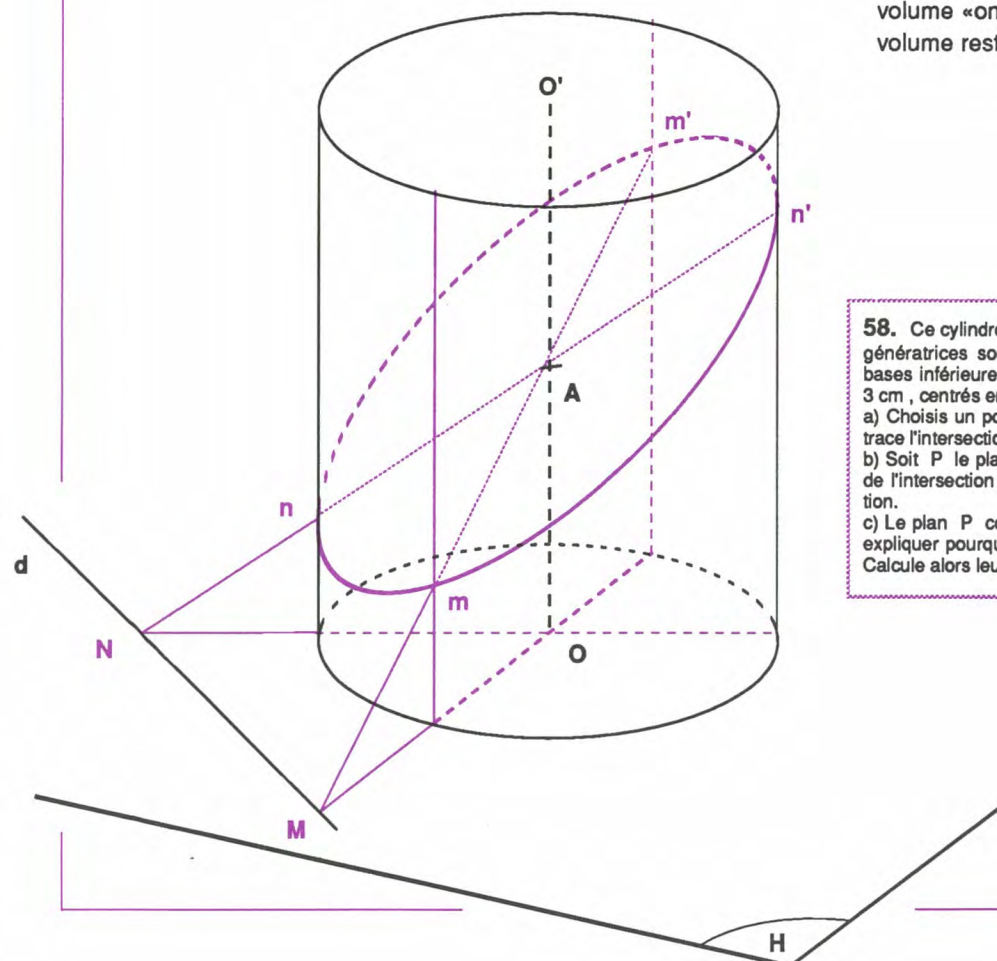
- a) $\sin (AIB / 2) = 1/3$, $AIB = 39^\circ$,
 aire du disque = $113,1 \text{ cm}^2$,
 aire petit secteur = $12,25 \text{ cm}^2$,
 aire grand secteur = $100,85 \text{ cm}^2$,
 aire triangle AIB = $11,31 \text{ cm}^2$,
 aire «onglet» = $0,94 \text{ cm}^2$.

57. a) (Question préparatoire) : soit un cercle de centre I, de rayon 6 cm, et sur ce cercle deux points A et B tels que $AB = 4 \text{ cm}$. Que vaut AIB ? Quelles sont les aires des deux secteurs AIB? Le segment AB partage le disque en deux parties. Quelles sont les aires de ces deux parties?
 b) Sur la figure ci-contre le plan H est horizontal, O est le centre du cercle de base et SO est vertical. Dessine l'intersection du cône et du plan MNS.
 c) L'angle MON vaut 70° , $MO = 3,5 \text{ cm}$ et $OS = 7 \text{ cm}$. Le plan MSN coupe le cône en deux parties. Quels sont leurs volumes?



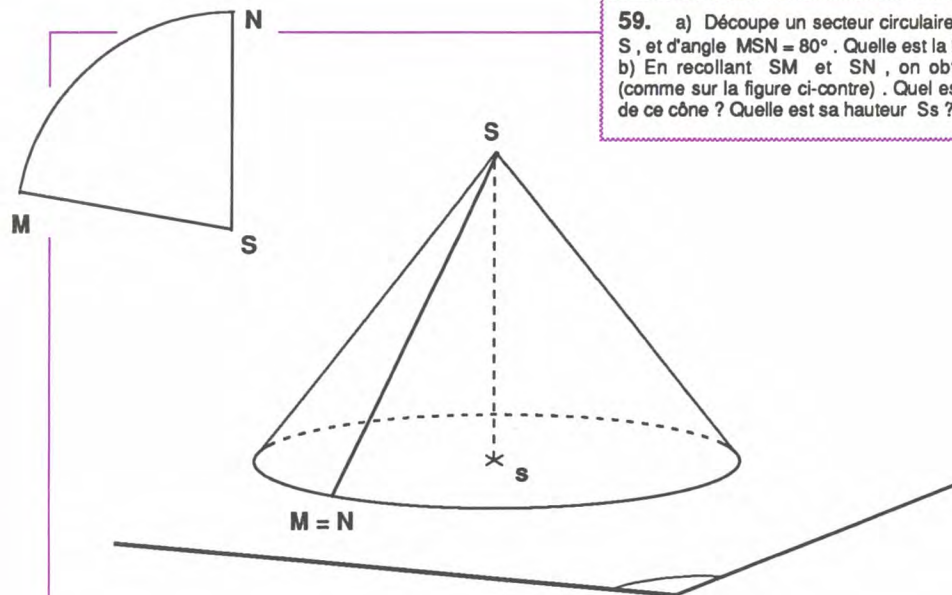
- c) aire petit secteur MON = $7,49 \text{ cm}^2$,
 aire triangle MON = $5,75 \text{ cm}^2$,
 aire «onglet» = $1,74 \text{ cm}^2$,
 volume «onglet» = $4,06 \text{ cm}^3$,
 volume restant = $85,7 \text{ cm}^3$.

58. Ce cylindre droit est posé sur le plan horizontal H; ses génératrices sont verticales; sa hauteur est 7 cm. Les bases inférieure et supérieure sont des cercles de diamètre 3 cm, centrés en O et en O'; et A est le milieu de OO'.
 a) Choisis un point M sur la droite d (située dans H), trace l'intersection du cylindre et de la droite AM.
 b) Soit P le plan contenant d et A. Trace d'autres points de l'intersection de P et du cylindre. Trace cette intersection.
 c) Le plan P coupe le cylindre en deux morceaux. Peux-tu expliquer pourquoi ces deux morceaux ont même volume? Calcule alors leur volume.



a) b) Se reporter aux exercices 55 et 56. Noter que A est le centre de l'ellipse d'intersection.

c) Les deux morceaux obtenus sont symétriques par rapport au point A, ils ont donc même volume ($24,7 \text{ cm}^3$).



59. a) Découpe un secteur circulaire de rayon 10 cm, de centre S, et d'angle $MSN = 80^\circ$. Quelle est la longueur de l'arc MN ?
b) En recollant SM et SN, on obtient un cône de révolution (comme sur la figure ci-contre). Quel est le rayon du cercle de base de ce cône ? Quelle est sa hauteur Ss ? Quel est son volume ?

59. a) Longueur arc MN = $(80/360) \times 2\pi R = 13,96$ cm.

b) La circonférence du cercle de base est égale à l'arc MN. Cela nécessite un rayon de base égal à 2,22 cm.

La hauteur se calcule à partir du triangle rectangle SsM, on trouve : $h = 9,75$ cm.

Volume total : $50,3$ cm³.

60. Découpe un rectangle ABCD de largeur $AB = 6$ cm et de longueur $AD = 8$ cm. Avec ce rectangle on peut former deux cylindres. L'un en recollant AB et DC, l'autre en recollant AD et BC. Quel est celui qui a le plus grand volume ?

60. Soient a et b les deux côtés du rectangle et supposons-le recollé le long du côté de longueur a.

Le volume obtenu est :

$$V = a \times (b / 2\pi)^2 \times \pi,$$

Il est multiple de $a \cdot b^2$, il serait multiple de $a^2 \cdot b$ si on inversait les rôles ...

La plus grande des deux valeurs possibles est donc obtenue lorsque l'on choisit $b > a$.

61. a) $R = 6,18$ cm.

b) $a = 17,7$ cm³.

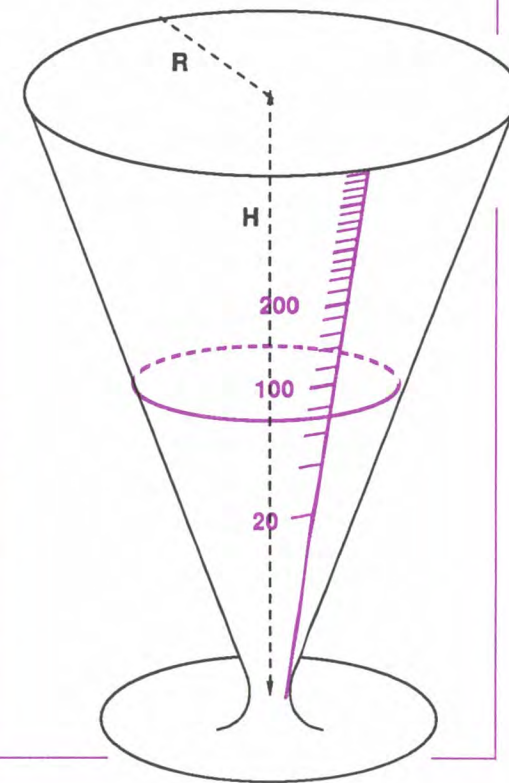
c) C'est la fonction :

$$y = (x / 12)^3 \cdot 480,$$

ou

$$y = 0,27 \cdot x^3.$$

61. Un flacon en forme de cône a une profondeur $H = 12$ cm, et une contenance de 480 cm³.
a) Quel est le rayon R de la base du cône ?
b) On verse a cm³ d'eau dans ce verre. La hauteur du liquide dans le verre est alors de 4 cm. Que vaut a ?
c) De façon générale, calcule la quantité y d'eau qui se trouve dans le verre lorsque la hauteur est x cm. Représente graphiquement la fonction y(x) (unité 1 cm pour 50 cm³ en ordonnée).
d) On colle une bande de papier le long du verre. Quelle doit être sa longueur ? Dessine sur cette bande de papier une graduation donnant de 20 cm³ en 20 cm³ la quantité de liquide que l'on a versé.



Troisième série d'exercices

INTRODUCTION A L'UTILISATION DES REPERES

les objectifs fondamentaux

Les exercices 62 à 81 mettent en jeu un petit nombre de techniques élémentaires mais essentielles :

- passage d'un point aux coordonnées associées, passage des coordonnées à leur point représentatif,
- utilisation des coordonnées pour déterminer, *via* le théorème de Pythagore, la longueur d'un segment,
- intersection d'un plan avec les plans déterminés par les axes du repère,
- projections d'une droite sur ces plans privilégiés.

On notera que les énoncés ne font jamais appel à des notions comme celles de *composantes d'un vecteur* ou celles d'*équations de plans*, ni même appel à une présentation *formalisée* de la projection sur les axes.

Au contraire, les outils de base sont dans la ligne directe des activités précédentes : intersections de plans avec des plans de référence (c'est-à-dire avec les plans du repère ou avec les plans verticaux contenant les droites considérées) , approche de l'orthogonalité en prolongement avec l'étude des verticales et horizontales.

Cet aspect volontairement très élémentaire est primordial, car il conditionne une bonne initiation à l'usage des repères et des coordonnées. C'est en se familiarisant avec des situations simples, dans des cas de figure simples, que l'on pourra aborder plus tard avec profit les outils plus puissants de la géométrie analytique tels que : *changements de repères* , *composantes de vecteurs* , *produits scalaires* et *produits vectoriels* , *équations de plans ou de droites* , *transformations* , etc.

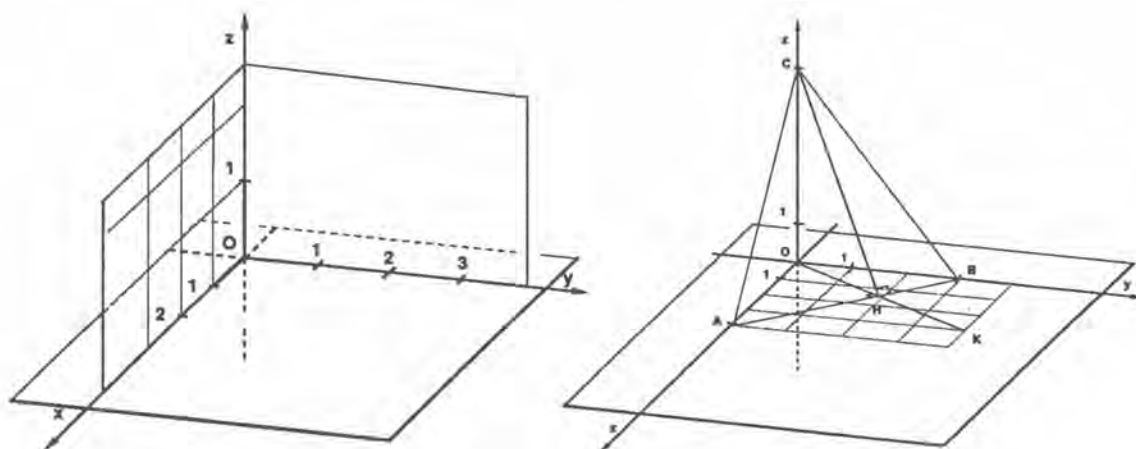
Ainsi on aurait tort, par exemple, de juger réductrice cette volonté de limiter le choix des différents systèmes d'axes utilisés à des cas où xOy est « horizontal » et où Oz est « vertical » . Il s'agit là, au contraire, d'une situation privilégiée qui permet de bien appréhender

les configurations étudiées, et qui oblige cependant à manipuler diverses positions et diverses représentations du repère. (noter en particulier les multiples variantes utilisées pour dessiner un système d'axes, bien sûr pour obliger chacun à s'adapter à des situations inhabituelles, mais destinées surtout à permettre de comprendre la notion de repère en offrant des images qui peuvent se révéler plus frappantes ou plus particulièrement suggestives pour l'imagination de tel ou tel élève.)

quelques points importants

Il va sans dire qu'une bonne compréhension des exercices des deux premières séries constitue un *pré-requis* indispensable pour l'étude de ce chapitre.

Signalons d'autre part que l'une des images les plus importantes à acquérir est sans doute celle qui consiste à faire apparaître effectivement sur le dessin les *systèmes de repérage liés à chacun des trois plans fondamentaux* xOy , yOz et xOz (voir par exemple page 60). Ce n'est certainement que plus tard, avec l'habitude, qu'il est possible de s'affranchir de ce support visuel offert par la représentation d'un « quadrillage » oblique qui, seul, permet la familiarisation indispensable avec ce que signifient véritablement les coordonnées.



On pourra aussi prolonger avec intérêt la plupart des exercices des deux premières séries en s'inspirant de l'exercice 65 et en « greffant » des repères bien choisis sur les configurations déjà rencontrées.

S'il est important, en effet, que les méthodes de base utilisées en géométrie de l'incidence soient réinvesties dans les situations présentes, il est tout aussi indispensable de se convaincre petit à petit que l'outil algébrique apporté par les coordonnées est suffisamment puissant pour s'adapter à une infinité de situations-problèmes. Et c'est sur cet outil, en définitive, que repose la quasi-totalité des techniques mathématiques

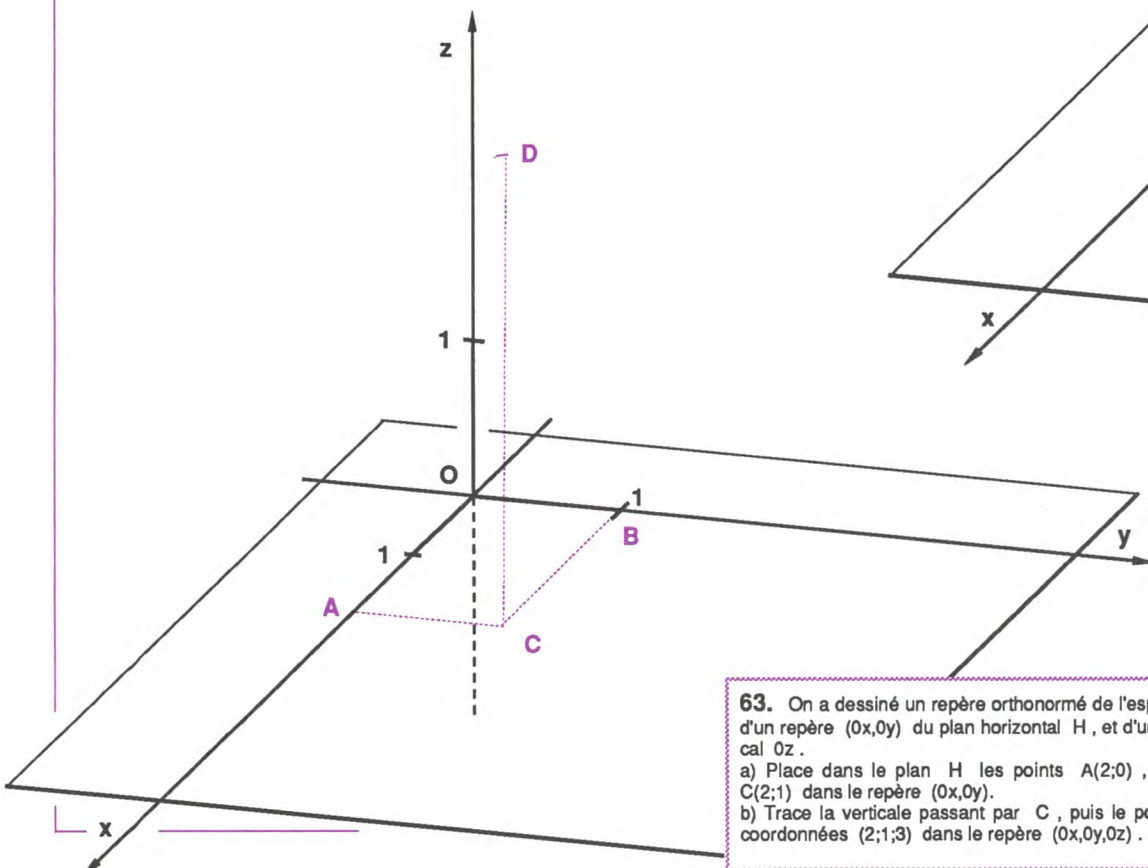
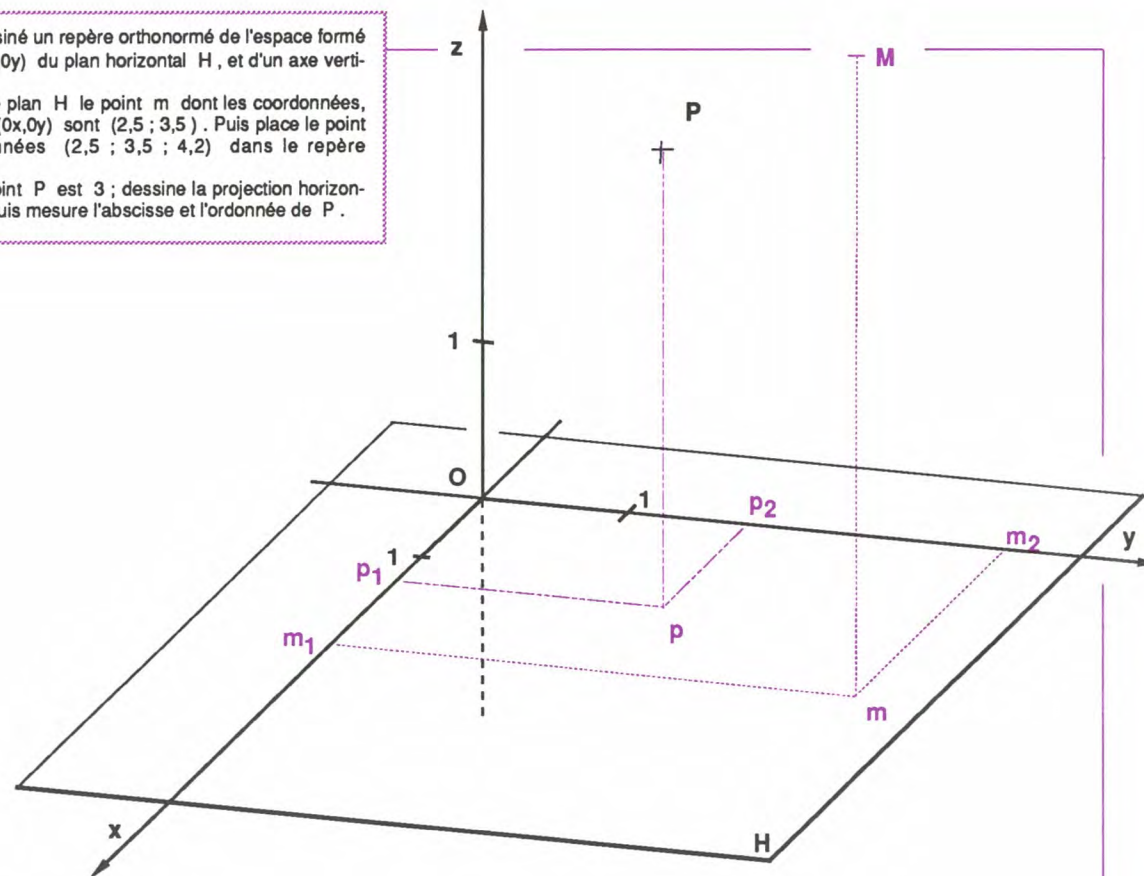
62. On a dessiné un repère orthonormé de l'espace formé d'un repère $(0x,0y)$ du plan horizontal H , et d'un axe vertical Oz .

a) Place dans le plan H le point m dont les coordonnées, dans le repère $(0x,0y)$ sont $(2,5 ; 3,5)$. Puis place le point M de coordonnées $(2,5 ; 3,5 ; 4,2)$ dans le repère $(0x,0y,0z)$.

b) La cote du point P est 3 ; dessine la projection horizontale p de P . Puis mesure l'abscisse et l'ordonnée de P .

Abscisse de $P = 1,36$ cm ,

Ordonnée de $P = 1,75$ cm .



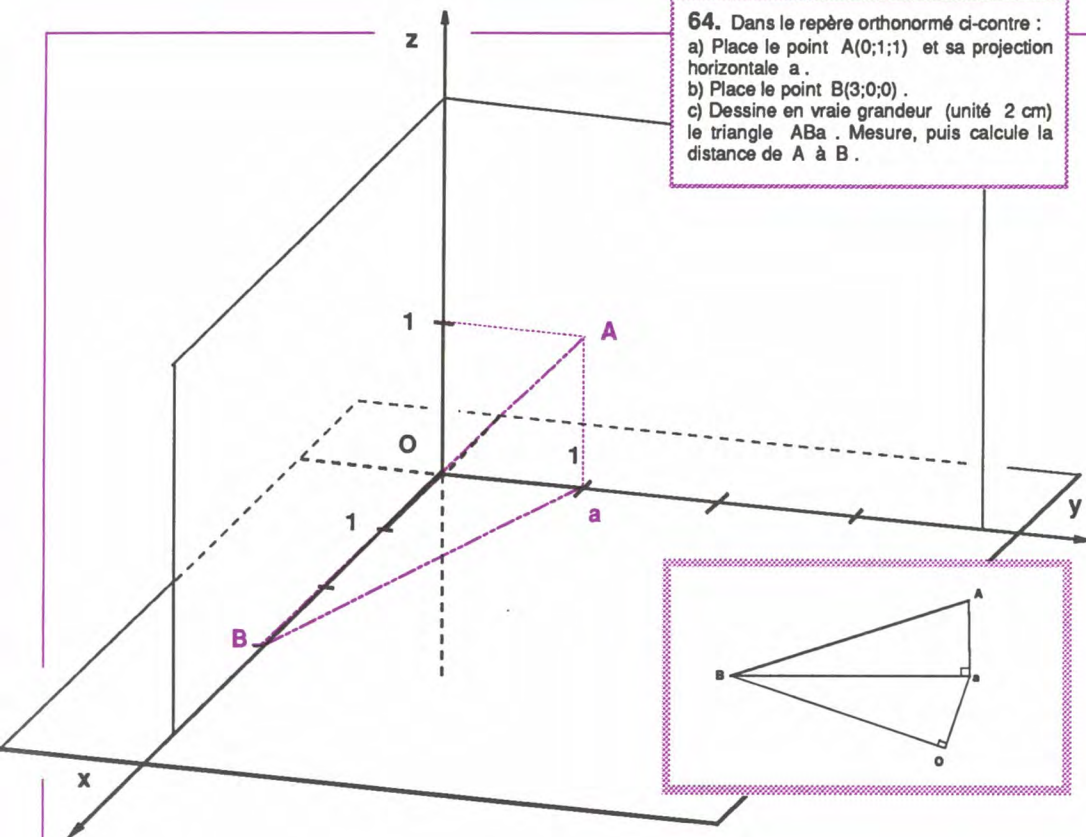
63. On a dessiné un repère orthonormé de l'espace formé d'un repère $(0x,0y)$ du plan horizontal H , et d'un axe vertical Oz .

a) Place dans le plan H les points $A(2;0)$, $B(0;1)$ et $C(2;1)$ dans le repère $(0x,0y)$.

b) Trace la verticale passant par C , puis le point D de coordonnées $(2;1;3)$ dans le repère $(0x,0y,0z)$.

64. Dans le repère orthonormé ci-contre :

- Place le point $A(0;1;1)$ et sa projection horizontale a .
- Place le point $B(3;0;0)$.
- Dessine en vraie grandeur (unité 2 cm) le triangle ABa . Mesure, puis calcule la distance de A à B .



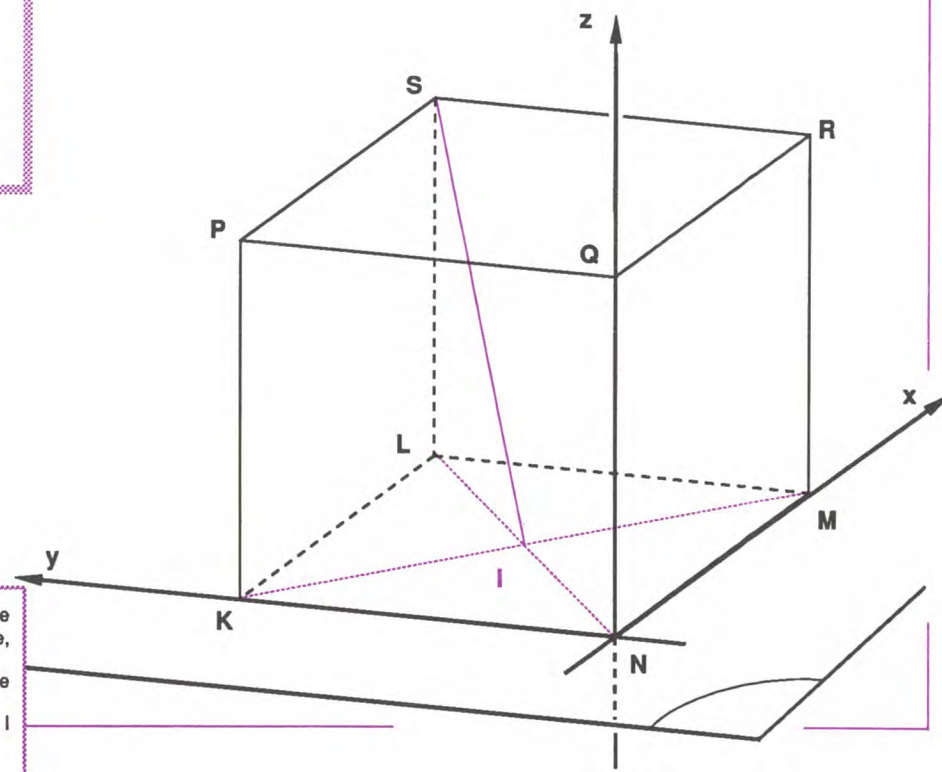
$$AB^2 = BO^2 + Oa^2 + aA^2,$$

$$AB = 3,316 \text{ cm}.$$

- a) $M = (2; 0; 0)$, $R = (2; 0; 2)$,
 $L = (2; 2; 0)$, $S = (2; 2; 2)$.
 b) $I = (1; 1; 0)$, $SI = 2,45 \text{ cm}$.

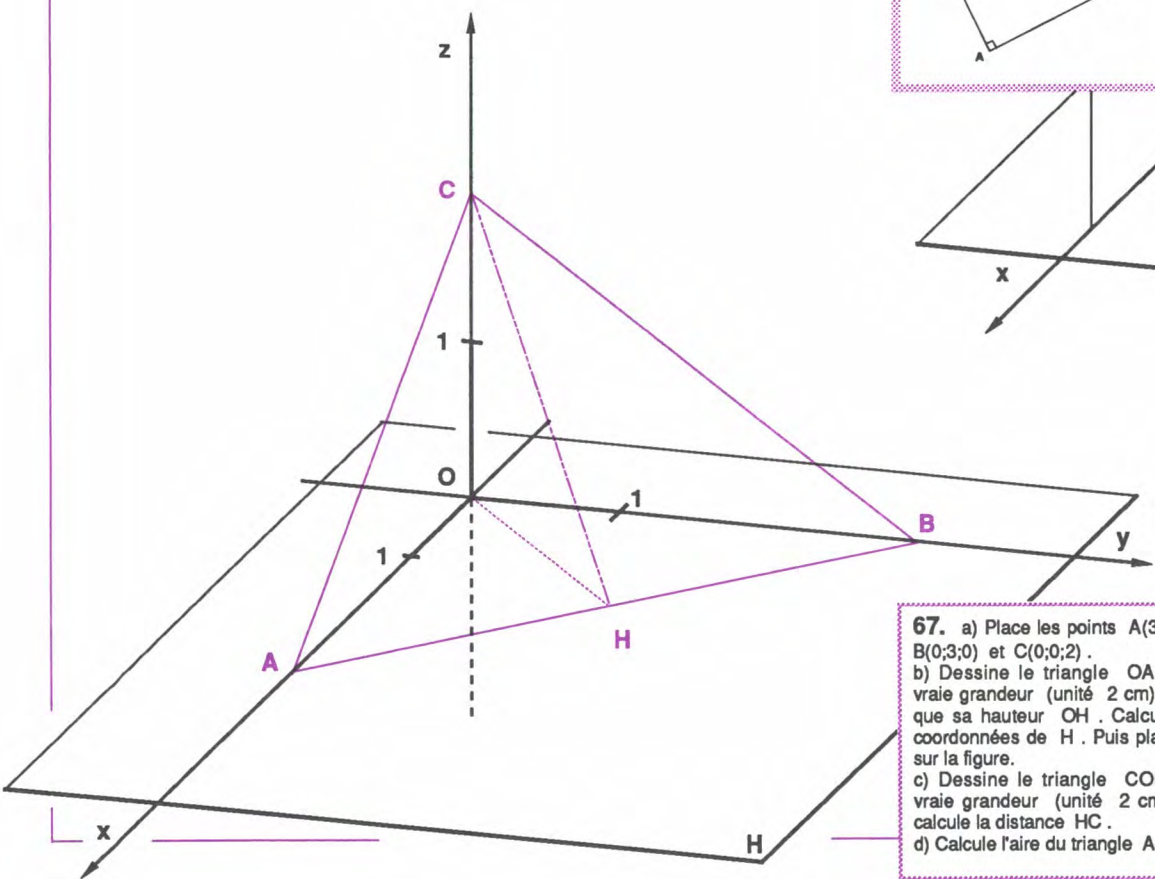
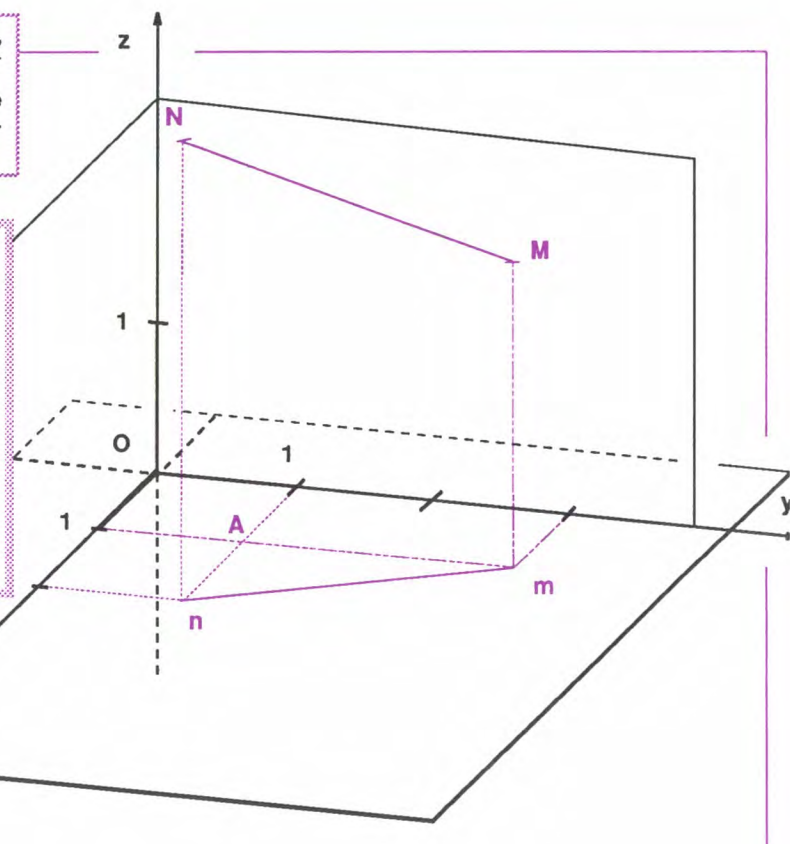
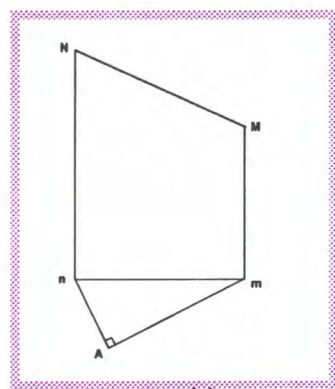
65. On a dessiné un cube, et un repère orthonormé (N_x, N_y, N_z) . Dans ce repère, les coordonnées de Q sont $(0;0;2)$.

- Quelles sont les coordonnées de M , de R , de L , de S ?
- Quelles sont les coordonnées du milieu I de KM ? Quelle est la distance SI ?



$$MN^2 = nA^2 + Am^2 + (Nn - mM)^2,$$
$$MN = 2,45 \text{ cm}.$$

66. a) Place les points $M(1;3;2)$, $N(2;1;3)$ et leurs projections horizontales m et n .
b) Dessine en vraie grandeur le quadrilatère $MNnm$ (unité 2 cm). Quelle est la distance MN ?



67. a) Place les points $A(3;0;0)$, $B(0;3;0)$ et $C(0;0;2)$.
b) Dessine le triangle OAB en vraie grandeur (unité 2 cm) ainsi que sa hauteur OH . Calcule les coordonnées de H . Puis place H sur la figure.
c) Dessine le triangle COH en vraie grandeur (unité 2 cm), et calcule la distance HC .
d) Calcule l'aire du triangle ABC .

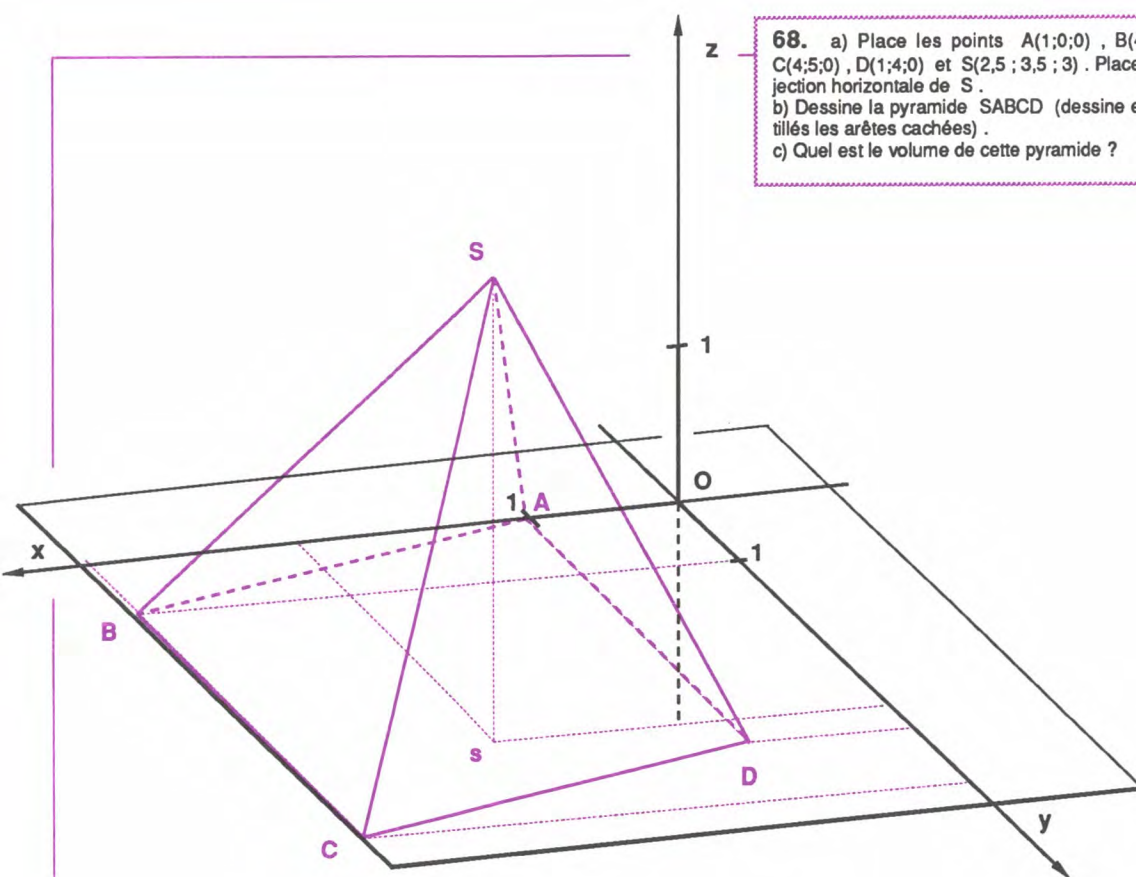
- b) Le triangle OAB est isocèle, donc H est le milieu de AB .
 $H = (1,5; 1,5; 0)$, $OH = 2,12 \text{ cm}$.
c) $HC^2 = OC^2 + OH^2$, $HC = 2,9 \text{ cm}$.
d) $AB = 4,24 \text{ cm}$, $\text{aire}(ABC) = 6,2 \text{ cm}^2$.

68. a) Place les points $A(1;0;0)$, $B(4;1;0)$, $C(4;5;0)$, $D(1;4;0)$ et $S(2,5; 3,5; 3)$. Place la projection horizontale de S .
 b) Dessine la pyramide $SABCD$ (dessine en pointillés les arêtes cachées).
 c) Quel est le volume de cette pyramide ?

$ABCD$ est un parallélogramme tel que :

$AD = BC = 4 \text{ cm}$, hauteur = 3 cm .

Volume = 16 cm^3 .



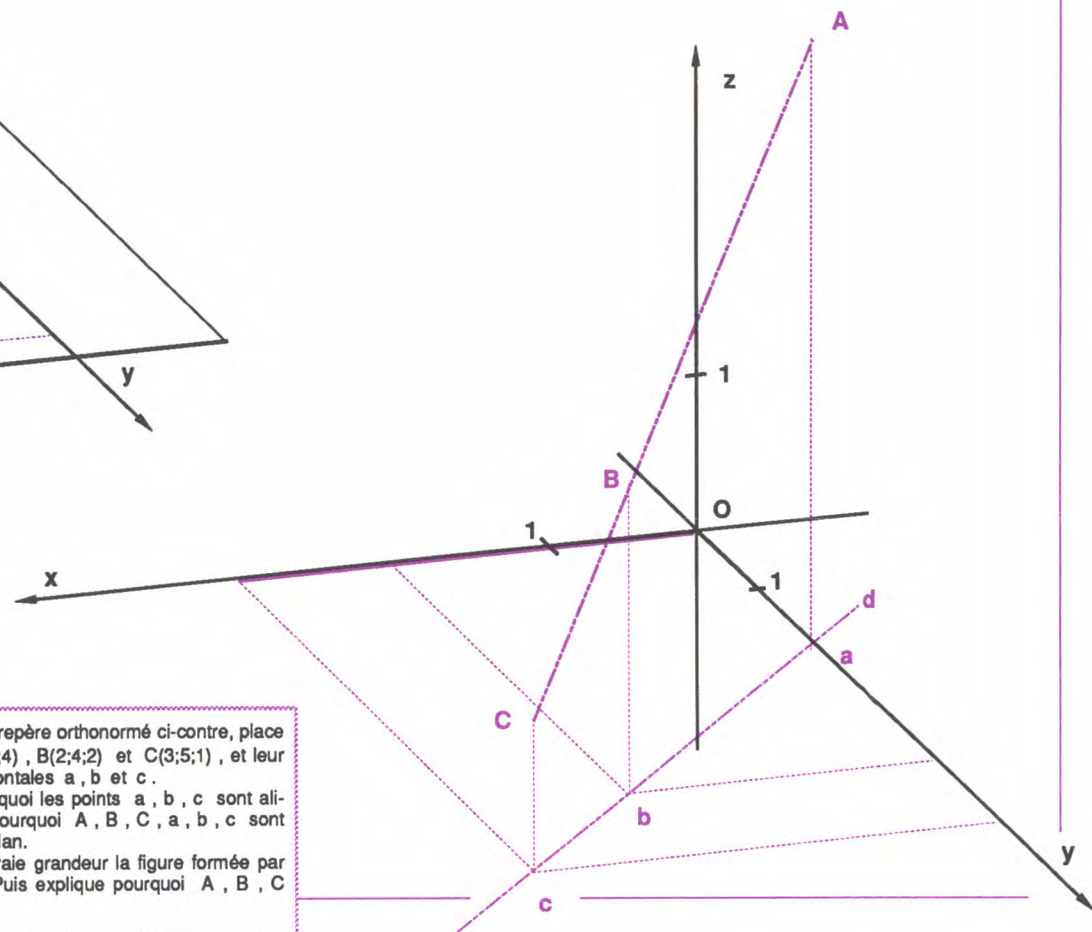
- b) Les points a, b, c sont sur la droite d de xOy ayant pour équation dans (Ox, Oy) :

$$y = x + 2.$$

Les points A, B, C sont dans le plan vertical contenant la droite d .

- c) Remarquer, par exemple, que A, B, C se projettent, sur yOz , en des points qui appartiennent à la droite d'équation :

$$z = -y + 6.$$



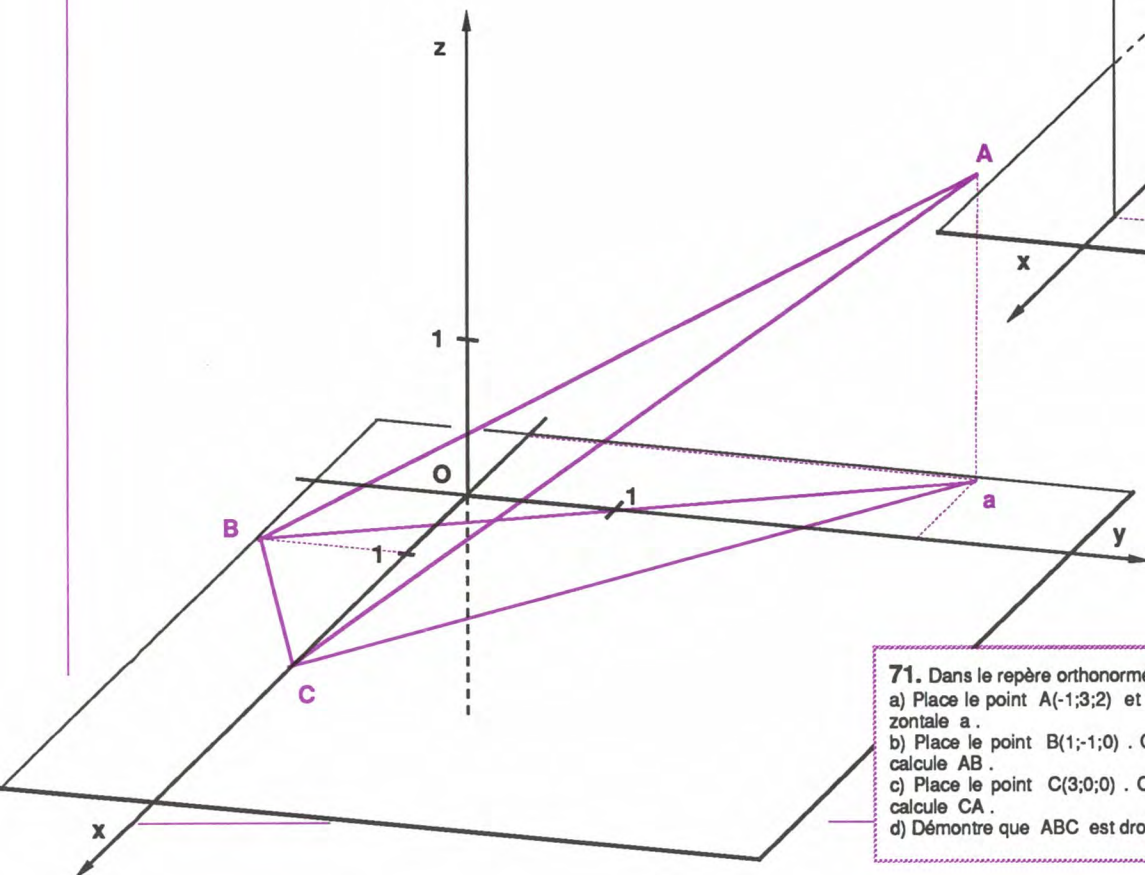
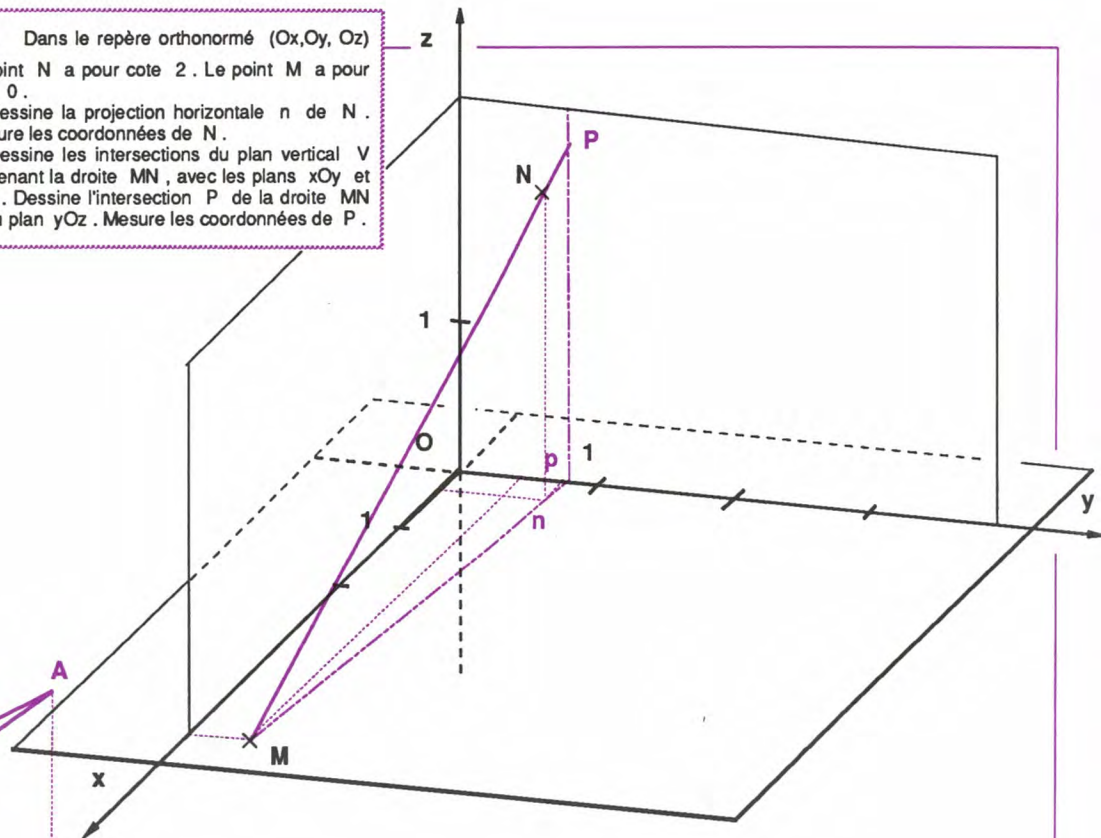
69. a) Dans le repère orthonormé ci-contre, place les points $A(0;2;4)$, $B(2;4;2)$ et $C(3;5;1)$, et leur projections horizontales a, b et c .
 b) Explique pourquoi les points a, b, c sont alignés. Explique pourquoi A, B, C, a, b, c sont dans un même plan.
 c) Dessine en vraie grandeur la figure formée par ces six points. Puis explique pourquoi A, B, C sont alignés.

a) $N = (0,27 ; 0,74 ; 2)$.

b) L'intersection avec xOy est la droite Mn . Elle coupe Oy en p .
L'intersection avec yOz est la verticale passant par p . Cette verticale est coupée en P par MN .

$P = (0 ; 0,76 ; 2,25)$.

70. Dans le repère orthonormé (Ox, Oy, Oz) le point N a pour cote 2. Le point M a pour cote 0.
a) Dessine la projection horizontale n de N . Mesure les coordonnées de N .
b) Dessine les intersections du plan vertical V contenant la droite MN , avec les plans xOy et yOz . Dessine l'intersection P de la droite MN et du plan yOz . Mesure les coordonnées de P .

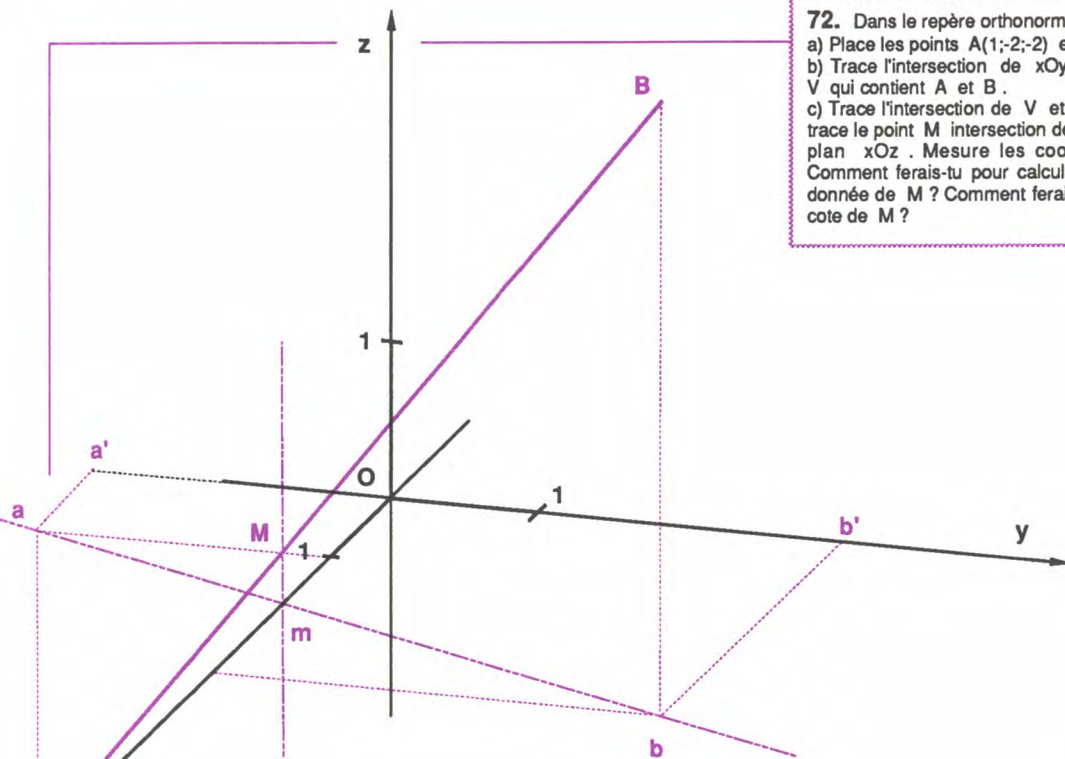


71. Dans le repère orthonormé (Ox, Oy, Oz) :
a) Place le point $A(-1;3;2)$ et sa projection horizontale a .
b) Place le point $B(1;-1;0)$. Calcule Ba . Puis calcule AB .
c) Place le point $C(3;0;0)$. Calcule Ca . Puis calcule CA .
d) Démontre que ABC est droit.

b) $Ba^2 = 2^2 + 4^2 = 20$,	$Ba = 4,47 \text{ cm}$.
$AB^2 = 20 + 2^2 = 24$,	$AB = 4,9 \text{ cm}$.
c) $Ca^2 = 4^2 + 3^2 = 25$,	$Ca = 5 \text{ cm}$.
$CA^2 = 25 + 2^2 = 29$,	$CA = 5,38 \text{ cm}$.
d) $AC^2 = BC^2 + AB^2$.	

72. Dans le repère orthonormé (Ox, Oy, Oz) :

- Place les points $A(1;-2;-2)$ et $B(3;3;4)$.
- Trace l'intersection de xOy et du plan vertical V qui contient A et B .
- Trace l'intersection de V et du plan xOz . Puis trace le point M intersection de la droite AB et du plan xOz . Mesure les coordonnées de M . Comment ferais-tu pour calculer l'abscisse et l'ordonnée de M ? Comment ferais-tu pour calculer la cote de M ?



b) Le plan vertical contenant AB contient sa projection ab , celle-ci n'est autre que son intersection avec xOy .

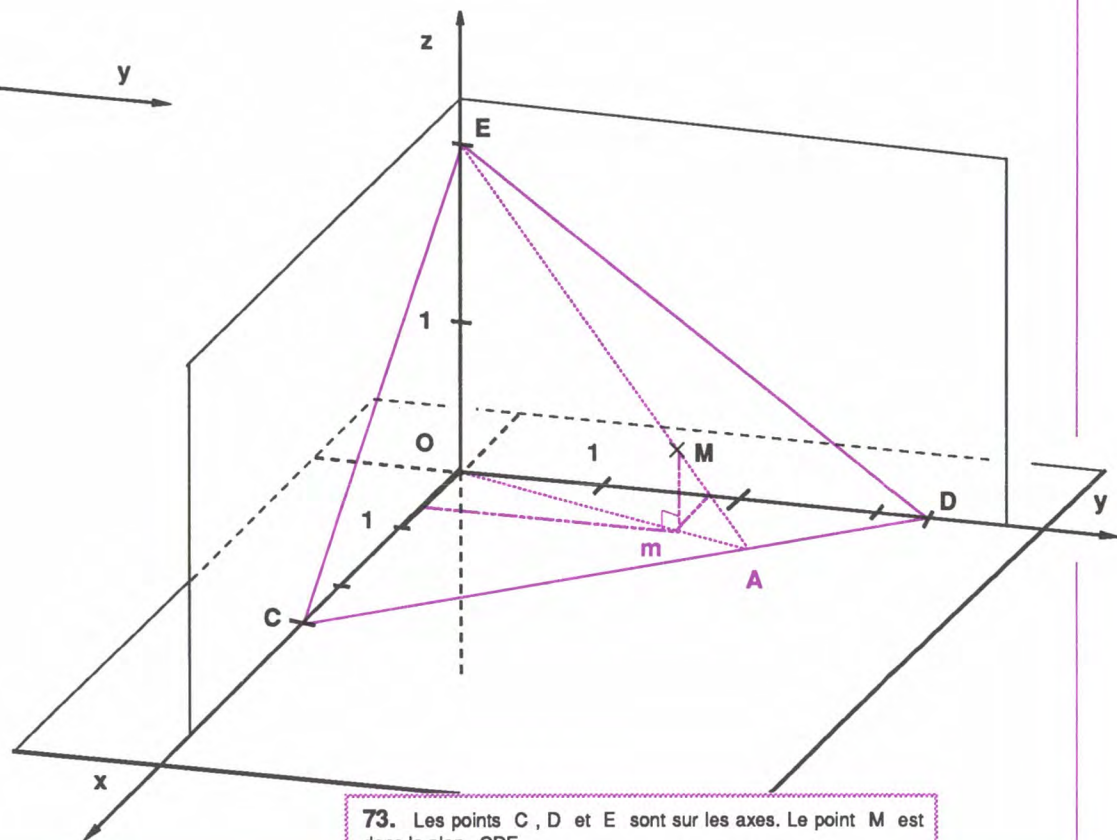
c) Soit $m = ab \cap Ox$. La verticale de m est l'intersection cherchée avec xOz . Elle coupe AB en un point M .

$$M = (1,8 ; 0 ; 0,35).$$

Le calcul peut (par exemple) utiliser les projections sur xOy et xOz .

a) La verticale de M est dans le triangle EAO , où $A = EM \cap CD$.

$$b) M = (0,55 ; 1,6 ; 0,55)$$



73. Les points C , D et E sont sur les axes. Le point M est dans le plan CDE .

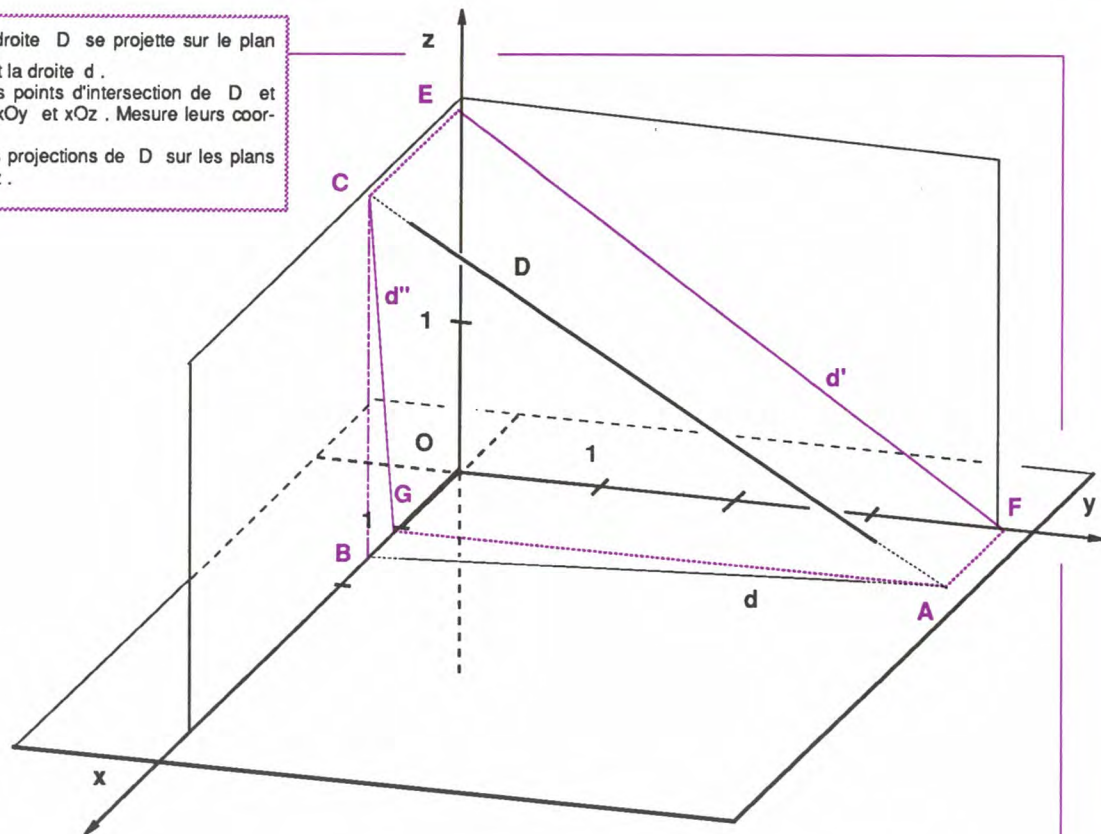
- Dessine la projection orthogonale du point M sur le plan xOy .
- Mesure les coordonnées de M .

a) D est dans le plan vertical contenant d .
L'intersection A avec xOy est l'intersection de D et d .
L'intersection C avec xOz est l'intersection de D avec la verticale tracée au-dessus de $B = d \cap Ox$.

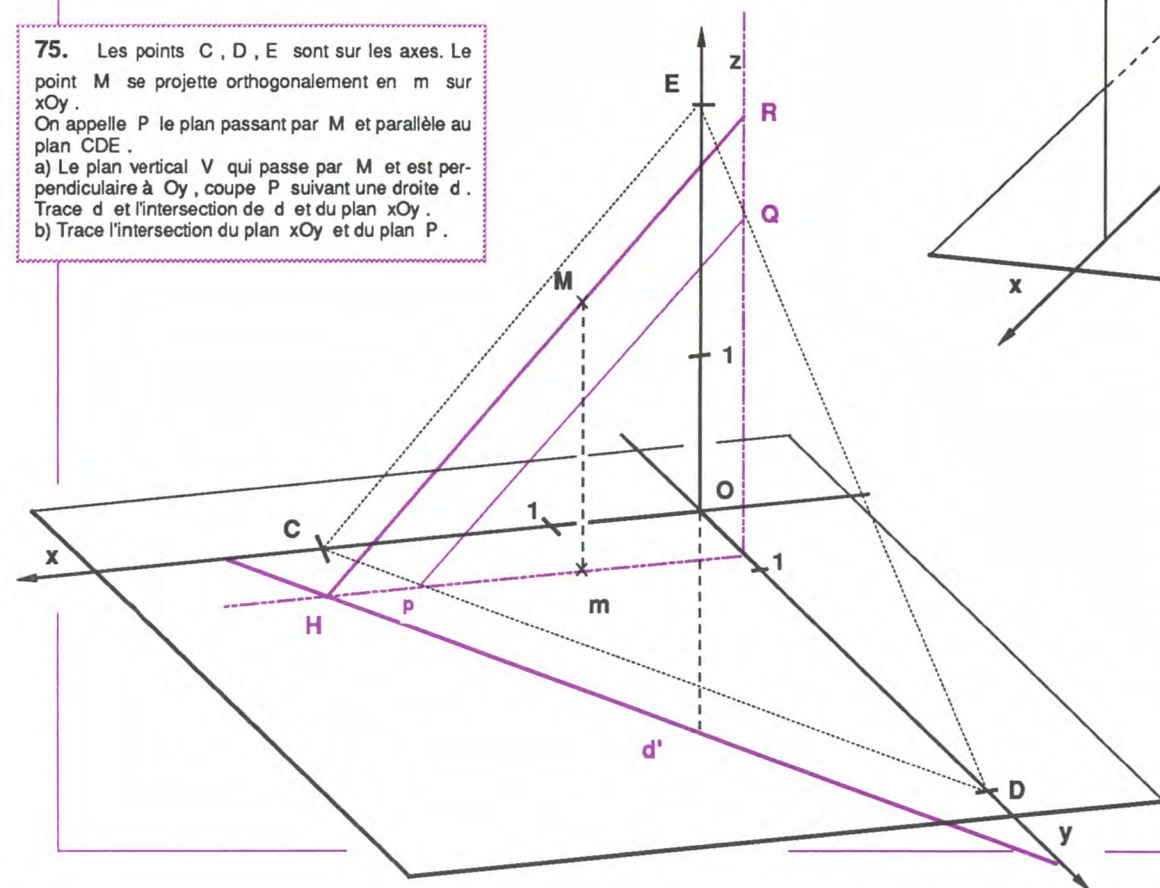
$$A = (1 ; 3,6 ; 0), \quad C = (1,45 ; 0 ; 2,4).$$

b) Les projections cherchées sont EF et CG .

74. La droite D se projette sur le plan xOy suivant la droite d .
a) Trace les points d'intersection de D et des plans xOy et xOz . Mesure leurs coordonnées.
b) Trace les projections de D sur les plans yOz et xOz .



75. Les points C, D, E sont sur les axes. Le point M se projette orthogonalement en m sur xOy .
On appelle P le plan passant par M et parallèle au plan CDE .
a) Le plan vertical V qui passe par M et est perpendiculaire à Oy , coupe P suivant une droite d . Trace d et l'intersection de d et du plan xOy .
b) Trace l'intersection du plan xOy et du plan P .



a) V coupe xOy suivant la parallèle à Ox menée par m . Celle-ci coupe CD en un point p .

V coupe yOz suivant la parallèle à Oz menée par le point d'intersection de Oy avec mp . Cette verticale coupe ED en Q .

La droite pQ est l'intersection de V et du plan ECD .

b) V coupe le plan P suivant la parallèle menée par M à pQ . Soit H le point d'intersection de cette droite avec l'horizontale mp .

L'intersection cherchée est la parallèle d' à CD menée par le point H .

- 76.** Le point A est dans le plan xOy , B est dans yOz , C est dans zOx .
- Trace l'intersection du plan xOy et du plan vertical passant par B et C.
 - Trace l'intersection de la droite BC et du plan xOy .
 - Trace les intersections du plan ABC et des plans de coordonnées.

a) L'intersection cherchée est la droite bc passant par les projections de B et C.

b) Dans xOy , la droite BC coupe bc en un point D.

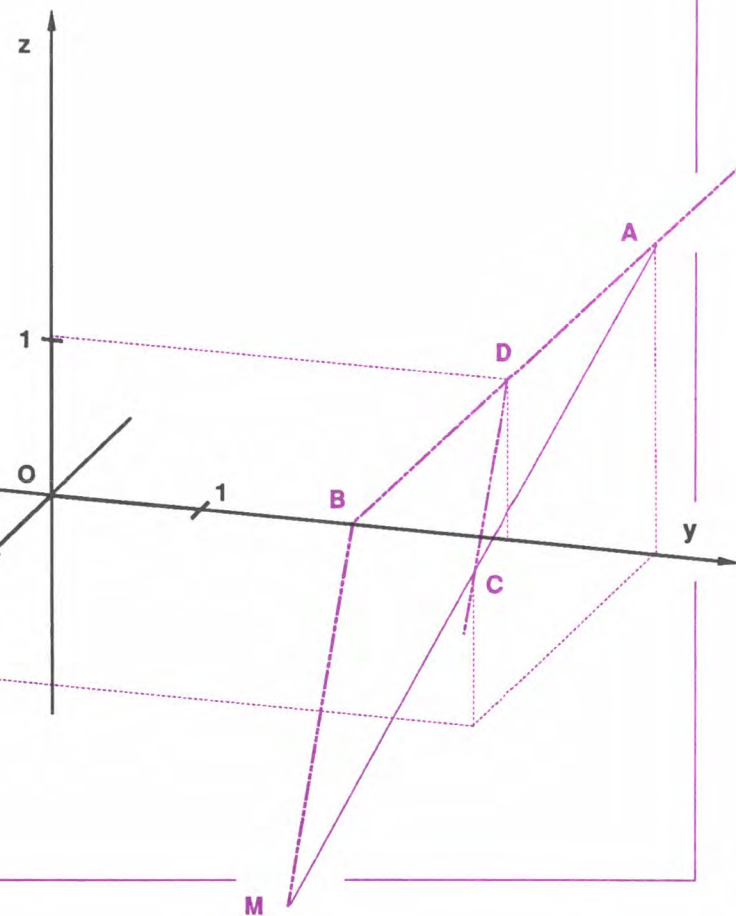
c) Les points D et A sont des points de ABC et de xOy , donc $AD = ABC \cap xOy$.

AD coupe Ox et Oy en E et F, ces points permettent de tracer les intersections EC et FB avec xOz et yOz .

- 77.** Dans ce repère orthonormé (Ox, Oy, Oz) :
- Trace les points $A(0;4;2)$, $B(0;2;0)$ et $C(3;4;1)$.
 - Dessine à part un repère orthonormé yOz (unité 2 cm) avec les points A et B. Quelle est l'ordonnée du point D de la droite AB dont la cote est 1 ?
 - Place le point D sur la figure. Trace la droite CD et l'intersection du plan ABC par le plan horizontal xOy .

b) Il est clair que $D = (0 ; 3 ; 1)$.

c) La droite CD est une ligne de niveau du plan ABC, donc l'intersection de ABC avec xOy est la parallèle à DC menée par B.



b) Dans le repère xOy :

$$\text{Equation de BC : } y = -x + 5,$$

$$\text{Equation de aH : } y = x + 2.$$

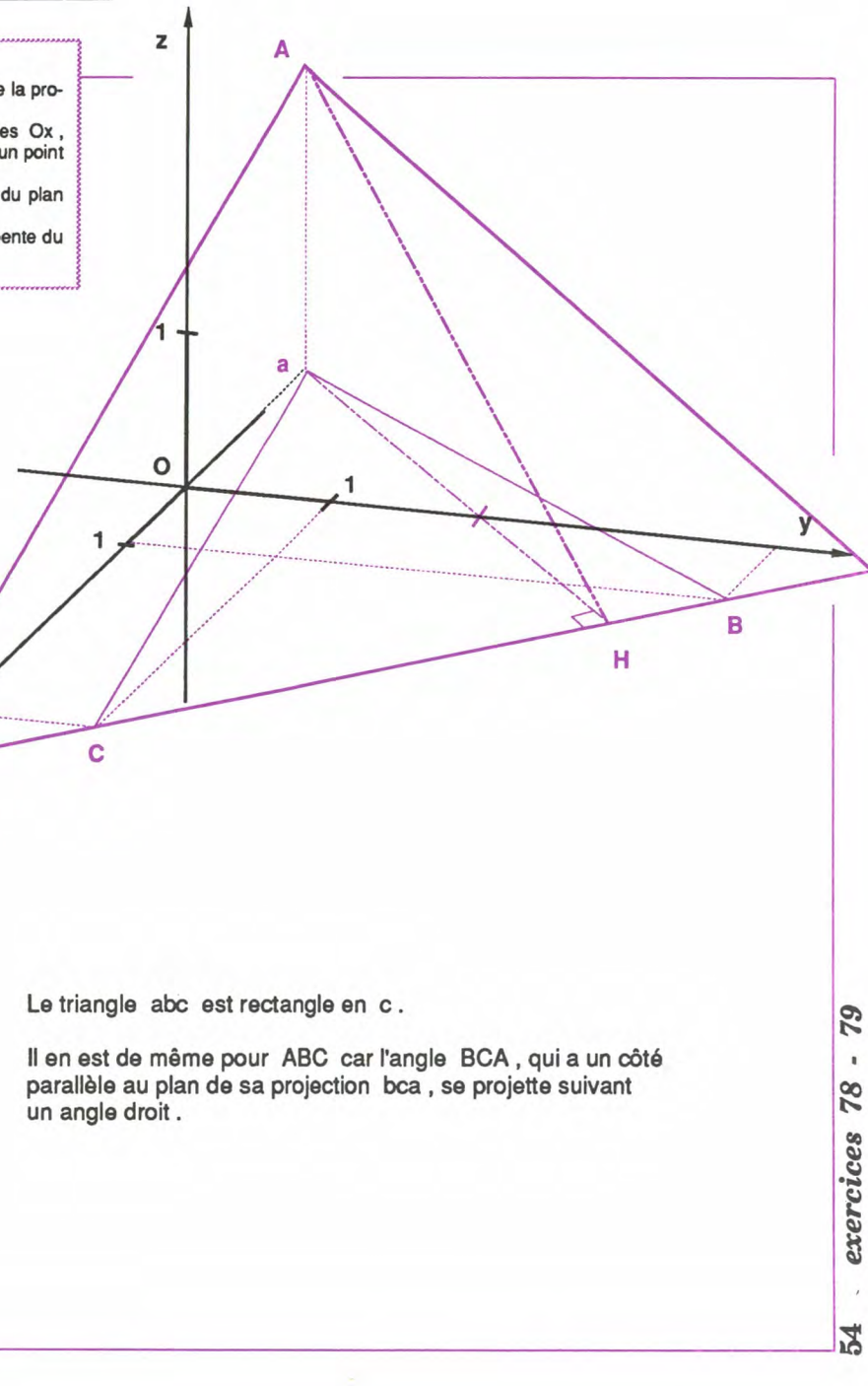
$$H = (1,5 ; 3,5).$$

c) D'après (VIIIc), la ligne de pente cherchée n'est autre que AH.

$$d) \tan(\angle aHA) = 0,4.$$

78. Dans ce repère orthonormé (Ox, Oy, Oz) :

- Place les points $A(-2;0;2)$, $B(1;4;0)$ et $C(4;1;0)$, ainsi que la projection horizontale a de A sur xOy .
- Dessine en vraie grandeur les points a , B , C dans les axes Ox , Oy . La perpendiculaire à BC passant par a coupe BC en un point H . Quelles sont les coordonnées de H ?
- Place H sur la figure initiale. Dessine la ligne de pente du plan ABC qui passe par A .
- Dessine le triangle AaH en vraie grandeur. Quelle est la pente du plan ABC ?



Le triangle abc est rectangle en c .

Il en est de même pour ABC car l'angle BCA , qui a un côté parallèle au plan de sa projection bca , se projette suivant un angle droit.

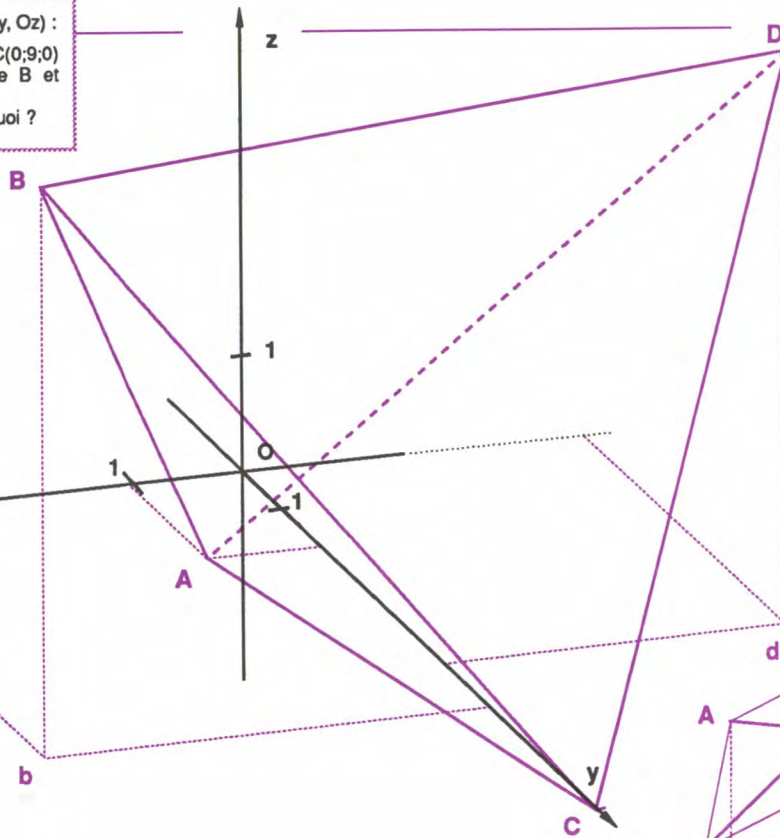
79. Dans ce repère orthonormé (Ox, Oy, Oz) :

- Place les points $A(-1;3;2)$, $B(3;1;1)$ et $C(3;1;2)$ ainsi que leurs projections a , b , c sur le plan yOz parallèlement à Ox .
- Dessine en vraie grandeur (unité 1 cm) le triangle abc et le repère (Oy, Oz) . Que remarques-tu?
- Peux-tu expliquer pourquoi le triangle ABC est (aussi) un triangle rectangle?

80. Dans un repère orthonormé (Ox, Oy, Oz) :

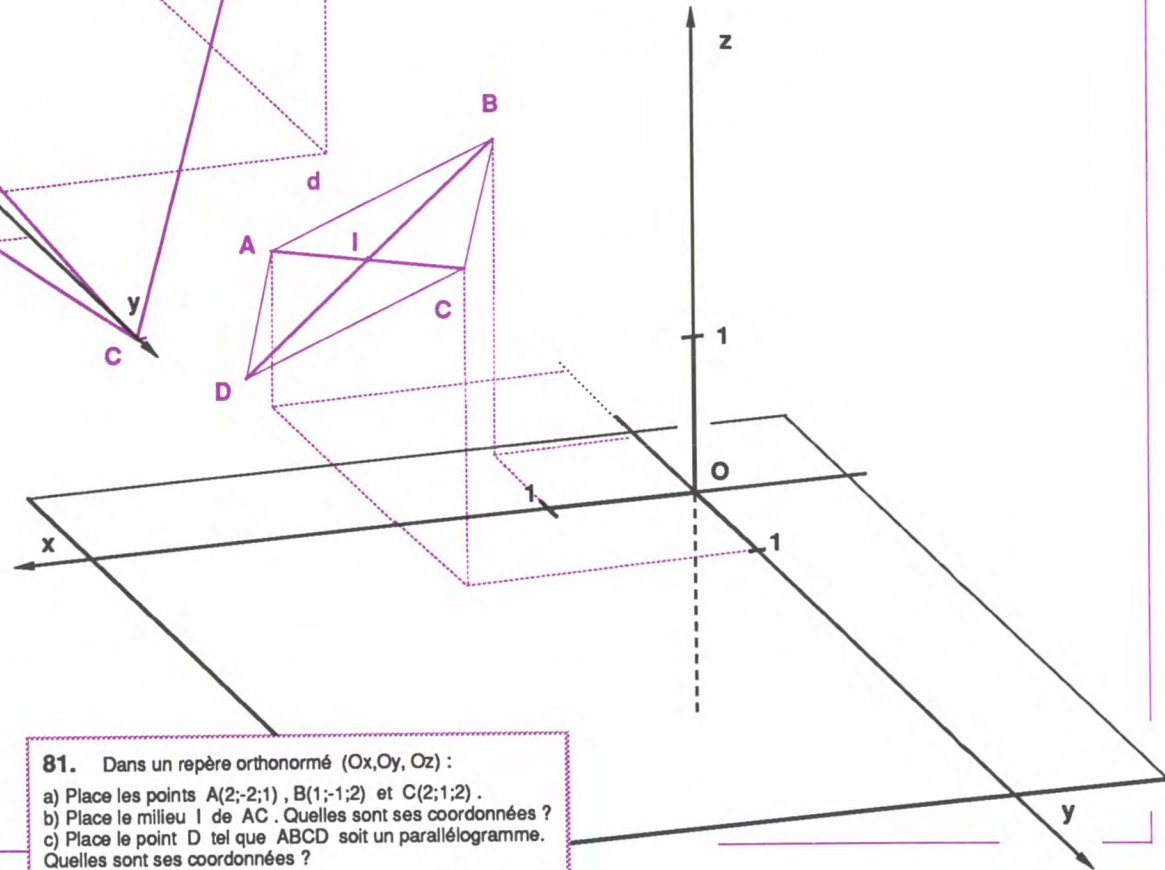
- a) Place les points $A(1;2;0)$, $B(4;6;5)$, $C(0;9;0)$ et $D(-3;5;5)$ et les projections b et d de B et D sur le plan horizontal xOy .
b) Le tétraèdre $ABDC$ est régulier. Pourquoi ?

$$AB = BC = CD = DA = BD = AC = \sqrt{50}.$$



b) $I = (2 ; -0,5 ; 1,5)$.

c) $D = (3 ; 0 ; 1)$.



81. Dans un repère orthonormé (Ox, Oy, Oz) :

- a) Place les points $A(2;-2;1)$, $B(1;-1;2)$ et $C(2;1;2)$.
b) Place le milieu I de AC . Quelles sont ses coordonnées ?
c) Place le point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme. Quelles sont ses coordonnées ?

Thème

INTRODUCTION A L'ORTHOGONALITE DANS L'ESPACE

les objectifs fondamentaux

Cette dernière série d'exercices ne doit pas être considérée au même titre que les trois séries précédentes. A proprement parler, il s'agit plutôt d'une simple entrée en matière destinée à effleurer une notion particulièrement difficile. La « perpendicularité en général » (c'est-à-dire entre des droites ou des plans qui n'ont plus nécessairement la position familière et rassurante *horizontale-v verticale*), ne nous semble pas, en effet, mériter une place pour elle-même à ce niveau.

Il est donc exclu d'aborder ici les subtilités de l'utilisation systématique des *projections orthogonales*, ou d'explorer des situations trop cachées du type de celle dite *des trois perpendiculaires*, voire de chercher à construire la *perpendiculaire commune* à deux droites.

Les diverses activités font tout au plus appel à la notion de *plan médiateur*, notion que l'intuition accepte assez aisément par analogie avec celle de médiatrice. Les questions posées ne nécessitent guère que d'avoir saisi le sens de la notion de perpendicularité entre une droite et un plan.

On se rendra cependant vite compte que ce « ... ne nécessitent guère ... » est en fait un pur euphémisme, tant la notion est difficile à maîtriser techniquement dans les démonstrations, ou même à seulement sentir intuitivement dès que l'on ne peut plus s'aider des horizontales et des verticales. En réalité les exercices les plus simples en apparence obligent presque toujours à des raisonnements qui sont très complexes pour un élève. Il convient donc avant tout de se limiter à une simple approche des notions essentielles, et les questions posées n'ont que cette ambition.

Cela posé, nous nous arrêterons ici sur deux remarques importantes qui nous paraissent constituer, non pas des objectifs immédiats, mais bien des étapes nécessaires à tout apprentissage ultérieur.

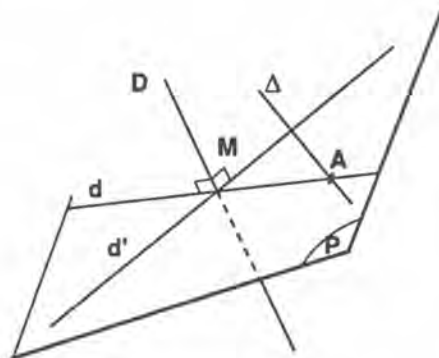
le concept de perpendiculaires

Les propriétés (IXa), (IXb) et (IXc) énoncées dans le fascicule-élève constituent à elles seules un fondement logique suffisant pour toutes les autres propriétés de l'orthogonalité. Il est clair cependant que leur mise en œuvre n'est pas toujours immédiate ... Tout raisonnement demande d'en avoir dégagé plus ou moins explicitement les principales conséquences.

C'est tout spécialement le cas de la propriété (IXa) :

Soit une droite D et un point M de D .
Les droites perpendiculaires à D en M sont les droites d'un plan P .

On dit que P est perpendiculaire à D en M .



Cet énoncé appelle nécessairement des « exégèses » et, si on veut le rendre opérationnel, il convient d'en tirer les principaux corollaires pratiques *au fur et à mesure de leurs apparitions* dans les divers exercices. On sera notamment amené à expliciter les propriétés suivantes :

(IXd) Si D est perpendiculaire à P en M , alors D est perpendiculaire à toute droite de P passant par M et D est *orthogonale* à toute droite de P ne passant pas par M .

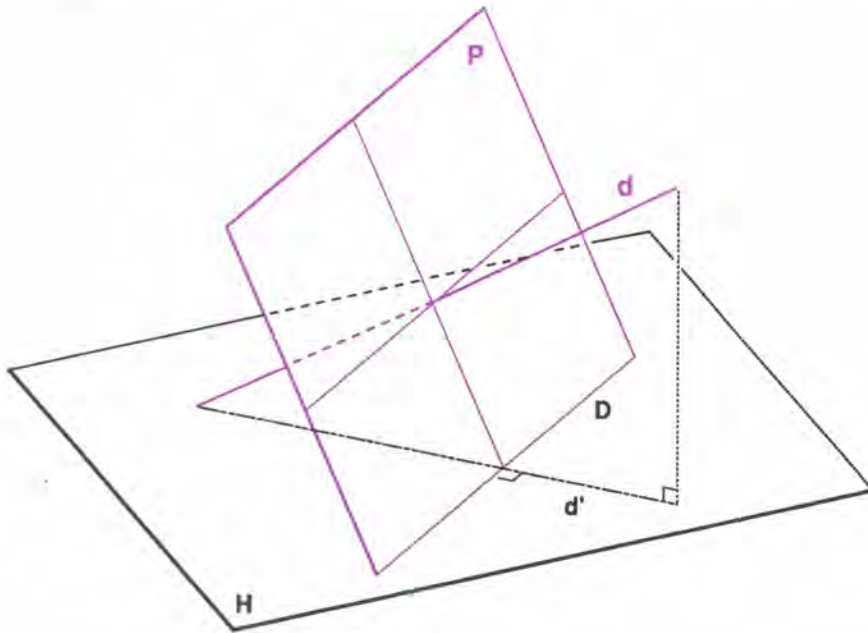
(IXe) Si D est perpendiculaire ou orthogonale à deux droites d et d' , non parallèles, de P , alors D est perpendiculaire à P , donc perpendiculaire ou orthogonale à toutes les autres droites de P .

(IXf) Soit D perpendiculaire à P . Si A est un point quelconque de P et si Δ est une droite passant par A qui est orthogonale à D , alors Δ est contenue dans P .

la trace sur un plan

Dans la pratique, la construction d'un plan perpendiculaire à une droite donnée nécessite de pouvoir se rapporter à d'autres plans connus, si possible horizontaux ou verticaux. On est donc souvent amené à trouver d'abord l'intersection du plan cherché avec un autre à partir de la simple hypothèse d'orthogonalité.

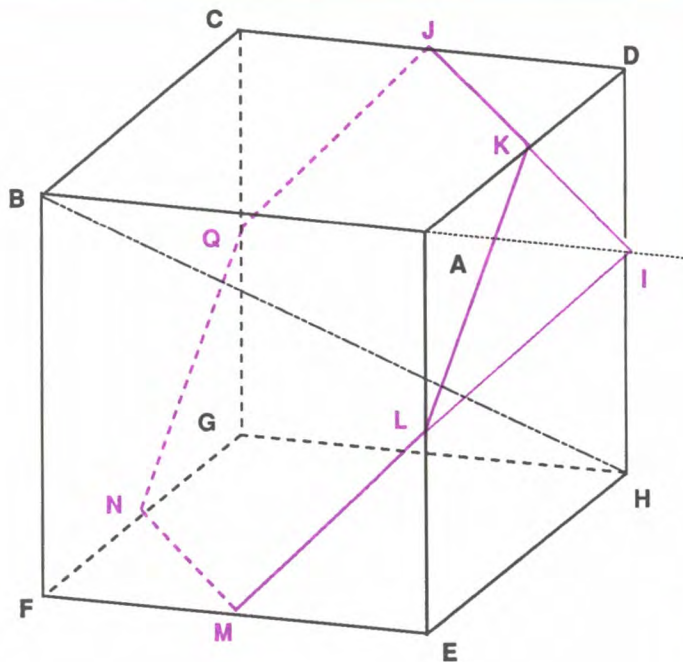
La réponse à une telle question peut généralement se déduire de la propriété suivante qui n'est autre qu'une variante de la propriété *des trois perpendiculaires* et qui fait appel à la notion de projection :



(IXg) Soit d une droite perpendiculaire à un plan P , et soit H un plan horizontal. Alors l'intersection D de P et de H est perpendiculaire à la droite d' projection orthogonale de d sur H .

démonstration : le plan projetant contenant d et d' est vertical, donc D , qui est horizontale, est orthogonale à la verticale contenue dans ce plan. D'autre part D est dans P , donc est orthogonale à d (IXd). Dès lors D est orthogonale à deux droites non parallèles du plan projetant donc elle est orthogonale à d' (IXe).

Il est clair que, bien que la propriété soit énoncée dans le cas où H est un plan horizontal, on dispose d'un résultat analogue quelle que soit sa position dans l'espace. La seule hypothèse importante est évidemment que d' soit la projection orthogonale de d sur le plan étudié. On notera d'ailleurs que, le plus souvent, deux applications différentes de (IXg) sont nécessaires (cf. par exemple les exercices 87 et 88).



82. Voici un cube, on cherche à tracer le plan médiateur P de la diagonale BH .

a) Trace l'intersection de P et de l'arête CG ; puis l'intersection de P et de l'arête CD ; ... Trace l'intersection de P et du cube.

b) Trace l'intersection I de P et de la droite AB .

c) Trace en vraie grandeur le triangle ABH (en supposant que les arêtes du cube mesurent 6 cm) et place le point I . Calcule la longueur AI . Sais-tu vérifier sur la figure ?

a) Soit Q le milieu de CG .

Les triangles rectangles BCQ et QGH sont égaux, donc $BQ = QH$, c'est-à-dire que Q est dans le plan médiateur P .

De même, les milieux J, K, L, M, N des arêtes CD, DA, AE, EF et FG sont sur P .

b), c) $BA = 2 \cdot AI$.

a) On suppose $AB = 1$ cm.

$$IA = IM = JA = JM = 1/\sqrt{2}.$$

$$AC = \sqrt{2},$$

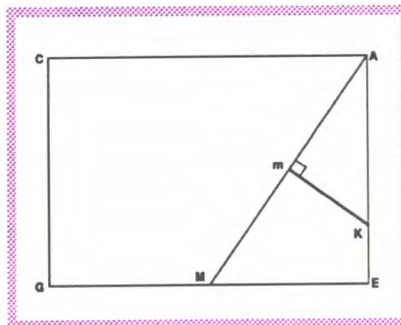
$$AM = \sqrt{(3/2)}.$$

b) Soit m le milieu de AM . Les triangles AKm et AME sont semblables, donc :

$$AK / AM = Am / AE,$$

$$AK = (1/2) \cdot AM^2 = 3/4.$$

c) Tracer KJ et KI , puis les parallèles PN et LQ à KL et KP .

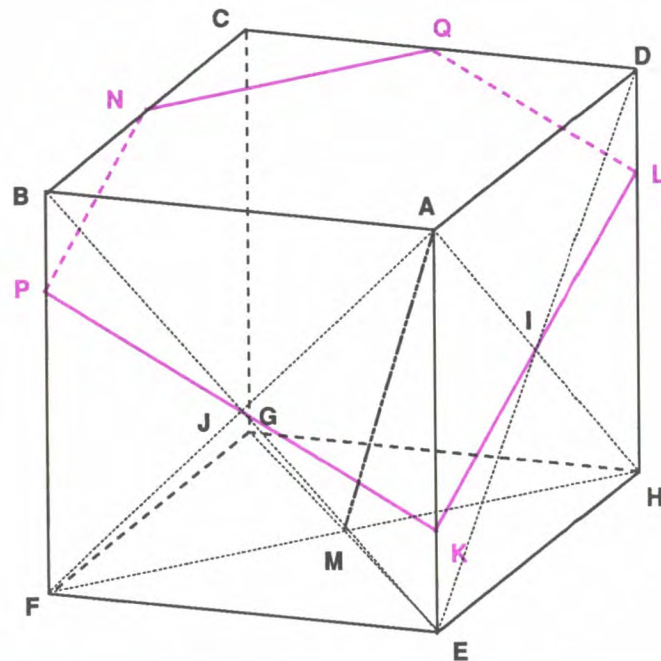


83. Dans ce cube on note M le centre de la face $EFGH$, et on appelle P le plan médiateur de MA .

a) Explique pourquoi le plan P contient les centres I et J des faces $ADHE$ et $ABFE$.

b) Soit K l'intersection de P et de l'arête AE . Dessine le triangle EAM en vraie grandeur (en supposant que les arêtes du cube ont 6 cm de longueur). Calcule la longueur $d = AK$. Place le point K .

c) Trace l'intersection de P et du cube.



84. Les points A, B, C ont pour coordonnées (4;0;0), (0;3;0) et (0;0;5). On note d la perpendiculaire au plan ABC passant par O, et H son intersection avec le plan ABC. Soit V le plan vertical qui contient OH.

a) Pourquoi V est-il perpendiculaire à AB ? Dessine la droite d'intersection de V et xOy sur la figure. (Tu peux dessiner d'abord OAB en vraie grandeur). b) Dessine H sur la figure.

84. a) La droite AB est, par hypothèse, perpendiculaire à OH et, comme AB est horizontale, elle est perpendiculaire à OC.

Elle est donc perpendiculaire au plan déterminé par ces deux droites.

b) Utiliser le repère (Ox, Oy).

85. Avec les notations de l'exercice 84 :

$$[2 \text{ aire} (OAB)]^2 = OA^2 \cdot OB^2 = OH^2 \cdot (OA^2 + OB^2),$$

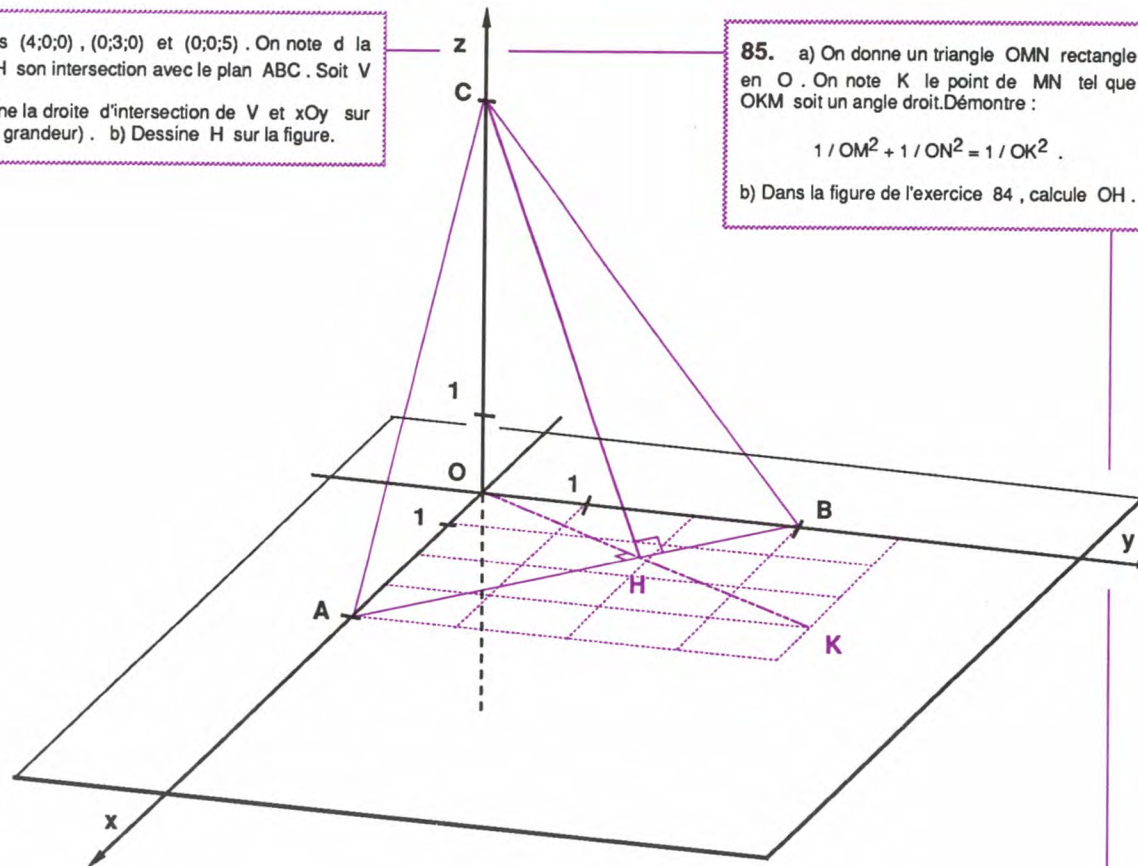
Diviser les deux membres par $OA^2 \cdot OB^2 \cdot OH^2$.

$$OH = 4,24 \text{ cm}.$$

85. a) On donne un triangle OMN rectangle en O. On note K le point de MN tel que OKM soit un angle droit. Démontre :

$$1/OM^2 + 1/ON^2 = 1/OK^2.$$

b) Dans la figure de l'exercice 84, calcule OH.



86. Dans cette pyramide, toutes les arêtes ont même longueur d. On note P le plan perpendiculaire à SK et qui passe par L.

a) Trace l'intersection de P et de la face SKL ; puis l'intersection de P et de la face SKN.

b) Trace l'intersection de la pyramide et du plan Q perpendiculaire à SM et passant par L.

c) Quelle est la perpendiculaire au plan SKM qui passe par L ?

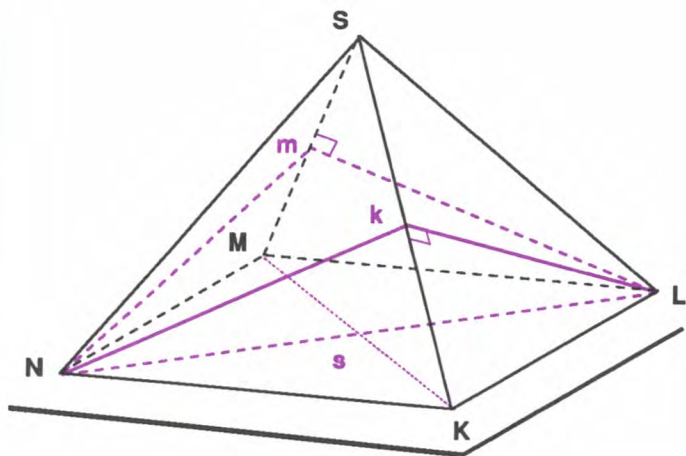
a) L'intersection de P et de SKL est perpendiculaire à SK : c'est la hauteur Lk de SKL et, comme ce triangle est équilatéral, k est le milieu de SK.

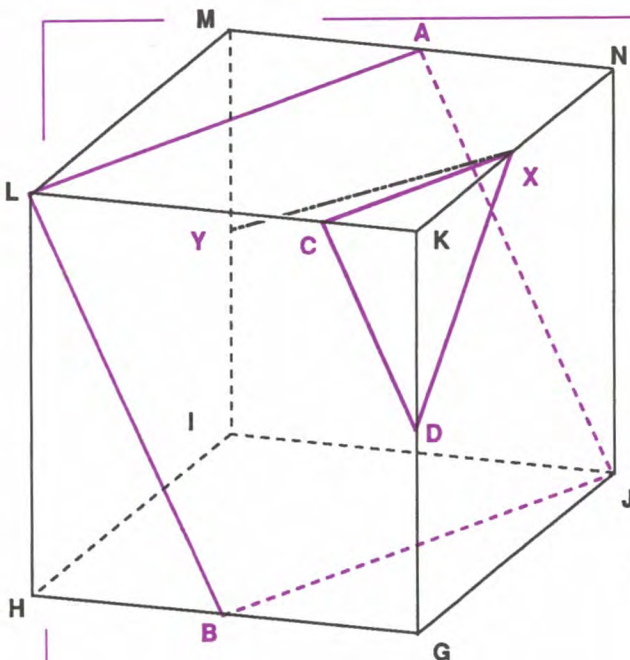
Le plan P étant perpendiculaire à SK en son milieu, c'est le plan médiateur de SK. Il est donc clair que N est dans P.

Dès lors, l'intersection avec la pyramide est le triangle NKL.

b) Par symétrie, on obtient le triangle LNm.

Comme NL est contenue dans P, la droite NL est orthogonale à SK. Elle est orthogonale à SM car elle est dans Q. C'est la perpendiculaire cherchée.





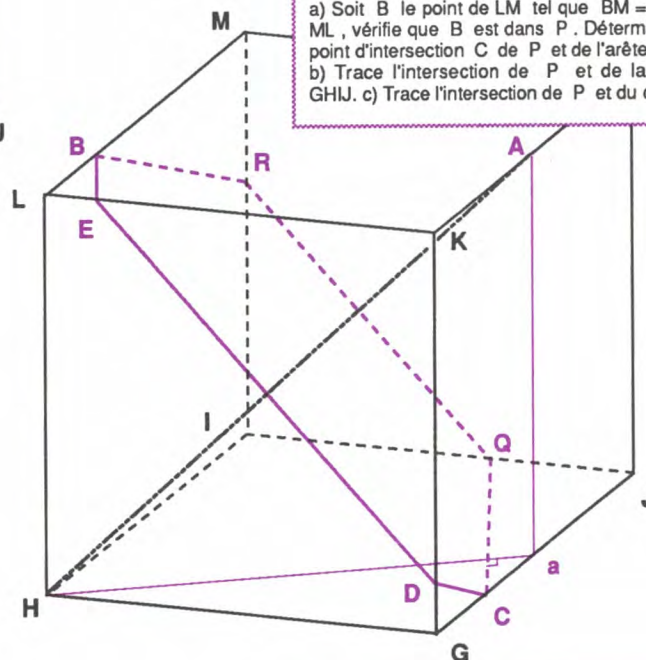
87. Les points X et Y sont les milieux des arêtes KN et MI du cube KLMNGHIJ.

a) Soit P le plan médiateur de XY. Trace l'intersection de P et du cube.

b) Trace l'intersection du cube et du plan perpendiculaire à XY et qui passe par X.

87. a) Soit A le milieu de MN. Comme les triangles YMA et XNA sont égaux, A est dans le plan médiateur P. Idem pour les points L et J. P coupe donc MNKL suivant AL et IJGH suivant la parallèle à AL menée par J. Cette parallèle coupe HG en son milieu B.

b) Il suffit de tracer le plan parallèle à P et passant par X ...



88. Le point A est le milieu de l'arête KN. On note P le plan médiateur de AH.

a) Soit B le point de LM tel que $BM = \frac{3}{4} ML$, vérifie que B est dans P. Détermine le point d'intersection C de P et de l'arête GJ.

b) Trace l'intersection de P et de la face GHIJ. c) Trace l'intersection de P et du cube.

88. a) Si A' est la projection de A sur ML, il est clair que les triangles BA'A et BLH sont égaux. Donc $BA = BH$.

Même raisonnement pour C, qui doit être situé au quart de l'arête GJ.

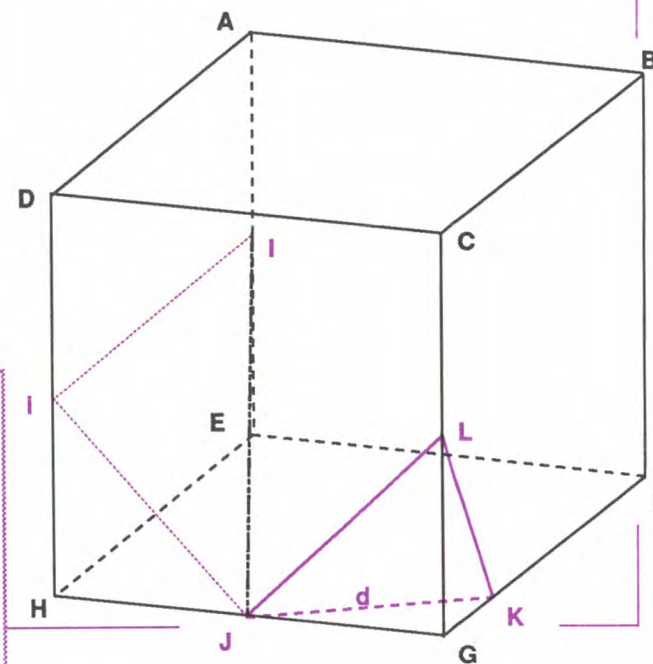
b) utiliser (VIII d).

c) La question précédente donne CQ et BE. Compléter en considérant la projection sur LKGH (IXg): ED et QR sont parallèles à la diagonale.

89. a) Utiliser la projection sur le plan EFGH (IXg), puis la propriété (VIII d).

b), c) En utilisant la projection sur la face CDGH, on voit de même que JL est parallèle à la diagonale.

Il reste à compléter l'intersection.



89. Dans ce cube, la face EFGH est horizontale. Les points I et J sont les milieux des arêtes AE et GH. On note P le plan perpendiculaire à IJ qui passe par J.

a) Soit d la droite du plan EFGH qui est perpendiculaire en J à IJ. Dessine en vraie grandeur (en supposant $EH = 5$ cm) la face EFGH, la projection de IJ sur cette face, et d. Dessine d sur la figure.

b) Dessine l'intersection du plan P et de CDHG. c) Dessine l'intersection du plan P et du cube.

90. Le point K est équidistant de N et L, il est dans le plan médiateur de NL.

Comme KH est orthogonale à NL et passe par K, elle est contenue dans ce plan, donc H est équidistant de N et L.

Même raisonnement vis-à-vis de M et L.

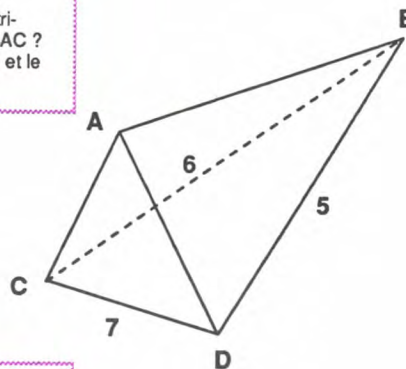
91. Les triangles sont rectangles en A. On a donc le système :

$$\begin{cases} AB^2 + AD^2 & = 25 \\ AD^2 + AC^2 & = 49 \\ AB^2 + AC^2 & = 36 \end{cases}$$

Les solutions vérifient :

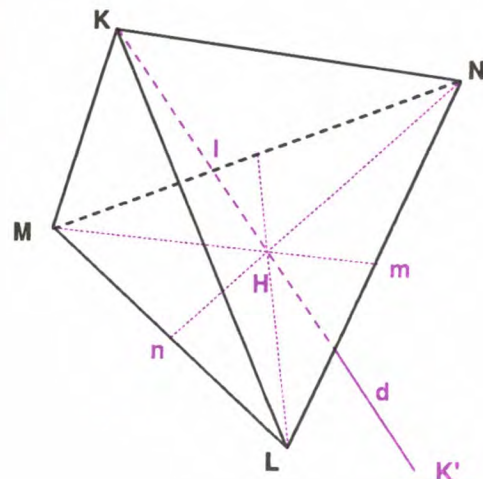
$$AB^2 = 6, \quad AD^2 = 19, \quad AC^2 = 30.$$

91. Dans le tétraèdre ABCD, on a $BC = 6$, $CD = 7$ et $DB = 5$. D'autre part les plans ABC, ACD et ADB sont deux à deux perpendiculaires.
a) Que peut-on dire des triangles CAD, DAB et BAC ?
b) Calcule AB, AC, AD et le volume du tétraèdre.



92. Dans le cube ABCDEFGH, on note I le centre de la face ABCD.
a) Dessine en vraie grandeur (en supposant que les arêtes du cube sont longues de 6 cm) la partie de la figure qui se trouve dans le plan ACGE. Que peut-on dire des droites EI et AG ?
b) Soit K le point d'intersection de AG et EI. Trace la parallèle à BD qui passe par K. Peux-tu expliquer pourquoi elle est perpendiculaire à AG ?
c) Dessine l'intersection du cube et du plan perpendiculaire à AG qui passe par I.
d) Calcule les longueurs des côtés du triangle GBK.

90. Le tétraèdre KLMN est régulier. Soit d la perpendiculaire à MNL passant par K ; et soit H l'intersection de d et du plan MNL.
a) Pourquoi a-t-on les égalités $HM = HN = HL$? Place le point H sur la figure.
b) Dessine le symétrique de K par rapport au plan MNL.

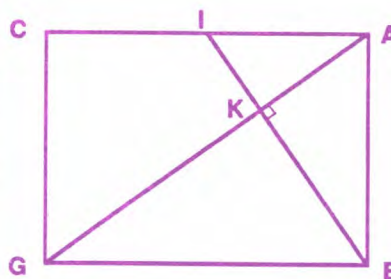


92. a) $\tan(\text{IEA}) = \tan(\text{EGA}) = 1/2$.
Donc IE est perpendiculaire à AG.

b) La parallèle à BD en K est dans le plan BDE, elle coupe les faces en L et M. La droite BD est une perpendiculaire à AE (horizontale - verticale) et à IE (qui est sa médiatrice). Donc BD est perpendiculaire au plan IAE et notamment à la droite AG contenue dans ce plan.

c) Le plan perpendiculaire à AG n'est autre que BDE, qui contient bien les directions de BD et IE.

d) Les triangles GBK et GKE sont égaux. Utiliser ensuite l'exercice 85.



DESSINER L'ESPACE

IMAGICIEL DE L'IREM DE LORRAINE

COLLECTION « VOIR ET CONCEVOIR »

**Ensemble de deux disquettes fonctionnant sur compatible P.C.
dans tous les modes graphiques courants.**

Son utilisation en parallèle avec le cahier de travaux pratiques permet une optimisation des moyens donnés à l'élève, en lui facilitant la vision de l'espace grâce à l'animation des figures et à l'interaction avec l'image, en lui fournissant des outils complétant le travail papier-crayon et peut-être mieux adaptés à sa structure mentale.

Conçu pour profiter au maximum des capacités de l'outil informatique, il offre non seulement les possibilités de l'utilisation individuelle (sous le contrôle ou non de l'enseignant), mais aussi — lorsque l'on dispose d'un rétroprojecteur et d'un écran adaptable — des possibilités d'utilisation collective s'intégrant aux séquences magistrales.

☐ l'élève disposera d'une visualisation de chaque exercice du fascicule et il pourra :

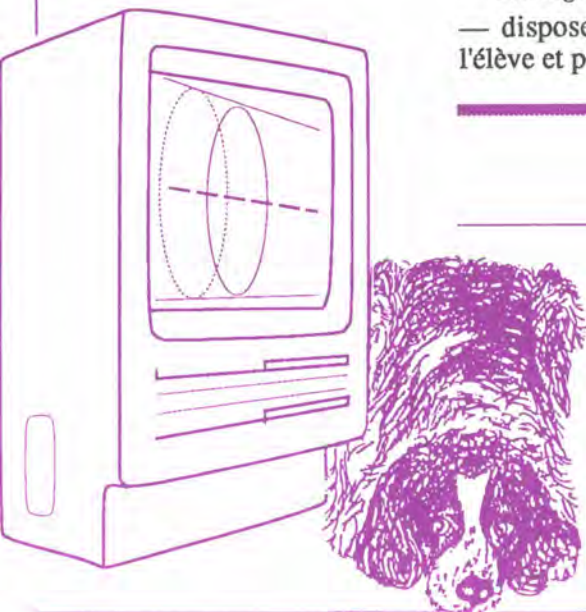
- faire tourner la figure ou en faire apparaître les éléments plans en vraie grandeur,
- agir sur l'image et compléter les figures (*tracer des segments, mener des parallèles, trouver des intersections, etc.*),
- vérifier la cohérence de ses résultats ou demander une aide à la solution.

☐ le professeur, pour lequel le logiciel constitue aussi un véritable outil de correction et d'évaluation, pourra :

- conserver les étapes successives dans une liste historique,
- sauvegarder sur disquette la construction utilisée,
- disposer de commandes supplémentaires inaccessibles à l'élève et permettant une vérification précise des résultats.

les deux disquettes : **797 F***
(préciser le format désiré à la commande)

* le prix d'achat inclut l'autorisation d'effectuer les copies nécessaires au fonctionnement sur tous les postes de travail de l'établissement.



topiques
éditions

9, place Valladier
57 000 METZ

Dépot Légal
2ème trimestre 1989

Achevé d'imprimer sur les presses
de l'imprimerie S.N.Y.P.A
le 19 Mai 1989 à
06800 CAGNES-SUR-MER

TOPIQUES éditions
9, place Valladier
57000 METZ
ISBN : 2-87796-001-3