# MATHEMATIQUES

# POUR L'ELEVE DE SECONDE

## FASCICULE 2

VECTEURS ET ANGLES

ANALYSE

IREM DE LORRAINE

© Droits réservés pour usage commercial

Edité et imprimé par l'**Institut de Recherche sur l'enseignement des Mathématiques** - (Université de Nancy I - Faculté des Sciences) - B.P. 239 - 54506 VANDOEUVRE-les-NANCY CEDEX
Dépôt légal : 4e trimestre 1988
n° de la publication : 2-85406-113-6

Le Responsable de la publication : Claude MORLET

réf. II.$12_4$

# FASCICULE 2



La collection complète comprend les 5 fascicules suivants :

FASCICULE 1 : Chapitre 1 : Révisions de géométrie - Chapitre 2 : Le calcul linéaire

FASCICULE 2 : Chapitre 3 : Vecteurs et angles - Chapitre 4 : Analyse

FASCICULE 3 : Chapitre 5 : Géométrie dans l'espace

FASCICULE 4 : Chapitre 6 : Compléments de géométrie et Statistiques

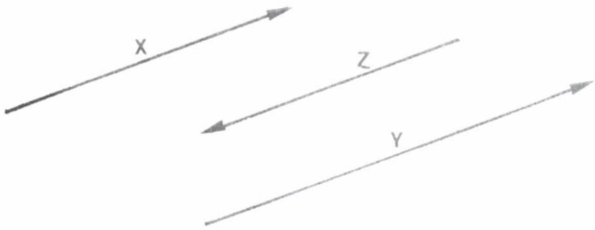
FASCICULE 5 : Le répertoire

# CHAPITRE III

# VECTEURS ET ANGLES

# *Série 1 : LES FLECHES ET LES VECTEURS*

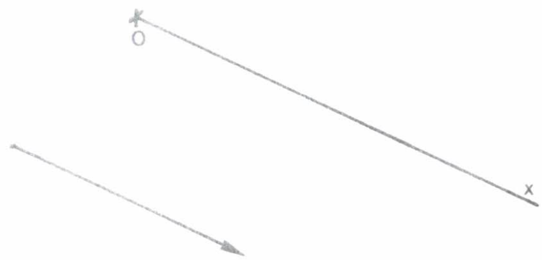
## *AZIMUT D'UNE FLECHE*




*Les trois flèches dessinées ci-contre ont même direction (autrement dit elles sont parallèles). Les flèches X et Y ont même sens ; tandis que Z n'a pas même sens que X et Y.*

*Si deux flèches sont parallèles et de même sens, nous dirons qu'elles ont même azimut. Deux flèches parallèles et de sens opposé, seront dites d'azimuts opposés.*
***Un azimut est donc la donnée d'une direction et d'un sens sur cette direction.***

*Une demi-droite a aussi une direction et un sens ; nous pouvons donc parler de l'azimut d'une demi-droite.*




## *VECTEUR D'UNE FLECHE*

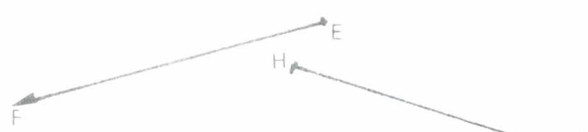
***Par définition, un vecteur est la donnée :***

* ***a) d'un azimut***

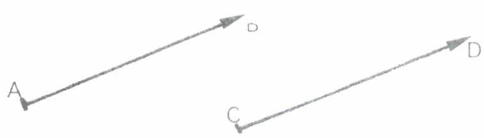
* ***b) d'une longueur.***

*Une flèche a un azimut et une longueur, elle définit donc un vecteur. Le vecteur de la flèche d'origine $M$ et d'extrémité $N$, est noté $\overrightarrow{MN}$ (lire : vecteur $M\,N$).*

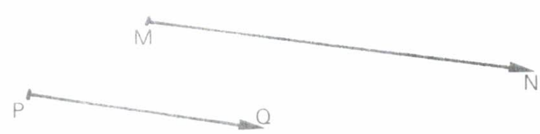

Ces deux flèches ont même longueur
et des azimuts opposés : donc $\overrightarrow{TU} \neq \overrightarrow{VW}$




Ces deux flèches ont même longueur
elles ne sont pas parallèles; donc $\overrightarrow{EF} \neq \overrightarrow{HG}$.



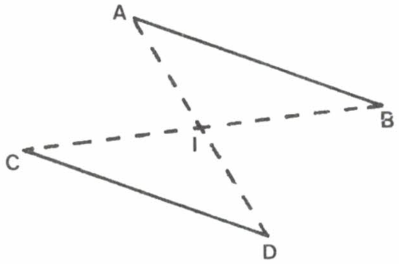

Ces deux flèches ont même azimut
et même longueur : donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ .




Ces deux flèches ont même azimut
et des longueurs différentes : donc $\overrightarrow{MN} \neq \overrightarrow{PQ}$ .

*Vocabulaire :* *Pour dire que deux flèches ont même vecteur, on dit aussi qu'elles sont* ***équipollentes.*** *La flèche d'origine A et d'extrémité B est quelquefois appelée le* ***"bipoint (A,B)"*** *.*

### VECTEURS ET MILIEUX




***Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ , les segments AD et BC ont même milieu.***

***Réciproquement :***

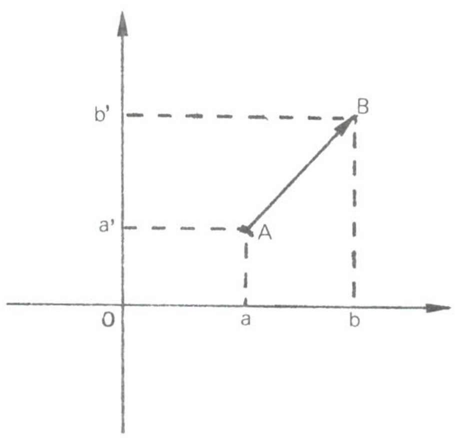
Attention il y a deux cas de figure : le cas où ABCD ne sont pas alignés, et le cas où ABCD sont alignés.

***Si les segments MN et PQ ont même milieu, alors $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{PN}$***


***Attention à l'ordre des points : Les segments qui ont même milieu joignent l'origine d'une des flèches et l'extrémité de l'autre.***

### VECTEURS DANS UN REPERE

*Comment reconnaître que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ lorsque l'on connaît les coordonnées de A, B, C, D dans un repère ?*




*Si les coordonnées de A et B sont respectivement $(x_A,y_A)$ et $(x_B,y_B)$ les nombres $x_B - x_A$ et $y_B - y_A$ sont les coordonnées de la flèche d'origine A et d'extrémité B.*
*Deux flèches ont mêmes coordonnées si et seulement si elles ont même vecteur, c'est pourquoi $x_B - x_A$ et $y_B - y_A$ sont aussi appelés les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.*

***On retiendra :***

***Abscisse de $\overrightarrow{AB}$ = ( Abscisse de B ) - ( Abscisse de A )***
***Ordonnée de $\overrightarrow{AB}$ = ( Ordonnée de B ) - ( Ordonnée de A )***

$$\begin{cases} x_{\overrightarrow{AB}} = x_B - x_A \\ y_{\overrightarrow{AB}} = y_B - y_A \end{cases}$$

***Attention à l'ordre des points.***

*Si nous avons les coordonnées* $(x_A, y_A)$ *de* A , $(x_B, y_B)$ *de* B , $(x_C, y_C)$ *de* C *et* $(x_D, y_D)$ *de* D , *pour vérifier que* $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$ , *nous vérifierons que les vecteurs* $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{CD}$ *ont mêmes coordonnées, c'est à dire que :*

$$x_D - x_C = x_B - x_A$$
$$y_D - y_C = y_B - y_A$$

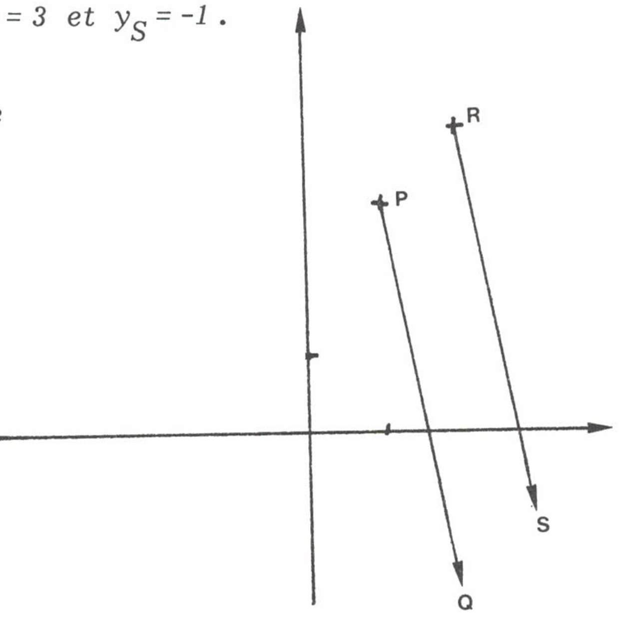
***Exemple*** : *Soit* P(1;3) , Q(2;-2) *et* R(2;4) . *Quelles sont les coordonnées du point* S *tel que* $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$ ?

*Deux méthodes se présentent :*

***Première méthode*** : *Les segments* PS *et* QR *ont même milieu, ce qui s'exprime par :*

$$\frac{1 + x_S}{2} = \frac{2 + 2}{2} \qquad \text{et} \qquad \frac{3 + y_S}{2} = \frac{-2 + 4}{2}$$

*Ces deux équations nous donnent* $x_S = 3$ *et* $y_S = -1$ .




***Deuxième méthode:*** *Les coordonnées de* $\overrightarrow{PQ}$ *sont :* $2 - 1 = 1$ *et* $(-2) - 3 = -5$

*Celles de* $\overrightarrow{RS}$ *sont :* $x_S - 2$ *et* $y_S - 4$

*On écrit :*

$$1 = x_S - 2$$
$$-5 = y_S - 4$$

*Et on retrouve ainsi* $x_S = 3$ *et* $y_S = -1$ .

## *UNE PROPRIETE DE SYMETRIE*

*Nous savons que :*

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ *équivaut à* *les segments* AD *et* BC *ont même milieu*

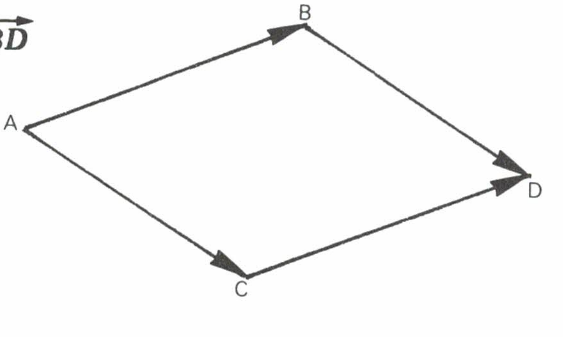
*et*

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ *équivaut à* *les segments* AD *et* BC *ont même milieu*

*Donc*

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ ***équivaut à*** $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$

ceci signifie que dans ce dessin
il y a deux couples de flèches
équipollentes.

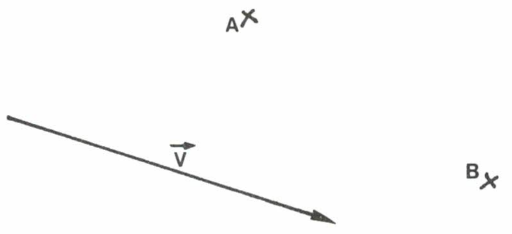


*Première série d'exercices :*

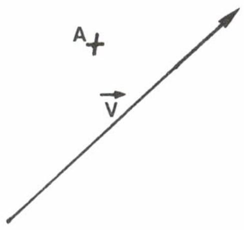
## *LE VECTEUR D'UNE FLECHE*

☆ **Exercice III$_1$ :** *Trace la flèche d'origine A, qui a même azimut que $\vec{V}$, et dont la longueur est 4 cm.*

*Trace la flèche d'extrémité B, de longueur 5 cm et dont l'azimut est opposé à celui de $\vec{V}$.*

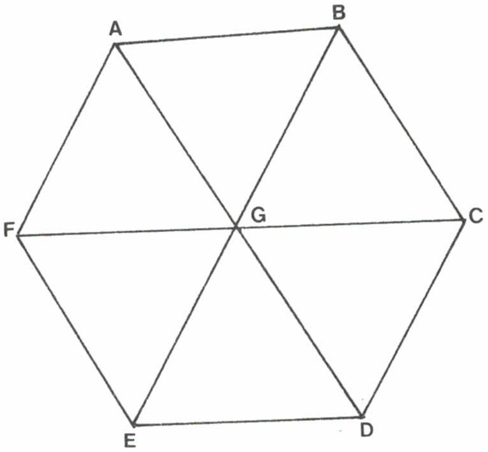



☆ **Exercice III$_2$ :** *Dessine la flèche d'extrémité A et de longueur 4 cm, qui a même azimut que $\vec{V}$.*




☆ **Exercice III$_3$ :**

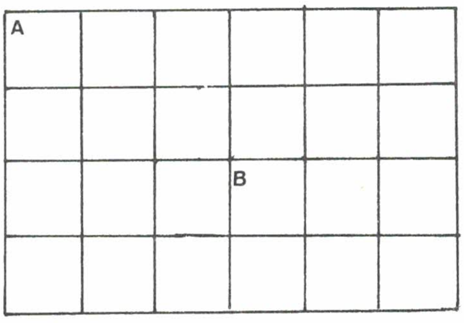
*Cette figure est formée de six triangles équilatéraux (ABCDEF est un hexagone régulier).*




- *Quelles sont, sur cette figure, les flèches qui sont équipollentes à la flèche d'origine A et d'extrémité B ?*
- *Quelles sont les flèches qui ont même longueur, même direction que le vecteur $\overrightarrow{GD}$, mais sont de sens opposé ?*

☆ **Exercice III$_4$ :**

*Reproduis cette grille et trace quatre flèches équipollentes à la flèche d'origine A et d'extrémité B.*



☆ **Exercice III$_5$ :** *Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{XB} = \overrightarrow{YD}$, alors les segments $AY$ et $CX$ ont même milieu. Explique pourquoi ?*

☆ **Exercice III$_6$ :** *Dans un repère orthonormé $(0x,0y)$ (unité 1 cm), place les points $A(1;3)$, $B(4;7)$ et $C(-3,5)$. Place le point $D$ tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Quelles sont les coordonnées de $D$ ?*

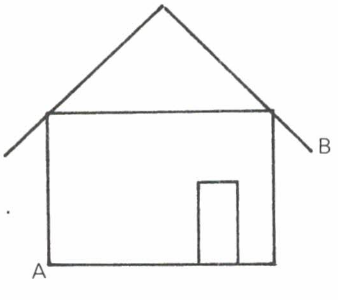
☆ **Exercice III$_7$ :** *Dans un repère orthonormé $(0x,0y)$ (unité 1 cm) place les points $A(1;3)$, $B(2,1\ ;\ 3,3)$, $C(4,1\ ;\ 0,5)$, $D(2,1\ ;\ 5,3)$, $E(3\ ;\ 0,5)$, $F(0,1\ ;\ 8,1)$. Avec ces six points tu peux faire deux flèches ayant même vecteur. Quelles sont ces flèches ?*

☆ **Exercice III$_8$ :** *Trace un segment $AB$ ; puis trace le point $C$ tel que $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BC}$.*

*Existe-t-il un point $D$ tel que $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DB}$ ?*

☆ **Exercice III$_9$ :** *Trace un segment $AB$ : puis trace des points $M$ et $N$ tels que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{NB}$.*

☆ **Exercice III$_{10}$ :**

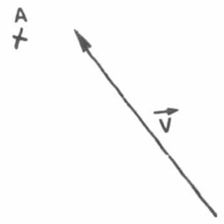



*Reproduis ce dessin sur une feuille de papier quadrillé. Puis dessine son image dans la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.*

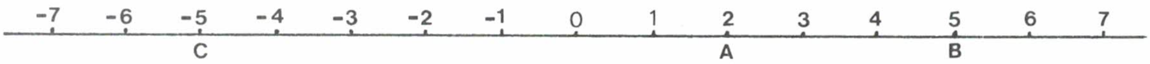
☆ **Exercice III$_{11}$ :** *Dans un repère orthonormé (unité 1 cm), on donne $U(1;3)$ et $V(-2;4)$ ; et le point $A(0;1)$. Dessine $B, C, D, E$ tels que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \vec{U}$ et $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AE} = \vec{V}$.*

*Que remarques-tu ? Que peut-on dire du quadrilatère $ABCD$ ? Quelles sont les coordonnées des points $B, C, D, E$ ?*

☆ **Exercice $III_{12}$** : *Dessine deux flèches d'origine $A$ et dont l'azimut est perpendiculaire à celui de $\vec{V}$.*




☆ **Exercice $III_{13}$** :




*Dessine la flèche d'origine $C$, qui a pour vecteur $\overrightarrow{AB}$.*

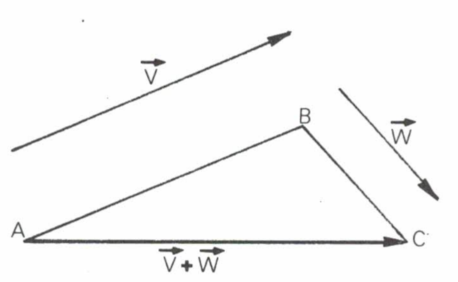
*Une flèche a pour origine $M$ d'abscisse $x$, et pour vecteur $\overrightarrow{AB}$ ; quelle est l'abscisse de son extrémité ?*

*Une flèche a pour extrémité $M'$ d'abscisse $x'$, et pour vecteur $\overrightarrow{AB}$ ; quelle est l'abscisse de son origine ?*

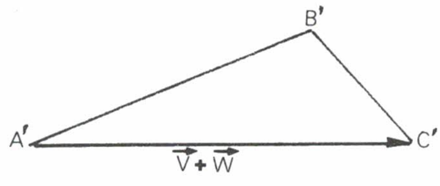
# Série 2 : LE CALCUL VECTORIEL

## SOMME DE DEUX VECTEURS

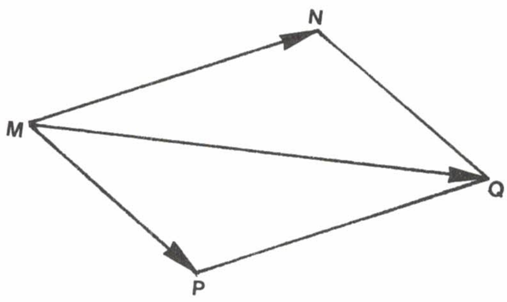
*Donnons-nous deux vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{W}$.*
*Choisissons un point $A$, puis dessinons :*
*$B$ tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{V}$ et*
*$C$ tel que $\overrightarrow{BC} = \vec{W}$.*
*Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est appelé la somme de $\vec{V}$ et de $\vec{W}$. Elle est notée $\vec{V} + \vec{W}$.*




Si nous avions fait la figure en partant d'un autre point A', nous aurions obtenu un autre point C'




Comment démontrerais tu que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'}$ ?

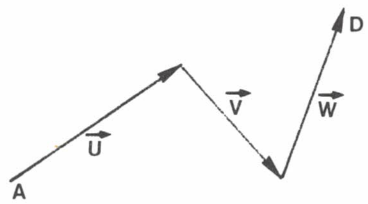



*Pour obtenir la somme de $\overrightarrow{MN}$ et de $\overrightarrow{MP}$, on trace le parallèlogramme MNQP :*

$$\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MP}.$$

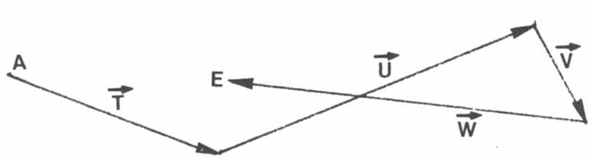
## SOMME DE PLUSIEURS VECTEURS

*La somme de trois vecteurs $\vec{U}$, $\vec{V}$, $\vec{W}$ est le vecteur, noté $\vec{U} + \vec{V} + \vec{W}$, obtenu en "mettant bout à bout" $\vec{U}$, $\vec{V}$ et $\vec{W}$.*




$$\overrightarrow{AD} = \vec{U} + \vec{V} + \vec{W}$$

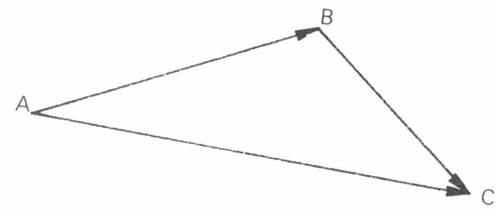
*De même pour 4, 5,... vecteurs :*




$$\overrightarrow{AE} = \vec{T} + \vec{U} + \vec{V} + \vec{W}$$

## *LA RELATION DE CHASLES*

*Si* $\overrightarrow{AB} = \vec{U}$ *et* $\overrightarrow{BC} = \vec{V}$ *, nous avons* $\overrightarrow{AC} = \vec{U} + \vec{V}$ *.*

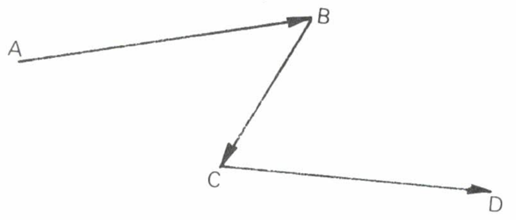


*Ceci s'écrit* $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ *.*

*De même, pour trois vecteurs si* $\overrightarrow{AB} = \vec{U}$ *,* $\overrightarrow{BC} = \vec{V}$ *et* $\overrightarrow{CD} = \vec{W}$ *, alors :*

$$\overrightarrow{AD} = \vec{U} + \vec{V} + \vec{W}$$

*Donc :* $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$



*De même pour 4, 5,... vecteurs.*

***Nous retiendrons :***

***Pour des points A, B, C, D, E,... quelconques :***

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}$$

***etc.***

*Ces formules sont connues sous le nom de relation de Chasles (pour les vecteurs) .*

## *LE VECTEUR* $\vec{0}$ *ET LE VECTEUR* $-\vec{V}$

*Il est commode de considérer qu'à tout point A est associée une flèche d'origine A et d'extrémité A , et que toutes ces flèches forment un vecteur appelé vecteur nul , et noté* $\vec{0}$ *. Avec ces conventions :*

$$\overrightarrow{AB} + \vec{0} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB} \qquad \text{et} \qquad \vec{0} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$$

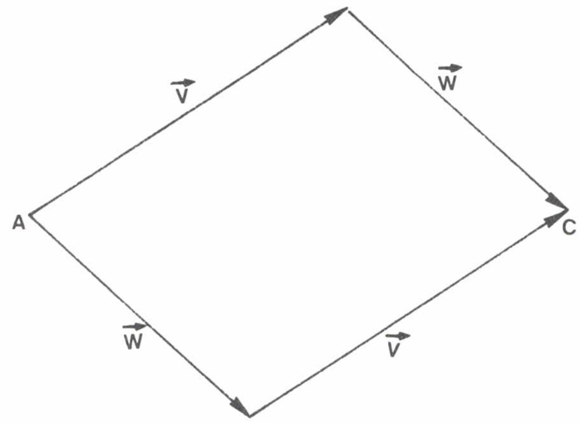
*Ainsi, quel que soit* $\vec{V}$ *, on a*

$$\vec{V} + \vec{0} = \vec{V} \qquad \text{et} \qquad \vec{0} + \vec{V} = \vec{V}$$

*Nous savons que* $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$ *. Ainsi pour tout vecteur* $\vec{V}$ *, nous pouvons construire un nouveau vecteur, noté* $-\vec{V}$ *, tel que* $\vec{V} + (-\vec{V}) = \vec{0}$ ***. Les vecteurs*** $\vec{V}$ ***et*** $-\vec{V}$ ***ont même longueur, même direction et des sens opposés (ils ont même longueur et des azimuts opposés) , on les dit opposés .***

***Attention : souvent , au lieu d'écrire*** $\vec{X} + (-\vec{Y})$ ***, on écrit*** $\vec{X} - \vec{Y}$ ***.***

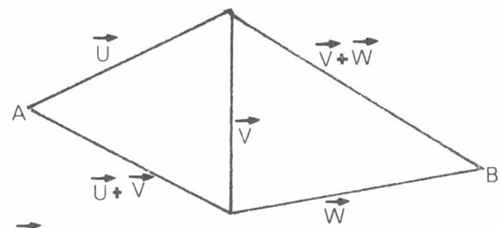
*QUELQUES FORMULES*




a) $\vec{V} + \vec{W} = \vec{W} + \vec{V}$

$\vec{V} + \vec{W} + \vec{X} = \vec{X} + \vec{W} + \vec{V} = \vec{W} + \vec{V} + \vec{X}$

***Pour faire une somme de vecteurs on peut les prendre dans un ordre arbitraire.***

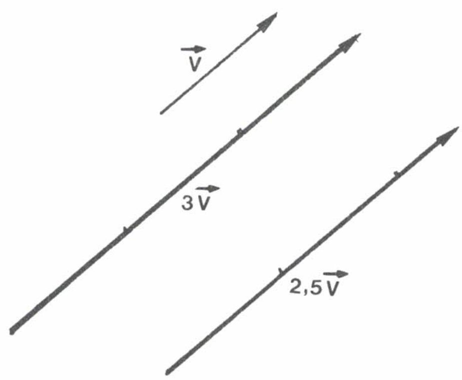



b) $\vec{U} + \vec{V} + \vec{W} = (\vec{U} + \vec{V}) + \vec{W} = \vec{U} + (\vec{V} + \vec{W})$

$\vec{T} + \vec{U} + \vec{V} + \vec{W} = (\vec{T} + \vec{U}) + (\vec{V} + \vec{W}) = \vec{T} + (\vec{U} + \vec{V}) + \vec{W} = \ldots$

***Dans une somme de vecteurs, on peut faire des groupements arbitraires.***

*PRODUIT D'UN VECTEUR $\vec{V}$ PAR UN NOMBRE k*




* *Lorsque $\vec{V} \neq \vec{0}$ et $k > 0$.*

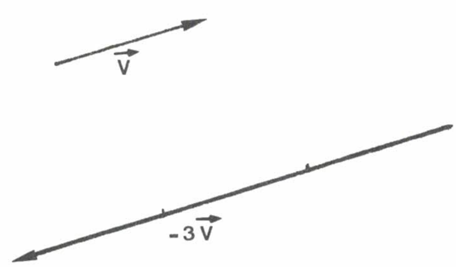
*Le vecteur $\underbrace{\vec{V} + \vec{V} + \ldots + \vec{V}}_{n \text{ fois}}$ s'écrit aussi $n\vec{V}$,*

*sa longueur est $n$ fois celle de $\vec{V}$, il a même azimut que $\vec{V}$.*

*Plus généralement, si $k$ est positif, le vecteur $k\vec{V}$ :*

*a même azimut que $\vec{V}$*

*sa longueur est celle de $\vec{V}$ multipliée par $k$.*




* *Lorsque $\vec{V} \neq 0$ et $k < 0$*

*Si $k$ est négatif, le vecteur $k\vec{V}$ a l'azimut opposé à celui de $\vec{V}$,*

*sa longueur est celle de $\vec{V}$ multipliée par $|k|$.*

* *Par définition $0\vec{V} = \vec{0}$ (quelque soit $\vec{V}$).*

* *Par définition $k\vec{0} = \vec{0}$ (quel que soit $k$).*

### *PROPRIETES DU PRODUIT PAR LES NOMBRES*

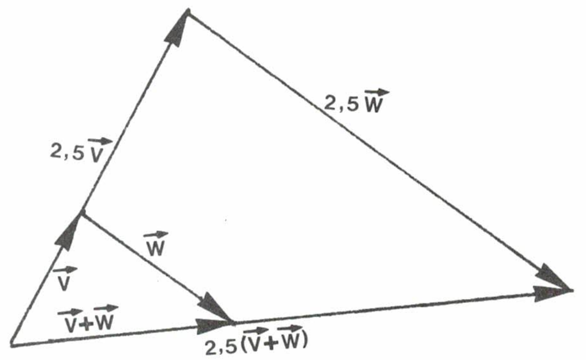
1) $(ab)\vec{V} = a(b\vec{V})$ . *Pour multiplier* $\vec{V}$ *par* $ab$ *on peut le multiplier d'abord par* $b$ *, puis multiplier le résultat obtenu par* $a$ *.*

2) $(a + b)\vec{V} = a\vec{V} + b\vec{V}$

et $(a - b)\vec{V} = a\vec{V} - b\vec{V}$

*Remarquons que :*

$\vec{U} - \vec{V} = \vec{U} + (-\vec{V}) = \vec{U} + (-1)\vec{V}$




3) $a(\vec{V} + \vec{W}) = a\vec{V} + a\vec{W}$

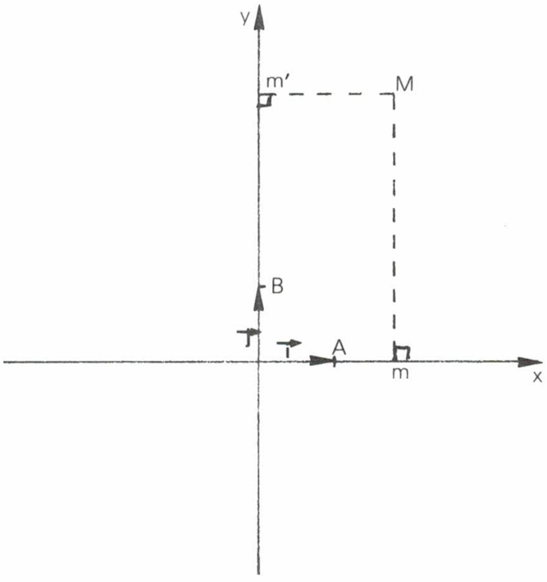
$a(\vec{V} + \vec{W} + \vec{X}) = a\vec{V} + a\vec{W} + a\vec{X}$

$a(\vec{V} - \vec{W}) = a\vec{V} - a\vec{W}$

$a(\vec{V} - \vec{W} + \vec{X}) = a\vec{V} - a\vec{W} + a\vec{X}$

### *CALCUL VECTORIEL ET COORDONNEES*

*Considérons un repère orthonormé* $(Ox,Oy)$ . *Considérons les points* $A(1;0)$ *et* $B(0;1)$ *, et posons* $\vec{OA} = \vec{i}$ *et* $\vec{OB} = \vec{j}$*.*

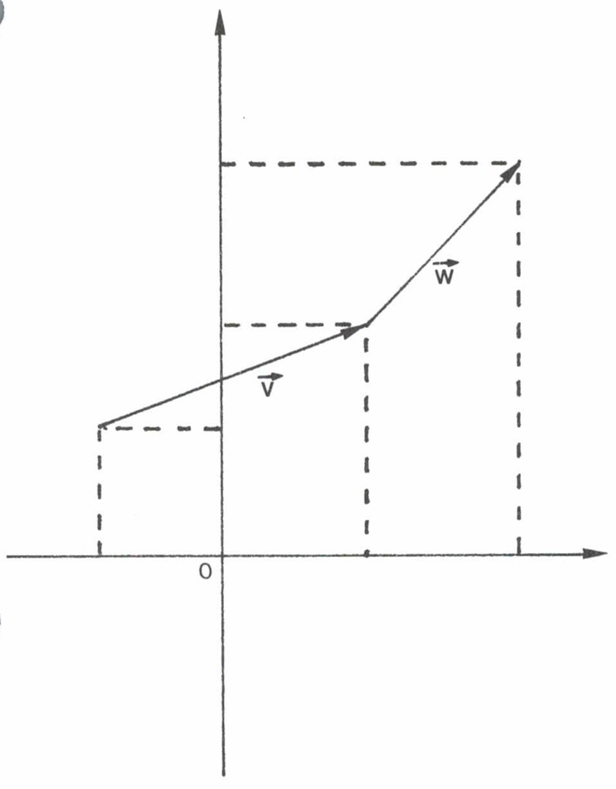



*On notera d'abord que la donnée de* $O$*,* $\vec{i}$ *et* $\vec{j}$ *permet de reconstituer le repère. En effet si je connais* $O$ *et* $\vec{i}$*, je peux tracer la droite* $Ox$ *, je sais comment l'orienter, et je connais l'unité choisie . De même* $O$ *et* $\vec{j}$ *permettent de reconstituer* $Oy$*. C'est pourquoi souvent* ***au lieu de parler de repère*** $(Ox,Oy)$ ***, on parle du repère*** $(0, \vec{i}, \vec{j})$ ***.***

*Soit* $M(x,y)$ *un point du plan, on a* $\vec{OM} = \vec{Om} + \vec{mM}$ *(où* $m$ *est la projection orthogonale de* $M$ *sur* $Ox$ *). Donc* $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$*.*

***Nous retiendrons :***

***M a pour coordonnées x et y équivaut à*** $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ ***.***




*De même si un vecteur $\vec{V}$ a pour coordonnées $(x_V, y_V)$, il s'écrit :*

$$\vec{V} = x_V\,\vec{i} + y_V\,\vec{j}.$$

*La somme de $\vec{V}$ et du vecteur $\vec{W}$ de coordonnées $(x_W, y_W)$, est donc la somme de $x_V\,\vec{i} + y_V\,\vec{j}$ et de $x_W\,\vec{i} + y_W\,\vec{j}$*

*Donc* $\vec{V} + \vec{W} = (x_V + x_W)\,\vec{i} + (y_V + y_W)\,\vec{j}.$

**Nous retiendrons :**

$$\vec{V}\left|\begin{matrix} x_V \\ y_W \end{matrix}\right. \qquad \vec{W}\left|\begin{matrix} x_W \\ y_W \end{matrix}\right. \qquad \vec{V} + \vec{W}\left|\begin{matrix} x_V + x_W \\ x_V + y_W \end{matrix}\right.$$

*Le produit de $V = x_V\, i + y_V\, j$ par $k$ est le vecteur $kx_V\, i + ky_V\, j$.*

**Nous retiendrons :**

***Pour multiplier un vecteur par k, on multiplie ses coordonnées par k.***

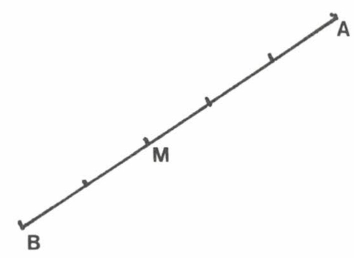
**BARYCENTRE :** *On se donne deux points A et B, et on cherche le (ou les) point(s) M tel(s) que* $2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = 0$.

*Ceci ressemble à une équation d'inconnue M ; malheureusement M intervient dans $\overrightarrow{MA}$ et dans $\overrightarrow{MB}$, ce qui nous interdit de résoudre directement.*
*Nous utiliserons donc la relation de Chasles, pour écrire par exemple*

$$\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA}$$

*Donc*

$$2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = 2(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA}) + 3\overrightarrow{MB}$$
$$2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = 5\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{BA}$$



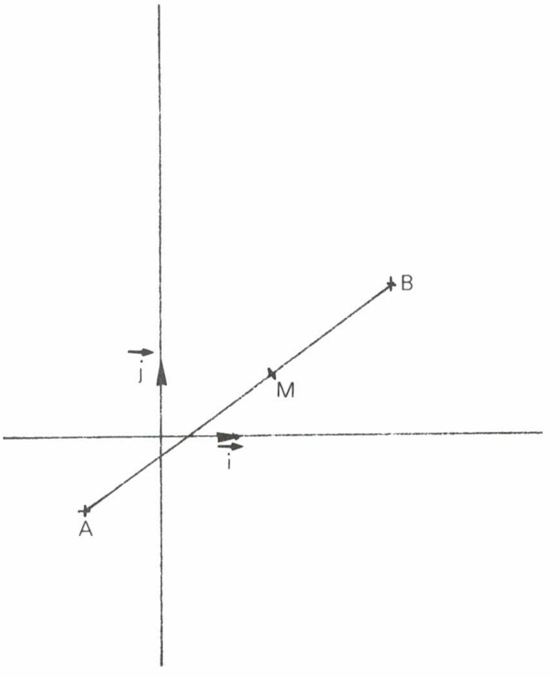

*La condition imposée se traduit donc par*

$$5\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{BA} = \vec{0}$$

*soit* $\quad 5\overrightarrow{MB} = -2\overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{AB}$

*et* $\quad \overrightarrow{MB} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$ (ou $\overrightarrow{BM} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BA}$)

*Il y a donc une solution unique. Cette solution est appelée le* ***barycentre de A affecté du coefficient 2, et de B affecté du coefficient 3.***




*Supposons que, dans un certain repère orthonormé, A et B aient pour coordonnées (-1;-1) et (3;2).*

*Quelles sont les coordonnées de M ?*

*Calculons d'abord les coordonnées du vecteur* $\overrightarrow{BM}$.

$$\overrightarrow{BM} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BA}$$

*et les coordonnées de* $\overrightarrow{BA}$ *sont :*

$$X = (-1)-3 = -4 \quad \text{et} \quad Y = (-1)-2 = -3 .$$

*Donc* $\overrightarrow{BM}$ *a pour coordonnées*

$$\frac{2}{5} \times (-4) = -\frac{8}{5} \quad \text{et} \quad \frac{2}{5} \times (-3) = -\frac{6}{5} .$$

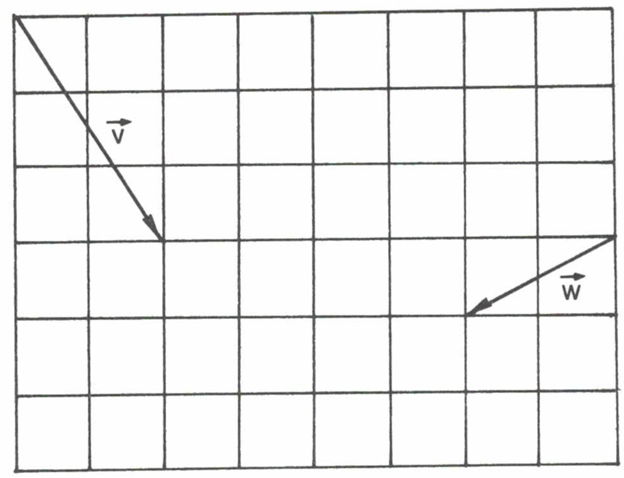
*Nous obtiendrons alors les coordonnées de M en " ajoutant celles de* $\overrightarrow{BM}$ *à celles de B " :*

$$\begin{cases} \text{abscisse de } M = 3 - \dfrac{8}{5} = \dfrac{7}{5} \\ \text{ordonnée de } M = 2 - \dfrac{6}{5} = \dfrac{4}{5} \end{cases}$$

*Deuxième série d'exercices :*

## LE CALCUL VECTORIEL

### ☆ Exercice $III_{14}$ :




Dessine les vecteurs

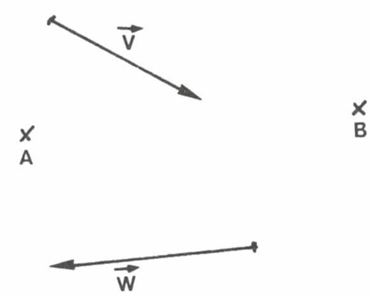
$\vec{V} + \vec{W}$

$\vec{V} - 2\vec{W}$

$2\vec{V} - 2\vec{W}$

$\frac{1}{3}\vec{V} + \frac{2}{3}\vec{W}$

### ☆ Exercice $III_{15}$ :




Dessine le point $M$ tel que

$\overrightarrow{AM} = 2\vec{V} + 4\vec{W}$ .

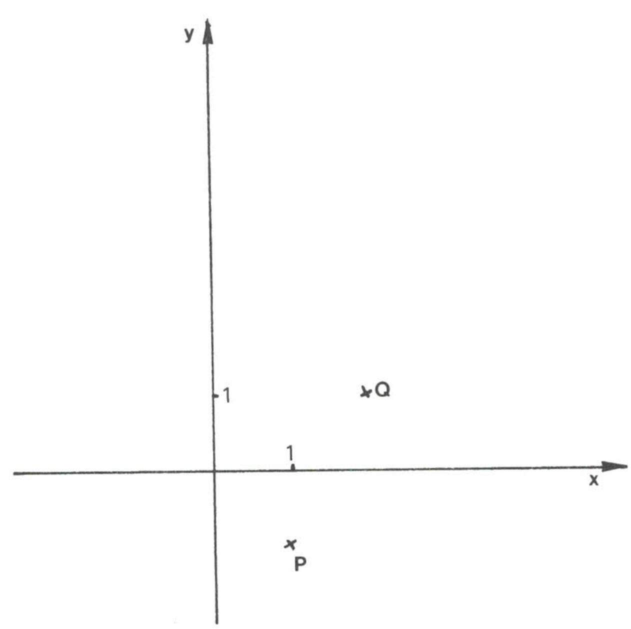
Dessine le point $P$ tel que

$\overrightarrow{BP} = 0,7\vec{V} + 0,4\vec{W}$ .

Dessine le point $Q$ tel que

$\overrightarrow{AQ} = \sqrt{2}\vec{V} - \sqrt{3}\vec{W}$

### ☆☆ Exercice $III_{16}$ :




Dans le repère orthonormé $(0x,0y)$ , $P$ a pour coordonnées $(1;-1)$ et $Q(2;1)$ .

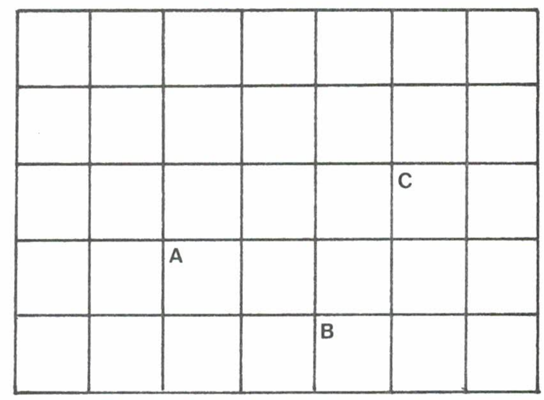
a) Le point $R$ est sur la droite $PQ$ , son abscisse est $3,2$ . Calcule l'abscisse et l'ordonnée de $\overrightarrow{PR}$ , puis l'ordonnée de $R$ .

b) Un point $S$ de la droite $PQ$ a pour ordonnée $Y$ . Calcule l'ordonnée de $\overrightarrow{QS}$ , puis son abscisse, puis l'abscisse de $S$ .

### ☆ Exercice $III_{17}$ :

*Recopie ce dessin sur une feuille de papier quadrillé.*

*Marque les points M, N, P,... tels que*




$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{CQ} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{BR} = 2\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{CS} = -2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$

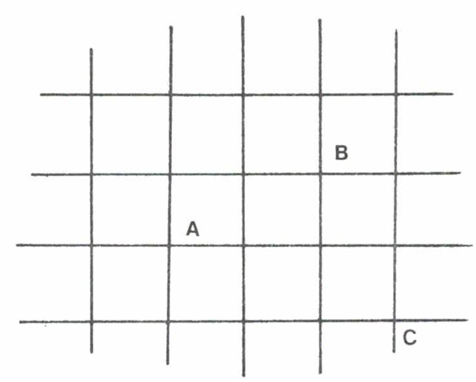
$\overrightarrow{AT} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CA}$

$\overrightarrow{AU} = -\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CA}$

$\overrightarrow{BV} = 2\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB}$

### ☆☆☆ Exercice $III_{18}$ :

*Dessine un carré de 12 cm de côté, et partage-le en 144 carrés de côté 1 cm . On obtient ainsi un quadrillage ayant 13 × 13 = 169 nœuds. On note A le centre du carré initial, et B et C les points situés comme l'indique le schéma ci-contre.*

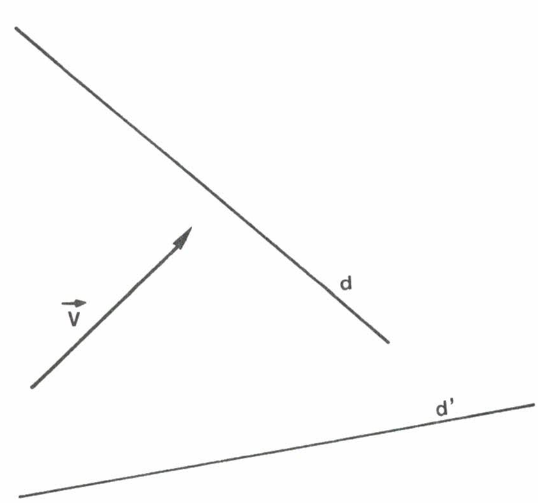



a) *Quels sont les points P du quadrillage pour lesquels il existe deux entiers (relatifs) m et n tels que* $\overrightarrow{AP} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC}$ *(chaque fois que tu trouves l'un de ces points tu lui donnes un nom, et tu détermines les entiers m et n correspondants) .*

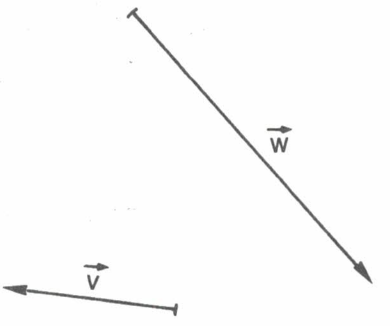
b) *Pour un point P il existe au plus un couple (m,n) tel que* $\overrightarrow{AP} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC}$ . *Pourquoi ?*

### ☆☆ Exercice $III_{19}$ :

*Décompose le vecteur* $\overrightarrow{V}$ *en la somme d'un vecteur* $\overrightarrow{X}$ *parallèle à d , et d'un vecteur* $\overrightarrow{X'}$ *parallèle à d' .*



☆ **Exercice $III_{20}$ :**




Dessine une flèche de vecteur $\vec{V} - \vec{W}$.

Dessine une flèche de vecteur $2\vec{V} - 3\vec{W}$.

Dessine une flèche de vecteur $1{,}7\vec{V} - 0{,}4\vec{W}$.

☆☆ **Exercice $III_{21}$ :** Etant donné 4 points A, B, C, D du plan, démontre que l'on a :

a) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$

b) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$

☆☆☆ **Exercice $III_{22}$ :** Etant donné 6 points A, B, C, D, E, F du plan, démontre que l'on a :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{EB}$$

☆☆☆ **Exercice $III_{23}$ :** Etant donné 4 points A, B, C, D du plan et les milieux I et J de AB et CD, démontre que l'on a $2\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$.

☆☆☆ **Exercice $III_{24}$ :** Dessine trois vecteurs $\vec{V}$, $\vec{W}$, $\vec{X}$ de même longueur, tels que

$$\vec{V} - \vec{W} = \vec{X}.$$

☆☆☆ **Exercice $III_{25}$ :** Dessine trois vecteurs $\vec{P}$, $\vec{Q}$, $\vec{R}$ de longueurs respectives 2, 4 et 5 cm, tels que $\vec{P} - \vec{R} = \vec{Q}$. Y a-t-il plusieurs solutions ?

☆☆☆ **Exercice $III_{26}$ :** Dessine trois vecteurs $\vec{X}$, $\vec{Y}$, $\vec{Z}$ tels que $\vec{Z}$ ait une longueur de 6 cm, que $\vec{X}$ et $\vec{Y}$ soient perpendiculaires, et que $\vec{Z} - \vec{Y} = \vec{X}$.

Est-il possible que $\vec{Y}$ ait une longueur de 4 cm ?

☆☆ **Exercice $III_{27}$ :** Simplifie les écritures suivantes :

$\vec{X} - 3\vec{Y} + 2\vec{X} - \vec{Y} =$

$2{,}7\vec{X} - \vec{Y} + 3{,}4\vec{X} - 2\vec{Y} =$

$3\vec{X} - 4\vec{Y} - 2\vec{X} + 3\vec{Z} =$ (sachant que $2\vec{X} + \vec{Y} - \vec{Z} = \vec{0}$)

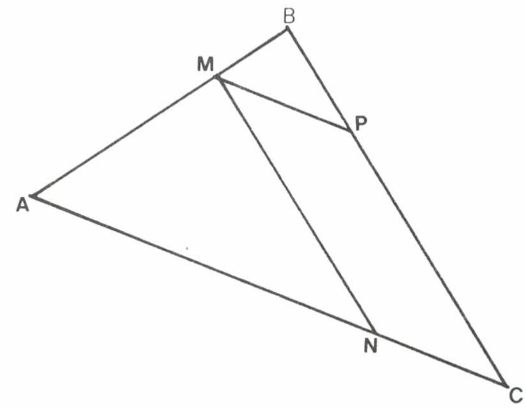
$7\vec{X} - 3(\vec{X} - \vec{Z}) + 2\vec{Y} =$ (sachant que $2\vec{X} - \vec{Y} + \vec{Z} = \vec{0}$)

☆ **Exercice $III_{28}$ :** *Dessine deux vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{W}$ de même longueur, et non parallèles. Dessine $\vec{X} = \vec{V} + \vec{W}$ et $\vec{Y} = \vec{V} - \vec{W}$. Explique pourquoi $\vec{X}$ et $\vec{Y}$ sont perpendiculaires.*

☆ **Exercice $III_{29}$ :** *Dessine un vecteur $\vec{V}$, puis dessine deux vecteurs $\vec{X}$ et $\vec{Y}$ tels que $\vec{X} - \vec{Y} = \vec{V}$, que $\vec{X}$ et $\vec{Y}$ soient perpendiculaires.*

*Le problème a-t-il plusieurs solutions ?*

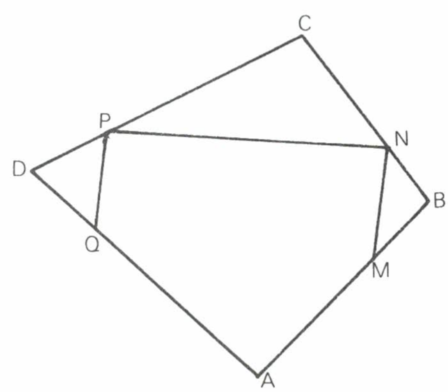
☆☆☆☆ **Exercice $III_{30}$ :**




*Sur le côté $AB$ du triangle $ABC$, on a choisi un point $M$. On a tracé $MP$ parallèle à $AC$, et $MN$ parallèle à $BC$.*

*Il existe des nombres $r$ et $s$ tels que $\overrightarrow{CP} = s\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{CN} = r\overrightarrow{CA}$. Explique pourquoi $r + s = 1$ ?*

☆☆☆☆ **Exercice $III_{31}$ :**




*On a tracé un quadrilatère $ABCD$. On a choisi un point $M$ tel que $\overrightarrow{AM} = r\overrightarrow{AB}$ $(0 < r < 1)$. Puis on a tracé $MN$ parallèle à $AC$, puis $NP$ parallèle à $BD$, puis $PQ$ parallèle à $AC$.*

*Explique pourquoi $\overrightarrow{CN} = r\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CP} = r\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AQ} = r\overrightarrow{AD}$. Puis explique pourquoi $MNPQ$ est un parallélogramme.*

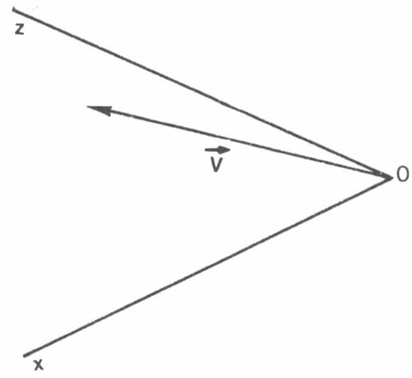
*Tout ceci reste-t-il vrai si $r > 1$, ou si $r < 0$ ?*

☆☆☆☆ **Exercice $III_{32}$ :** *Trace un vecteur $\vec{V}$ de longueur 4 cm. Trace deux vecteurs $\vec{W}$ et $\vec{X}$ tels que $\vec{W} + \vec{X} = \vec{V}$, et que la longueur de $\vec{W}$ soit double de celle de $\vec{V}$.*

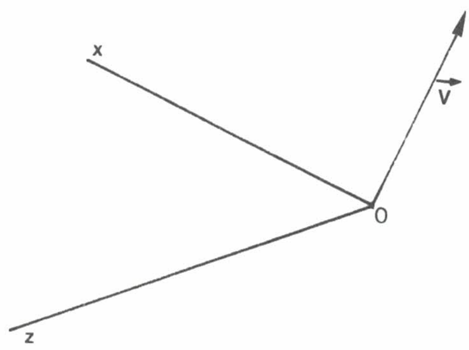
*Combien le problème a-t-il de solutions ? Est-il possible de faire en sorte que la longueur de $\vec{X}$ soit 3 cm ? qu'elle soit de 9 cm ? Est-il possible que $\vec{W}$ et $\vec{X}$ aient même direction ? Est-il possible qu'ils aient même azimut ?*

☆☆***Exercice III$_{33}$ :***

*Décompose le vecteur $\vec{V}$ en la somme d'un vecteur $\vec{X}$ d'azimut $0x$, et d'un vecteur $\vec{Z}$ d'azimut $0z$.*




*Est-ce encore possible lorsque la figure est celle-ci ?*

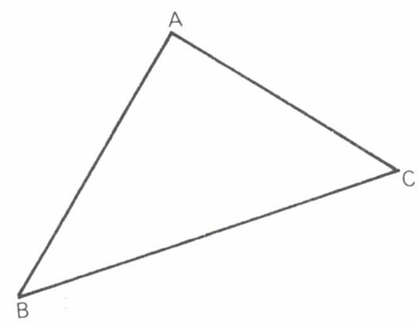



☆☆☆***Exercice III$_{34}$ :***

*Trace tous les points $M$ de la feuille tels que*

$\overrightarrow{AM} = n\overrightarrow{AB} + p\overrightarrow{BC} + q\overrightarrow{CA}$,

*où $n$, $p$ et $q$ sont des entiers (relatifs).*




*Si tu n'es pas certain de les avoir tous, démontre d'abord que ce sont les mêmes que les points $P$ tels que $\overrightarrow{AP} = r\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC}$ ($r$ et $s$ entiers relatifs) ; et cherche alors tous ceux qui correspondent à $r = 0$, $r = 1$, $r = -1$, $r = 2$, $r = -2$,...*

☆☆***Exercice III$_{35}$ :*** *Dans un repère orthogonal (unité 1 cm en abscisse et 2 cm en ordonnée), place les points $A(1;0)$, $B(3;4)$, $C(2;-1)$ et $D(4;3)$.*

*Démontre que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.*

*On appelle $E$ le point tel que $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{CD}$. Quelles sont les coordonnées de $E$ ?*

*Soit $I$, $J$ et $K$ les milieux de $AC$, $BD$ et $BE$. Démontre que $\overrightarrow{IJ} = 2\overrightarrow{JK}$.*

☆☆☆***Exercice III$_{36}$ :*** *Dans un repère orthonormé (unité 1 cm) on considère les points $A(2;1)$, $B(3;-2)$ et $C(3,5;4)$.*

*On donne un point $D(5;y)$. Comment faut-il choisir $y$, pour que $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ aient même azimut ?*

*On donne un point $E(0;z)$. Peut-on choisir $z$ de façon que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CE}$ aient même azimut ?*

☆☆☆**Exercice $III_{37}$ :** *Dans un repère orthonormé (unité 1 cm) on donne la droite $D$ d'équation $y = 2,5x + 3,5$ . On donne $A(1;3)$ , $B(3;1)$ et $C(1;0)$ . Trouver le point $M(x,y)$ de $D$ tel que $\overrightarrow{CM}$ soit parallèle à $\overrightarrow{AB}$ .*

☆**Exercice $III_{38}$ :** *Trace un segment $AB$ , puis trace un point $M$ tel que*

$$\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0}$$

*(tu peux montrer d'abord que $4\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB}$) . Combien existe-t-il de tels points $M$ ?*

☆**Exercice $III_{39}$ :** *Trace un segment $AB$ puis place les points $P$ et $Q$ tels que*

$$2\overrightarrow{PA} + 3\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{0} \quad \text{et} \quad 2\overrightarrow{QA} - 3\overrightarrow{QB} = \overrightarrow{0}$$

*(en t'inspirant de $III_{38}$ , détermine $u$ et $v$ tels que $\overrightarrow{AP} = u\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AQ} = v\overrightarrow{AB}$) .*

☆☆**Exercice $III_{40}$ :** *Dans un repère orthonormé (unité 0,5 cm) on donne les points $A(6;7)$ , $B(-6;-9)$ et $C(11;-5)$ . Fais la figure.*

*Place les points $M$, $N$, $P$ et calcule leurs coordonnées sachant que*

$$\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0}, \ \overrightarrow{NB} + 3\overrightarrow{NC} = \overrightarrow{0} \ \text{et} \ 6\overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PA} = \overrightarrow{0}.$$

*Que remarques-tu ? Vérifie que c'est exact en calculant les coordonnées de $\overrightarrow{MN}$ et de $\overrightarrow{NP}$ .*

☆☆☆**Exercice $III_{41}$ :** *Trace un triangle $ABC$ ; puis choisis un nombre $u$ (différent de 1) , et trace le point $K$ tel que $\overrightarrow{AK} = u\overrightarrow{AB} + (1 - u)\overrightarrow{AC}$ . Que remarques-tu ?*

*Calcule $\overrightarrow{BK}$ , et vérifie ainsi ce que tu avais pu remarquer sur le dessin.*

☆☆**Exercice $III_{42}$ :** *Trace un triangle $ABC$ . Place les points $I$, $J$, $K$ définis par*

$$\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \ , \ \overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \ \text{et} \ \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{BC}$$

*Démontre que $IJK$ sont alignés (pour cela, recherche des nombres $u$, $v$, $u'$, $v'$ tels que $\overrightarrow{IJ} = u\overrightarrow{AB} + v\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{IK} = u'\overrightarrow{AB} + v'\overrightarrow{AC}$) .*

☆☆ **Exercice $III_{43}$ :** *On considère des points $P$, $Q$, $R$ du plan. On définit les points $A$, $B$, $C$ par $\overrightarrow{PA} = 2\overrightarrow{PQ} + \frac{1}{2}\overrightarrow{QR}$ , $\overrightarrow{PB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{PR})$ et $\overrightarrow{PC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{RQ} - 2\overrightarrow{PR}$ .*

*a)* *Exprime $\overrightarrow{PA}$ , $\overrightarrow{PB}$ , $\overrightarrow{PC}$ sous la forme $u\overrightarrow{PQ} + v\overrightarrow{PR}$ .*

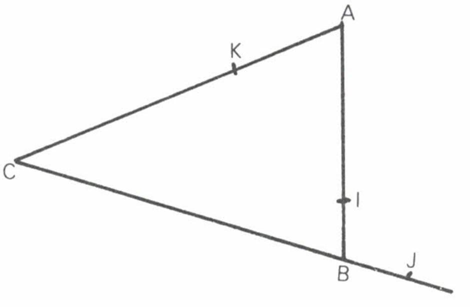
*b)* *Démontre que $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ .*

☆☆ **Exercice III$_{44}$ :** *Trace un triangle $ABC$. Marque les milieux $I$ et $J$ des segments $AB$ et $AC$.*

*Construis le point $K$ tel que $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AJ}$. Que remarques-tu ?*

*Démontre que $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$ et que $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$. Cela doit te permettre de démontrer que $K$ est le milieu du segment $BC$.*

☆☆☆ **Exercice III$_{45}$ :**




*Sur les côtés d'un triangle $ABC$ on a marqué $I$ tel que $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$, $J$ tel que $\overrightarrow{BJ} = -\frac{1}{5}\overrightarrow{BC}$ et $K$ tel que*

$$\overrightarrow{CK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CA}.$$

a) *Démontre que $\overrightarrow{KI} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$.*

b) *Démontre que $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{5}\overrightarrow{BC}$ ; puis démontre que $\overrightarrow{IJ} = \frac{9}{20}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$.*

c) *Démontre que les points $I$, $J$, $K$ sont alignés.*

☆☆ **Exercice III$_{46}$ :** *Soit $ABC$ un triangle. Trace le point $M$ tel que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ ; puis trace le point $I$ tel que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$. Qu'est-ce que le point $I$ ?*

☆☆ **Exercice III$_{47}$ :** *Soit $ABC$ un triangle. Trace le point $M$ tel que $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ ; puis trace le point $J$ tel que $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{3}(2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$. Que remarques-tu ?*

*Démontre que $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$. Cela te permet-il de démontrer ce que tu avais remarqué ?*

☆☆ **Exercice III$_{48}$ :** *Dessine trois points $A$, $B$, $C$. Puis dessine un point $I$ tel que*

$$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}.$$

*Combien existe-t-il de tels points ?*

*Dessine ensuite un point $J$ tel que $\overrightarrow{JC} + 2\overrightarrow{JI} = \vec{0}$. Démontre que $\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JB} + \overrightarrow{JC} = \vec{0}$. Combien existe-t-il de points vérifiant cette dernière propriété ?*

☆☆ **Exercice $III_{49}$ :** Dessine quatre point $A$, $B$, $C$, $D$. Dessine le point $I$ tel que

$$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}.$$

Dessine le point $J$ tel que $\overrightarrow{JC} + \overrightarrow{JD} = \vec{0}$. Dessine le point $K$ tel que $\overrightarrow{KI} + \overrightarrow{KJ} = \vec{0}$.

Démontre que $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{KD} = \vec{0}$. Combien existe-t-il de points $K$ vérifiant cette relation ?

☆☆☆ **Exercice $III_{50}$ :** Dessine 4 points $A$, $B$, $C$, $D$. Dessine le point $I$ barycentre de $A$ affecté du coefficient 1 et de $B$ affecté du coefficient 2. Dessine le point $J$ barycentre de $C$ affecté du coefficient 1 et de $D$ affecté du coefficient 3. Dessine le point $K$ tel que $3\overrightarrow{KI} + 4\overrightarrow{KJ} = \vec{0}$.

Démontre que $\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} + 3\overrightarrow{KD} = \vec{0}$. Combien existe-t-il de points vérifiant cette relation ?

☆☆ **Exercice $III_{51}$ :** Soient 2 points $A$ et $B$, et soit $I$ le barycentre de $A$ muni du coefficient $-2$ et de $B$ muni du coefficient 1. Fais une figure. Démontre que, pour tout point $M$, on a $\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MA}$.

☆☆☆ **Exercice $III_{52}$ :** Soit un triangle $ABC$, et soient $A'$, $B'$, $C'$ les milieux de $BC$, $CA$, $AB$.

a) Démontre que $2\overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$, $2\overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{BC} = \vec{0}$ et $2\overrightarrow{C'A'} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$.

b) Soit $M$ un point quelconque du plan. Soient $A''$, $B''$, $C''$ les symétriques de $M$ par rapport à $A'$, $B'$, $C'$. Démontre que $\overrightarrow{A''B''} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$, $\overrightarrow{B''C''} + \overrightarrow{BC} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{C''A''} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$. En déduire que les segments $AA''$, $BB''$ et $CC''$ ont même milieu.

☆☆☆☆ **Exercice $III_{53}$ :**

a) Trace un triangle $ABC$. Trace le milieu $I$ de $AB$. Trace le point $J$ tel que $\overrightarrow{CJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CI}$. Trace le point $K$ tel que $\overrightarrow{CK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$. Que constates-tu ?

b) Démontre que l'on a $2\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$. Détermine $u$ et $v$ tels que
$$\overrightarrow{CJ} = u\overrightarrow{CA} + v\overrightarrow{CB}.$$

c) Détermine $x$ et $y$ tels que $\overrightarrow{KJ} = x\overrightarrow{CA} + y\overrightarrow{CB}$. Détermine $X$ et $Y$ tels que
$$\overrightarrow{KA} = X\overrightarrow{CA} + Y\overrightarrow{CB}.$$

d) Peux-tu maintenant écrire une égalité vectorielle qui prouve ce que tu avais constaté ? Cette égalité vectorielle donne-t-elle des renseignements supplémentaires ?

☆☆☆**Exercice III$_{54}$ :**

a) Trace un triangle $ABC$. Trace $M$ tel que $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ ? Trace $P$ tel que $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$. Trace $N$ tel que $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AM}$. Que constates-tu ?

b) Démontre que $\overrightarrow{BN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$. Cela explique-t-il ce que tu avais constaté ? Quels renseignements supplémentaires as-tu ainsi obtenus ?

c) Compare les aires des triangles $ABC$ et $MNB$. Compare les aires des triangles $NPC$ et $ABC$. Compare l'aire du triangle $MNB$ et celle du parallélogramme $MNPA$.

☆☆☆**Exercice III$_{55}$ :** Dans un triangle $ABC$, on note $I$ le milieu de $BA$ et $J$ le milieu de $CI$.

Détermine $x$ et $y$ tels que $\overrightarrow{IJ} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$.

☆☆☆**Exercice III$_{56}$ :**

a) Trace un triangle $ABC$. Trace $J$ tel que $\overrightarrow{AJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$. Trace $K$ tel que $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. Trace $L$ tel que $C$ soit le milieu de $AL$. Que constates-tu ?

b) Démontre que $\overrightarrow{JK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$.

c) Démontre que $\overrightarrow{KL} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}$.

d) Peux-tu maintenant expliquer ce que tu avais constaté ? Quels renseignements supplémentaires as-tu obtenus ?

☆☆☆☆**Exercice III$_{57}$ :**

a) Trace un triangle $ABC$. Trace $M$ barycentre de $B$ affecté du coefficient $1$ et de $C$ affecté du coefficient $\frac{1}{3}$.

b) Trace $J$ tel que $\overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$. On appelle $K$ le point d'intersection de $JM$ et $AB$.

c) Démontre que $JM$ et $AC$ sont parallèles. Puis démontre que $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{KA}$.

d) Démontre que $MK = \frac{1}{4}CA = \frac{1}{3}KJ$.

e) On donne deux droites $D_1$ et $D_2$ passant par $A'$, et un point $M'$ non situé sur ces droites. On cherche à construire $B'$ sur $D_1$ et $C'$ sur $D_2$ tels que $\overrightarrow{B'M'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{M'C'}$. Déduire des questions précédentes une construction de $B'$ et $C'$.

☆☆☆ **Exercice $III_{58}$ :** *Trace un triangle ABC .*

a) Place le point $M$ tel que $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, et le point $N$ tel que $\overrightarrow{BN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

b) Démontre que $\overrightarrow{MN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

c) Place le point $I$ tel que $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AN}$.

d) Détermine $u$ et $v$ tels que $\overrightarrow{AI} = u\overrightarrow{AC} + v\overrightarrow{CB}$.

e) Détermine $w$ et $x$ tels que $\overrightarrow{CI} = w\overrightarrow{CA} + x\overrightarrow{CB}$.

f) Démontre que $C$, $I$ et $M$ sont alignés.

☆☆☆☆ **Exercice $III_{59}$ :** *Trace un triangle ABC .*

a) Place les points $M$ tel que $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{MC}$ et $I$ tel que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AM}$.

b) Détermine $u$ et $v$ tels que $\overrightarrow{AI} = u\overrightarrow{AB} + v\overrightarrow{BC}$.

c) Détermine $w$ et $x$ tels que $\overrightarrow{CI} = w\overrightarrow{BA} + x\overrightarrow{CB}$.

d) Détermine $z$ pour que le point $N$ défini par $\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{CB} + z\overrightarrow{BA}$ soit aligné avec $C$ et $I$.

☆☆☆ **Exercice $III_{60}$ :** *Trace un triangle ABC .*

a) Place le point $D$ tel que $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.
Place le point $M$ tel que $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

b) Détermine $u$ et $v$ tels que $\overrightarrow{AM} = u\overrightarrow{AB} + v\overrightarrow{AC}$.

c) Démontre que $A$, $M$ et $D$ sont alignés.

☆☆☆ **Exercice $III_{61}$ :** On considère 4 points $A, B, C, D$ tels que $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$. On considère le point $I$ tel que $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{0}$.

Démontre que $B$ est le milieu du segment $ID$.

☆☆☆☆ **Exercice $III_{62}$ :** Etant donné un point $0$, dessine 3 points $A, B, C$ tels que

$$\overrightarrow{0A} + \overrightarrow{0B} + \overrightarrow{0C} = \overrightarrow{0} \quad \text{et} \quad \frac{0A}{3} = \frac{0B}{2} = \frac{0C}{4}.$$

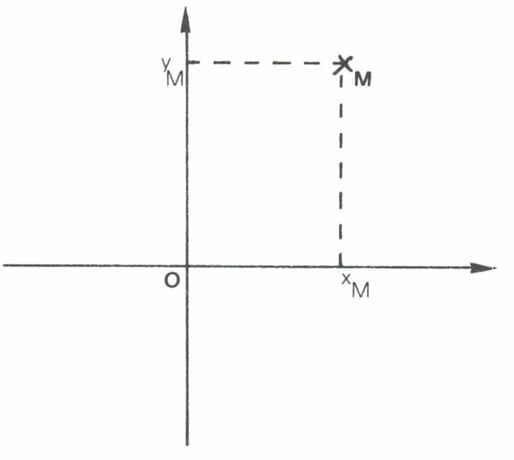
☆☆☆☆ **Exercice $III_{63}$ :** Etant donné un point $0$, dessine trois points $A, B, C$ tels que

$$\overrightarrow{0A} + \overrightarrow{0B} + \overrightarrow{0C} = \overrightarrow{0} \quad \text{et} \quad 0A^2 + 0B^2 = 0C^2$$

# *Série 3 : LE REPERAGE POLAIRE*

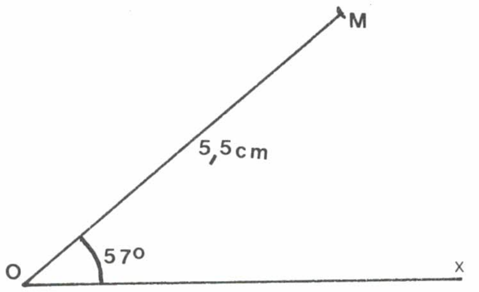
## *LE SENS DIRECT*

*Supposons donné un repère orthonormé (Ox,Oy) . Pour dire où se trouve un point M du plan nous pouvons donner ses coordonnées x et y . Cette procédure n'est pas toujours très commode. Imaginons en effet un observateur situé en O ; pour lui les coordonnées x et y ne sont pas directement mesurables. Il préfèrera probablement situer M en disant*




* *Vers où il faut tourner les yeux pour voir M (on suppose ici $M \neq O$) . Autrement dit il indiquera l'azimut de $\overrightarrow{OM}$ .*

* *A quelle distance de O se trouve M ?*




*C'est le principe du repérage polaire. Mais comment repérer un azimut au moyen d'un nombre ? La méthode la plus simple est de choisir un azimut origine Ox , et de mesurer l'angle de l'azimut donné, avec Ox .*

*Exemple : Au point M de la figure ci-dessus on associe $\widehat{xOm} = 57°$ et $OM = 5{,}5$ cm.*

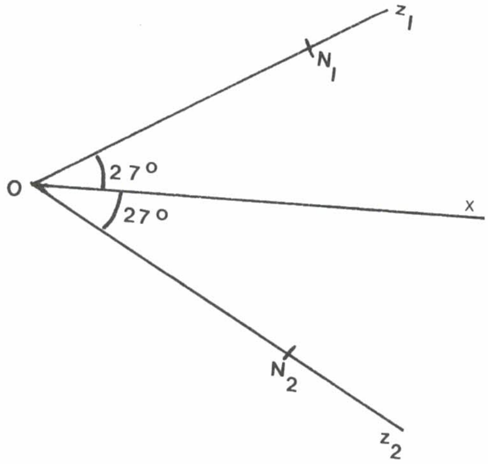
**Une ambiguité** : *Supposons que l'on sache que $\widehat{xON} = 27°$ et $ON = 4{,}1$ cm . Pouvons-nous construire le point N ?*

*Il existe deux demi-droites $Oz_1$ et $Oz_2$ telles que :*

$$\widehat{xOz_1} = \widehat{xOz_2} = 27°$$

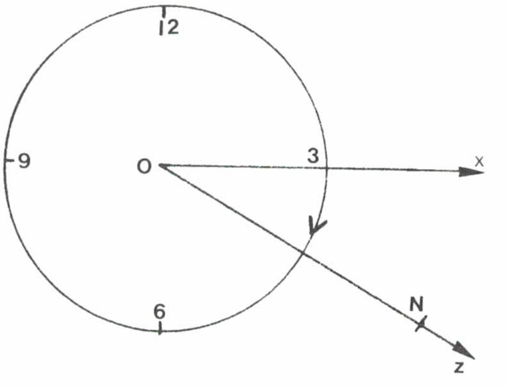
*Elles sont symétriques par rapport à la droite Ox .*

*Sur $Oz_1$ il existe un unique point $N_1$ tel que $ON_1 = 4{,}1$ cm .*

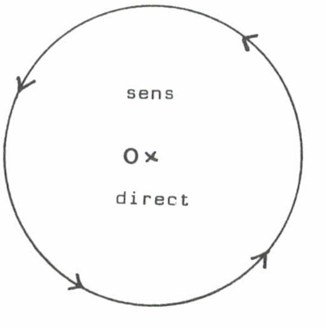


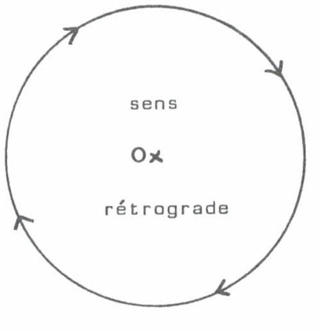
*Sur $Oz_2$ il existe un unique point $N_2$ tel que $ON_2 = 4{,}1$ cm . Et rien ne nous permet de savoir si $N$ est le point $N_1$, ou le point $N_2$ !!*

*Par contre, si je dis que pour amener la demi-droite $Ox$ sur la demi-droite $ON$ , je l'ai fait tourner de $27°$ , dans le sens des aiguilles d'une montre, je sais que $N = N_2$ .*




***Le sens direct :*** *Par convention (c'est une convention universellement admise, que tu dois retenir) , nous dirons que nous tournons dans le **sens direct** (ou **sens trigonométrique**) si nous tournons autour de $O$ dans le sens indiqué sur la figure ci-contre.*

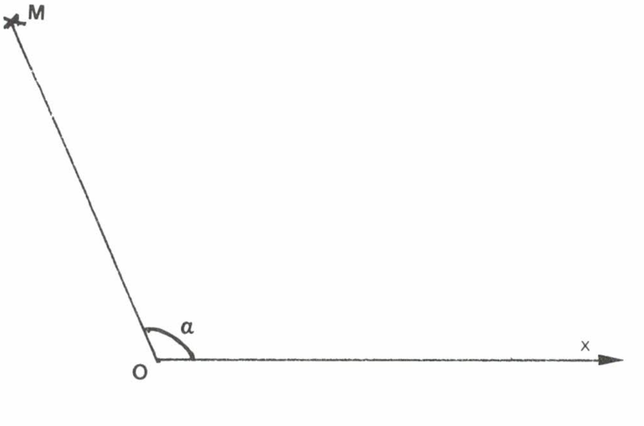



*Le sens de rotation opposé, est appelé **sens rétrograde,** ou **sens indirect .** Remarquons que les aiguilles d'une montre tournent dans le sens indirect.*

## *LA MESURE PRINCIPALE D'UN ANGLE*

*Un point $M$ étant donné (distinct de $O$) , nous pouvons amener $Ox$ sur la demi-droite $OM$*




* *soit en tournant de $\alpha°$ $(0 < \alpha \leq 180)$ dans le sens direct. Nous écrirons alors*

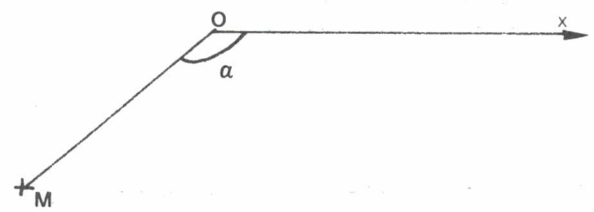
$$mp(\widehat{Ox,\overrightarrow{OM}}) = \alpha°$$

*Ce qui se lit : " la mesure principale de l'angle orienté de Ox et de (l'azimut de) OM est $\alpha^o$ ".*

* *soit en tournant de $\alpha^o$ $(0<\alpha<180)$ dans le sens indirect. Nous écrirons alors*

$$mp(\widehat{Ox,\overrightarrow{OM}}) = -\alpha^o$$

*Ce qui se lit : " la mesure principale de l'angle orienté de Ox et de (l'azimut de) $\overrightarrow{OM}$ est $-\alpha^o$ ".*




***A tout point M (distinct de O) sont ainsi associés deux nombres :***

**1)** ***la mesure principale de l'angle de Ox et de $\overrightarrow{OM}$. Et on a***

$$-180 < mp(\widehat{Ox;\overrightarrow{OM}}) \leq 180$$

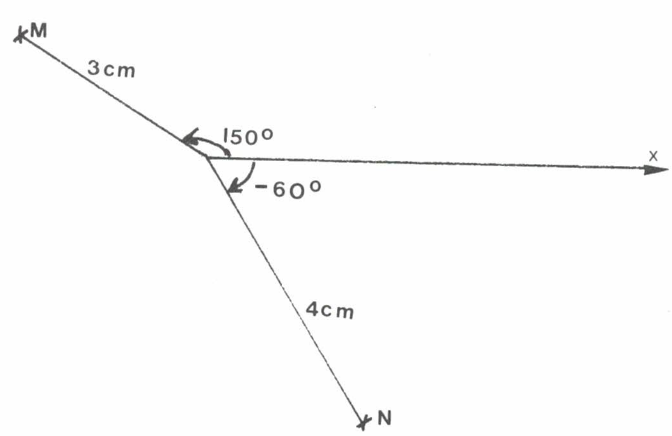
**2)** ***la mesure (avec l'unité de longueur choisie) de la longueur 0M. Ce nombre est strictement positif.***
***Les deux nombres OM et mp(Ox,OM) sont appelés les éléments polaires principaux de M.***

*Exemple :*

*Sur cette figure*

$$\begin{cases} mp(\widehat{Ox,\overrightarrow{OM}}) = 150^o \\ OM = 3 \text{ cm} \end{cases}$$

$$\begin{cases} mp(\widehat{Ox,\overrightarrow{ON}}) = -60^o \\ ON = 4 \text{ cm} \end{cases}$$




**PLUS GENERALEMENT**

*Soient A et B deux points distincts de O. Nous dirons que la mesure principale de l'angle orienté de $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ est $\alpha^o$ (ce que nous noterons $mp(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}) = \alpha^o$) si :*

*En faisant tourner la demi-droite OA de $|\alpha|^o$ dans le sens direct si $\alpha > 0$ (et dans le sens indirect si $\alpha < 0$) on l'amène sur la demi-droite OB.*

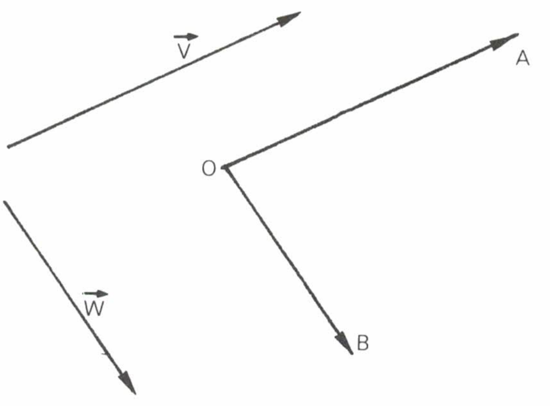
*Bien sûr $-180 < \alpha \leq 180$.*

Nous écrirons aussi (pour deux vecteurs non nuls $\vec{V}$ et $\vec{W}$)

$$mp(\widehat{\vec{V},\vec{W}}) = \alpha^o .$$

Ceci signifie que si nous choisissons un point O , et si nous dessinons A et B tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{V}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{W}$, nous avons :

$$mp(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}) = \alpha^o$$




Exercice :

. Si $mp(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}) = 35^o$, alors $mp(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}}) = ?$

. Si $mp(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}) = 180^o$ , alors $mp(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}}) = ?$

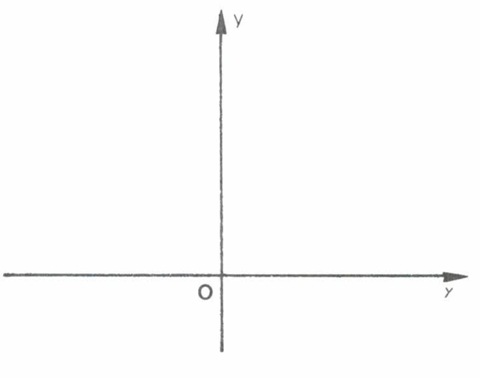
## *REPERES ORTHONORMES DIRECTS*

Soit un repère orthonormé (Ox,Oy) (Ox et Oy désignent les demi-droites positives des deux axes) . Alors

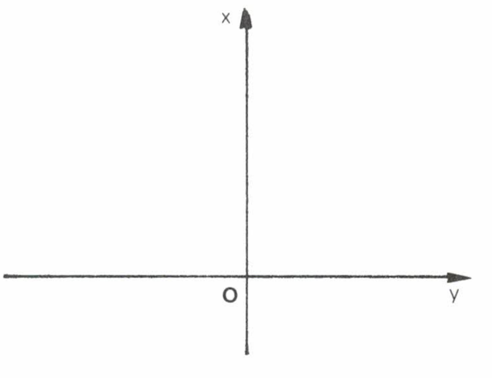
ou bien $mp(\widehat{Ox,Oy}) = 90^o$

ou bien $mp(\widehat{Ox,Oy}) = -90^o$

Nous dirons que le repère (Ox,Oy) est direct si $mp(\widehat{Ox,Oy}) = 90^o$ .




(Ox,Oy) est orthonormé direct




(Ox,Oy) est orthonormé indirect

Mais attention, si (Ox,Oy) est direct, (Oy,Ox) ne l'est pas !

## *LES MESURES EN RADIANS*

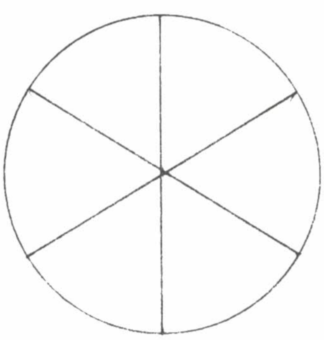
*Il existe trois unités d'angles :*

- * *Le degré que tu as coutume d'utiliser. Notons cependant qu'actuellement on subdivise le degré en dixièmes, centièmes,... de degrés ; alors que, jadis, on utilisait comme sous-unités la minute d'arc (1/60 de degré) et la seconde d'arc (1/60 de minute d'arc) . Ces subdivisions, héritées de la civilisation caldéenne, ont fort heureusement été abandonnées.*

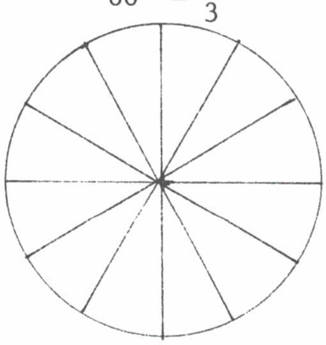
- * *Le grade (un tour vaut 400 grades ; un angle droit vaut 100 grades) . C'est l'unité du système métrique ; c'est l'unité officielle. Elle est peu employée.*

- * *Le radian ; c'est l'unité utilisée par les mathématiciens. Un demi-tour vaut $\pi$ radians ($180° = \pi$ rad) . Si les mathématiciens utilisent le radian comme unité d'angle ce n'est pas seulement par habitude, c'est parce qu'il simplifie certains calculs. Ce sont des calculs que tu n'apprendras pas à faire avant la classe de première, et il est impossible de te montrer ici lesdites simplifications.*

Conversion des mesures :

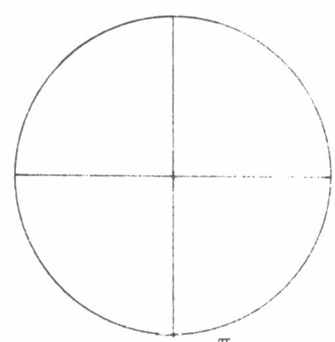


$60° = \frac{\pi}{3}$

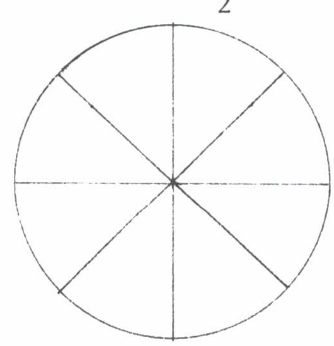


$30° = \frac{\pi}{6}$

| *Degrés* | *Radians* | *Grades* |
|---|---|---|
| 90 | $\frac{\pi}{2}$ | 100 |
| 45 | $\frac{\pi}{4}$ | 50 |
| 135 | $\frac{3\pi}{4}$ | 150 |
| 30 | $\frac{\pi}{6}$ | 33,33· · · |
| 60 | $\frac{\pi}{3}$ | 66,66· · · |
| 120 | $\frac{2\pi}{3}$ | 133,33· · · |
| 150 | $\frac{5\pi}{6}$ | 166,66· · · |
| 180 | $\pi$ | 200 |



$90° = \frac{\pi}{2}$



$45° = \frac{\pi}{4}$

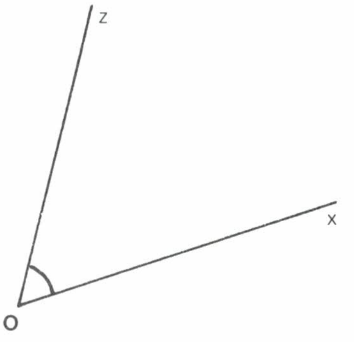
*On remarquera que, lorsqu'on mesure en radians, $mp(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})$ est un nombre strictement supérieur à $-\pi$ , et inférieur ou égal à $\pi$ .*

***Convention :*** ***Puisque le radian est l'unité la plus couramment utilisée, nous ferons la convention suivante : chaque fois que l'unité employée est le radian, nous n'indiquons pas l'unité ; en contrepartie lorsque nous utilisons le degré ou le grade nous indiquons soigneusement l'unité (° pour degré et gr pour grade).***

*Ainsi " $mp(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}) = 1,4$ " signifie " $mp(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}) = 1,4$ rad ".*

### *LES DIFFERENTES MESURES D'UN ANGLE ORIENTE*

*Dans ce qui suit nous mesurons les angles en radians, sauf mention expresse d'une autre unité.*




*Sur la figure ci-contre on a tracé des demi-droites Ox et Oz telles que $mp(\widehat{Ox,Oz}) = \pi/3$.*

*Essayons de tracer Oz' telle que $(\widehat{Ox,Oz'}) = 7\pi/3$, c'est-à-dire de tracer la demi-droite Oz' obtenue en faisant tourner Ox de $7\pi/3$ dans le sens direct.*
*Pour tourner de $7\pi/3$, nous tournerons d'abord de $6\pi/3$, ce qui amènera Ox sur elle-même ; il restera alors à tourner de $\pi/3$, ce qui amènera Ox sur Oz. Donc $Oz' = Oz$.*

*Nous aurions obtenu le même résultat en remplaçant $7\pi/3 = 2\pi + \pi/3$ par $2 \times 2\pi + \pi/3$, ou par $3 \times 2\pi + \pi/3$,...*

*Essayons de tracer Oz" telle que $(\widehat{Ox,Oz''}) = -5\pi/3$, c'est-à-dire de tracer la demi-droite Oz" obtenue en faisant tourner Ox de $5\pi/3$ dans le sens rétrograde. Nous pouvons tourner d'abord de $2\pi$ dans le sens rétrograde, ce qui amène 0x sur elle-même, puis (étant donné que "nous sommes allés trop loin") nous tournerons de $\pi/3$ dans l'autre sens (c'est-à-dire dans le sens direct), ce qui amène Ox sur Oz. Donc $Oz'' = Oz$. Nous obtiendrions le même résultat en remplaçant $-5\pi/3 = -2\pi + \pi/3$ par $-4\pi + \pi/3$, ou par $-6\pi + \pi/3$,...*

***Ainsi à tout nombre $u$ nous pouvons associer une demi-droite $Oz$ obtenue :***

- ***en faisant tourner $Ox$ de $|u| = u$ radians dans le sens direct si $u \geq 0$ ,***
- ***en faisant tourner $Ox$ de $|u| = -u$ radians dans le sens rétrograde si $u < 0$ .***

***Nous dirons que $u$ est une mesure (en radians) de l'angle orienté des azimuts de $Ox$ et de $Oz$ .***

*Mais si $u_1 - u_2$ est un multiple de $2\pi$ , les demi-droites $Oz_1$ et $Oz_2$ telles que $(\widehat{Ox,Oz_1}) = u_1$ et $(\widehat{Ox,Oz_2}) = u_2$ sont confondues. Ainsi tout angle $(\widehat{Ox,Oz})$ a une mesure principale $u$ $(-\pi < u \leq \pi)$ , et une infinité d'autres mesures ; ces mesures sont les nombres de la forme $u + k \times 2\pi$ ($k$ entier positif ou négatif).*

***Notation :*** *Lorsque $u$ est une mesure de $(Ox,Oz)$ nous noterons*

$$(\widehat{Ox,Oz}) = u \pmod{2\pi}$$

*Ce qui se lit " **l'angle orienté $(\widehat{Ox,Oz})$ a pour mesure $u$ (radians) modulo $2\pi$** ".*

*De même, lorsqu'on mesure en degrés, un angle a une infinité de mesures ; deux d'entre elles diffèrent d'un multiple entier de 360 .*

*Troisième série d'exercices :*

## LE REPERAGE POLAIRE

☆ ***Mesures principales :***

***Exercice*** $III_{64}$ : *Trace une origine 0 , et un azimut origine 0x . Place le point A d'éléments polaires principaux 0A = 7 cm et* $mp(\widehat{\overrightarrow{0x},\overrightarrow{0A}}) = 70°$ .

*Trace le point A' symétrique de A par rapport à la droite 0x ; que valent 0A' et* $mp(\widehat{\overrightarrow{0x},\overrightarrow{0A'}})$ ?

*Que valent* $mp(\widehat{\overrightarrow{0A},\overrightarrow{0A'}})$ *et* $mp(\widehat{\overrightarrow{0A'},\overrightarrow{0A}})$ ?

☆ ***Exercice*** $III_{65}$ : *Trace un repère orthonormé direct (unité 1 cm) . Place le point P tel que 0P = 4 et* $mp(\widehat{\overrightarrow{0x},\overrightarrow{0P}}) = -75°$ . *Place le point Q d'éléments polaires principaux 0Q = 4 et* $mp(\widehat{\overrightarrow{0x},\overrightarrow{0Q}}) = 175°$ .

*Soit I le milieu du segment PQ . Quels sont les éléments polaires principaux du point I ? (Tu peux les mesurer, mais un calcul te donnera un résultat plus précis).*

☆☆☆ ***Exercice*** $III_{66}$ : *Trace une origine 0 , et un azimut origine 0x . Place le point P d'éléments polaires principaux 0P = 5 cm et* $mp(\widehat{\overrightarrow{0x},\overrightarrow{0P}}) = 135°$. *Dessine la demi-droite 0z telle que* $mp(\widehat{0x,0z}) = -150°$ .

*Dessine le point Q symétrique de P par rapport à la droite 0z . Quels sont les éléments polaires principaux de Q ?*

*Soient* $R_1$ *et* $R_2$ *les points tels que* $PQR_1$ *et* $PQR_2$ *soient des triangles équilatéraux. Dessine* $R_1$ *et* $R_2$ . *Quels sont leurs éléments polaires principaux ? Tu peux les mesurer, puis obtenir un résultat plus précis, ou même le résultat exact, par le calcul.*

☆ ***Exercice*** $III_{67}$ : *Trace une origine 0 , et un azimut origine 0x . Place le point A d'éléments polaires principaux 0A = 6 cm et* $mp(\widehat{\overrightarrow{0x},\overrightarrow{0A}}) = 55°$ .

*Soit A' le symétrique de A par rapport à 0 ; quels sont les éléments polaires principaux de A' ?*

☆ ***Exercice*** $III_{68}$ : *Trace une origine 0 et un azimut origine 0x .*

*Place le point A tel que 0A = 6 cm et* $mp(\widehat{\overrightarrow{0x},\overrightarrow{0A}}) = -53°$ .

*Place le point B tel que* $mp(\widehat{\overrightarrow{0A},\overrightarrow{0B}}) = 120°$ *et 0B = 6 cm .*

*Quels sont les éléments polaires principaux du milieu I du segment AB ? Tu peux les mesurer sur le dessin, puis calcule leur valeur exacte.*

☆ **Exercice** $III_{69}$ : *Trace un repère orthonormé direct* $(0x,0y)$ . *Place les points* $A$ *de coordonnées* $(0;4)$ *et* $B$ *de coordonnées* $(4;0)$ .

*Quels sont les éléments polaires principaux du milieu* $I$ *du segment* $AB$ *?*

☆☆☆ **Exercice** $III_{70}$ : *Trace un repère orthonormé direct* $(0x,0y)$ *(unité 1 cm). Place le point* $A$ *tel que* $0A = 5$ *et* $mp(\widehat{0x,\overrightarrow{0A}}) = 147°$ . *Place le point* $A'$ *défini par* $0A' = 5$ *et* $mp(\widehat{0x,\overrightarrow{0A'}}) = -171°$ . *Place le point* $B$ *de coordonnées* $(0;3)$ .

*Dessine le point* $B'$ *symétrique de* $B$ *par rapport à la médiatrice du segment* $AA'$ . *Quels sont les éléments polaires principaux de* $B'$ *?*

☆☆☆ **Exercice** $III_{71}$ : *Trace un repère orthonormé direct* $(0x,0y)$ . *Place le point* $A$ *de coordonnées* $(3;-3)$ . *Place le point* $B$ *tel que* $0B = 4$ *et* $mp(\widehat{\overrightarrow{0A},\overrightarrow{0B}}) = -150°$ . *Place le point* $C$ *tel que* $0C = 5$ *et* $mp(\widehat{\overrightarrow{0B},\overrightarrow{0C}}) = 45°$ . *Place le point* $D$ *tel que* $0D = 6$ *et* $mp(\widehat{\overrightarrow{0C},\overrightarrow{0D}}) = 60°$ .

*Quelles sont les coordonnées de* $D$ *?*

☆ **Exercice** $III_{72}$ : *Trace une origine* $0$ , *et un azimut origine* $0x$ . *Place* $A$ *tel que* $0A = 4$ cm *et* $mp(\widehat{0x,\overrightarrow{0A}}) = 60°$ . *Place* $B$ *tel que* $0B = 6$ cm *et* $mp(\widehat{\overrightarrow{0B},\overrightarrow{0A}}) = 120°$ . *Que vaut* $mp(\widehat{0x,\overrightarrow{0B}})$ *?*

☆ **Exercice** $III_{73}$ : *Trace trois demi-droites* $0x$ , $0y$ , $0z$ *telles que* $mp(\widehat{0x,0y}) = 120°$ *et* $mp(\widehat{0z,0x}) = 150°$ . *Que vaut* $mp(\widehat{0y,0z})$ *?*

☆ **Exercice** $III_{74}$ : *Trace quatre demi-droites* $0t$ , $0u$ , $0v$ , $0w$ *telles que* $mp(\widehat{0t,0u}) = 60°$ , $mp(\widehat{0v,0u}) = 150°$ , $mp(\widehat{0v,0w}) = 45°$ . *Que vaut* $mp(\widehat{0w,0t})$ *?*

☆ **Exercice** $III_{75}$ : *Trace des demi-droites* $0x_1$ , $0x_2$ , $0x_3$ ,... *telles que* $mp(\widehat{0x_1,0x_2}) = 50°$ , $mp(\widehat{0x_2,0x_3}) = 50°$ , $mp(\widehat{0x_3,0x_4}) = 50°$ ,... *Que vaut* $mp(\widehat{0x_6,0x_1})$ *?*

***Mesures en radians :***

☆☆ **Exercice** $III_{76}$ : *Place les points* $M$ *tel que* $0M = 3$ cm *et* $mp(\widehat{0x,\overrightarrow{0M}}) = +\pi/5$ *et* $N$ *tel que* $0N = 3$cm *et* $mp(\widehat{0x,\overrightarrow{0N}}) = -54°$ . *La médiatrice du segment* $MN$ *coupe en* $A$ *et* $B$ *le cercle centré à l'origine et de rayon* 2 cm . *Donne les mesures principales de* $(\widehat{0x,\overrightarrow{0A}})$ *et de* $(\widehat{0x,\overrightarrow{0B}})$ *en degrés, en radians, et en grades.*

☆☆ **Exercice** $III_{77}$ : *Dans un repère orthonormé direct, place le point* $M$ *défini par* $0M = 4$ *et* $mp(\widehat{0x,\overrightarrow{0M}}) = 1{,}7$ . *Soit* $0NMP$ *le carré dont* $0M$ *est une diagonale. Quels sont (en degrés et en radians) les éléments polaires principaux de* $N$ *et de* $P$ ?

☆ **Exercice** $III_{78}$ : *Dans un repère orthonormé direct place le point* $M$ *de coordonnées* $(1;-1)$ . *Quelle est (en degrés et en radians) la mesure principale de* $(\widehat{0x,\overrightarrow{0M}})$ ?

☆ **Exercice** $III_{79}$ : *Une origine et un azimut origine* $0x$ *étant choisis, trace le cercle de centre* $0$ *et de rayon* 4 cm . *Sur ce cercle, place les points* $M$ *et* $N$ *définis par* $mp(\widehat{0x,\overrightarrow{0M}}) = \frac{3\pi}{5}$ *et* $mp(\widehat{0x,\overrightarrow{0N}}) = -\frac{\pi}{4}$ .

*Quelles sont les longueurs des deux arcs de cercle d'extrémités* $M$ *et* $N$ ?

☆ **Exercice** $III_{80}$ : *Place sur le cercle centré à l'origine et de rayon* 5 cm *les points*

$M$ *tel que* $mp(\widehat{0x,\overrightarrow{0M}}) = 5\pi/6$ ,

$N$ *tel que* $mp(\widehat{0x,\overrightarrow{0N}}) = 3\pi/8$ ,

$P$ *tel que* $mp(\widehat{0x,\overrightarrow{0P}}) = -7\pi/8$ ,

*et* $Q$ *tel que* $mp(\widehat{0x,\overrightarrow{0Q}}) = -\pi/3$ .

*Donne (en degrés, radians et grades)* $mp(\widehat{\overrightarrow{0M},\overrightarrow{0N}})$ , $mp(\widehat{\overrightarrow{0P},\overrightarrow{0N}})$, $mp(\widehat{\overrightarrow{0Q},\overrightarrow{0N}})$ *et* $mp(\widehat{\overrightarrow{0M},\overrightarrow{0Q}})$ .

*Quelles sont les longueurs des arcs d'extrémités* $Q$ *et* $N$ ?

☆ **Exercice** $III_{81}$ : *Place le point* $M$ *tel que* $0M = 5$ cm *et* $mp(\widehat{0x,\overrightarrow{0M}}) = -3\pi/4$ . *Place le point* $Q$ *tel que* $mp(\widehat{\overrightarrow{0M},\overrightarrow{0Q}}) = -135°$ *et* $0Q = 7$ cm. *Quelle est la mesure principale (en radians et en degrés) de* $(\widehat{0x,\overrightarrow{0Q}})$ .

☆ **Exercice** $III_{82}$ : *Dans un repère orthonormé direct* $(0x,0y)$ *, trace le cercle de centre* $0$ *et de rayon* $5$ *cm . Dessine des points* $M$, $N$, $P$, $Q$ *de ce cercle tels que* $mp(\widehat{0x,\overrightarrow{0M}}) = 30°$ , $mp(\widehat{\overrightarrow{0M},\overrightarrow{0N}}) = \pi/4$ , $mp(\widehat{\overrightarrow{0N},\overrightarrow{0P}}) = -135°$ *et* $mp(\widehat{\overrightarrow{0P},\overrightarrow{0Q}}) = 2\pi/3$.

*Que vaut* $mp(\widehat{0x,\overrightarrow{0Q}})$ ? *Quelles sont les longueurs des deux arcs d'extrémités* $P$ *et* $Q$ ?

***Les différentes mesures d'un angle :***

☆ **Exercice** $III_{83}$ : *Une origine* $0$ *et un azimut origine* $0x$ *étant donnés, on définit* $0a$ , $0b$ ,... *par :*

$$(\widehat{0x,0a}) = -180° \pmod{360°} \quad , \quad (\widehat{0x,0b}) = -\pi/2 \pmod{2\pi}$$
$$(\widehat{0x,0c}) = 120° \pmod{360°} \quad , \quad (\widehat{0x,0d}) = 5\pi/3 \pmod{2\pi}$$
$$(\widehat{0x,0e}) = 270° \pmod{360°} \quad , \quad (\widehat{0x,0f}) = -60° \pmod{360°}$$
$$\text{et} \quad (0x,0g) = 7\pi \pmod{2\pi}$$

*Quelles sont celles des demi-droites* $0a$ , $0b$ ,... *qui sont confondues ?*

☆☆ **Exercice** $III_{84}$ : *Une origine* $0$ *et un azimut origine* $0x'$ *étant donnés, on définit* $A$ *par* $(\widehat{0x,\overrightarrow{0A}}) = 173° \pmod{360°}$ *et* $0A = 6$ .

*On définit* $B$ *par* $(\widehat{0x,\overrightarrow{0B}}) = 391° \pmod{360°}$ *et* $0B = 6$ .

*Fais une figure en prenant comme unité de longueur le cm . On note* $M$ *le milieu du segment* $AB$ . *Quels sont les éléments polaires principaux du point* $M$ *(en degrés et en grades) ? L'angle* $(\widehat{0x,\overrightarrow{0M}})$ *a-t-il une mesure (en radians) comprise entre* $27\pi$ *et* $27{,}5\pi$ ?

☆☆☆ **Exercice** $III_{85}$ : *Une origine* $0$ *, et un azimut origine* $0x$ *étant donnés, on définit le point* $A$ *par* $0A = 4$ *et* $(\widehat{0x,\overrightarrow{0A}}) = 31\pi/3 \pmod{2\pi}$ *, et le point* $B$ *par* $0B = 6$ *et* $(\widehat{0x,\overrightarrow{0B}}) = -53\pi/6 \pmod{2\pi}$ .

*Fais la figure (unité de longueur le cm) . Dessine le symétrique* $C$ *du point* $B$ *par rapport à la droite* $0A$ . *Quelle est la mesure principale de* $(\widehat{0x,\overrightarrow{0C}})$ ?

☆☆☆ **Exercice $III_{86}$** : *Une origine 0 et un azimut origine 0x étant donnés, on définit A par 0A = 6 (unité le cm) et* $(\widehat{0x,\overrightarrow{0A}}) = -67\pi/4 \pmod{2\pi}$. *On définit B par 0B = 6 et* $(\widehat{0x,\overrightarrow{0B}}) = 240° \pmod{360°}$.

*Fais la figure. Dessine le point B' symétrique de B par rapport à la droite 0A. Quels sont les éléments polaires principaux du point B' (en grades et en radians) ?*

☆☆☆ **Exercice $III_{87}$** : *Une origine 0 et un azimut origine 0x étant donnés, on définit des points* $A_0, A_1, A_2, A_3, \ldots$ *par* $0A_i = 5$ cm *(quel que soit i) et*

$$(0x,0A) = \pi/6 \pmod{2\pi},$$
$$(0x,0A_1) = 6\pi/6 \pmod{2\pi},$$
$$(0x,0A_2) = 11\pi/6 \pmod{2\pi}, \ldots$$

*Fais la figure. Combien y a-t-il de points* $A_i$ *distincts ?*

☆☆☆ **Exercice $III_{88}$** : *Une origine 0 et un azimut origine 0x étant donnés, on définit A par 0A = 5 cm et* $mp(\widehat{0x,\overrightarrow{0A}}) = 90°$.

*Fais la figure. Construis le pentagone régulier de centre 0 et dont A est un sommet. Quels sont les éléments polaires principaux (en grades et en radians) des autres sommets du pentagone ?*

☆☆☆ **Exercice $III_{89}$** : *Une origine 0 et un azimut origine 0x étant donnés, on donne les points A et B définis par*

$$(\widehat{0x,\overrightarrow{0A}}) = -19\pi/6 \pmod{2\pi},\ (\widehat{0x,\overrightarrow{0B}}) = -11\pi/4 \pmod{2\pi}$$

*et* $0A = 0B = 4$ cm.

*Quelle est la distance entre les points A et B ?*

☆ **Exercice $III_{90}$** : *On a* $mp(\widehat{0x,0y}) = -173°$ *et* $mp(\widehat{0y,0z}) = 143°$. *Que vaut* $mp(\widehat{0x,0z})$ *?*

☆ **Exercice $III_{91}$** : *On a* $(\widehat{0a,0b}) = -7\pi/6 \pmod{2\pi}$, $mp(\widehat{0b,0c}) = -120°$ *et* $mp(\widehat{0d,0c}) = 72°$. *Que vaut* $mp(\widehat{0d,0a})$ *? On donnera la réponse en degrés et en radians.*

☆ **Exercice $III_{92}$** : *On a* $(\widehat{0u,0v}) = -17\pi/4 \pmod{2\pi}$, $mp(\widehat{0w,0v}) = 150°$ *et* $mp(\widehat{0t,0u}) = -45°$. *Que vaut* $mp(\widehat{0w,0t})$ *?*

☆☆☆ **Exercice $III_{93}$** : *Une origine 0 et un azimut origine 0x étant donnés, on définit A par* $0A = 6$ cm *et* $(\widehat{0x,\overrightarrow{0A}}) = 60°$ (mod 360°) .

*On définit B par* $0B = 6$ cm *et* $(\widehat{0x,\overrightarrow{0B}}) = -180°$ (mod 360°) .

*Il existe un triangle équilatéral ABC dont 0 est le centre. Quels sont (en degrés et en radians) les éléments polaires principaux du point C ? Quelles sont les mesures de* $(\widehat{\overrightarrow{0C},\overrightarrow{0B}})$ *et* $(\widehat{\overrightarrow{0C},\overrightarrow{0A}})$ ?

☆☆ **Exercice $III_{94}$** : *Soient 0u et 0v deux demi-droites telles que* $mp(\widehat{0u,0v}) = 90°$ .

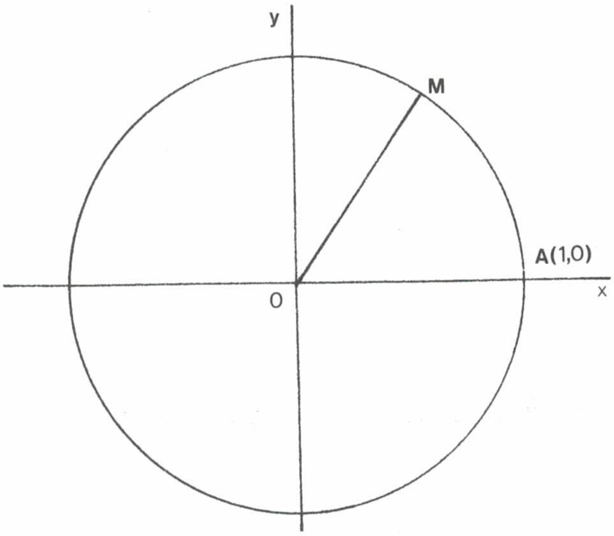
*Combien existe-t-il de demi-droites 0z telles que* $mp(\widehat{0u,0z}) = mp(\widehat{0z,0v})$ ?

*Combien existe-t-il de couples de demi-droites 0x , 0y telles que*

$$mp(\widehat{0u,0x}) = mp(\widehat{0x,0y}) = mp(\widehat{0y,0v}) \ ?$$

# *Série 4 : SINUS ET COSINUS*

## *LE CERCLE TRIGONOMETRIQUE*




*Considérons un repère orthonormé direct $(0x,0y)$.*

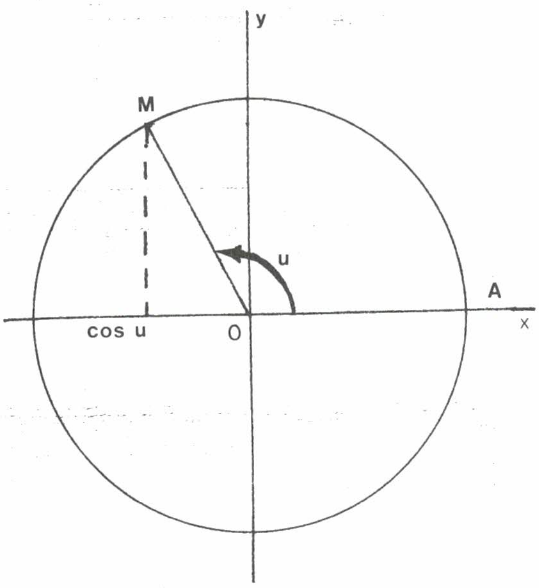
*Nous appellerons* ***cercle trigonométrique*** *(de ce repère) le cercle de centre $0$ et de rayon $1$. Un point $M$ de ce cercle est connu dès qu'on connaît $mp(\widehat{0x,\overrightarrow{0M}})$, ou toute autre mesure de l'angle orienté $(\widehat{0x,\overrightarrow{0M}})$.*

*Ces mesures sont appelées les* ***abscisses curvilignes*** *de $M$ (on sait qu'il y en a une infinité).*

## *COSINUS*

*Soit $M$ un point du cercle trigonométrique:*

| |
|---|
| ***son abscisse est appelée le cosinus de l'angle orienté $(\widehat{0x,\overrightarrow{0M}})$.*** |




*Si $u$ est une mesure en degrés de $(\widehat{0x,\overrightarrow{0M}})$, cette abscisse est encore notée* **$\cos u^o$**.

*Si $v$ est une mesure en radians de $(\widehat{0x,\overrightarrow{0M}})$, cette abscisse est notée $\cos v$ (sans mention d'unité).*

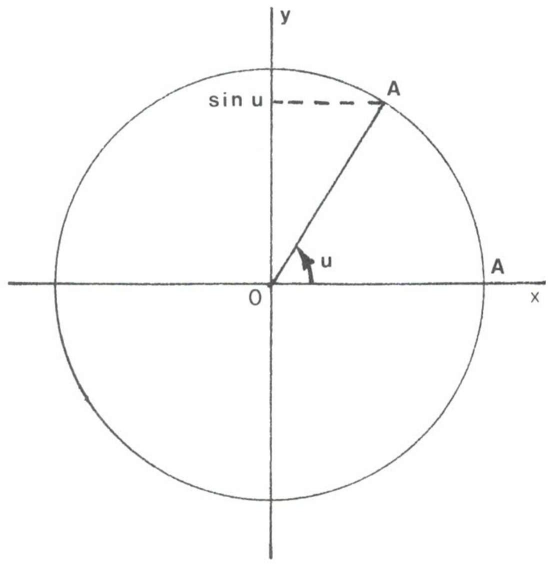
*Notons que pour $0 \leq u \leq 180$ (ou pour $0 \leq v \leq \pi$) cette définition du cosinus coïncide avec celle qui ressort de ce que tu a appris en troisième, et qu'on a utilisé dans la première séquence. Ta calculette, lorsque tu tapes le nombre $u$ puis* **cos** *te donne $\cos u^o$, $\cos u$ gr, ou $\cos u$, selon qu'elle est réglée sur degré, sur grade, ou sur radian.*

*Soit M un point du cercle trigonométrique :*

| |
|---|
| **son ordonnée est appelée le sinus de l'angle orienté $(\widehat{0x,0M})$.** |

*Si u est une mesure en degrés de $(\widehat{0x,\overrightarrow{0M}})$, cette ordonnée est encore appelée* **sin u°** *.*

*Si v est une mesure en radians de $(\widehat{0x,\overrightarrow{0M}})$, cette ordonnée est appelée sin v (sans aucune mention d'unité).*




*Notons que pour $0 \leq u \leq 180$ (ou pour $0 \leq v \leq \pi$) cette définition de sin u° coïncide avec celle qui ressort de ce que tu as appris en troisième, et que l'on a utilisée dans la première séquence. Ta calculette, lorsque tu tapes le nombre u puis* **sin** *, te donne sin u°, sin u gr, ou sin u, selon qu'elle et réglée sur degré, sur grade, ou sur radian.*

## RECHERCHE D'UN ANGLE DONT ON CONNAIT LE COSINUS ET LE SINUS

*Tape un nombre m sur ta calculette, puis* **Inv.cos** *. Si le nombre m est plus grand que 1, le signal d'erreur apparaît ; il n'existe en effet aucun u tel que cos u° soit supérieur à 1 ; en d'autres termes cos u est toujours compris entre -1 et 1. Si le nombre m est compris entre -1 et 1, la machine — après un certain temps de calcul — te donne un nombre compris entre 0 et 180, si elle est réglée sur degré ; elle te donne un nombre compris entre 0 et π, si elle est réglée sur radian.*

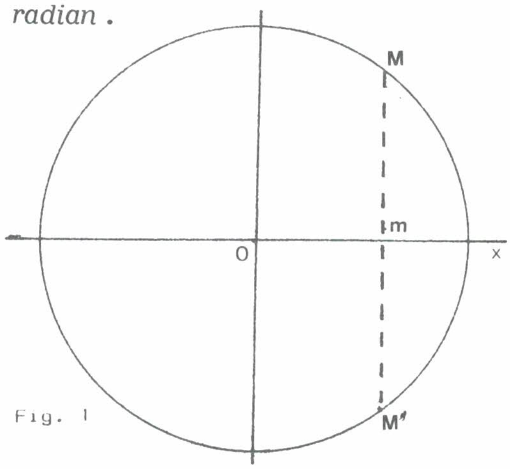



Fig. 1

*Et maintenant (la machine étant réglée sur radian) tape un nombre u, puis* **cos** *; tu obtiens cos u. Tape* **Inv.cos** *; la machine donne un nombre v. Et v n'est pas toujours égal à u (il suffit de choisir u négatif, ou supérieur à π). Que se passe-t-il ?*

*Pour le savoir, recherchons sur un cercle trigonométrique les angles dont le cosinus est un nombre m donné $(-1 < m < 1)$.*

*Ceci revient à chercher les points du cercle dont l'abscisse est m. Il y en a deux : les points M et M', symétriques par rapport à 0x. La mesure principale de l'angle $(\widehat{0x,\overrightarrow{0M}})$ est entre 0 et π. Celle de l'angle $(\widehat{0x,\overrightarrow{0M'}})$ est entre -π et 0. Chacun de ces deux angles a aussi une infinité d'autres mesures. Autrement dit, à la question :*

* **Sec.cos** sur certaines machines.

*"quels sont les u tels que cos u = m ?" , il y a plusieurs solutions (il y en a une infinité). Il est clair que la calculette ne peut les donner toutes. Elle choisit de donner celle qui est comprise entre 0 et π ; c'est-à-dire la mesure principale du point M (dont l'ordonnée est positive).*

*De même la recherche des u tels que sin u = m (1 < m < 1) a plusieurs solutions : toutes les mesures des angles* $(\widehat{0x,\overrightarrow{0N}})$ *et* $(\widehat{0x,\overrightarrow{0N'}})$. *La valeur affichée par la calculette lorsqu'on tape m puis* **Inv.sin** *est la mesure principale de* $(\widehat{0x,\overrightarrow{0N}})$, *c'est-à-dire un nombre compris entre* $-\pi/2$ *et* $+\pi/2$.

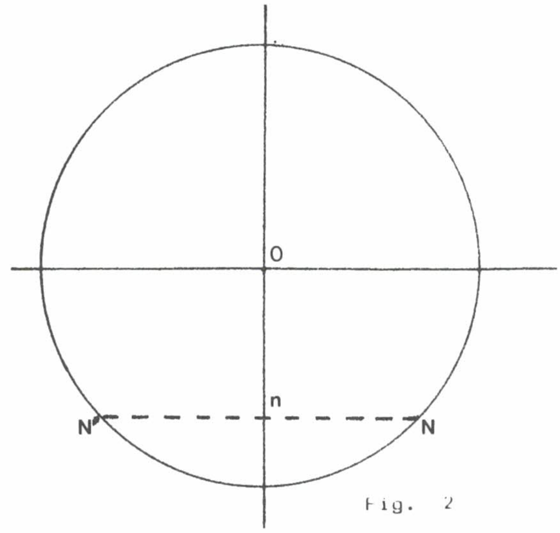



Fig. 2

*<u>En pratique</u> :*

*Si je connais* $\cos(\widehat{0x,\overrightarrow{0P}}) = m$ *et le signe de* $\sin(\widehat{0x,\overrightarrow{0P}})$ *: Lorsque je tape m, puis* **Inv.cos** *, la calculette me donne la mesure principale de* $(\widehat{0x,\overrightarrow{0M}})$ *(Fig.1).*

*Si* $\sin(\widehat{0x,\overrightarrow{0P}}) > 0$ *, alors* $P = M$ *.*

*Si* $\sin(\widehat{0x,\overrightarrow{0P}}) < 0$ *alors* $P = M'$ *symétrique de M par rapport à 0x .*

*Si je connais* $\sin(\widehat{0x,\overrightarrow{0P}}) = m$ *et le signe de* $\cos(\widehat{0x,\overrightarrow{0P}})$ *: Lorsque je tape m, puis* **Inv.sin** *, la calculette me donne la mesure principale de* $(\widehat{0x,\overrightarrow{0N}})$ *(Fig. 2).*

*Si* $\cos(\widehat{0x,\overrightarrow{0P}}) > 0$ *, alors* $P = N$ *.*

*Si* $\cos(\widehat{0x,\overrightarrow{0P}}) < 0$ *, alors* $P = N'$ *symétrique de N par rapport à 0y ; en regardant la figure, on s'aperçoit alors que si u est la valeur affichée,* $\pi - u$ *et* $-\pi - u$ *sont des mesures de* $(\widehat{0x,\overrightarrow{0N'}})$ *.*

**Exemple :** *Soit (0x,0y) un repère orthonormé direct.*

*a) Soit A tel que* $mp(\widehat{0x,\overrightarrow{0A}}) = 30°$ *et* $0A = 4$ *. Quelles sont les coordonnées de A dans (0x,0y) ?*

*b) Soit B(-3;4) dans le repère (0x,0y) . Quels sont les éléments polaires principaux de B ?*

**Solution de a) :** *Soit* $M$ *tel que* $0M = 1$ *et* $(\widehat{0x,\overrightarrow{0M}}) = 30°$. *Alors* $\overrightarrow{0A} = 4\overrightarrow{0M}$ *et* $\overrightarrow{0M}(\cos 30°, \sin 30°)$. *Donc*

$$x_A = 4 \cos 30° = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

$$x_B = 4 \sin 30° = 4 \times \frac{1}{2} = 2$$

**Solution de b) :** *La distance* $0B$ *se calcule par le théorème de Pythagore*

$$0B^2 = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25}$$

*donc* $0B = 5$.

*Soit* $N$ *tel que* $\overrightarrow{0N} = \frac{1}{5}\overrightarrow{0B}$

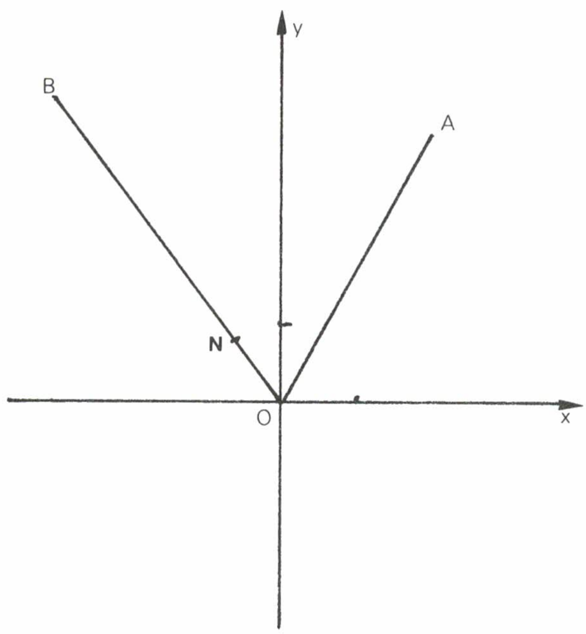
*Donc* $0N = 1$. *Si* $u$ *est une mesure de*

$$(\widehat{0x,\overrightarrow{0N}}) = (\widehat{0x,\overrightarrow{0B}})$$

$$\cos u = x_C = -0{,}6$$

$$\sin u = y_C = 0{,}8.$$

*Je tape* **-0,6 Inv cos** *, et j'obtiens (en degrés) 126,869 ... Puisque* $\sin u$ *est positif,* $u = 126{,}869\ ...°$ *(mod 360°)*.



***Quatrième série d'exercices :***

## *SINUS ET COSINUS*

☆ **Exercice** $III_{95}$ : *Dans un repère orthonormé direct* $(0x,0y)$ *(unité 2 cm) :*

a) *Place les points* $M$ *et* $A$ *tels que* $0M = 1$ , $0A = 4{,}2$ *et*

$$(\widehat{0x,\overrightarrow{0M}}) = (\widehat{0x,\overrightarrow{0A}}) = -29° \pmod{360°} .$$

b) *Mesure les coordonnées de* $M$ *et de* $A$ *; puis précise les valeurs trouvées au moyen de ta calculette.*

☆ **Exercice** $III_{96}$ : *Dans un repère orthonormé direct* $(0x,0y)$ *(unité 4 cm) :*

a) *Place les points* $A$ *et* $B$ *définis par* $0A = 1{,}2$ , $(\widehat{0x,\overrightarrow{0A}}) = 11\pi/6 \pmod{2\pi}$ , $0B = 2{,}1$ *et* $mp(\widehat{0x,\overrightarrow{0B}}) = -103° \pmod{360°}$ . *Mesure les coordonnées de* $A$ *et* $B$ .

b) *Précise les valeurs trouvées au moyen de ta calculette.*

c) *Mesure, puis calcule une valeur précise, de la distance* $AB$ .

☆ **Exercice** $III_{97}$ : *Dans un repère orthonormé direct* $(0x,0y)$ *(unité 5 cm) :*

a) *Place le point* $M$ *dont l'abscisse est* $-1{,}5$ , *et tel que* $(\widehat{0x,\overrightarrow{0M}}) = -7\pi/8 \pmod{2\pi}$ .

b) *Mesure, puis précise à la calculette, la distance* $0M$ . *Mesure, puis précise à la calculette, l'ordonnée de* $M$ .

☆☆ **Exercice** $III_{98}$ : *Dans un repère orthonormé direct* $(0x,0y)$ *(unité 4 cm) :*

a) *Place les points* $A$ *et* $B$ *définis par* $0A = 0B = 0{,}8$ , $(\widehat{0x,\overrightarrow{0A}}) = 45° \pmod{360°}$ *et* $mp(\widehat{0x,\overrightarrow{0B}}) = -15° \pmod{360°}$ . *Que peut-on dire du triangle* $0AB$ ?

b) *Quelles sont les coordonnées de* $A$ , *de* $B$ , *et du milieu* $I$ *du segment* $AB$ ; *tu peux les mesurer, puis obtenir des valeurs plus précises avec ta calculette.*

c) *Quels sont les éléments polaires principaux (en radians) du point* $I$ ? *Peux-tu connaître leur valeur exacte ?*

☆☆ **Exercice** $III_{99}$ : *Dans un repère orthonormé direct* $(0x,0y)$ *(unité 5 cm) :*

a) *Place le point* $A$ *défini par* $0A = 1$ *et* $(\widehat{0x,\overrightarrow{0A}}) = 5\pi/6 \pmod{2\pi}$. *Place le point* $B$ *défini par* $0B = \sqrt{2}$ *et* $(\widehat{0x,\overrightarrow{0B}}) = 13\pi/12 \pmod{2\pi}$ . *Les points* $0$ , $A$ *et* $B$ *sont trois sommets d'un carré. Quels sont les éléments polaires principaux du quatrième sommet* $C$ *de ce carré ?*

b) *Quelles sont les coordonnées des points* $A$ , $B$ *et* $C$ ? *Mesure-les, puis donnes-en des valeurs précises grâce à ta calculette.*

c) *Quelles sont les coordonnées et les éléments polaires du centre* $I$ *du carré ?*

☆☆ **Exercice $III_{100}$** : *Dans un repère orthonormé direct $(0x,0y)$ (unité 5 cm) :*

a) *Place le point $A$ de coordonnées $(1;2)$ ; et dessine le point du cercle trigonométrique tel que $\overrightarrow{0M}$ et $\overrightarrow{0A}$ aient même azimut. Mesure puis calcule les coordonnées de $M$ (tu peux pour cela calculer la distance $d = 0A$ , puis utiliser l'égalité $0A = d\ 0M$) .*

b) *Avec un rapporteur, détermine une valeur approchée de la mesure principale de $(\widehat{0x,\overrightarrow{0A}})$ . Soit $x_M$ l'abscisse de $M$ , au moyen de la fonction Inv.cos de ta calculette, déduis-en une valeur précise de $mp(\widehat{0x,\overrightarrow{0A}})$ .*

c) *Reprends la question a), puis la question b) en remplaçant $A$ par le point $B$ de coordonnées $(2;1)$ . Compare la valeur mesurée de $mp(\widehat{0x,\overrightarrow{0B}})$ , et sa valeur calculée. Que remarques tu ? Quelle est l'explication ?*

d) *Reprends les calculs de $mp(\widehat{0x,\overrightarrow{0A}})$ et de $mp(\widehat{0x,\overrightarrow{0B}})$ en utilisant l'ordonnée $y_M$ de $M$ et la fonction Inv.sin de ta calculette. Compare avec les valeurs mesurées.*

☆☆ **Exercice $III_{101}$** : *Dans un repère orthonormé direct $(0x,0y)$ (unité 5 cm) :*

a) *Place le point $P$ de coordonnées $(-1;3)$ . Détermine graphiquement, et par le calcul, $\cos(\widehat{0x,\overrightarrow{0P}})$ et $\sin(\widehat{0x,\overrightarrow{0P}})$ .*

b) *Détermine graphiquement, et au moyen de la fonction Inv.sin de ta calculette, les mesures de $(\widehat{0x,\overrightarrow{0P}})$ .*

☆☆☆ **Exercice $III_{102}$** : *Un angle $u$ a pour cosinus $\dfrac{-2+\sqrt{5}}{3\sqrt{2}}$ et pour sinus $\dfrac{-2-\sqrt{5}}{3\sqrt{2}}$ .*
*Au moyen des fonctions Inv.cos et Inv.sin de ta calculette, essaye de calculer $u$ . Que constates-tu ?*

*Dessine le point $M$ du cercle trigonométrique tel que $(\widehat{0x,\overrightarrow{0M}}) = u$ . Puis donne la valeur (avec la précision de la calculette) de la mesure principale de l'angle $u$ .*

☆☆ **Exercice $III_{103}$** : *Dans un repère orthonormé $(0x,0y)$ (unité 1 cm) on donne les vecteurs $\vec{V}$ de coordonnées $(1;\ 3)$ et $\vec{W}$ de coordonnées $(1;-1)$ . Trace les points $A$ tel que $\overrightarrow{0A} = \vec{V}$ , $B$ tel que $\overrightarrow{0B} = \vec{W}$ et $C$ tel que $\overrightarrow{0C} = \vec{W} + \vec{V}$ .*

*Mesure puis donne des valeurs précises à la calculette de $0A$ , $0B$ , $0C$ , et (en grades et en radians) les mesures de $(\widehat{0x,\overrightarrow{0A}})$ , $(\widehat{0x,\overrightarrow{0B}})$ et $(\widehat{0x,\overrightarrow{0C}})$ .*

### *Etude du cercle trigonométrique*

*La solution des exercices qui suivent passe par une figure faite avec soin sur le cercle trigonométrique.*

**Exercice $III_{104}$ :** Résoudre (donner les résultats en radians)

$\cos t = -1$

$\sin t = \frac{1}{2}$

$\sin t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos^2 t = \frac{1}{2}$

$\tan t = 0{,}8$

$\sin t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\tan t = \sqrt{3}$

$\cos^2 t = \frac{3}{4}$

**Exercice $III_{105}$ :** Résoudre (donner les résultats en degrés et en radians)

$\cos u = \cos\frac{\pi}{4}$

$\sin u = \sin 45°$

$\tan u = \tan 60°$

$\cos u = \cos\frac{7\pi}{8}$

$\sin u = \sin -\frac{\pi}{3}$ $\quad 2\pi < u \leq 3\pi$

$\cos u = \cos -\frac{\pi}{6}$ $\quad 0 \leq u \leq 3\pi$

$\sin u = \cos \frac{\pi}{4}$ $\quad 0 \leq u \leq \pi$

**Exercice $III_{106}$ :** Résoudre (donner les résultats en radians)

$\tan x + \tan\frac{\pi}{4} = 0$ $\quad 0 < x \leq 3\pi$

$\cos x + \cos\frac{\pi}{6} = 0$ $\quad -2\pi \leq x \leq \pi$

$\sin x + \cos\frac{\pi}{2} = 0$ $\quad -\pi \leq x \leq 3\pi$

$\cos x + \sin\frac{\pi}{3} = 0$ $\quad \pi \leq x \leq 5\pi$

$\sin x + \cos \pi = 0$ $\quad -\pi \leq x \leq 7\pi$

**Exercice $III_{107}$ :** *Résoudre (donner les résultats en radians)*

| | |
|---|---|
| $\cos x \leq \cos\frac{\pi}{6}$ | $-\pi \leq x \leq \pi$ |
| $\sin x \geq \frac{1}{2}$ | $-2\pi \leq x \leq 2\pi$ |
| $-\frac{1}{2} \leq \tan x \leq \frac{1}{2}$ | $-\pi \leq x \leq 2\pi$ |
| $\tan x \leq 0{,}9$ | $0 \leq x \leq 2\pi$ |
| $\sin\frac{\pi}{4} \leq \sin x \leq \sin\frac{\pi}{3}$ | $-2\pi \leq x \leq 0$ |

**Exercice $III_{108}$ :** *Résoudre (donner les résultats en degrés)*

| | |
|---|---|
| $\cos u^\circ = \sin\frac{\pi}{6}$ | $-360 \leq u \leq 0$ |
| $\sin u^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ | $0 \leq u \leq 360$ |
| $\tan u^\circ = \sqrt{3}$ | $-180 \leq u \leq 0$ |
| $\cos u^\circ = \sin u^\circ$ | $-180 \leq u \leq 180$ |
| $\cos u^\circ = \cos 1$ | $0 \leq u \leq 360$ |

**Exercice $III_{109}$ :** *Résoudre (donner les résultats en radians)*

| | |
|---|---|
| $\cos u = \sin 1$ | $0 \leq u \leq 4\pi$ |
| $\sin u = \sin^2 u$ | $-\pi \leq u \leq 3\pi$ |
| $\tan u = \tan^2 u$ | $-\pi \leq u \leq \pi$ |
| $\cos u + \sin u = 0$ | $-\pi \leq u \leq \pi$ |
| $\cos^2 u = \frac{1}{2}$ | $-3\pi \leq u \leq 3\pi$ |

**Exercice $III_{110}$ :**

$\cos 3u = 1$ : *Quelles sont les valeurs possibles de* $\cos u$ ?

$\cos 4u = 0$ : *Quelles sont les valeurs possibles de* $\sin u$ ?

***Exercice*** $III_{111}$ : *Quelle est la bonne réponse ?*

$\sin(x+\pi)$ est il égal à $\cos x$ ? à $-\cos x$ ? à $-\sin x$ ?

$\cos(\pi - x)$ est il égal à $\cos x$ ? à $-\cos x$ ? à $\sin x$ ?

$\sin(\frac{\pi}{2} - x)$ est il égal à $\cos x$ ? à $-\sin x$ ? à $\sin x$ ?

$\cos(2\pi + x)$ est il égal à $\cos x$ ? à $\sin x$ ? à $-\sin x$ ?

$\sin(x - \frac{\pi}{2})$ est il égal à $\cos x$ ? à $-\cos x$ ? à $\sin x$ ?

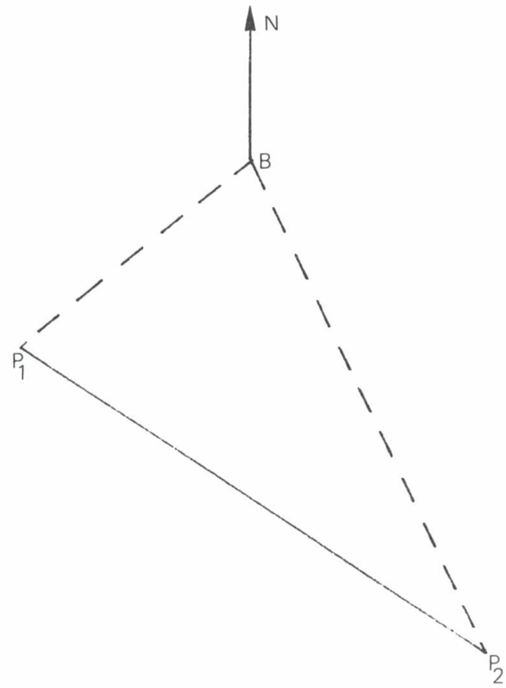
***Exercice*** $III_{112}$ : *Résoudre (donner les résultats en radians et marquer les points correspondants sur le cercle trigonométrique)*

| | |
|---|---|
| $\cos 2u = 0{,}5$ | $0 \leq u \leq 2$ |
| $\sin 3u = 1$ | $-\pi \leq u \leq \pi$ |
| $\tan 2u = 1$ | $-\pi \leq u \leq \pi$ |
| $\cos 4u = -1$ | $-2\pi \leq u \leq 0$ |

***Exercice*** $III_{113}$ : *Les égalités suivantes sont elles vraies pour toutes les valeurs de x ? pour certaines valeurs de x (que l'on précisera) ? pour aucune valeur de x ?*

| | |
|---|---|
| $\cos x = \cos(\pi - x)$ | $\sin x = -\sin(x+\pi)$ |
| $\tan x = \tan(x+\pi)$ | $\cos x = \cos(-x)$ |
| $\sin x = \sin(-x)$ | $\sin x = \sin(\pi - x)$ |
| $\cos x = \cos(\pi + x)$ | $\sin x = \sin(x - \pi)$ |

## Thème : ANGLES ORIENTES ET REPERAGE SUR UNE CARTE

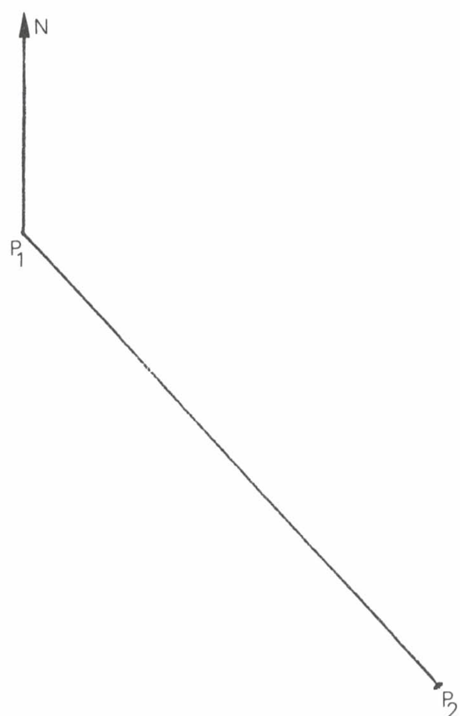



**Problème 1 :**

*Pour déterminer sa position, le capitaine d'un bateau $B$ dispose :*

- *d'un compas qui lui donne le nord (N).*
- *de la possibilité de viser deux phares $P_1$ et $P_2$ dont il connaît la position.*
- *d'un instrument de mesures d'angles, qui lui permet de déterminer $mp(\widehat{\overrightarrow{BP_1},\overrightarrow{N}})$ et*

$$mp(\widehat{\overrightarrow{BP_2},\overrightarrow{N}}).$$




*Pour connaître la position de $B$, nous allons faire un dessin. Supposons que l'on ait $P_1P_2 = 24$ km, et*

$$mp(\widehat{\overrightarrow{N},\overrightarrow{P_1P_2}}) = -130°.$$

*(Fais la figure à l'échelle 1/200 000 ; 1 cm pour ...)*

*Supposons que l'on ait mesuré $mp(\widehat{\overrightarrow{N},\overrightarrow{BP_1}}) = 145°$. Ceci situe $B$ sur la demi-droite $P_1y$ telle que*

$$mp(\widehat{\overrightarrow{N},\overrightarrow{P_1y}}) = -35°$$

*(explique comment on a calculé ce -35). Trace cette demi-droite.*

*Supposons que l'on ait mesuré $mp(\widehat{\overrightarrow{N},\overrightarrow{BP_2}}) = 160°$. Ceci situe $B$ sur une demi-droite $P_2z$. Trace-la, après avoir calculé $mp(\widehat{\overrightarrow{N},\overrightarrow{P_2z}})$.*

*Le point $B$ se trouve donc à l'intersection de ces deux demi-droites.*

**Exercice 1 :** *Si tu as étudié le thème "triangles semblables", tu dois pouvoir calculer $P_1B$ et $P_2B$. Vérifie alors que les valeurs trouvées par le calcul, et celles que tu mesures sur ton dessin sont "compatibles".*

**Exercice 2 :** *Recommence en supposant* $mp(\widehat{\vec{N},\overrightarrow{BP_1}}) = 30°$ *et* $mp(\widehat{\vec{N},\overrightarrow{BP_2}}) = 118°$ .

**Exercice 3 :** *Recommence en supposant* $mp(\widehat{\vec{N},\overrightarrow{BP_1}}) = 40°$ *et* $mp(\widehat{\vec{N},\overrightarrow{BP_2}}) = 170°$ . *Que se passe-t-il ?*

**Problème 2 :** *On suppose maintenant que le compas a été perdu. Il est donc impossible de connaître* $(\widehat{\vec{N},\overrightarrow{BP_1}})$ *et* $(\widehat{\vec{N},\overrightarrow{BP_2}})$ *; on peut seulement mesurer* $mp(\widehat{\overrightarrow{BP_1},\overrightarrow{BP_2}})$ .

*On a mesuré* $mp(\widehat{\overrightarrow{BP_1},\overrightarrow{BP_2}}) = 45°$ . *Que sait-on de la position de* $B$ *? Dessine* $P_1$ , $P_2$ *et* $N$ *comme précédemment.*

*On a peut être* $mp(\widehat{\vec{N},\overrightarrow{BP_1}}) = 90°$ . *Explique pourquoi on a alors*

$$mp(\widehat{\vec{N},\overrightarrow{BP_2}}) = 135°.$$

*Et trace le point* $B$ *correspondant.*

*On a peut être* $mp(\widehat{\vec{N},\overrightarrow{BP_1}}) = 80°$ . *Explique pourquoi on a alors*

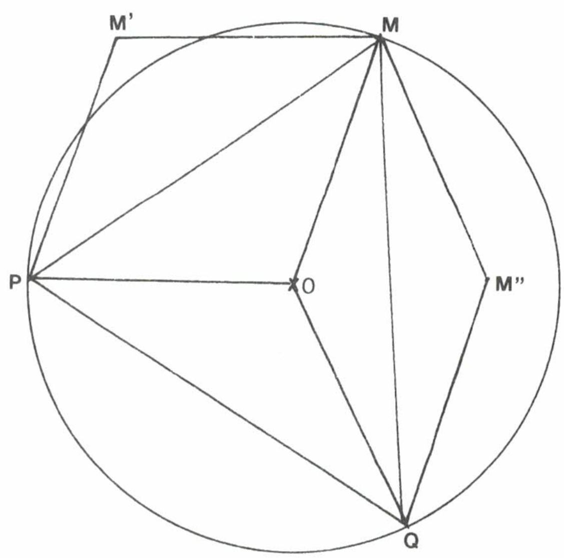
$$mp(\widehat{\vec{N},\overrightarrow{BP_2}}) = 125°.$$

*Et trace le point* $B'$ *correspondant.*

*Trace ainsi les points qui correspondent à* $mp(\widehat{\vec{N},\overrightarrow{BP_1}}) = 70°$ , $60°$ , $50°$ ,... *ou à* $mp(\widehat{\vec{N},\overrightarrow{BP_1}}) = 100°$ , $110°$ ,... *Attention il existe des valeurs de* $mp(\widehat{\vec{N},\overrightarrow{BP_1}})$ *auxquelles ne correspond aucun point* $B$ .

*Tu as ainsi dessiné un certain nombre de positions possibles du bateau. Si ta figure est bien faite, elles sont toutes sur un même arc d'extrémités* $P_1$ *et* $P_2$ . *On va expliquer pourquoi.*

**Problème 3 :** *Considérons trois points* $M$, $P$ *et* $Q$ *sur un cercle de centre* $0$ , *et comparons* $(\widehat{\overrightarrow{MP},\overrightarrow{MQ}})$ *et* $(\widehat{\overrightarrow{0P},\overrightarrow{0Q}})$ .




*Notons* $M'$ *et* $M''$ *les symétriques de* $0$ *par rapport à* $PM$ *et à* $QM$ .

*Alors sur la figure ci-contre :*

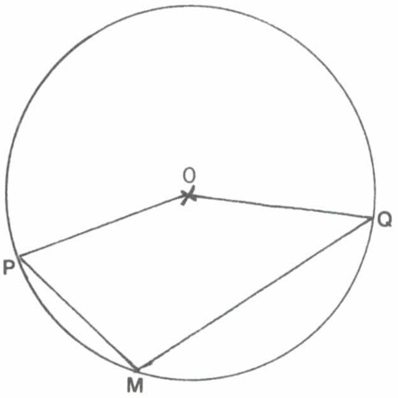
$$mp(\widehat{\overrightarrow{MM'},\overrightarrow{M0}}) = 2mp(\widehat{\overrightarrow{MP},\overrightarrow{M0}})$$

$$mp(\widehat{\overrightarrow{M0},\overrightarrow{MM''}}) = 2mp(\widehat{\overrightarrow{M0},\overrightarrow{MQ}})$$

$$mp(\widehat{\overrightarrow{MM'},\overrightarrow{MM''}}) = 2mp(\widehat{\overrightarrow{MP},\overrightarrow{MQ}})$$

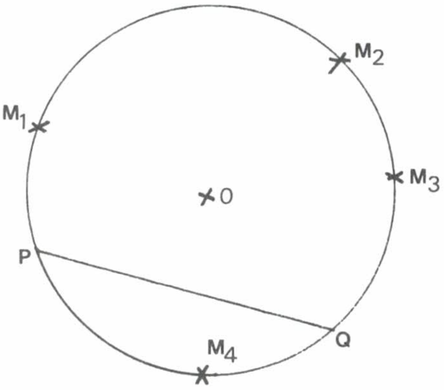
*Mais* $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{0P}$ *(car* $0PM'M$ *est un losange) et* $\overrightarrow{MM''} = \overrightarrow{0Q}$ . *Donc*

$$mp(\widehat{\overrightarrow{0P},\overrightarrow{0Q}}) = 2mp(\widehat{\overrightarrow{MP},\overrightarrow{MQ}}) .$$




*Cette relation entre les mesures principales de $(\widehat{\overrightarrow{MP},\overrightarrow{MQ}})$ et de $(\widehat{\overrightarrow{OP};\overrightarrow{OQ}})$ n'est pas toujours vraie. Par exemple, sur la figure ci-contre $mp(\widehat{\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OQ}})$ vaut $150°$ et $mp(\widehat{\overrightarrow{MP},\overrightarrow{MQ}})$ vaut $-105°$.*

*Tu vas faire plusieurs figures, en prenant diverses positions du point $M$ (par exemple les points $M_1$, $M_2$, $M_3$, $M_4$ du croquis ci-contre. Et dans chaque cas tu peux remarquer que :*




. $2mp(\widehat{\overrightarrow{MP},\overrightarrow{MO}})$ *est une mesure de* $(\widehat{\overrightarrow{MM'},\overrightarrow{MO}})$. *Est-ce toujours* $mp(\widehat{\overrightarrow{MM'},\overrightarrow{MO}})$ ?

. $2mp(\widehat{\overrightarrow{MO},\overrightarrow{MQ}})$ *est une mesure de* $(\widehat{\overrightarrow{MO},\overrightarrow{MM''}})$. *Est-ce toujours* $mp(\widehat{\overrightarrow{MO},\overrightarrow{MM''}})$ ?

. $mp(\widehat{\overrightarrow{MP},\overrightarrow{MO}}) + mp(\widehat{\overrightarrow{MO},\overrightarrow{MQ}})$ *est une mesure de* $(\widehat{\overrightarrow{MP},\overrightarrow{MQ}})$.
*Est-ce toujours* $mp(\widehat{\overrightarrow{MP},\overrightarrow{MQ}})$ ?

. $mp(\widehat{\overrightarrow{MM'},\overrightarrow{MO}}) + mp(\widehat{\overrightarrow{MO},\overrightarrow{MM''}})$ *est une mesure de* $(\widehat{\overrightarrow{MM'},\overrightarrow{MM''}})$.
*Est-ce toujours* $mp(\widehat{\overrightarrow{MM'},\overrightarrow{MM''}})$ ?

. *Tu peux alors en déduire que*

$$2mp(\widehat{\overrightarrow{MP},\overrightarrow{MO}}) + 2mp(\widehat{\overrightarrow{MO},\overrightarrow{MQ}}) \text{ est égal}$$

* *à deux fois une mesure de* $(\widehat{\overrightarrow{MP},\overrightarrow{MQ}})$ ?

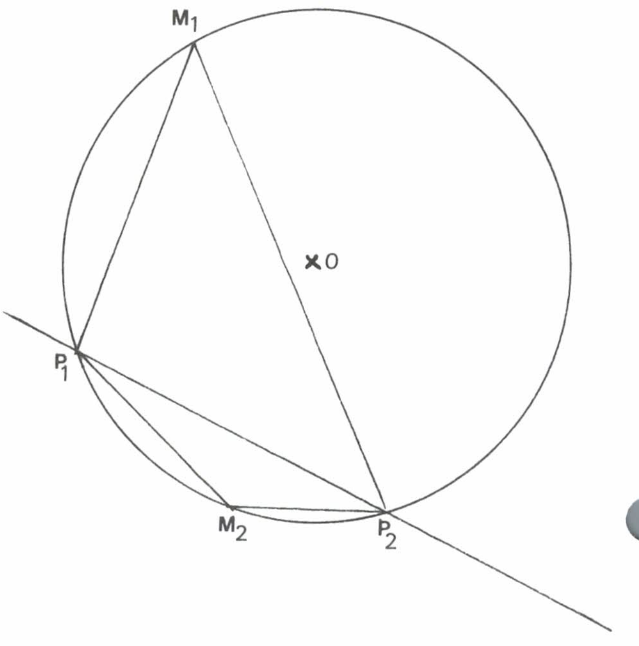
* *à une mesure de* $(\widehat{\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OQ}})$ ?

*Donc* $mp(\widehat{\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OQ}}) = 2mp(\widehat{\overrightarrow{MP},\overrightarrow{MQ}}) \pmod{360°}$.

*Cette relation est vraie "dans tous les cas de figure". Fais d'autres figures avec des points $M$, $A$ et $B$ situés de diverses façons sur un cercle de centre $O$ ; mesure dans chaque cas $mp(\widehat{\overrightarrow{MP},\overrightarrow{MQ}})$ et $mp(\widehat{\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OQ}})$, et vérifie que*

$$2mp(\widehat{\overrightarrow{MP},\overrightarrow{MQ}}) - mp(\widehat{\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OQ}})$$

*est toujours un multiple de $360°$.*




*Revenons au problème 2 .*

*En essayant de tracer tous les points M tels que*

$$mp(\widehat{\overrightarrow{MP_1}, \overrightarrow{MP_2}}) = 45° ,$$

*nous avons (graphiquement) obtenu un arc d'extrémités $P_1P_2$ . Et non un cercle entier !*

*C'est que (sur la figure ci-contre) si un point M est au-dessous de la droite $P_1P_2$ on a*

$$-180 < mp(\widehat{\overrightarrow{MP_1}, \overrightarrow{MP_2}}) < 0 ,$$

*s'il est au-dessus, on a*

$$0 < mp(\widehat{\overrightarrow{MP_1}, \overrightarrow{MP_2}}) < 180 .$$

*Ainsi l'arc de cercle situé au-dessus de $P_1P_2$ est formé des points M tels que $mp(\widehat{\overrightarrow{MP_1}, \overrightarrow{MP_2}}) = 45°$*

$$(2 \times 45° = 90° = mp(\widehat{\overrightarrow{0P_1}, \overrightarrow{0P_2}}))$$

*Tandis que celui qui est au-dessous de $P_1P_2$ , est formé des points M tels que $mp(\widehat{\overrightarrow{MP_1}, \overrightarrow{MP_2}}) = -135°$*

$$(2 \times (-135°) = -270° = mp(\widehat{\overrightarrow{0P_1}, \overrightarrow{0P_2}}) \ (mod\ 360°)) .$$

***Exercice 4 :*** *Dessine deux points P et Q , puis dessine :*

a) *l'arc de cercle formé des points M tels que $mp(\widehat{\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MQ}}) = 90°$ .*

b) *l'arc de cercle formé des points M tels que $mp(\widehat{\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MQ}}) = -90°$ .*

c) *l'arc de cercle formé des points M tels que $mp(\widehat{\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MQ}}) = 120°$ .*

d) *l'arc de cercle formé des points M tels que $mp(\widehat{\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MQ}}) = -70°$ .*

**Exercice 5 :** *Revenons au bateau des problèmes 1 et 2. Supposons qu'en plus des phares $P_1$ et $P_2$, on puisse viser un phare $P_3$ tel que $P_1P_3 = 20$ km et*

$$mp(\widehat{\vec{N},\overrightarrow{P_1P_3}}) = 30° \; .$$

*Dessine $P_1$, $P_2$ et $P_3$ (échelle 1/200 000).*

*On suppose que $mp(\widehat{\overrightarrow{BP_1}, \overrightarrow{BP_2}}) = 60°$ et $mp(\widehat{\overrightarrow{BP_3}, \overrightarrow{BP_1}}) = 30°$.*

*Dessine la position du bateau.*

**Remarque :** *Cette méthode de repérage est effectivement utilisée. Au lieu de repérer des phares on peut repérer des émetteurs radio dont on connaît l'emplacement. C'est ce qu'on appelle la radio-goniométrie.*

**Exercice 6 :** *Dessine un segment $AB$ de longueur 7 cm. Puis dessine le (ou les) point(s) $C$ tel(s) que $AC = 8$ cm et $mp(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}) = 50°$.*

**Exercice 7 :** *Dessine un segment $AB$, puis dessine l'ensemble des points $M$ tels que $\widehat{BMA} = 60°$ (c'est la réunion de deux arcs de cercle).*

**Exercice 8 :** *Dessine un triangle équilatéral $ABC$.*

*Dessine le (ou les) point(s) $M$ tel(s) que $\widehat{AMB} = 90°$ et $\widehat{BMC} = 80°$.*

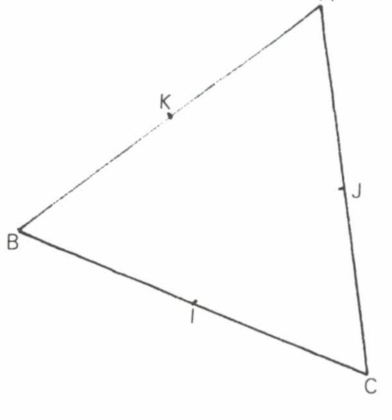
*Dessine le (ou les) point(s) $N$ tel(s) que $\widehat{ANB} = 50°$ et $\widehat{BMC} = 60°$.*

*Dessine le (ou les) point(s) $P$ tel(s) que $\widehat{APB} = 60°$ et $\widehat{BMC} = 60°$.*

**Exercice 9 :** *Dessine deux points $A$ et $B$ tels que $AB = 8$ cm, puis construis un triangle $ABC$ tel que $\widehat{ACB} = 60°$ et aire $(ABC) = 16$ cm$^2$.*

**Exercice 10 :**

*Le triangle $ABC$ est équilatéral ; $I$, $J$ et $K$ sont les milieux de ses côtés.*




*Construis le point $M$ (autre que $J$) tel que*

$$mp(\widehat{\overrightarrow{MI},\overrightarrow{MC}}) = 60°$$

et $$mp(\widehat{\overrightarrow{MK}, \overrightarrow{MA}}) = -60°$$

*Explique pourquoi $M$ est sur la droite $JB$. Et calcule $mp(\widehat{\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MI}})$.*

## ◆ *Fiche 7 : PRODUITS de POLYNOMES*

Vérification d'un calcul littéral : Lorsque tu développes une expression comportant une (ou plusieurs) lettre(s), lorsque tu fais une mise en facteurs, tu obtiens une égalité qui est vraie quelle que soit la valeur que l'on donne à cette lettre. Tu peux donc vérifier ton calcul en donnant une (ou plusieurs) valeur(s) numérique(s) à celle(s)-ci.

Exemple : $(x+1)(x+2) = x^2 + 3x + 2$ . Pour $x = 1$ , on a $2 \times 3 = 1 + 3 + 2$ ; pour $x = 2$ on a $3 \times 4 = 4 + 6 + 2, \ldots$

1 Effectuer les produits :

$(x + 1)(x + 3) =$

$(x + 2)(1 - x) =$

$(x - 1)(3 + 2x) =$

$\left(\frac{1}{2}x - 1\right)(3x - 2) =$

$(x - 4)\left(2x - \frac{1}{2}\right) =$

$(2x - 1)(1 - 3x) =$

$(-x - 1)(x - 2) =$

$(-x + 1)(-x + 2) =$

$(x - 2)(2x - 2) =$

$\left(\frac{3}{2}x + 0,5\right)(0,5x - 1) =$

2 Développer, réduire, puis résoudre l'équation :

$(2x - 1)(x + 3) + (3 - 2x)(x + 4) = 0$

$(2x - 5)(x + 4) - (2 - x)(1 - 2x) = 0$

$(3x - 1)x - 2x(x - 4) + (1 - x)(2 + x) = 0$

$0,5x + (2x - 1)(2x + 2) + (3 + x)(2 - 4x) = 0$

$3x^2 + (1 - x)(3,5 + x) + (1 - 2x)(0,5 + x) = 0$

3 Développer, réduire, puis résoudre l'équation :

$(3x - 1)(x + 2) + x + 1 \times (2 - x) - x^2 + 2 \times (1 - x^2) = 0$

$(x - 3) \times 4 + x \times (1 - x) + (2 + x) \times x - 1 \times (3 - x) = 0$

$2 \times (3 + x) - x^2 \times 2 + x \times (x - 3) + x^2 = 0$

$2 \times 3 - x \times (x + 1) + 2 \times (x - 1) + x^2 = 0$

$-2 \times x^2 + 1 \times 3 \times (x - 1) + 2 \times (x - 3)(x - 1) = 0$

4 Développer - Réduire - Résoudre l'équation :

$$(x + 2)(x - 5) = x^2 - x + 1$$
$$(x - 4)(x + 1) = (3x - 2)(2x + 2)$$
$$(x - 3)(x + 2) = (x + 3)(x - 2)$$
$$(x - 4)(x + 1) = 2(x - 2)(x + 1)$$
$$3(x + 4)(x - 1) + 2(x + 3)(x + 1) + 6 = 0$$

5 Effectuer puis réduire :

$$(x - 1) \times x - 2(x + 3) + (x - 4)(x^2 + 1) =$$
$$(x - 1)^2(x - 4) - (x^2 + 4)(x + 2) =$$
$$(x - 3)(x + 2)^2 - (x + 3)^2(x - 2) =$$
$$(3x - 1)(2x - 3)(x - 4) - (2x + 1)^2(x + 4) =$$
$$(x^2 - 1)(x + 1) + (x - 2)(x^2 - 3) =$$

6 Résoudre :

$$(x - 1) + (x - 3)(x + 4) - x^2 = 0$$
$$(x - 1)^2 + x^2 - 1 = 0$$
$$(2x + 3)^2 = (3x + 2)^2$$
$$3x^2 + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 2)$$
$$3x(x - 1) = x^2 - 2x(1 - x)$$

7 Effectuer puis réduire :

$$(x + 4)^2 + (x - 4)^2 + x^2 - 4 =$$
$$(x^2 + x + 1)(1 - x) =$$
$$(1 - x + x^2)(1 + x) =$$
$$(1 - x + x^2)(1 + x + x^2) =$$
$$(1 + x + x^2)^2 =$$
$$(1 + x)^3 =$$
$$(2 + x)^3 + (2 - x)^3 =$$
$$(1 - x^2 - 3x)^2 =$$
$$(2x - 1 + x^2)^2 =$$
$$(x - 1 + x^2)^2 + (x + 1 + x^2)^2 =$$
$$(x^2 - 2x + 1)^2 - (x^2 + 2x + 1)^2 =$$
$$(x - 1)^2 + (x^2 + x)^2 + (x^2 - x)^2 + (x^2 + 1)^2 =$$

# ◆ *Fiche 8 : RACINES CARREES*

(1) Ecrire sous la forme $a + b\sqrt{p}$ où $a$ et $b$ sont des entiers ou des rationnels, et $p$ entier :

$(1 + 3\sqrt{2})(1 - \sqrt{2})$ $\quad(3 - \sqrt{3})(3 + \sqrt{3})$ $\quad(5 - \sqrt{2})(\sqrt{2} + 4)$

$(3 - \sqrt{11})(2\sqrt{11} - 7)$ $\quad(3 - \sqrt{7})(7 - \sqrt{7})$ $\quad(3 - \sqrt{2})(\sqrt{8} - 4)$

$\dfrac{3}{\sqrt{2}} \times (5 - \sqrt{8})$ $\quad\dfrac{5}{\sqrt{3}} \times \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}\right)$ $\quad(5 - \sqrt{3})\left(5 - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$(6 - \sqrt{5})(\sqrt{25} - \sqrt{5})$ $\quad(4 - \sqrt{7})\left(\dfrac{1}{\sqrt{7}} - \sqrt{7}\right)$ $\quad(\sqrt{5} - \sqrt{4})(4 - \sqrt{5})$

(2) Développer et réduire :

$(1 + \sqrt{2})(\sqrt{6} - \sqrt{3})$ $\quad(\sqrt{3} - \sqrt{1})(\sqrt{2} + \sqrt{1}) + (\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{2} - 1)$

$(\sqrt{5} + \sqrt{15})(\sqrt{3} - \sqrt{3})$ $\quad(1 + \sqrt{2})(\sqrt{6} + 1) - (\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} + 2)$

$(\sqrt{12} - 4)(2\sqrt{3} - 5)$ $\quad(5\sqrt{2} - \sqrt{3})(3\sqrt{2} - 5\sqrt{3}) + 24\sqrt{6}$

$(2 + \sqrt{6})\left(\dfrac{1}{4} + \dfrac{2}{3}\sqrt{6}\right)$ $\quad(\sqrt{6} - \sqrt{2})(3\sqrt{2} + 5\sqrt{6})$

$(\sqrt{2} + 2\sqrt{3})(3\sqrt{2} - \sqrt{3})$ $\quad(7\sqrt{5} - \sqrt{2})(3\sqrt{5} - 1) + 7(\sqrt{5} - 1)(\sqrt{2} + 3)$

(3) Ecrire sous la forme $a + b\sqrt{p}$ :

$$\frac{1}{2-\sqrt{3}} = \frac{2+\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = \dots$$

$\dfrac{1}{7-\sqrt{2}}$ $\quad\dfrac{3}{4+3\sqrt{2}}$ $\quad\dfrac{5}{4\sqrt{2}-1}$ $\quad\dfrac{3}{\sqrt{2}+1}$

$\dfrac{3-\sqrt{2}}{4+3\sqrt{2}}$ $\quad\dfrac{3-\sqrt{5}}{3\sqrt{5}-4}$ $\quad\dfrac{5-\sqrt{7}}{3\sqrt{7}+3}$ $\quad\dfrac{5-\sqrt{2}}{3-6\sqrt{2}}$

$\dfrac{2-\sqrt{28}}{3\sqrt{7}-4}$ $\quad\dfrac{3+\sqrt{5}}{2-2\sqrt{5}}$ $\quad\dfrac{27-\sqrt{2}}{3+4\sqrt{2}}$ $\quad\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{32}}{\sqrt{2}-\sqrt{16}}$

(4) Parmi les nombres suivants, lesquels sont entiers ?

$\sqrt{256}$ $\quad\sqrt{168}$ $\quad\sqrt{54} \times \sqrt{24}$ $\quad\sqrt{169}$

$\sqrt{578} \times \sqrt{2}$ $\quad\sqrt{450}/\sqrt{8}$ $\quad\sqrt{750}/\sqrt{6}$ $\quad\sqrt{1500}/\sqrt{5}$

$\sqrt{144}/\sqrt{16}$ $\quad\sqrt{16900}/\sqrt{225}$ $\quad\sqrt{441}/\sqrt{196}$ $\quad\sqrt{1000}/\sqrt{10^7}$

5 Rendre les dénominateurs entiers, développer et réduire :

$\dfrac{3-\sqrt{5}+\sqrt{2}}{(2-\sqrt{2})}$ $\qquad \dfrac{5-\sqrt{3}}{3-4\sqrt{3}}$ $\qquad \dfrac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

$\dfrac{(2-\sqrt{3})}{(1-\sqrt{2})(3-\sqrt{2})}$ $\qquad \dfrac{5-3\sqrt{5}}{(3-\sqrt{5})(2-7\sqrt{5})}$ $\qquad \dfrac{\sqrt{5}-3\sqrt{2}}{\sqrt{5}-4\sqrt{2}}$

$\dfrac{5-\sqrt{6}}{2-\sqrt{3}} - \dfrac{3+\sqrt{2}}{2-3\sqrt{6}}$ $\qquad \dfrac{3+\sqrt{2}}{5-\sqrt{3}} + \dfrac{5-\sqrt{3}}{3+\sqrt{2}}$ $\qquad \dfrac{1}{1-\sqrt{2}} + \dfrac{1}{1+\sqrt{2}}$

6 Comparer (sans utiliser la calculette) :

. $2 + 2\sqrt{2}$ et $3 + \sqrt{3}$

. $3\sqrt{2} + 5$ et $1 + 5\sqrt{3}$

. $\dfrac{2+\sqrt{2}}{1+2\sqrt{2}}$ et $\dfrac{7+4\sqrt{2}}{5+3\sqrt{2}}$

. $13 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ , $5 + 4\sqrt{5}$ et $\sqrt{2} \times \dfrac{19}{2}$

. $27$ et $\sqrt{600} + \sqrt{7}$

. $3 + \sqrt{2}$ et $1 + 2\sqrt{3}$

7 Dans chaque ligne il y a des nombres égaux. Trouve-les (sans calculette) ;

. $1 + 2\sqrt{2}$ , $\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$ , $\dfrac{1+3\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$ , $\dfrac{1}{7-4\sqrt{2}}$ , $7 + 4\sqrt{2}$ , $3 + \sqrt{2}$

. $3 - \sqrt{3}$ , $\dfrac{1}{4-5\sqrt{3}}$ , $\dfrac{3+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$ , $\dfrac{-1-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$ , $\dfrac{6}{3+\sqrt{3}}$ , $\dfrac{13-5\sqrt{3}}{4-2\sqrt{3}}$

. $\dfrac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}$ , $\dfrac{1}{8+7\sqrt{5}}$ , $\dfrac{1}{9+4\sqrt{5}}$ , $\dfrac{2}{3+8\sqrt{5}}$ , $9 - 4\sqrt{5}$ , $\dfrac{\sqrt{5}+4}{10\sqrt{5}+4}$

. $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ , $\dfrac{\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ , $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ , $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{6}}$ , $5 + 2\sqrt{6}$

8 Classe les nombres suivants par ordre croissant (sans calculette) :

$1 + \sqrt{2}$ $\qquad 3 - \sqrt{5}$ $\qquad 2 + \sqrt{17}$ $\qquad \sqrt{19} - 3$ $\qquad 12 - \sqrt{197}$

9 Essaie de classer les nombres suivants par ordre croissant (a est positif) :

$\sqrt{144+a^2}$ , $\sqrt{144+a+a^2}$ , $12 + \sqrt{a}$ , $12 + \sqrt{a^2+a}$

## ◆ *Fiche 9 : PUISSANCES et DECOMPOSITIONS en FACTEURS PREMIERS*

1) Développe :

$(1+x)^2$ $(a+b)^2$ $(1+\sqrt{3})^2$ $(2a-3b)^2$ $(\sqrt{2}+2\sqrt{3})^2$

$(1+x)^3$ $(a+b)^3$ $(1+\sqrt{3})^3$ $(2a-3b)^3$ $(\sqrt{2}+2\sqrt{3})^3$

$(1+x)^4$ $(a+b)^4$ $(1+\sqrt{3})^4$ $(2a-3b)^4$ $(\sqrt{2}+2\sqrt{3})^4$

2) Calcule $(1+\sqrt{2})^2$ , $(1+\sqrt{2})^4$ , $(1+\sqrt{2})^8$ , $(1+\sqrt{2})^{16}$

Puis calcule $(1+\sqrt{2})^{12}$ et $(1+\sqrt{2})^{23}$

3) Calcule $(2-\sqrt{3})^{19}$ et $(2-\sqrt{3})^{11}$

Calcule $(3-\sqrt{5})^7$ et $(3-\sqrt{5})^{13}$

Calcule $(2-\sqrt{7})^9$ et $(2-\sqrt{7})^{15}$

4) Simplifie les expressions suivantes :

$\dfrac{a^7\times b^4\times c^{-3}}{a^{-4}\times b^2\times c^{-5}}$ $\dfrac{a^4\times b^3\times c^{-9}}{a^7\times b^2\times c^{-3}}$ $\sqrt{a^4b^2c^6}$

$\sqrt{289a^5b^{10}}$ $\sqrt{225x^8y^4}$ $\sqrt{\dfrac{1576x^3}{441y^4z^5}}$

$\dfrac{a^4\times b^3\times c^{-7}}{\sqrt{a^8\times b^4\times c^3}}$ $\dfrac{a^3\times b^5\times c^2}{\sqrt{a^{-7}\times b^4\times c^{-8}}}$ $\dfrac{a^2\times b^4\times\sqrt{a^3\times b^4}}{a^{-3}\times b^2\times\sqrt{ab^2}}$

5) Calcule $(a+b+c)^2$ , $(\sqrt{2}+\sqrt{6}+\sqrt{3})^2$ , $(\sqrt{2}+3x+2\sqrt{12})^2$ , $(\sqrt{2}-\sqrt{5}+\sqrt{10})^2$ , $(1+x+x^2)^2$ .

6) Décompose en produit de facteurs premiers :

| | | | |
|---|---|---|---|
| 144 | 840 | 1720 | 993 |
| 256 | 265 | 927 | 1272 |
| 440 | 361 | $162\times 351$ | $111\times 791$ |

7) Réduis les fractions :

$\dfrac{76}{48}$ $\dfrac{422}{166}$ $\dfrac{102}{96}$ $\dfrac{703}{851}$ $\dfrac{1036}{592}$ $\dfrac{28}{91}$ $\dfrac{72}{94}$ $\dfrac{376}{888}$

$\dfrac{68}{51}$ $\dfrac{976}{96}$ $\dfrac{258}{172}$ $\dfrac{465}{915}$ $\dfrac{473}{2321}$ $\dfrac{527}{1734}$ $\dfrac{1020}{456}$

8) Effectue en donnant le plus petit dénominateur possible :

$\frac{2}{111} + \frac{1}{74}$ , $\frac{3}{544} + \frac{7}{680}$ , $\frac{1}{51} - \frac{3}{85}$

$\frac{7}{64} \times \left(\frac{2}{35} - \frac{4}{45}\right)$ , $\frac{3}{4} \times \left(\frac{9}{20} - \frac{7}{30}\right)$ , $\frac{2}{13} \times \left(\frac{27}{25} - \frac{3}{10}\right)$

$\frac{3}{11} \times \left(\frac{25}{4} - \frac{5}{3}\right)$ , $\frac{17}{13} \times \left(\frac{5}{4} - \frac{7}{3}\right)$ , $\frac{3}{7} \times \left(\frac{56}{3} - \frac{21}{5}\right)$

9) Effectue en donnant le plus petit dénominateur possible :

$\frac{2^4}{5^2} \times \left(\frac{3^3}{2^4 \times 7} - \frac{2^3}{3 \times 7}\right)$ $\qquad$ $\frac{3^2}{7^3 \times 5} \times \left(\frac{2}{3^3 \times 5} - \frac{1}{3^2 \times 7}\right)$

$\left(\frac{3^3 \times 7}{5 \times 2^2} - \frac{3 \times 7}{5^2 \times 2}\right) \times \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{7}\right)$ $\qquad$ $\frac{3}{11} \times \left(\frac{5}{2^3} - \frac{7}{3 \times 2^2}\right)$

$\frac{3^3 \times 2}{11 \times 7} \times \left(\frac{2^2}{3 \times 5} + \frac{1}{2 \times 5}\right)$ $\qquad$ $\frac{5^2}{3^5 \times 2^4} \times \left(\frac{47}{3^2 \times 5^7} - \frac{1}{3 \times 5^6}\right)$

$\frac{3^2 \times 5^3}{11 \times 7} \times \left(\frac{3}{3^2 \times 2^4} + \frac{1}{3^3 \times 2^3}\right)$ $\qquad$ $\frac{3^3 \times 5}{7^2 \times 13^3} \times \left(\frac{2^3}{3^2 \times 7} + \frac{7}{3^3 \times 5}\right)$

$\frac{3^2 \times 5 \times 7}{17 \times 2^3 \times 3} \times \left(\frac{5}{7 \times 3^2} - \frac{1}{11 \times 3}\right)$ $\qquad$ $\frac{2^3 \times 7 \times 5}{11 \times 13} \times \left(\frac{2^7}{3 \times 7} - \frac{2^4}{3 \times 5}\right)$

10) Effectue puis réduis :

$\frac{111}{2^2 \times 11} \times \left(\frac{27}{37 \times 2} - \frac{1}{6}\right) =$ $\qquad$ $\frac{363}{17 \times 4} \times \left(\frac{10}{11 \times 2^2} - \frac{4}{11 \times 5}\right) =$

$$\frac{\frac{112}{3^2 \times 11}}{\frac{18}{3 \times 11} - \frac{1}{2 \times 3^2}} = \qquad \frac{\frac{2}{3 \times 7} - \frac{1}{5 \times 3^2}}{\frac{161}{5 \times 11 \times 2^3}} =$$

---

Liste des nombres premiers inférieurs à 100 :

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 11 | 23 | 31 | 41 | 53 | 61 | 71 | 83 | 97 |
| 3 | 13 | 29 | 37 | 43 | 59 | 67 | 73 | 89 | |
| 5 | 17 | | | 47 | | | 79 | | |
| 7 | 19 | | | | | | | | |

# CHAPITRE IV

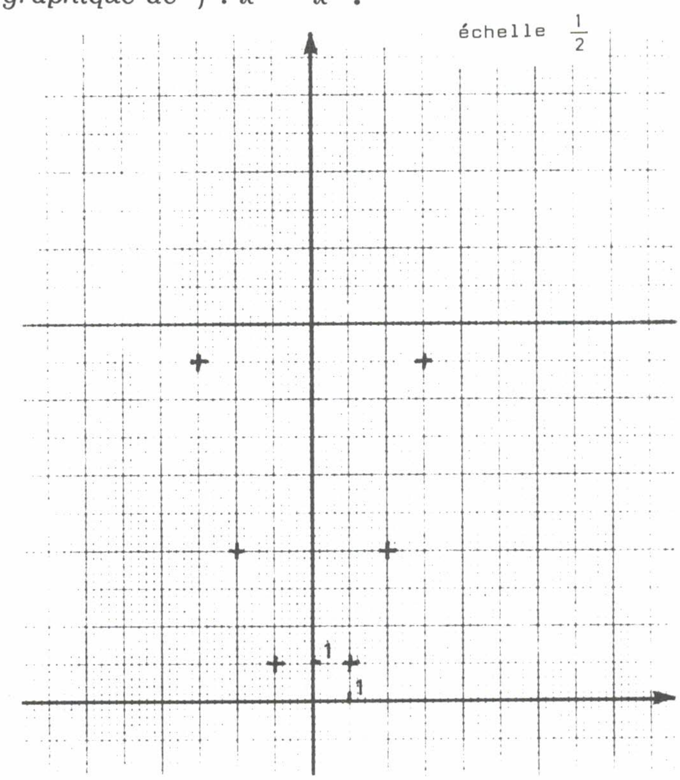
## ANALYSE

## *Série 1 : REPRESENTATION GRAPHIQUE DES FONCTIONS*

### REPRESENTATION GRAPHIQUE DE $x \to x^2$

*Considérons une fonction $f$, et un repère orthogonal $(Ox,Oy)$. Représenter graphiquement $f$ dans ce repère, c'est **tracer tous les points de coordonnées $(x,y)$ tels que $y = f(x)$**. Nous avons déjà (chapitre 2) représenté graphiquement les fonctions affines (c'est-à-dire du type $f : x \to ax + b$) ; leurs graphiques sont des droites. Nous allons maintenant représenter d'autres fonctions. De façon générale les graphiques que nous allons tracer sont des courbes (ou quelquefois la réunion de deux ou trois morceaux de courbes).*

*A titre d'exemple nous allons tracer le graphique de $f : x \to x^2$.*



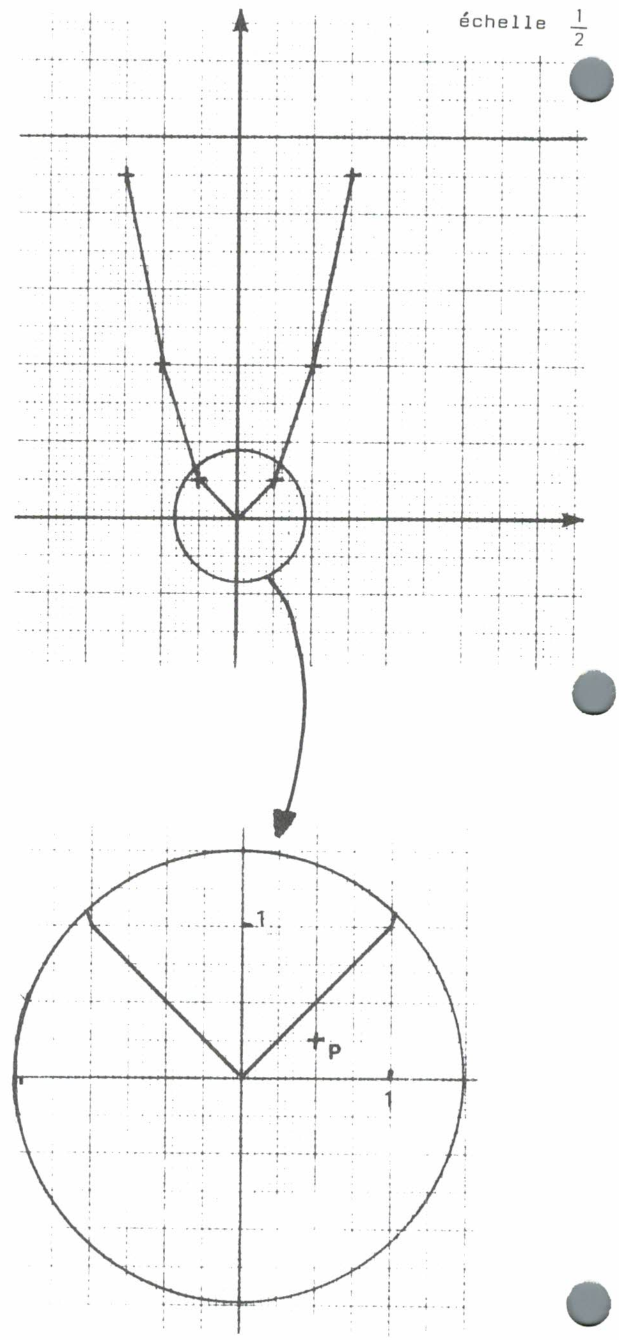

*Choisissons, par exemple, un repère orthonormé (unité 1 cm). Et plaçons les points de coordonnées $(-3;9)$, $(-2;4)$, $(-1;1)$, $(0;0)$, $(1;1)$, $(2;4)$ et $(3;9)$, qui correspondent aux valeurs $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ de la variable $x$.*

**Remarque 1 : Il nous est impossible de tracer le graphique tout entier sur la feuille.** *Pour placer le point de coordonnées $(10 ; f(10)) = (10 ; 100)$, il nous faudrait prendre une feuille plus grande, ou choisir une unité plus petite.*
*Mais il serait bien difficile de trouver une feuille assez grande, ou de choisir une unité assez petite pour placer le point de coordonnées :*

$$(1000 ; f(1000)) = (1000 ; 1\,000\,000).$$

*En fait quelle que soit la feuille, quelle que soit l'unité, il sera toujours possible de trouver un $x$ tel que le point de coordonnées $(x ; f(x))$ ne soit pas sur la feuille ; on exprime ceci en disant que le graphique est infini.* **Nous tracerons donc, non pas le graphique de $f$ tout entier, mais la partie de ce graphique qui tient sur la feuille.**
*Nous aurions pu faire la même remarque lorsque nous avons tracé les droites $y = ax+b$ (au chapitre 2) ; nous ne l'avons pas fait, car nous avons depuis longtemps pris l'habitude de dire que nous traçons la droite $D$, alors que nous ne dessinons que la partie de $D$ qui tient sur la feuille ...*

***Remarque 2 :*** *Ayant ainsi pris la décision de tracer uniquement la partie du graphique qui correspond à* $-3 \leq x \leq 3$ *, nous constatons que nous ne pouvons pas placer successivement tous les points : il y en a une infinité. Nous en avons placé 7 . Nous allons les joindre, par exemple à la règle. Nous obtenons un dessin qui ressemble au graphique, mais n'est pas exactement le graphique. Par exemple : le point P(0,5 ; f(0,5)) = (0,5 ; 0,25) n'est pas sur le segment qui joint les points M(0;0) et N(1;1) .*




*Pour avoir une meilleure précision, nous pouvons placer d'autres points (que les sept initiaux) par exemple les points de coordonnées :*

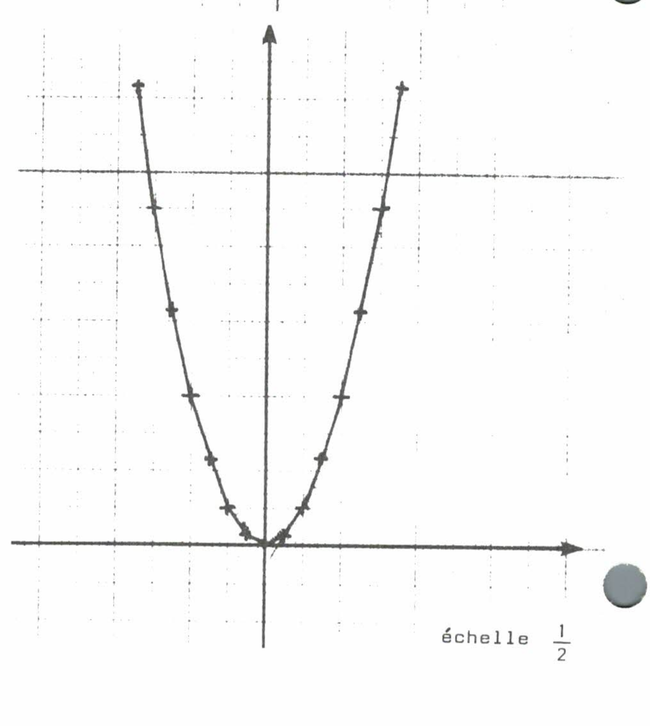
*(-2,5 ; 6,25) , (-1,5 ; 2,25) ,*

*(-0,5 ; 0,25) , (0,5 ; 0,25) ,*

*(1,5 ; 2,25) , (2,5 ; 6,25) .*

*En joignant (toujours à la règle) les treize points ainsi placés nous obtenons une meilleure approximation du graphique.*

*Mais notre dessin est encore une ligne brisée. Nous pourrions aussi joindre les treize points à main levée, de façon à obtenir une courbe, la plus harmonieuse possible. Le dessin obtenu sera plus joli , mais pas forcément plus précis. Pour avoir une meilleure précision il suffirait de placer — avec soin — d'autres points ; mais il faudra toujours, à la fin, les joindre à la règle ou au jugé.*



*Les problèmes que nous venons de rencontrer sont généraux.*

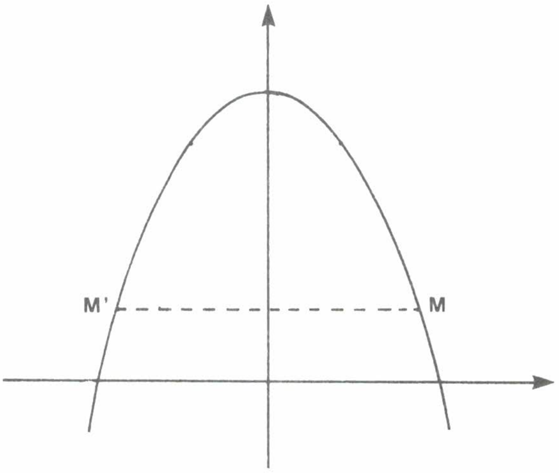
- **On tracera rarement le graphique d'une fonction en entier ; on n'en dessinera qu'une partie.**
- **Il faudra placer certains points et les joindre au mieux.**

**Vocabulaire : *FONCTIONS PAIRES — FONCTIONS IMPAIRES***

***Fonctions paires***

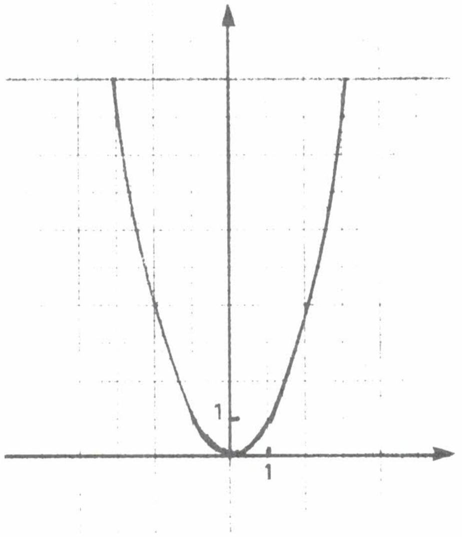
***Une fonction est dite paire, si, pour tout $x$ : $f(-x) = f(x)$.***

*Si $f(-x) = f(x)$, les points $M(x\ ;\ f(x))$ et $M'(-x\ ;\ f(-x)) = (-x\ ;\ f(x))$ sont symétriques par rapport à $Oy$. Ainsi, dire que $f$ est paire c'est dire que son graphique en repère orthogonal, est symétrique par rapport à l'axe $Oy$.*

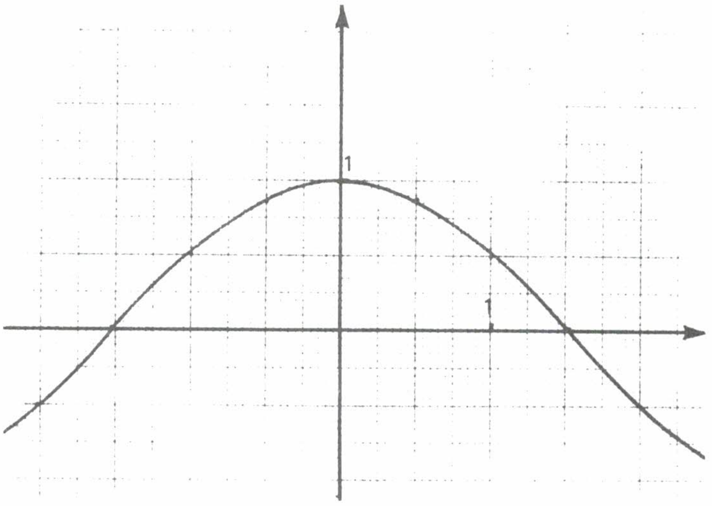



***Exemples :***

*La fonction $x \to x^2$ est paire, car, pour tout $x$ : $(-x)^2 = x^2$*



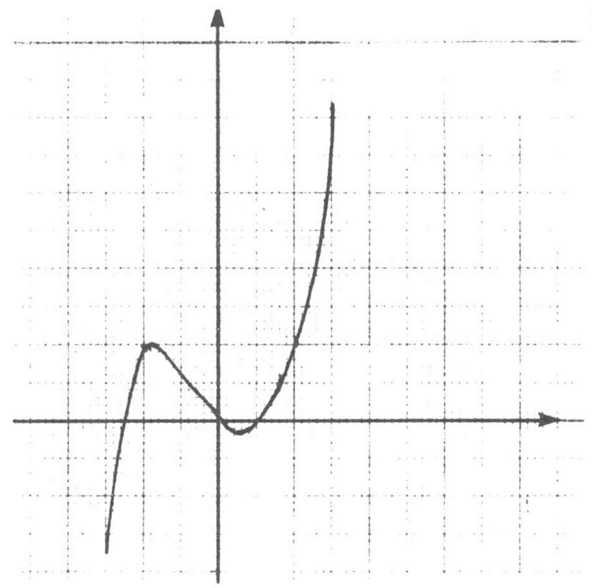

*La fonction cosinus est paire car, pour tout $x$ : $\cos x = \cos(-x)$.*



La fonction $x \to x^3 + x^2 - x$ n'est pas paire : il existe des $x$ tels que $x^3 + x^2 - x = (-x)^3 + (-x)^2 - (-x)$ (par exemple pour $x = 1$) . Mais il existe aussi des $x$ tels que :

$$x^3 + x^2 - x \neq (-x)^3 + (-x)^2 - (x)$$

(par exemple $x = 2$) .

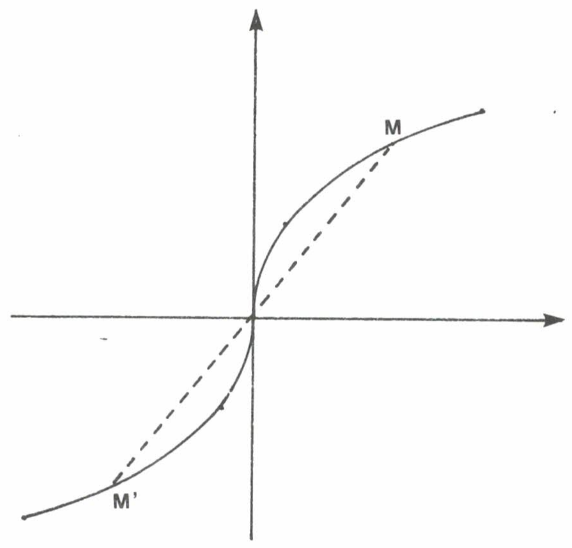


Tout polynôme qui n'a que des termes de degré pair, est une fonction paire (car $x^2 = (-x)^2$ , $x^4 = (-x)^4$ ,...) . Ainsi $x \to x^2 + 1$ , $x \to x^4 + 3x^2 + 1$ ,... sont des fonctions paires.

## Fonctions impaires

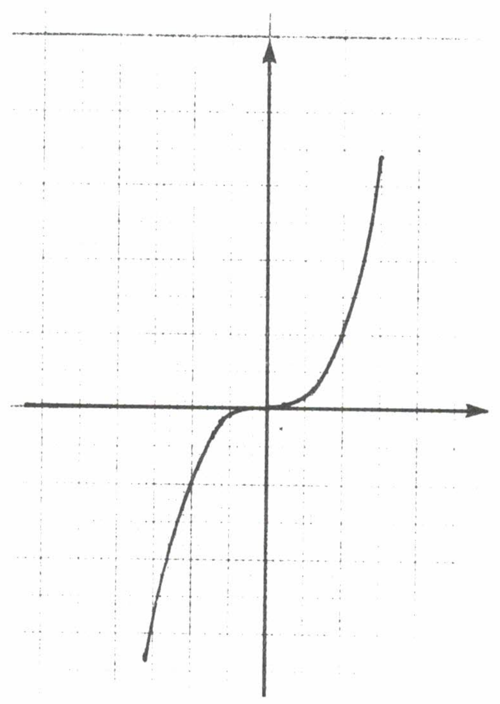
**Une fonction est dite impaire, si, pour tout $x$ : $f(-x) = -f(x)$ .**

Si $f(-x) = -f(x)$ , les points $M(x ; f(x))$ et $M'(-x ; f(-x)) = (-x ; -f(x))$ sont symétriques par rapport à l'origine. Ainsi, dire que $f$ est impaire, c'est dire que son graphique admet l'origine pour centre de symétrie.

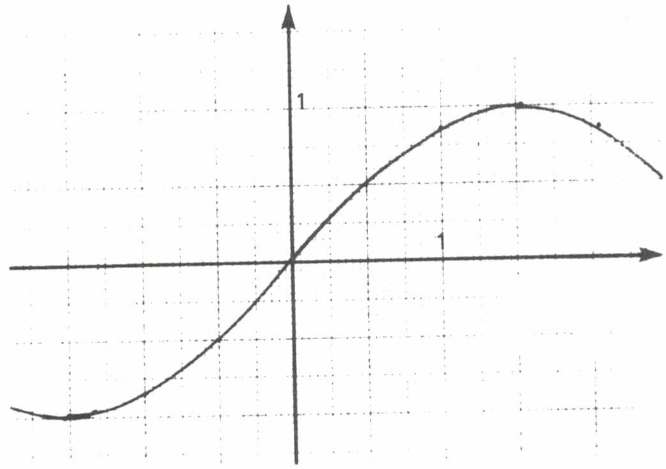



## Exemples

La fonction $x \to x^3$ est impaire car, pour tout $x$ : $(-x)^3 = -x^3$ .

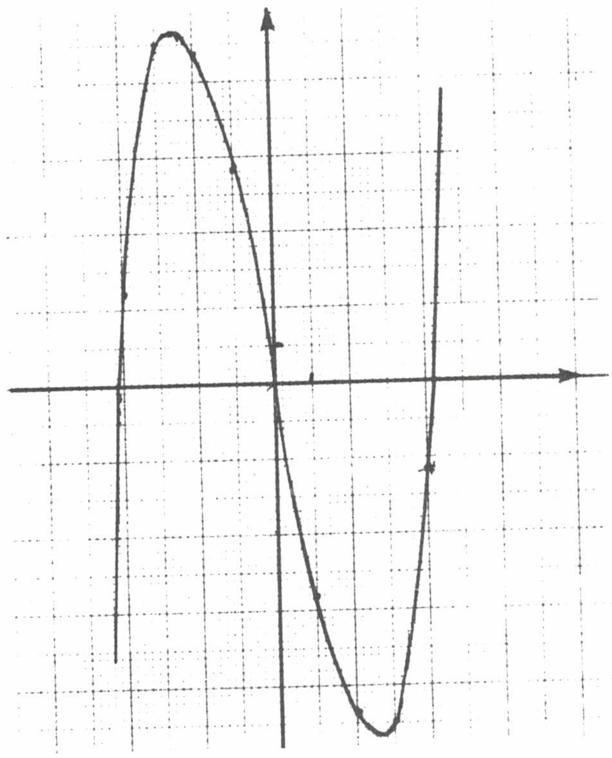


*La fonction sinus est impaire car, pour tout* $x$ : $\sin(-x) = -\sin x$ .

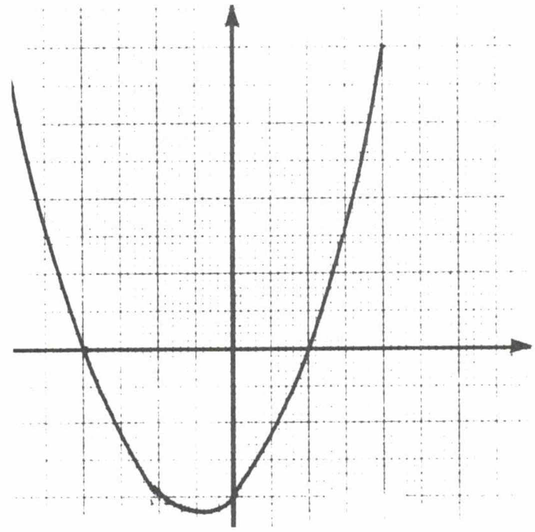



*La fonction* $x \to \frac{1}{3}x^3 - 6x$ *est impaire car, pour tout* $x$ :

$$\frac{1}{3}(-x)^3 - 6(-x) = -\left(\frac{1}{3}x^3 - 6x\right) .$$



*La fonction* $x \longrightarrow x^2 + x - 2$ *n'est pas impaire car il existe des* $x$ *pour lesquels* $(-x)^2 + (-x) - 2$ *est différent de* $-(x^2 + x - 2)$ . *Par exemple* $x = 1$ .



*Tout polynôme qui n'a que des termes d'exposant impair, est une fonction impaire ; car* $(-x)^3 = -(x^3)$ , $(-x)^5 = -(x^5)$ ,... *Ainsi*

$$x \to x^7 - x^5 , \; x \to 8x^{13} - 4x^3 + x , \; x \to x^7 - x^3 - 3x$$

*sont des fonctions impaires.*

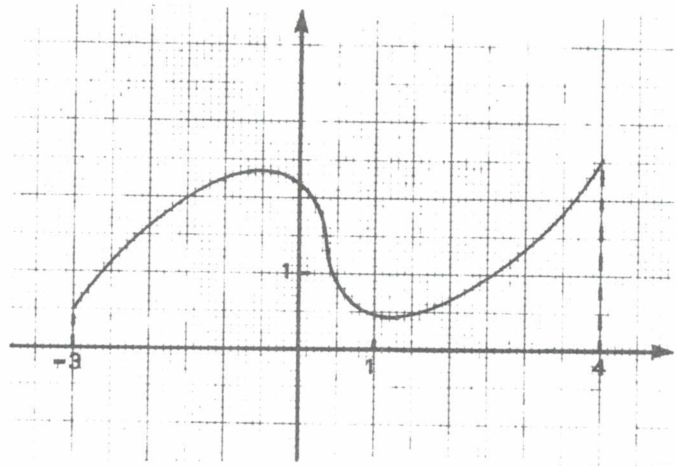
***Première série d'exercices :***

## LES EQUATIONS $f(x) = ax + b$

☆ **Exercice IV$_1$ :** On a tracé ci-contre le graphique d'une fonction $f$ définie sur l'intervalle $[-3;4]$.

a) Résous graphiquement l'équation $f(x) = 2$.

b) Résous graphiquement l'équation $f(x) = 2x - 1$.

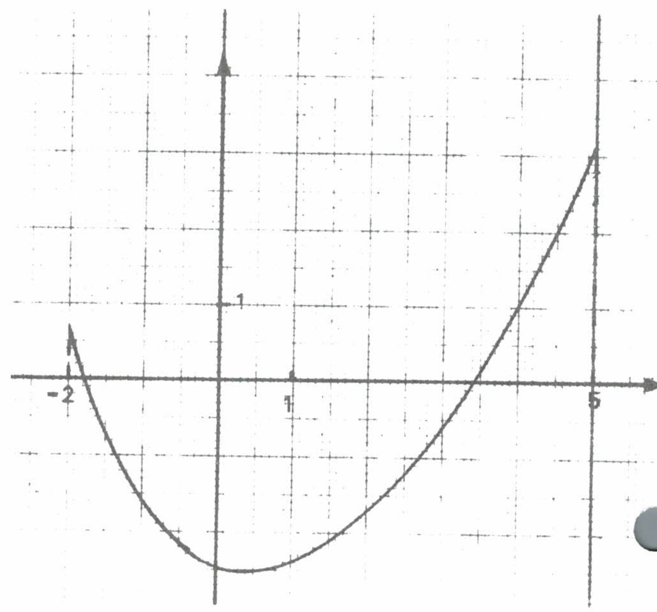



☆ **Exercice IV$_2$ :** On a tracé ci-contre le graphique d'une fonction $g$ définie sur l'intervalle $[-2;5]$.

a) Résous graphiquement l'équation $g(x) = -x + 2$.

b) Résous graphiquement l'inéquation $g(x) \geq 1$.

c) Résous graphiquement l'inéquation $-2 \leq g(x) \leq 2$.

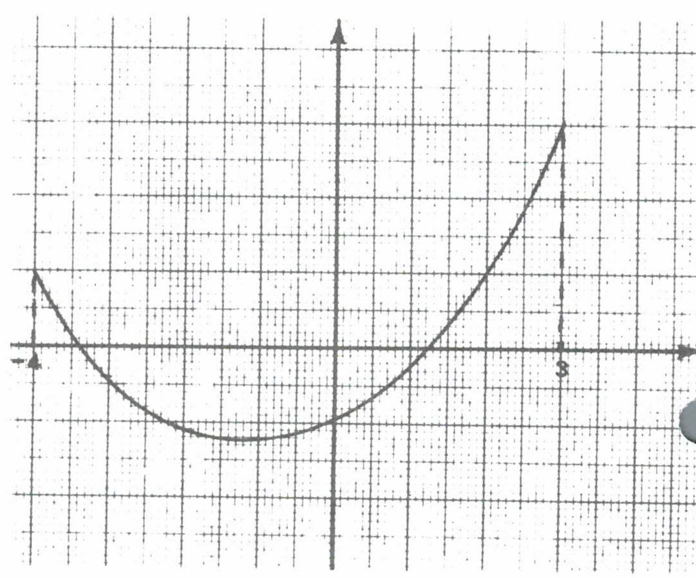



☆ **Exercice IV$_3$ :** On a tracé ci-contre le graphique d'une fonction $h$ définie sur l'intervalle $[-4;3]$.

a) Résous graphiquement l'équation $h(x) = -1 - x$.

b) Résous graphiquement l'équation $h(x) = x + 2$.

c) Résous graphiquement les inéquations $-1 - x \leq h(x) \leq x + 2$.



☆ **Exercice $IV_4$ :** *On veut résoudre l'équation $x^2 = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ . Elle a deux racines. Pour les connaître :*

a) *Dessine le graphique de la fonction $f : x \to x^2$ en limitant le dessin à la partie qui correspond à $-4 \leq x \leq 4$ (axes orthogonaux ; unités : 2 cm en abscisse et 1 cm en ordonnée).*

b) *Trace (dans les mêmes axes) le graphique de $g : x \to \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$.*

c) *Quelles sont les deux racines ? Vérifie par le calcul les résultats obtenus.*

☆ **Exercice $IV_5$ :** *L'équation $2x^2 = \frac{5}{2}x + \frac{25}{4}$ a deux racines. Pour les connaître :*

a) *Dessine un système d'axes orthonormés (unité 1 cm). Puis dessine les graphiques des fonctions $f : x \to 2x^2$ et $g : x \to \frac{5}{2}x + \frac{25}{4}$ , en limitant ton dessin à la partie qui correspond à $-3 \leq x \leq 3$. Détermine ainsi graphiquement les racines.*

b) *Vérifie ces résultats par le calcul. Si les valeurs ainsi trouvées ne sont pas exactes, dessine à l'échelle 4 les parties du graphique voisines des racines.*

☆☆ **Exercice $IV_6$ :** *L'équation $6x^2 = 13x - 5$ a deux racines. Pour les connaître :*

a) *Dessine un système d'axes orthogonaux (unités : 3 cm en abscisse et 1/2 cm en ordonnée). Puis dessine les graphiques des fonctions*

$$f : x \to 6x^2 \qquad \text{et} \qquad g : x \to 13x - 5$$

*en limitant le dessin à la partie correspondant à $-1 \leq x \leq 2$. Détermine ainsi graphiquement les racines.*

b) *Vérifie par le calcul les résultats obtenus. L'une des racines est simple ; tu as probablement obtenu sa valeur exacte par lecture graphique. Pour avoir l'autre avec une meilleure précision, dessine à l'échelle 10 la partie utile du graphique ; puis à l'échelle 100 ,... Que vaut cette racine ?*

☆☆ **Exercice $IV_7$ :** *En t'inspirant des exercices $IV_4$ , $IV_5$ et $IV_6$ , résous les équations suivantes (elles ont toutes deux racines) :*

$A : x^2 = 4x - 3$

*(axes orthonormés ; unité 1 cm ; limiter à $-1 \leq x \leq 5$)*

$B : x^2 = 12x + 28$

*(axes orthogonaux ; 1 cm en abscisse et 0,1 cm en ordonnée ; limiter à $-3 \leq x \leq 15$)*

$C : 5x^2 = \frac{11}{3}x - \frac{2}{3}$

*(axes orthonormés ; unité 2 cm ; limiter à $-1 \leq x \leq 1$)*

$D : 5x^2 = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{10}$

*(limiter à $-1 \leq x \leq 1$)*

☆ **Exercice IV$_8$ :** *Trace le graphique de la fonction* $x \to x^2$ *(axes orthonormés, unité 0,2 cm, en limitant à* $-10 \leq x \leq 10$*). Puis :*

a) *Résous l'équation* $x^2 = 9$ *et l'inéquation* $x^2 \leq 9$ .

b) *Résous l'inéquation* $4 \leq x^2 \leq 5$ .

c) *Résous l'inéquation* $-3 \leq x^2 \leq 8$ .

☆☆☆ **Exercice IV$_9$ :** *On se propose de résoudre l'inéquation* $x^2 \leq 2x + 3$ .

a) *Dans un système d'axes orthonormés (unité 1 cm) trace les graphiques des fonctions* $x \to x^2$ *et* $x \to 2x + 3$ *(en limitant à* $-2 \leq x \leq 4$*). Détermine graphiquement les nombres* $x$ *compris entre* $-2$ *et* $4$ *, pour lesquels* $x^2 \leq 2x + 3$ .

b) *Démontre que pour* $x \geq 4$ *, on a* $x^2 \geq 4x \geq 2x + 3$ .
*Démontre que pour* $x \leq -2$ *, on a* $x^2 \geq -2x \geq 2x + 3$ .

c) *Quelles sont les solutions de l'inéquation* $x^2 \leq 2x + 3$ .

☆☆☆ **Exercice IV$_{10}$ :**

a) *Démontre que pour* $x \leq 0$ *, on a* $x^2 \geq x - 1$ *. Démontre que pour* $x \geq 2$ *, on a* $x^2 \geq 2x \geq x - 1$ .

b) *Et maintenant, en t'aidant d'un graphique, résous l'inéquation* $x^2 \leq x - 1$ .

☆☆☆ **Exercice IV$_{11}$ :**

a) *Démontre que pour* $x \geq 3$ *, on a* $x^2 \geq 3x \geq 3x - \frac{5}{4}$*. Démontre que, pour* $x \leq -2$ *, on a* $x^2 \geq -2x \geq 3x - \frac{5}{4}$ .

b) *Et maintenant, en t'aidant d'un graphique, résous l'inéquation* $x^2 \geq 3x - \frac{5}{4}$ .

c) *Résous l'inéquation* $x^2 \leq 3x - \frac{5}{4}$ .

☆☆☆☆ **Exercice IV$_{12}$ :** *En t'inspirant des exercices IV$_9$ , IV$_{10}$ et IV$_{11}$ , résous les inéquations suivantes.*

**Nota :** *Tu peux utiliser le fait que pour* $a > 0$ *:*

| | | |
|---|---|---|
| $x > a$ | *implique* | $x^2 > ax$ |
| $x < -a$ | *implique* | $x^2 > -ax$ |

A : $x^2 \leq -x + 2$

B : $x^2 \geq 2x - \frac{3}{4}$

C : $2x^2 \leq x + 3$

## GRAPHIQUES DE $x \to x^3$ et $x \to x^4$

☆ **Exercice IV$_{13}$** : *On se propose de dessiner le graphique de* $f : x \longrightarrow x^3$ *(pour* $-2 \leq x \leq 2$*).*

a) *Dessine un système d'axes orthonormés (centré au centre de la feuille de papier). Unité 1 cm . Place les points du graphique correspondant à* $x = 0$ ; $0,5$ ; $-0,5$ ; $1$ ; $-1$ ; $1,5$ ; $-1,5$ ; $2$ ; $-2$ *. Puis joins ces points.*

b) *Pour étudier l'allure de la courbe au voisinage de l'origine, fais un agrandissement à l'échelle 10 de la partie graphique qui correspond à* $-1 \leq x \leq 1$ *.*

☆ **Exercice IV$_{14}$** : *On se propose de dessiner le graphique de* $f : x \to x^4$ *(pour* $-2 \leq x \leq 2$*).*

a) *Dessine un système d'axes orthonormés (centré au milieu du bord inférieur de la feuille) ; unité 1 cm . Place les points du graphique correspondant à* $0$ ; $0,5$ ; $-0,5$ ; $1$ ; $-1$ ; $1,5$ ; $-1,5$ ; $2,-2$ *. Puis joins ces points.*

b) *Pour étudier l'allure de la courbe au voisinage de l'origine, fais un agrandissement à l'échelle 10 de la partie du graphique qui correspond à* $-1 \leq x \leq 1$ *.*

☆ **Exercice IV$_{15}$** : *Etude comparée au voisinage de l'origine de* $x$, $x^2$, $x^3$, $x^4$ *et* $\sqrt{x}$ *.*

a) *Dans un système d'axes orthonormés, unité 1 cm (en prenant l'origine au centre de la feuille) dessine les graphiques des fonctions* $x \to x$, $x \to x^2$, $x \to x^3$, $x \longrightarrow x^4$ *et* $x \longrightarrow \sqrt{x}$ *(ou plutôt la partie de ces graphiques qui tient sur la feuille).*

b) *Ces graphiques ont tous un point commun. Lequel ?*

c) *Fais un agrandissement à l'échelle 10 de la partie de ces graphiques qui correspond à* $-1 \leq x \leq 1$ *.*

d) *Fais un agrandissement à l'échelle 100 de la partie de ces graphiques qui correspond à* $-0,1 \leq x \leq 0,1$ *. Que constates-tu ?*

☆☆ **Exercice IV$_{16}$ :** *Etude comparée de* $x, x^2, x^3, x^4$ *et* $\sqrt{x}$*, lorsque* $x$ *est grand.*

*On considère des axes orthogonaux ; unité 1 cm en abscisse ; unité u en ordonnée.*

a) *On veut représenter graphiquement dans ces axes les fonctions* $x \to x$ , $x \to x^2$ , $x \to x^3$ , $x \to x^4$ *et* $x \to \sqrt{x}$ *pour* $x$ *compris entre* $0$ *et* $10$ *. Quelle devra être la longueur de la feuille de papier si* $u = 1$ *cm ?*

*Choisis une unité* $u$ *telle que le dessin tienne sur une feuille de papier millimétré ordinaire, et dessine ces cinq graphiques.*

b) *On veut représenter graphiquement ces cinq fonctions pour* $x$ *compris entre* $90$ *et* $100$ *. Comment va-t-on choisir l'unité* $u$ *, pour que le dessin tienne sur la feuille. Quel dessin va-t-on obtenir ?*

c) *Et maintenant pour* $x$ *compris entre* $990$ *et* $1000$ *.*

☆☆☆ **Exercice IV$_{17}$ :** *L'équation* $\frac{1}{3}x^3 = -x - 1$ *a une seule racine* $r$ *.*

a) *Dessine en axes orthonormés (unité 1 cm) et en limitant à* $-3 \leq x \leq 3$ *, les graphiques de* $x \to \frac{1}{3}x^3$ *et de* $x \to -x - 1$ *. Détermine ainsi une valeur approchée de* $r$ *.*

b) *Par des agrandissements successifs de la "partie utile" du graphique, détermine une valeur approchée à* $0,001$ *près de* $r$ *.*

☆☆☆ **Exercice IV$_{18}$ :** *Mêmes questions que dans* IV$_{17}$ *, pour résoudre :*

$$A : \frac{1}{4}x^3 = -2x + 4$$

$$B : \frac{1}{5}x^3 = -x + 1$$

$$C : \frac{1}{4}x^3 + 3x + 1 = 0$$

☆☆☆☆ **Exercice IV$_{19}$ :** *L'équation* $\frac{1}{4}x^3 = x + 0,5$ *a trois racines.*

a) *Détermine graphiquement des valeurs approchées de ces trois racines.*

b) *Donne une valeur approchée à* $0,01$ *près de chacune d'elles.*

c) *Donne une valeur approchée à* $0,0001$ *près de l'une d'entre elles.*

## GRAPHIQUES DE $x \to \frac{1}{x}$ et $x \to \frac{1}{x^2}$

☆ **Exercice $IV_{20}$ :** *Graphique de* $x \to \frac{1}{x}$ .

*Dessine un système d'axes orthonormés (unité 0,5 cm) centré au centre de la feuille.*

a) *Dessine les points du graphique de la fonction* $x \to \frac{1}{x}$ *qui correspondent à :*

$x = \pm 1$ ; $x = \pm 2$ ; $x = \pm 3$ ; $x = \pm 4$ , $x = \pm 5$ ,..., $x = \pm 10$ ; $x = \pm 0{,}9$ ; $x = \pm 0{,}8$ ,..., $x = \pm 0{,}1$ .

*Joins ces points pour obtenir la partie du graphique de* $x \to \frac{1}{x}$ *qui correspond à* $-10 \leq x \leq 10$ .

b) *Démontre que les points du graphique qui correspondent à* $x \geq 10$ , *sont à distance de l'axe* $0x$ *inférieure à* $0{,}5$ *mm .*

☆ **Exercice $IV_{21}$ :** *Dessine un système d'axes orthonormés (unité 1 cm) .*

a) *Dessine la partie des graphiques des fonctions* $f : x \to \frac{1}{x}$ *et* $g : x \to \frac{1}{x^2}$ *qui correspond à* $0 < x \leq 10$ . *Les deux graphiques ont-ils des points communs ?*

b) *Dessine à l'échelle 10 la partie du graphique qui correspond à* $9 \leq x \leq 10$ .

c) *Dessine à l'échelle 100 la partie du graphique qui correspond à* $99{,}9 \leq x \leq 100$ .

☆☆ **Exercice $IV_{22}$ :** *Résous graphiquement l'équation* $\frac{4}{x} = x - \frac{5}{3}$ .

*Démontre que cette équation a les mêmes racines que l'équation* $x^2 = \frac{5}{3}x + 4$ . *Puis résous cette dernière équation, en t'inspirant des exercices* $IV_4$ *et* $IV_5$ .

## FONCTIONS PAIRES ET IMPAIRES

☆☆ **Exercice IV$_{23}$ :** *Les fonctions suivantes sont-elles paires ? sont-elles impaires ?*

$A : x \to x^2 + x$

$B : x \to \dfrac{x^2+x^4}{1+x^4}$

$C : x \to \dfrac{x}{1+x^2}$

$D : x \to x^3 + \dfrac{x^2}{1+x^2}$

$E : x \to x - \dfrac{x^3+x}{2+x^2}$

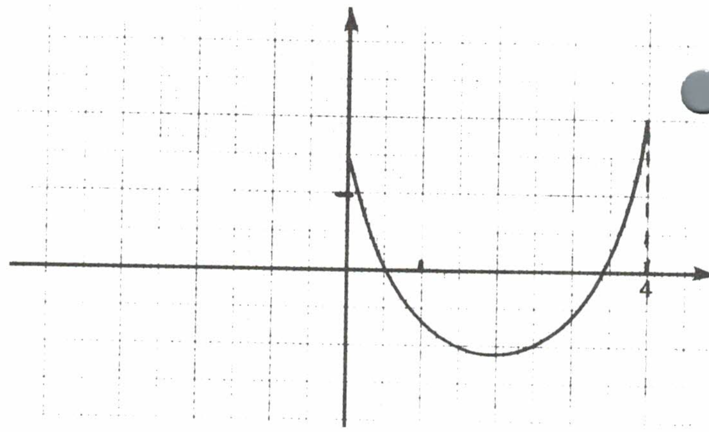
$F : x \to x^2 + \dfrac{1}{x}$

$G : x \to x^2 + \dfrac{1}{x^4}$

$H : x \to x^4 + \dfrac{x^2}{1+x}$

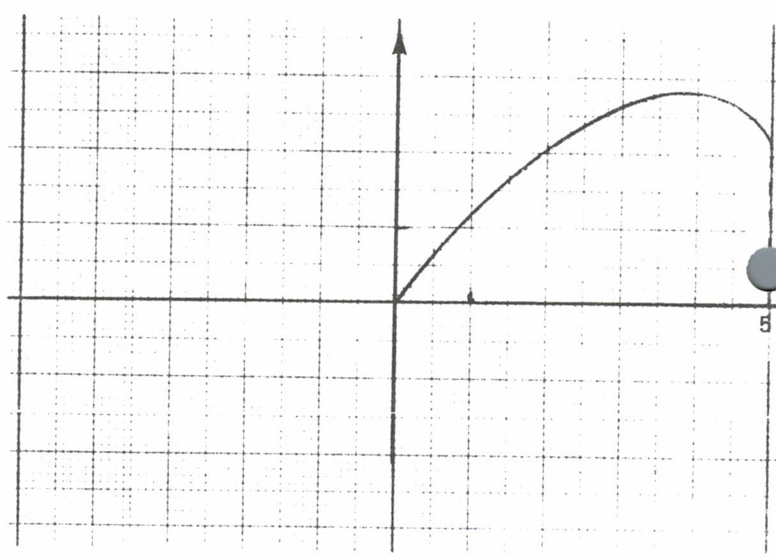
☆ **Exercice IV$_{24}$ :**

*On a dessiné ci-contre le graphique d'une fonction $f$ sur $[0;4]$. La fonction $f$ est paire. Dessine son graphique sur $[-4;0]$.*



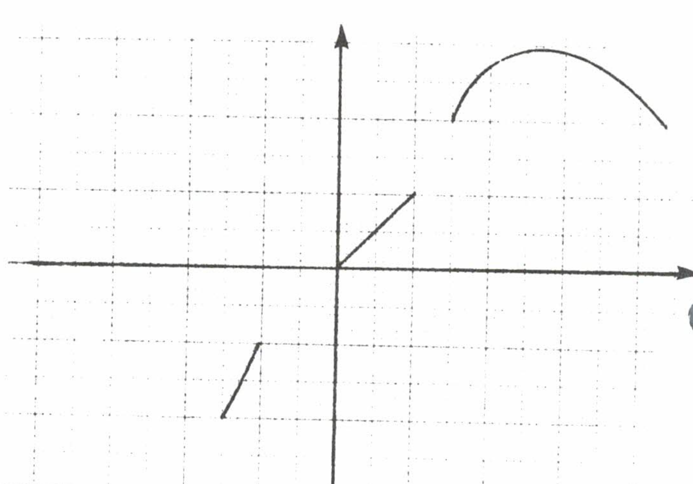

☆ **Exercice IV$_{25}$ :**

*On a dessiné ci-contre le graphique d'une fonction $g$ entre 0 et 5. La fonction $g$ est impaire. Dessine son graphique sur $[-5;0]$.*




☆☆ **Exercice IV$_{26}$ :**

*Ceci est-il une partie du graphique d'une fonction paire ? d'une fonction impaire ?*



☆☆☆ **Exercice IV$_{27}$ :** *On veut résoudre l'équation* $x^2 = \cos x$.

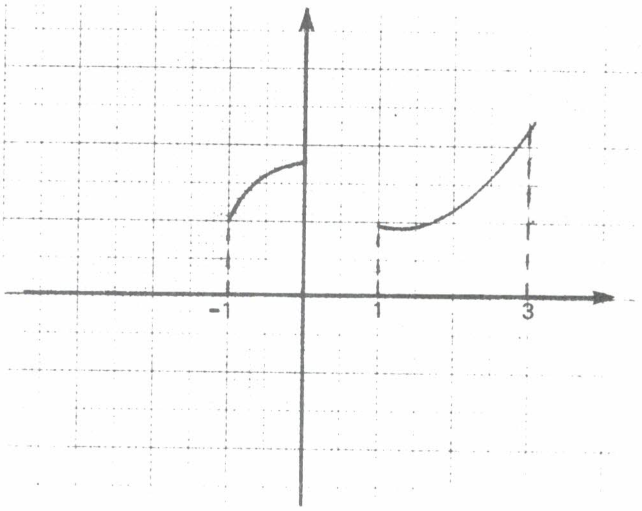
a) *Trace les graphiques des fonctions* $x \to x^2$ *et* $x \to \cos x$ *( axes orthonormés ; unité 5 cm ; en limitant à* $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ *).*

b) *Tu vois apparaître deux racines* $u$ *et* $v$ *; pourquoi* $u$ *est-il égal à* $-v$ *?*

c) *Pourquoi n'y a-t-il pas de racines plus grandes que* $\frac{\pi}{2}$ *, ou plus petites que* $-\frac{\pi}{2}$.

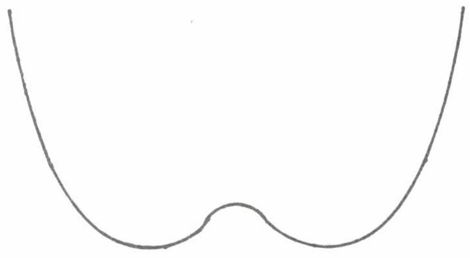
☆ **Exercice IV$_{28}$ :**

*Ceci est une partie du graphique d'une fonction paire sur [-3;+3]. Termine le dessin.*



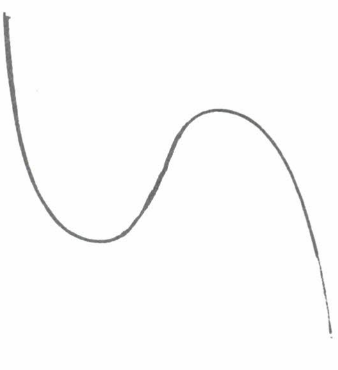

☆ **Exercice IV$_{29}$ :**

*Ceci est le graphique d'une fonction paire. On a oublié de dessiner les axes. Peux-tu le faire ?*



☆ **Exercice IV$_{30}$ :**

*Ceci est le graphique d'une fonction impaire. On a oublié de dessiner les axes. Peux-tu le faire ?*



☆☆☆☆ **Exercice $IV_{31}$** : *Soit $f$ une fonction impaire ; les fonctions suivantes sont-elles impaires ? sont-elles paires ?*

$g : x \to f(x) + 3$ $\qquad$ $h : x \to (f(x))^2$

$k : x \to (f(x))^3 + f(x)$ $\qquad$ $j : x \to (f(x))^2 + f(x)$

☆☆☆☆ **Exercice $IV_{32}$** : *Soit $f$ une fonction paire ; les fonctions suivantes sont-elles paires ? sont-elles impaires ?*

$g : x \to f(x) - 1$ $\qquad$ $h : x \to x\,f(x)$

$k : x \to \dfrac{f(x)}{x^2+1}$ $\qquad$ $j : x \to \dfrac{xf(x)}{x^2+x+1}$

$m : x \to x^2 + f(x)$ $\qquad$ $n : x \to x\,f(x) + x^3$

☆☆☆☆ **Exercice $IV_{33}$** :

a) *Existe-t-il une fonction qui soit à la fois paire et impaire ?*

b) *Soit $f$ une fonction. La fonction $x \to (f(x))^2$ peut-elle être paire ? peut-elle être impaire ?*

c) *Soient $f$ et $g$ deux fonctions impaires. La fonction $x \to f(x) + g(x)$ est-elle paire ? est-elle impaire ? La fonction $x \to f(x)\,g(x)$ est-elle paire ? est-elle impaire ?*

d) *Soit $f$ une fonction. La fonction $x \to f(x) + f(-x)$ est-elle paire ? est-elle impaire ? à quelle condition est-elle nulle ?*

## *Série 2 : SENS DE VARIATION D'UNE FONCTION*

### *FONCTIONS CROISSANTES — FONCTIONS DECROISSANTES*

*On prend une casserole, et on y met de l'eau à 15° . Puis on allume le gaz. Alors la température se met à augmenter, à* ***croître*** *. Nous pouvons considérer que la température est fonction du temps ; c'est-à-dire qu'à tout instant t , nous pouvons associer la température C(t) de l'eau à l'instant t . Nous dirons que C(t) est une* ***fonction croissante du temps t .***

*Considérons maintenant un parachutiste qui s'élance d'un avion, et qui tombe. Son altitude* ***décroît*** *. Cette altitude est fonction du temps t ; c'est-à-dire qu'à tout instant t , nous pouvons associer l'altitude A(t) . Nous dirons que A(t) est une* ***fonction décroissante de t .***

***En résumé*** *: C(t) est une fonction croissante du temps t signifie : lorsque t augmente, C(t) augmente. En termes d'inégalités, nous pouvons écrire :*

$$t_1 < t_2 \quad \textit{implique} \quad C(t_1) < C(t_2)$$

*ou encore*

$$t_1 - t_2 < 0 \quad \textit{implique} \quad C(t_1) - C(t_2) < 0$$

*A(t) est une fonction décroissante de t signifie : lorsque t augmente, A(t) diminue. En termes d'inégalités, nous pouvons écrire :*

$$t_1 < t_2 \quad \textit{implique} \quad A(t_1) > A(t_2)$$

*ou encore*

$$t_1 - t_2 < 0 \quad \textit{implique} \quad A(t_1) - A(t_2) > 0$$

### *GENERALISATION*

*Soit une fonction $x \to f(x)$ , où la variable est quelconque (c'est-à-dire que $x$ n'est pas la variable temps) , nous dirons que :*

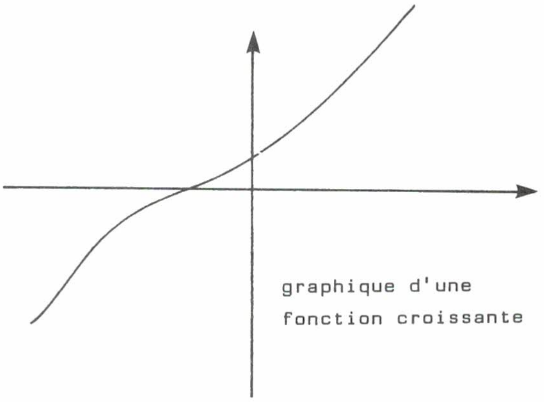
*f est croissante si : lorsque x augmente, f(x) augmente.*

*Ce qui peut s'écrire :*

$x_1 < x_2$ *implique* $f(x_1) < f(x_2)$

*ou*

$x_1 - x_2 < 0$ *implique* $f(x_1) - f(x_2) < 0$



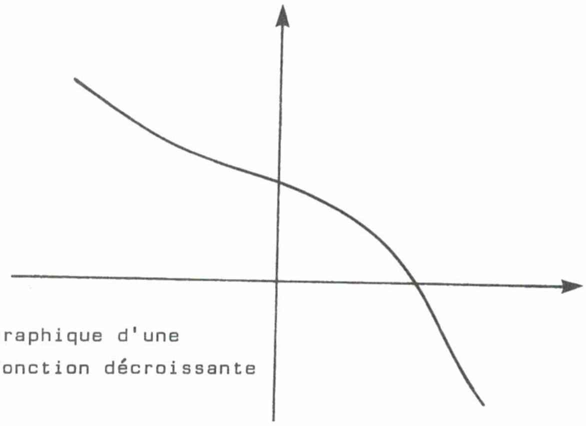

*f est décroissante si lorsque x augmente, f(x) diminue.*

*Ce qui peut s'écrire :*

$x_1 < x_2$ *implique* $f(x_1) > f(x_2)$

*ou*

$x_1 - x_2 < 0$ *implique* $f(x_1) - f(x_2) > 0$




## SENS DE VARIATION SUR UN SOUS-ENSEMBLE DE R

*Lançons une pierre, elle commence par monter ; son altitude est alors une fonction croissante du temps. Puis elle retombe ; son altitude est alors une fonction décroissante du temps. Nous voyons apparaître un phénomène général : les fonctions que nous rencontrerons seront rarement toujours croissantes, ou toujours décroissantes. En général, elles seront "croissantes sur certains intervalles" et "décroissantes sur d'autres".*

*Soit I un sous-ensemble de* $\mathbb{R}$ *( par exemple* $I = [a,b]$, $a < b$ *; mais ce pourrait être* $[a,+\infty[$ *ou* $]-\infty,b]$ *). Nous dirons que :*

- *f est croissante sur I si :*

  $x_1$ *et* $x_2$ *appartiennent à I et* $x_1 < x_2$ *impliquent* $f(x_1) < f(x_2)$

  *ou encore*

  $x_1$ *et* $x_2$ *appartiennent à I et* $x_2 - x_1 > 0$ *impliquent* $f(x_2) - f(x_1) > 0$

- *f est décroissante sur I si :*

  $x_1$ *et* $x_2$ *appartiennent à I et* $x_1 < x_2$ *impliquent* $f(x_1) > f(x_2)$

  *ou encore*

  $x_1$ *et* $x_2$ *appartiennent à I et* $x_2 - x_1 > 0$ *impliquent* $f(x_2) - f(x_1) < 0$

*Exemple :* Si $f(x) = x^2$ , nous pouvons dire que $f$ est croissante sur $[0,\infty[$; en effet si $0 \leqslant x_1 < x_2$, alors

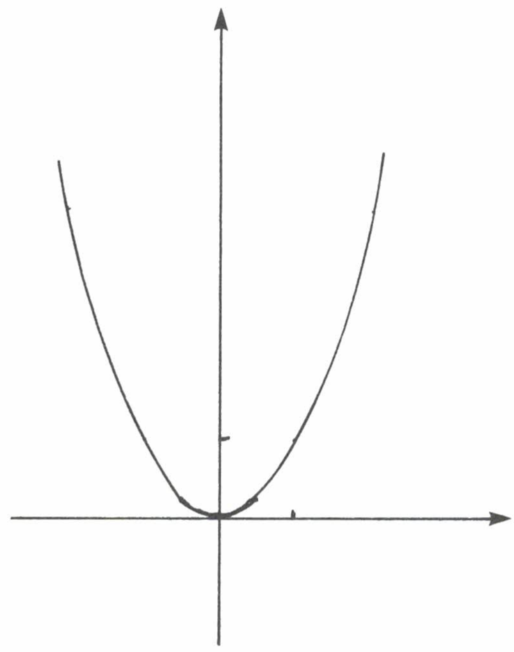
$$(x_1)^2 < (x_2)^2 .$$

Par contre, $f$ est décroissante sur $]-\infty,0]$ car si $x_1 < x_2 \leqslant 0$, on a

$$|x_2| < |x_1|$$

donc

$$(x_2)^2 = |x_2|^2 < |x_1|^2 = (x_1)^2 .$$



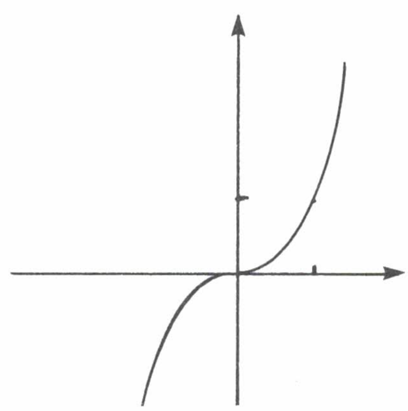
## COMPLEMENTS DE VOCABULAIRE

**Une fonction est dite monotone sur un intervalle si elle est soit croissante sur cet intervalle, soit décroissante sur cet intervalle.**

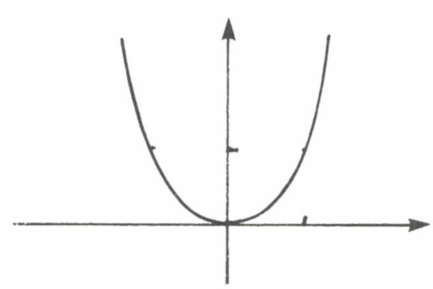
**Etudier le sens de variation d'une fonction, c'est déterminer les intervalles sur lesquels elle est croissante, et les intervalles sur lesquels elle est décroissante.**

**Exemples :**

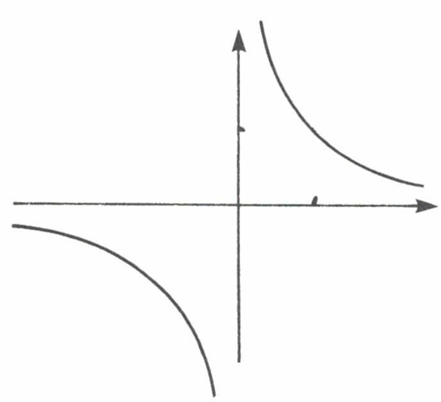
La fonction $x \to x^3$ est croissante sur $\mathbb{R}$ .



La fonction $x \to x^4$ est croissante sur $[0, \infty[$ ; elle est décroissante sur $]-\infty,0]$ .



La fonction $x \to \frac{1}{x}$ est décroissante sur $]0,\infty[$ ; elle est également décroissante sur $]-\infty,0]$.



## *MAXIMA ET MINIMA SUR UN INTERVALLE*

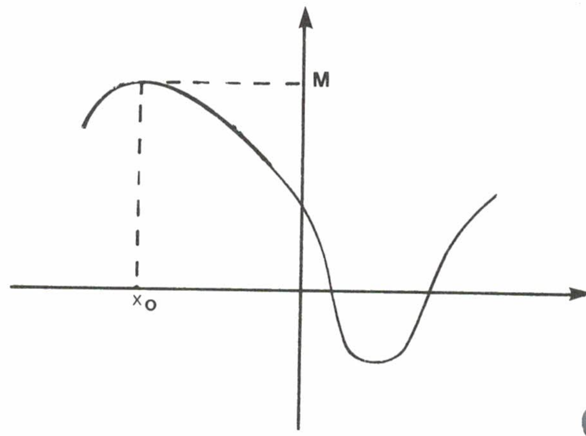
*Soit $I$ un sous-ensemble de $R$ , et soit $f$ une fonction telle que $f(x)$ existe quel que soit $x$ dans $I$ .*

*Soit $M$ un nombre. Supposons que :*

***a)*** ***Il existe un nombre $x_0$ dans $I$ tel que $f(x_0) = M$ .***

***b)*** ***Pour tout $x$ dans $I$ , $f(x) \leqslant M$ .***

***Nous dirons alors que $M$ est le maximum de $f$ sur $I$ . Nous dirons aussi que ce maximum est atteint en $x_0$ .***

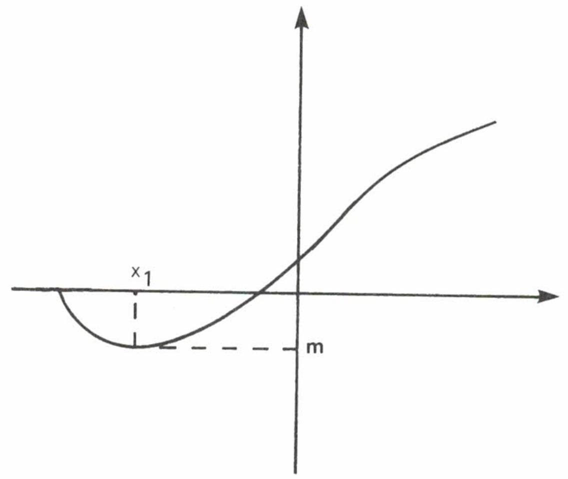



*Soit $m$ un nombre. Supposons que :*

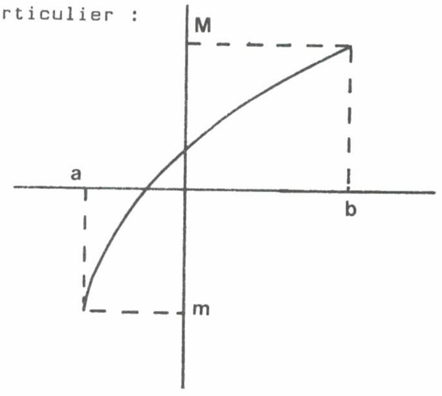
***a)*** ***Il existe un nombre $x_1$ dans $I$ tel que $f(x_1) = m$ .***

***b)*** ***Pour tout $x$ dans $I$, $f(x) \geqslant m$ .***

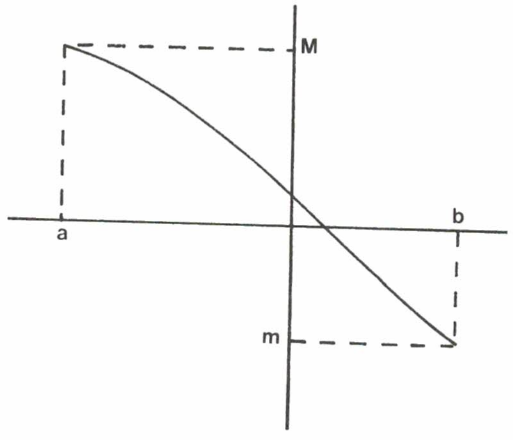
***Nous dirons alors que $m$ est le minimum de $f$ sur $I$ . Nous dirons aussi que ce minimum est atteint en $x_1$ .***




En particulier :




Une fonction croissante sur $[a,b]$ $(a < b)$ admet pour maximum $M = f(b)$ ; ce maximum est atteint en $b$ . Elle admet pour minimum $m = f(a)$ ; ce minimum est atteint en $a$ .




Une fonction décroissante sur $[a,b]$ $(a < b)$ admet $M = f(a)$ comme maximum, et $m = f(b)$ comme minimum.

***Deuxième série d'exercices :***

☆ **Exercice $IV_{34}$ :** *Détermine (sans calcul) le sens de variation des fonctions suivantes :*

*A)* *On parcourt une distance de 100 km à une vitesse $v$, la durée du trajet est fonction de $v$. C'est une fonction (croissante ? décroissante ?) de $v$.*

*B)* *L'aire d'un carré est une fonction (croissante ? décroissante ?) de la longueur du côté.*

*C)* *Le volume d'une boule est une fonction (croissante ? décroissante ?) du rayon.*

*D)* *Au mois de mars, la durée du jour est une fonction (croissante ? décroissante ?) du quantième. Et au mois de septembre ? et au mois de décembre ?*
*(La réponse est dans le calendrier des PTT ou dans le cours de géographie).*

*E)* *L'aire d'un disque est une fonction (croissante ? décroissante ?) de son périmètre.*

*F)* *Lorsqu'on monte une côte à vélo, la vitesse est une fonction (croissante ? décroissante ?) de la pente. Le temps mis pour parcourir 1 km est une fonction (croissante ? décroissante ?) de la pente.*

*G)* *La pression atmosphérique est une fonction (croissante ? décroissante ?) de l'altitude.*

*H)* *Le jour de l'examen, la note en saut est une fonction (croissante ? décroissante ?) de la hauteur sautée. La note en course à pied est une fonction (croissante ? décroissante ?) du temps de parcours.*

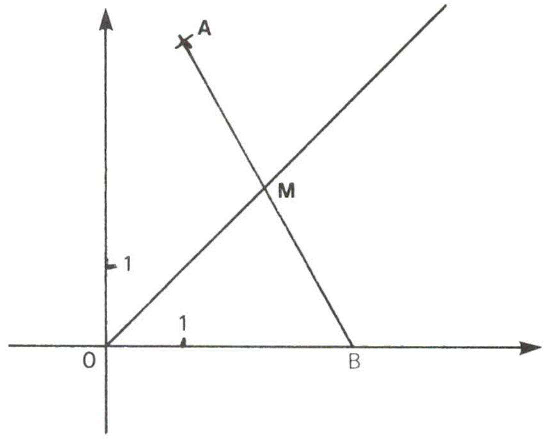
☆☆ **Exercice $IV_{35}$ :** *Lorsqu'on laisse tomber (sans vitesse initiale) une pierre, après $t$ secondes de chute, elle a parcouru $4{,}9\ t^2$ mètres. Par ailleurs le son parcourt 343 m à la seconde.*

*1)* *On laisse tomber (sans vitesse initiale) une pierre au fond d'un puits de profondeur $h$. Calcule, en fonction de $h$, la durée $T_1$ de la chute. Calcule, en fonction de $h$, le temps $T$ qui s'écoule entre l'instant où l'on lâche la pierre, et celui où l'on entend le bruit de son impact au fond du puits.*

*2)* *Représente graphiquement $T(h)$, en expliquant (sans calculs) pourquoi elle est croissante (unités 1 cm pour 5 m en abscisse, et 3 cm pour 1 s en ordonnée).*

*3)* *Pour mesurer la hauteur $h$ d'un puits, on a réalisé l'expérience et mesuré $T = 3{,}3$ s avec une incertitude de $0{,}1$ s. Que sait-on de la profondeur du puits ?*

☆☆☆ **Exercice IV$_{36}$ :**




*Le point $A$ a pour coordonnées $(1;4)$. On choisit $B$ sur l'axe $Ox$ ; $B$ est d'abscisse $t > 0$. La droite $AB$ coupe la droite d'équation $y = x$ au point $M$. On note $S$ l'aire du triangle $OMB$.*

1) *Calcule, en fonction de $t$, l'équation réduite de la droite $AB$, puis les coordonnées de $M$, et l'aire $S$ du triangle $OMB$.*

2) *Explique (sans calcul) pourquoi la fonction $t \to S(t)$ est croissante et représente-la en axes orthogonaux.*

3) *Résous graphiquement l'équation $S(t) = 113{,}7\ cm^2$. On donnera une valeur approchée de la racine avec une incertitude inférieure à $0{,}01$.*

☆☆ **Exercice IV$_{37}$ :** *Un véhicule parcourt une distance de 350 km. Les $x$ premiers km sont parcourus à 65 km/h. Le reste du trajet est parcouru à 82 km/h.*

1) *Calcule, en fonction de $x$, la durée $D$ du trajet total, et la vitesse moyenne $v$.*

2) *Représente graphiquement la fonction $x \to D(x)$ (unités : 1 cm pour 20 km et 1 cm pour 1/2 h) ; explique pourquoi $D$ est croissante. Représente graphiquement la fonction $x \to v(x)$ (unités : 1 cm pour 20 km et 1 cm pour 10 km/h) ; explique (sans calcul) pourquoi $v$ est décroissante.*

3) *La vitesse moyenne est 75 km/h. Détermine graphiquement la valeur de $x$. Puis vérifie le résultat ainsi trouvé, au moyen d'un calcul.*

☆☆☆ **Exercice IV$_{38}$ :** *Une automobile va de $A$ à $B$ à une vitesse $v$ (km/h) puis de $B$ à $A$ à la vitesse $v + 15$ (km/h). La distance de $A$ à $B$ est de 210 km.*

a) *Calcule en fonction de $v$ la durée $D$ du voyage aller-retour.*

b) *Représente graphiquement la fonction $D(v)$ (unités : 1 cm pour 10 km/h et 2 cm pour 1 heure), en expliquant (sans calcul) pourquoi $D$ est décroissante.*

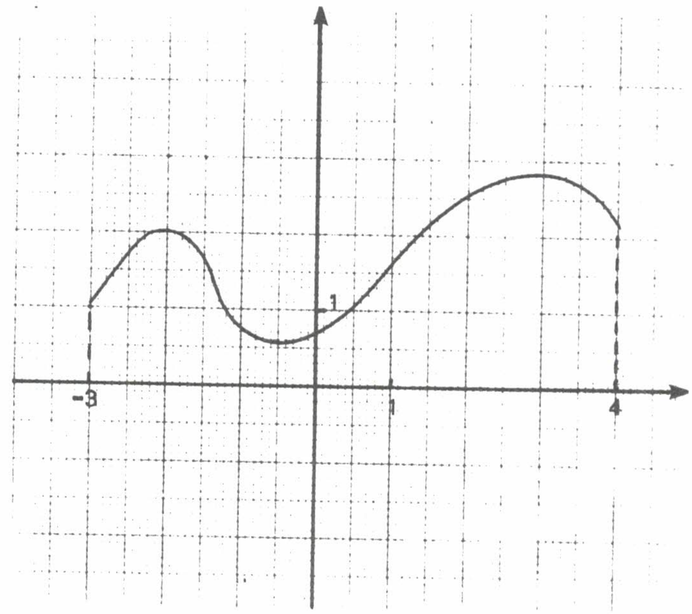
c) *Le trajet a duré 5 h 47 mn. Détermine graphiquement la vitesse $v$ ; avec une incertitude inférieure à 0,5 km/h.*

### ☆ Exercice IV$_{39}$ :

On a dessiné ci-contre le graphique d'une fonction $f$ définie sur $[-3;4]$.

1) Donne son sens de variation sur les intervalles $[-3;-2]$, $[-2;-1]$, $[0;3]$ et $[3;4]$.

2) Combien l'équation $f(x) = 1$ a-t-elle de racines ; donne une valeur approchée de ces racines.



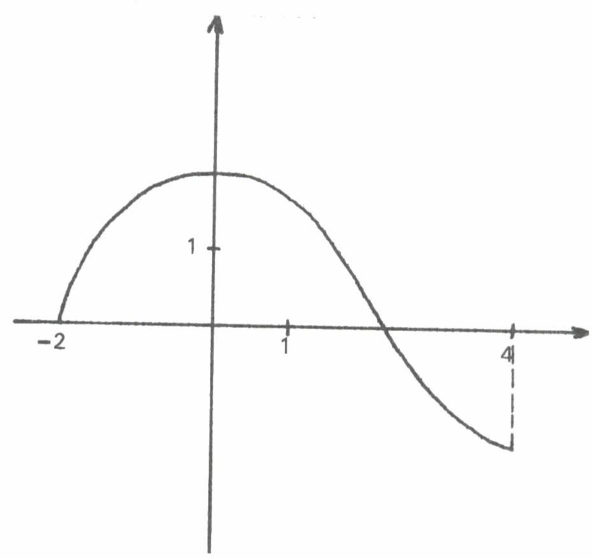

### ☆ Exercice IV$_{40}$ :

On a dessiné ci-contre le graphique d'une fonction $f$ définie sur $[-2;4]$.

Sur quels intervalles $f$ est-elle croissante ? décroissante ?

Dessine le graphique de la fonction $x \to (f(x))^2$.

Sur quels intervalles cette nouvelle fonction est-elle croissante ? décroissante ?




### ☆ Exercice IV$_{41}$ :

On a dessiné ci-contre le graphique d'une fonction $f$ définie sur $[-2;4]$.

1) Dessine le graphique des fonctions suivantes :

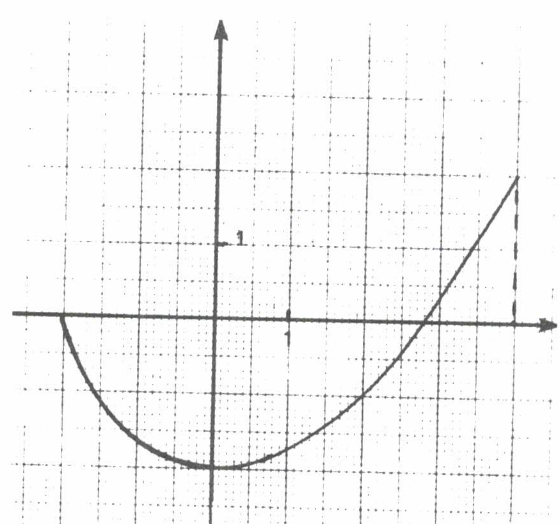
$g : x \to (f(x))^2$

$h : x \to f(x) + 1$

$j : x \to 1 - f(x)$

Etudie les variations de $g$, de $h$ et de $j$.

2) Quel est le nombre des racines de l'équation $f(x) = a$, lorsque $a = -1$ ? lorsque $a = 1$ ?



☆☆ **Exercice IV$_{42}$** : *On considère la fonction sinus . On admet qu'elle est croissante sur* $[0 ; \frac{\pi}{2}]$.

a) *Trace son graphique en axes orthonormés (unité 5 cm) en te limitant à* $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

b) *En utilisant le cercle trigonométrique, démontre que* $\sin(\pi - x) = \sin x$ *( pour* $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$*) . Tu dois pouvoir en déduire que sin est décroissante sur* $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ .

*Complète le dessin en traçant le graphique du sinus pour* $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$ .

c) *Démontre que la fonction sinus est impaire.*

*Trace le graphique de sinus pour* $-\pi \leq x \leq 0$ .

*Etudie les variations de sinus pour* $-\pi \leq x \leq 0$ .

☆☆☆ **Exercice IV$_{43}$** : *On considère la fonction cosinus . On admet qu'elle est décroissante sur* $[0 ; \frac{\pi}{2}]$.

a) *Trace son graphique en axes orthonormés (unité 5 cm) en te limitant à* $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

b) *En utilisant le cercle trigonométrique, démontre que* $\cos(\pi - x) = -\cos x$ . *Tu dois pouvoir en déduire que cos est décroissante sur* $[\frac{\pi}{2}, \pi]$. *Complète le dessin précédent en traçant le graphique du cosinus pour* $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$ .

c) *Démontre que la fonction cosinus est paire. Trace son graphique pour* $-\pi \leq x \leq 0$. *Etudie ses variations sur* $[-\pi, 0]$ .

☆☆☆ **Exercice IV$_{44}$** : *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *croissante sur* $[0,a]$.

a) *Si f est paire, elle est décroissante sur* $[-a,0]$. *Pourquoi ?*

b) *Si f est impaire, elle est croissante sur* $[-a,0]$ . *Elle est aussi croissante sur* $[-a,+a]$. *Pourquoi ?*

☆☆☆ **Exercice IV$_{45}$** : *Une fonction paire peut-elle être croissante sur* $[-2;4]$ *? Une fonction croissante sur* $\mathbb{R}$ *peut-elle être impaire ?*

☆ **Exercice IV$_{46}$** : *Trace le graphique de la fonction* $x \to x^2 + 2x - 3$ *(axes orthonormés ; unité 2 cm) en limitant à* $-4 \leq x \leq 4$*)*.

1) *La fonction* $f : x \to x^2 + 2x - 3$ *a un minimum pour* $x = -1$ . *Vérifie que* $f(x) - f(-1) \geq 0$ *pour toute valeur de* $x$ *(pour cela, essaie d'écrire* $f(x) - f(-1)$ *comme un carré)* .

2) *Détermine graphiquement les deux racines de l'équation* $x^2 + 2x - 3 = 0$ .

☆☆ **Exercice IV$_{47}$** : *Trace le graphique de la fonction* $x \to x^2 - x + 1$ *(axes orthonormés ; unité 1 cm) en limitant à* $-4 \leq x \leq 4$*)* .

1) *La fonction* $f : x \to x^2 - x + 1$ *a un minimum pour une certaine valeur* $x_0$ *de* $x$ . *Détermine* $x_0$ *(expéritalement en te servant du graphique)* . *Puis vérifie que l'on a bien* $f(x) - f(x_0) \geq 0$ *pour tout* $x$ .

2) *Détermine graphiquement des valeurs approchées des deux racines de l'équation* $x^2 - x + 1 = 0$ .

☆☆ **Exercice IV$_{48}$** : *Trace le graphique de la fonction* $x \to 2x^2 - 3x + 4$ *(axes orthonormés ; unité 1 cm) en limitant à* $-3 \leq x \leq 3$ .

*La fonction* $f : x \to 2x^2 - 3x + 4$ *a un minimum pour une valeur* $x_0$ *de* $x$ . *Détermine* $x_0$ *expérimentalement ; puis vérifie que* $f(x) - f(x_0) \geq 0$ *pour tout* $x$ .

☆☆ **Exercice IV$_{49}$** : *Trace le graphique de la fonction* $-3x^2 + 2x$ *(axes orthonormés ; unité 0,5 cm) en limitant à* $-3 \leq x \leq 3$ .

*La fonction* $f : x \to -3x^2 + 2x$ *a un maximum pour une certaine valeur* $x_0$ *de* $x$ . *Recherche* $x_0$ *expérimentalement, puis vérifie que* $f(x_0) - f(x) \geq 0$ *pour tout* $x$ .

☆☆☆ **Exercice IV$_{50}$** : *Les fonctions suivantes ont toutes un minimum ou un maximum. En t'inspirant des exercices précédents, détermine la valeur* $x_0$ *de* $x$ *pour laquelle il est obtenu.*

a) $x \to 5x^2 + x + 1$

b) $x \to -x^2 + 3x + 2$

c) $x \to x(x - 1)$

d) $x \to -2x^2 + x - 4$

e) $x \to -5x^2 + 4x + 2$

☆☆☆ **Exercice $IV_{51}$ :**

a) *Trace le graphique de la fonction $f : x \to x^2 + 3x - 1$ (axes orthonormés, unité 1 cm ; en limitant à $-4 \leq x \leq 4$) . La fonction $f$ a un minimum. Détermine la valeur $x_0$ de $x$ pour laquelle il est obtenu.*

b) *Démontre que $f(x) - f(y) = (x - y)(x + y + 3)$ . Puis démontre que :*

- *pour $x \geq x_0$ et $x' \geq x_0$ , alors $x + x' + 3 \geq 0$*
- *pour $x \leq x_0$ et $x' \leq x_0$ , alors $x + x' + 3 \leq 0$*

*Tu dois pouvoir en déduire que $f$ est croissante sur $[x_0 , +\infty[$ et décroissante sur $]-\infty, x_0]$ .*

☆☆☆ **Exercice $IV_{52}$ :** *En t'inspirant de l'exercice $IV_{51}$ , étudie les variations de la fonction :*

$$x \to 2x^2 - 5x + 4 \quad .$$

☆☆ **Exercice $IV_{53}$ :** *Trace (en axes orthonormés, unité 1 cm) le graphique d'une fonction $f$ définie sur $[-3,7]$ et telle que :*

a) $f(-3) = 1$ , $f(0) = 4$ , $f(4) = 0$ et $f(7) = 3$ .

b) *$f$ est croissante sur $[-3,-1]$ et sur $[4,6]$ .*

c) *$f$ est décroissante sur $[-1,4]$ et sur $[6,7]$ .*

*Que sait-on de $f(2)$ , de $f(5)$ ?*
*Combien l'équation $f(x) = 2$ a-t-elle de racines ?*
*Combien l'équation $f(x) = 3,5$ a-t-elle de racines ?*

☆☆ **Exercice $IV_{54}$ :** *Trace (en axes orthonormés, unité 1 cm) le graphique d'une fonction $f$ définie sur $[0;10]$ et telle que :*

$$f(0) = 0 \ , \ f(2) = 2 \ , \ f(4) = 4 \ , \ f(6) = 6 \ , \ f(8) = 8 \ , \ f(10) = 10$$

et $\quad f(1) = f(3) = f(5) = f(7) = f(9) = 1$

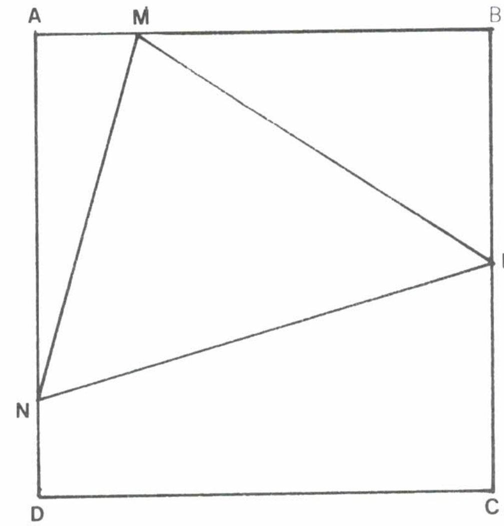
*et $f$ est monotone sur chacun des intervalles $[0;1]$ , $[1;2]$ ,..., $[9;10]$ .*

*Que sait-on de $f(4,5)$ ?*
*Combien l'équation $f(x) = 2$ a-t-elle de racines ?*

### ☆☆☆ Exercice $IV_{55}$ :

On considère un carré $ABCD$ de côté 6 cm. On note $I$ le milieu de $BC$. Les points $M$ et $N$ sont sur les segments $AB$ et $DA$, et

$$AM = DN = x \text{ (cm)}.$$

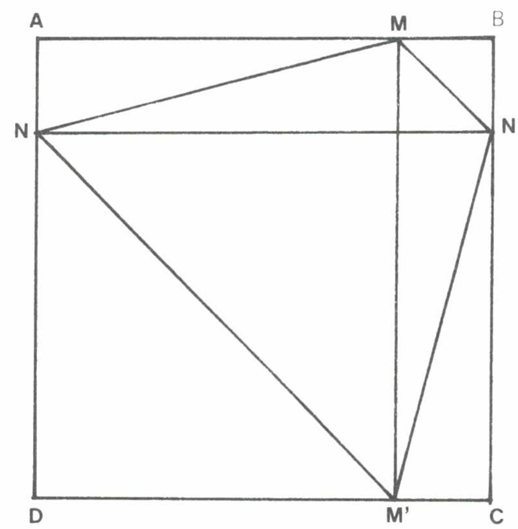



1) Calcule, en fonction de $x$, l'aire $S$ du triangle $IMN$.

2) Représente graphiquement la fonction $S(x)$. Détermine expérimentalement son minimum ; puis vérifie par le calcul.

### ☆☆☆ Exercice $IV_{56}$ :

On considère un carré $ABCD$ de côté 6 cm ; les droites $MM'$ et $NN'$ sont parallèles aux côtés $AD$ et $AB$, et on a $AM = DN = x$ (cm).



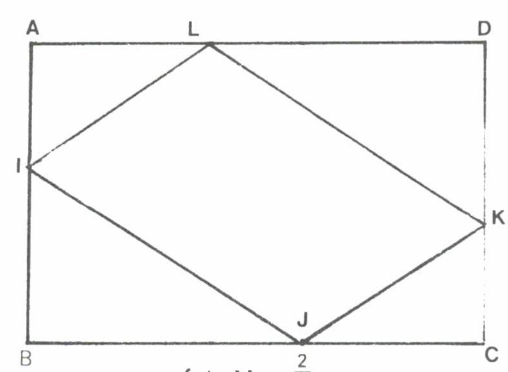

1) Calcule, en fonction de $x$, l'aire $S$ du pentagone $MN'M'DN$.

2) Représente graphiquement la fonction $S(x)$ ; et détermine pour quelle valeur de $x$, $S$ est minimum.

### ☆☆☆☆ Exercice $IV_{57}$ :

Le rectangle $ABCD$ a pour longueur $AD = 9$ cm, et pour largeur $AB = 6$ cm. On choisit $I, J, K, L$ sur les segments $AB, BC, CD$ et $DA$ tels que $AI = CK = 2x$ (cm) et

$$AL = CJ = 3x \text{ (cm)}.$$




échelle $\frac{2}{3}$

1) Pourquoi le quadrilatère $IJKL$ est-il un parallélogramme ?

2) Calcule, en fonction de $x$, l'aire $S$ du parallélogramme $IJKL$.

3) Représente graphiquement la fonction $S(x)$, et précise pour quelle valeur de $x$ elle est maximum.

## *DIX FAÇONS DE DEPENSER UN HERITAGE*

☆☆☆ **Exercice IV$_{58}$** : *Tu disposes d'une somme* $S_0 = 10\ 000$ F . *La première année tu dépenses* 1 % *de* $S_0$ ; *soit une somme* $s_1$ . *Il reste* $S_1$ .

*La deuxième année tu dépenses* 2 % *de* $S_0$ ; *soit une somme* $s_2$ . *Il reste* $S_2$ .

*La troisième année tu dépenses* 4 % *de* $S_0$ ; *soit une somme* $s_3$ . *Il reste* $S_3$ .

*La quatrième année tu dépenses* 8 % *de* $S_0$ ;...

1) *Calcule les sommes* $s_1, s_2, s_3, \ldots$ *et les sommes* $S_1, S_2, S_3, \ldots$

2) *Vérifie que la fonction* $n \to s_n$ *est croissante ; et que la fonction* $n \to S_n$ *est décroissante. Au bout de combien de temps es-tu ruiné ?*

3) *Représente graphiquement les fonctions* $n \to s_n$ *et* $n \to S_n$ *(unité : 1 cm pour 500 F).*

☆☆☆ **Exercice IV$_{59}$** : *Tu disposes d'une somme* $S_0 = 10\ 000$ F . *Tu la places à* 5 % *l'an. A la fin de la première année tu dépenses* 10 % *de* $S_0$ ; *il reste* $S_1$ *qui est placée à* 5 % *l'an. A la fin de la deuxième année tu dépenses* 10 % *de* $S_0$ . *Il reste* $S_2$ *placée à* 5 % . *Et ainsi de suite.*

1) *Calcule* $S_1, S_2, S_3, \ldots$

2) *La fonction* $n \to S_n$ *est-elle croissante ou décroissante.*

3) *Représente graphiquement la fonction* $n \to S_n$ *(unité : 1 cm pour 500 F). Au bout de combien de temps es-tu ruiné ?*

☆☆☆ **Exercice IV$_{60}$** : *Tu disposes d'une somme* $S_0 = 10\ 000$ F *placée à* 6 % *l'an. A la fin de la première année tu dépenses les intérêts plus* 8 % *de* $S_0$ . *Il reste* $S_1$ , *placée à* 6 % . *A la fin de la deuxième année tu dépenses les intérêts plus* 8 % *de* $S_0$ . *Il reste* $S_2$ . *Et ainsi de suite.*

1) *Calcule les sommes dépensées* $D_1, D_2, D_3, \ldots$ *et les sommes restantes* $S_1, S_2, S_3, \ldots$

2) *Les fonctions* $n \to D_n$ *et* $n \to S_n$ *sont-elles croissantes ou décroissantes ?*

3) *Au bout de combien d'années la somme dépensée devient-elle inférieure à* 10 % *de* $S_0$ ?

☆☆☆ **Exercice $IV_{61}$ :** *Tu disposes d'une somme $S_0 = 10\ 000$ F placée à t % . A la fin de la première année tu dépenses (t + 10 %) de ($S_0$ + intérêts) . Il reste $S_1$ placée à t % . A la fin de la deuxième année tu dépenses (t + 10 %) de ($S_1$ + intérêts) . Il reste $S_2$ . Et ainsi de suite.*

1) *Calcule $S_1, \ldots, S_{10}$ pour $t = 6$ .*

2) *Calcule $S_1, \ldots, S_{10}$ pour $t = 8$ .*

3) *Démontre (sans calcul) que (quelle que soit la valeur de t) la fonction $n \to S_n$ est décroissante. Mais peux-tu expliquer pourquoi plus le taux t est élevé, plus vite tu te ruines ?*

☆☆☆ **Exercice $IV_{62}$ :** *Tu disposes d'une somme $S_0 = 10\ 000$ F placée à 6 % l'an. A la fin de la première année tu dépenses 10 % de ($S_0$ + intérêts) ; soit une somme $D_1$ . Il reste $S_1$ placée à 6 % . Au bout de la seconde année tu dépenses 10 % de ($S_1$ + intérêts) ; soit $D_2$ . Il reste $S_2$ placée à 6 % . Et ainsi de suite.*

1) *Calcule $D_1, D_2, D_3, \ldots$ et $S_1, S_2, S_3, \ldots$*

2) *Les fonctions $n \to D_n$ et $n \to S_n$ sont-elles croissantes ou décroissantes ?*

3) *Au bout de combien de temps seras-tu ruiné ?*

4) *Représente graphiquement les fonctions $n \to D_n$ et $n \to S_n$ (unité 1 cm pour 500 F) .*

☆☆☆ **Exercice $IV_{63}$ :** *Tu disposes d'une somme $S_0 = 10\ 000$ F placée à 6 % l'an. Chaque année tu dépenses 1 000 F , et ce qui reste (ie : intérêts + capital — somme dépensée) est toujours placé à 6 % . On note $S_n$ la somme qui reste au début de la n-ième année.*

1) *Calcule $S_1, S_2, S_3, \ldots$*

2) *La fonction $n \to S_n$ est-elle croissante ou décroissante ? Quand seras-tu ruiné ?*

3) *Recommence le problème en supposant que $S_0 = 30\ 000$ F . Quand seras-tu ruiné ?*

☆☆☆ **Exercice IV$_{64}$ :** *Tu disposes d'une somme $S_o = 10\ 000$ F placée à 6 % l'an. A la fin de la première année tu dépenses une somme $D_1$ égale à 10 % de ($S_o$ + intérêts) ; il reste $S_1$ placée à 6 % . A la fin de la seconde année du dépenses une somme $D_2$ égale à 12 % de ($S_1$ + intérêts) ; il reste $S_2$ placée à 6 % . A la fin de la troisième année tu dépenses une somme $D_3$ égale à 14 % de ($S_2$ + intérêts) . Et ainsi de suite.*

1) Calcule $D_1$ , $D_2$ , $D_3$ ,... et $S_1$ , $S_2$ , $S_3$ ,...

2) Les fonctions $n \longrightarrow D_n$ et $n \longrightarrow S_n$ sont-elles croissantes ? sont-elles décroissantes ?

3) Au bout de combien d'années seras-tu ruiné ?

☆☆☆ **Exercice IV$_{65}$ :** *Tu disposes d'une somme $S_o$ . Le premier mois tu dépenses 2 % de $S_0$ . Il reste $S_1$ . Le second mois tu dépenses 4 % de $S_1$ . Il reste $S_2$ . Le troisième mois tu dépenses 6 % de $S_2$ . Et ainsi de suite.*

*Si tu ne sais pas faire les calculs avec $S_o$ quelconque, fais-les d'abord pour $S_o = 10\ 000$ , ou pour $S_o = 20\ 000$ .*

1) Calcule $S_1$ , $S_2$ , $S_3$ ,... et les sommes dépensées $D_1$ , $D_2$ , $D_3$ ,...

2) Les fonctions $n \longrightarrow D_n$ et $n \longrightarrow S_n$ sont-elles croissantes ? sont-elles décroissantes ?

3) Au bout de combien de mois seras-tu ruiné ?

☆☆☆ **Exercice IV$_{66}$ :** *Tu disposes d'une somme $S_o = 10\ 000$ F placée à 8 % l'an. A la fin de la première année tu dépenses 3 % de $S_o$ . Il reste $S_1$ placée à 8 % . A la fin de la deuxième année tu dépenses 6 % de $S_o$ . Il reste $S_2$ placée à 8 % . A la fin de la troisième année tu dépenses 9 % de $S_o$ . Et ainsi de suite.*

1) Calcule $S_1$ , $S_2$ , $S_3$ ,...

2) La fonction $n \rightarrow S_n$ est-elle croissante ? est-elle décroissante ? Quand seras-tu ruiné ?

☆☆☆ **Exercice IV$_{67}$ :** *Tu disposes d'une somme* $S_o = 10\ 000$ *F . Tu la places à 8 % l'an. A la fin de la première année tu dépenses 2 % de* $S_o$ *. Il reste* $S_1$ *placée à 8 %. A la fin de la deuxième année tu dépenses 4 % de* $S_o$ *. Il reste* $S_2$ *placée à 8 %. A la fin de la troisième année tu dépenses 8 % de S . Et ainsi de suite.*

1) *Calcule* $S_1$ , $S_2$ , $S_3$ ,...

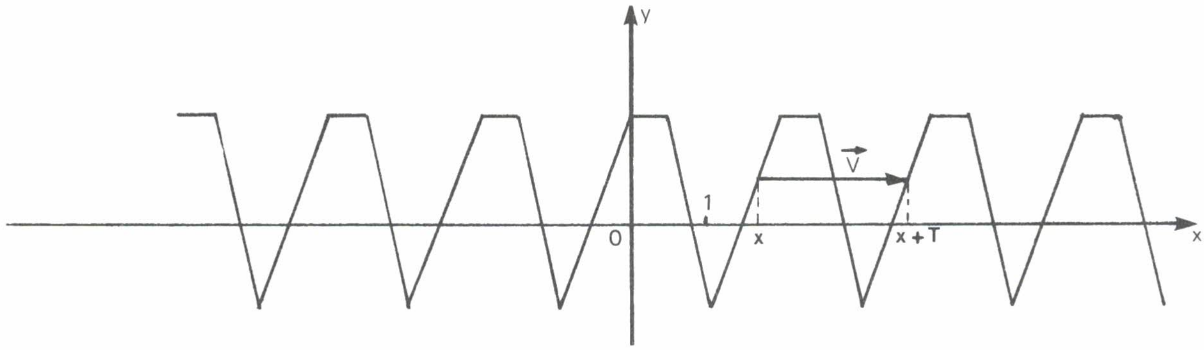
2) *La fonction* $n \rightarrow S_n$ *est-elle croissante ? est-elle décroissante ? Quand seras-tu ruiné ?*

## *Série 3 : FONCTIONS DIVERSES*

### *FONCTIONS PERIODIQUES*

***On dit qu'une fonction $f$ admet le nombre strictement positif $T$ pour période si :***

***Quel que soit $x$ :*** $\quad f(x + T) = f(x)$ .

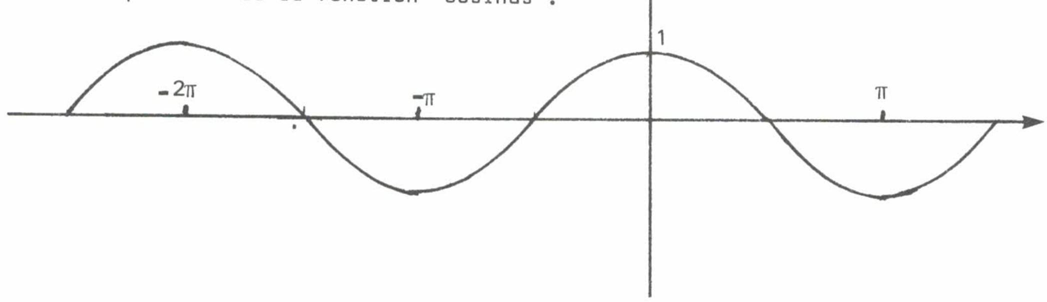



*On a dessiné ci-dessus le graphique d'une fonction pédiodique de période 2. Le vecteur $\vec{V} = \overrightarrow{M_x M_{x+2}}$ (où $M_x$ $(x, f(x))$ et $M_{x+2}$ $(x+2\ ,\ f(x+2)) = (x+2\ ,\ f(x)))$ ne dépend pas de $x$ ; c'est le vecteur de coordonnées $(2;0)$. Ainsi la translation de vecteur $\vec{V}(2;0)$ transforme le graphique en lui-même.*

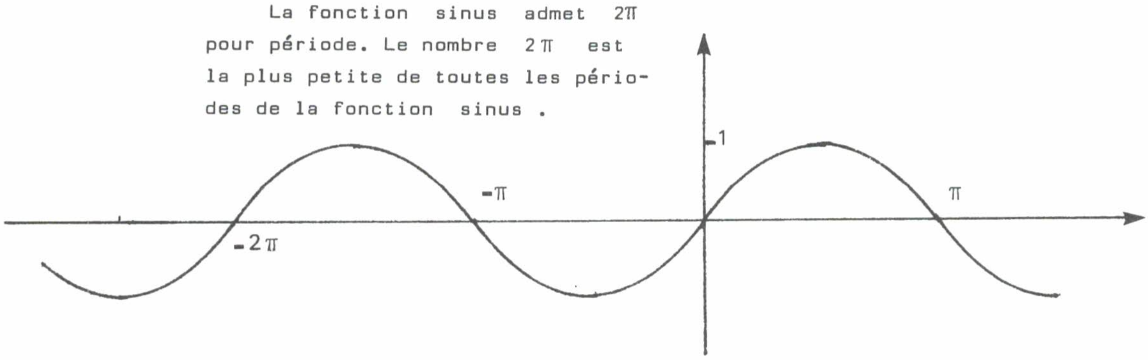
*Notons que si $T$ est une pédiode de $f$, alors $2T$ est une période de $f$ (c'est-à-dire : quel que soit $x$, $f(x + 2T) = f(x)$), $3T$ est une période de $f$ ,.... ..., $nT$ ($n$ entier positif) est une période de $f$.*

***Exemples :***

La fonction cosinus admet $2\pi$ pour période. Le nombre $2\pi$ est la plus petite de toutes les périodes de la fonction cosinus .




La fonction sinus admet $2\pi$ pour période. Le nombre $2\pi$ est la plus petite de toutes les périodes de la fonction sinus .



*Si la fonction $f$ admet $T$ pour période, pour tracer le graphique de $f$, trace la partie qui correspond à $[0,T]$ ; puis reproduis le dessin obtenu par des translations de vecteur $\vec{V}(T,0)$ , $2\vec{V}$ , $3\vec{V}$ , $-\vec{V}$ , $-2\vec{V}$ ,...*

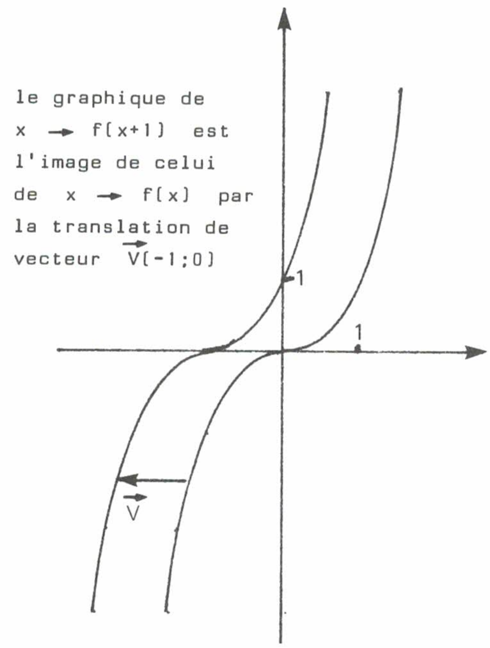
## FONCTIONS COMPOSEES

***Si $f$ et $g$ sont deux fonctions, la fonction composée $f \circ g$ associe à $x$ le nombre $f(g(x))$.***

**Exemple 1 :**

Soit $f : x \to x^3$ et $g : x \to x + 1$ , alors $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x+1) = (x+1)^3$ .

Lorsque $x$ augmente, $g(x)$ augmente (car $g$ est croissante). Lorsque $g(x)$ augmente, $f(g(x))$ augmente (car $f$ est croissante). Donc lorsque $x$ augmente, $f(g(x))$ augmente. Autrement dit $f \circ g$ est croissante.

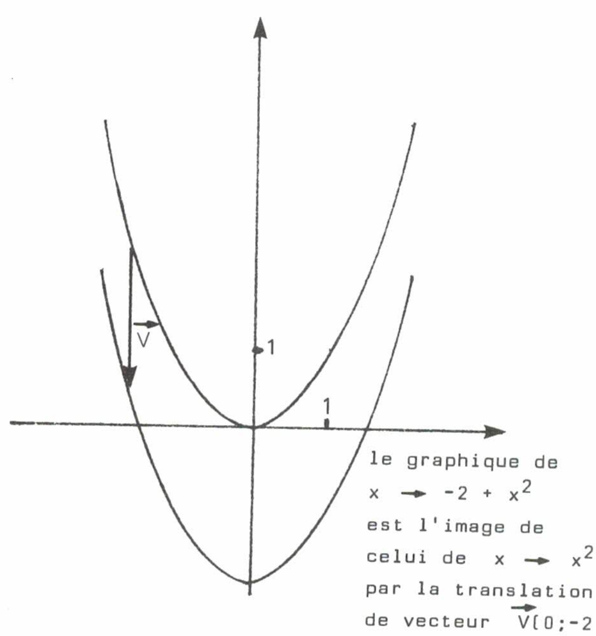



**Exemple 2 :**

Soit $f : x \to -2 + x$ et $g : x \to x^2$ , alors $f \circ g(x) = f(g(x))) = f(x^2) = -2 + x^2$ .

Supposons $x > 0$ :

Lorsque $x$ augmente, $g(x) = x^2$ augmente (car, pour $x > 0$ , $g$ est croissante) . Lorsque $x^2$ augmente, $f(x^2) = -2 + x^2$ augmente (autrement dit $f$ est croissante) . Donc lorsque $x$ augmente, $-2 + x^2$ augmente ; autrement dit $f \circ g$ est croissante pour $x > 0$ .



*Supposons* $x < 0$ :

*Lorsque* $x$ *augmente,* $g(x) = x^2$ *diminue (car* $g$ *est décroissante pour* $x < 0$*). Lorsque* $x^2$ *diminue,* $f(x^2) = -2 + x^2$ *diminue . Donc lorsque* $x$ *augmente,* $-2 + x^2$ *diminue ; autrement dit* $f \circ g$ *est décroissante pour* $x < 0$ *.*

***Troisième série d'exercices :***

## *FONCTIONS DIVERSES*

### ☆☆☆ Exercice $IV_{68}$ :

a) Dessine le graphique de $f : x \to \cos 2x$ pour $-2\pi \leq x \leq 3\pi$ (axes orthonormés, unité : 2 cm) . Démontre que la plus petite période est $\pi$ . Précise ses variations sur l'intervalle $[0;2\pi]$ .

b) Dessine dans les mêmes axes, le graphique de la fonction $g : x \to \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$ (pour $-2\pi \leq x \leq 3\pi$) .

c) Quel que soit $x$ , $g(x) = f\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ . Tu dois pouvoir en déduire qu'il existe une transformation géométrique simple qui transforme le graphique de $f$ en celui de $g$ . Laquelle ?

### ☆☆☆ Exercice $IV_{69}$ :

a) Dessine, pour $-\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ , les graphiques de $f : x \to \sin 3x$ et $g : x \to \sin 6x$ , dans un même système d'axes orthonormés (unité : 4 cm) .

b) Détermine une période de chacune de ces fonctions, en t'efforçant de trouver la plus petite possible.

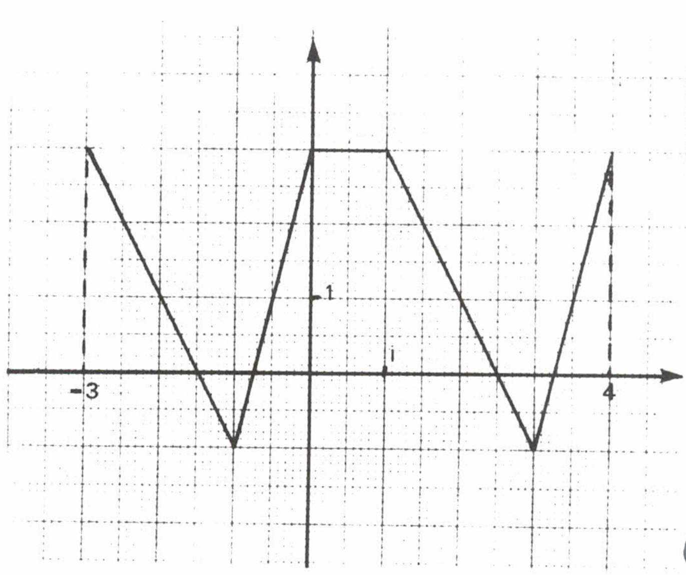
c) Précise les variations de $f$ et de $g$ sur l'intervalle $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$.

### ☆☆ Exercice $IV_{70}$ :

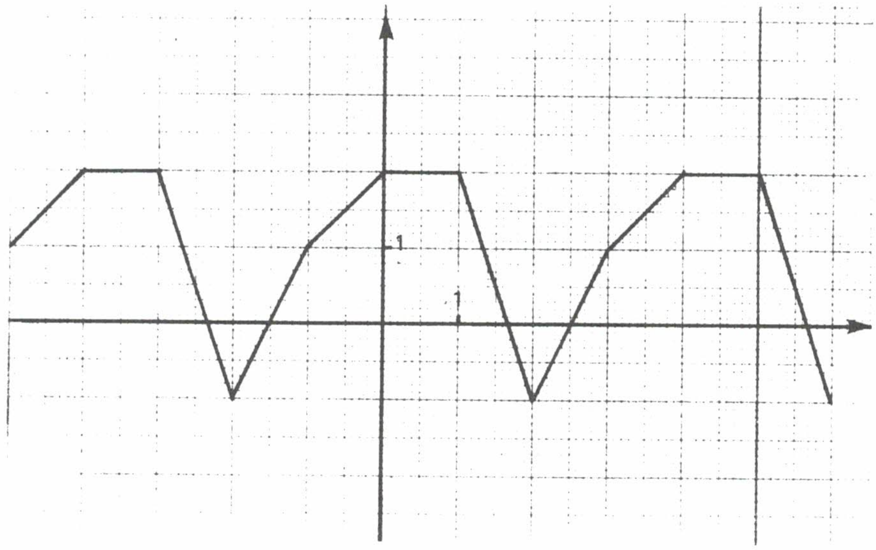
Une fonction admet 4 pour période. On a dessiné une partie de son graphique.

a) Dessine son graphique sur $[-10;10]$ .

b) Quelle est sa valeur en 1515 ?



☆☆ **Exercice IV$_{71}$ :**




La fonction $f$ est périodique. On a dessiné une partie de son graphique.

a) Est-il possible que 3 soit une période de $f$ ?

b) Est-il possible que 8 soit une période de $f$ ? Est-il certain que 8 est une période de $f$ ?

c) Peux-tu calculer $f(43)$ ? (en supposant que f est de période 8)

☆☆☆ **Exercice IV$_{72}$ :** Démontre que $\pi$ est une période de la fonction $f : x \to \cos 6x$. Dessine la partie du graphique de $f$ qui correspond à $-\pi \leq x \leq \pi$ (axes orthonormés, unité : 5 cm). La fonction $f$ admet-elle une période plus petite que $\pi$ ?

☆☆☆ **Exercice IV$_{73}$ :** Démontre que $2\pi$ est une période de la fonction

$$f : x \to \cos 6x + \sin 3x$$

Dessine la partie du graphique de $f$ qui correspond à $0 \leq x \leq 2\pi$ (axes orthonormés, unité : 3 cm). La fonction $f$ admet-elle une période plus petite que $2\pi$ ?

☆☆☆☆ **Exercice IV$_{74}$ :** Démontre que chacune des fonctions suivantes admet $2\pi$ pour période. Puis trace son graphique sur un intervalle de longueur $2\pi$. Et détermine ainsi s'il existe une période plus petite

$$f : x \to \cos x - \sin x$$

$$g : x \to (\sin x) \times (\cos x)$$

$$k : x \to (\sin x) \times (\sin 2x) \times (\sin 3x)$$

$$j : x \to 1 + \tan \frac{x}{2}$$

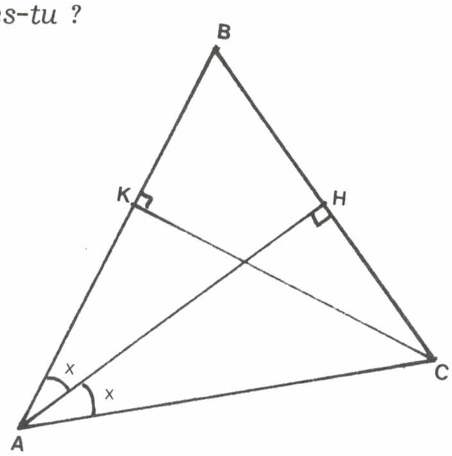
☆☆☆☆**Exercice IV$_{75}$ :** *On considère la fonction* $f : x \to (\sin x) \times \cos x$ .

a) *Représente graphiquement* $f$ *pour* $-4\pi \le x \le 4\pi$ *(axes orthogonaux, unités : 1 cm en abscisse et 4 cm en ordonnée).*

b) *Représente graphiquement la fonction*

$$g : x \to \sin 2x$$

*(mêmes axes ;* $-4\pi \le x \le 4\pi$*) . Que remarques-tu ?*




c) *Dans le triangle isocèle ci-contre, on a* $AB = AC = 1$ .

*Démontre que :*

$$\text{Aire }(AHB) = \frac{1}{2}(\sin x) \times \cos x$$

*Démontre que :*

$$\text{Aire } ABC = \frac{1}{2} \sin 2x$$

*Démontre que :*

$$2f(x) = g(x) \text{ pour } 0 \le x \le \frac{\pi}{2}$$

d) *Démontre que* $f$ *et* $g$ *sont impaires. Que peux-tu en déduire pour* $f$ *et* $g$ *sur l'intervalle* $\left[-\frac{\pi}{2} ; 0\right]$ .

e) *Démontre que* $\pi$ *est une période de* $g$ *et de* $f$ . *Tu dois pouvoir en déduire que, quel que soit* $x$ , $g(x) = 2f(x)$ .

☆☆☆☆**Exercice IV$_{76}$ :** *Démontre que chacune des fonctions suivantes admet* $\pi$ *pour période. Puis démontre que* $\pi$ *est la plus petite période.*

$$f : x \to \sin 2x + (\cos x)^2$$

$$g : x \to (\cos 2x) - (\sin x) \times \cos x$$

$$h : x \to (\sin 4x) + (\cos x)^2$$

$$j : x \to \sqrt{1 + (\sin x)^2}$$

☆☆☆☆**Exercice IV$_{77}$ :** *En t'aidant d'une représentation graphique, détermine la plus petite période des fonctions suivantes*

$$f : x \to \left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right) + \sin x$$

$$g : x \to (\sin(\pi x)) + \cos(\pi x)$$

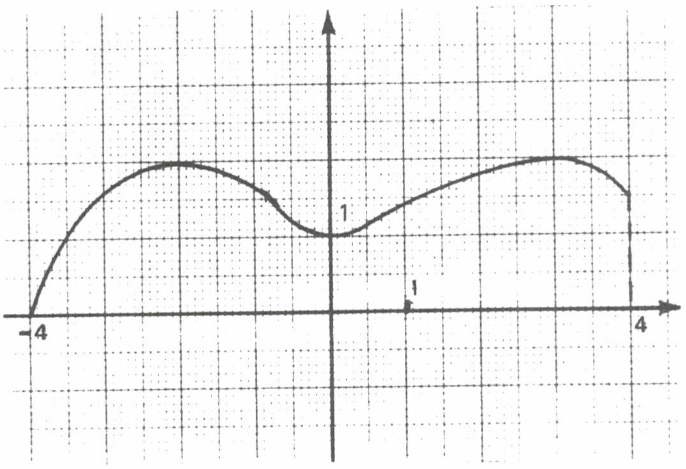
$$h : x \to (\sin(2\pi x)) + (\sin(\pi x))^2$$

$$j : x \to \left(\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right) + \cos(\pi x)$$

$$k : x \to (\cos(2x)) - (\sin x)^3$$

☆☆ **Exercice $IV_{78}$ :**

On a dessiné le graphique d'une fonction $f$ définie sur $[-4;4]$.




a) Dessine les graphiques des fonctions

$g : x \to f(x - 1)$

et $h : x \to f(2x - 1)$

(Tu préciseras pour quelles valeurs de $x$ ces fonctions sont définies).

b) Dessine les graphiques des fonctions

$j : x \to \sqrt{f(x)}$

et $k : x \to [f(x)]^2$.

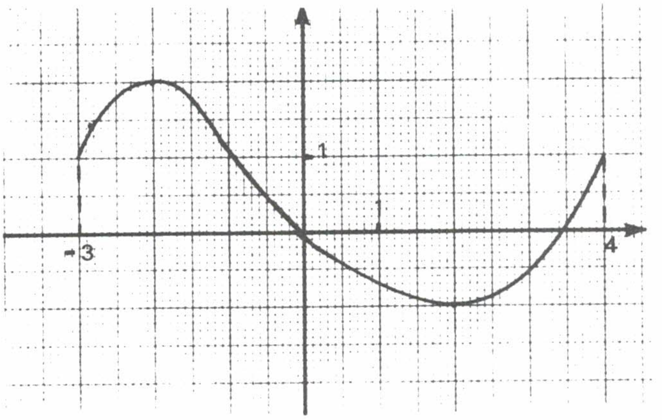
☆☆ **Exercice $IV_{79}$ :**

On a dessiné le graphique d'une fonction $f$ définie sur $[-3;+4]$.

a) Dessine le graphique de

$g : x \to f(x - 3)$

(Tu préciseras pour quelles valeurs de $x$, la fonction $g$ est définie).




b) Dessine le graphique de

$f : x \to f(-x)$

c) Dessine le graphique de

$k : x \to f(|x - 3|)$

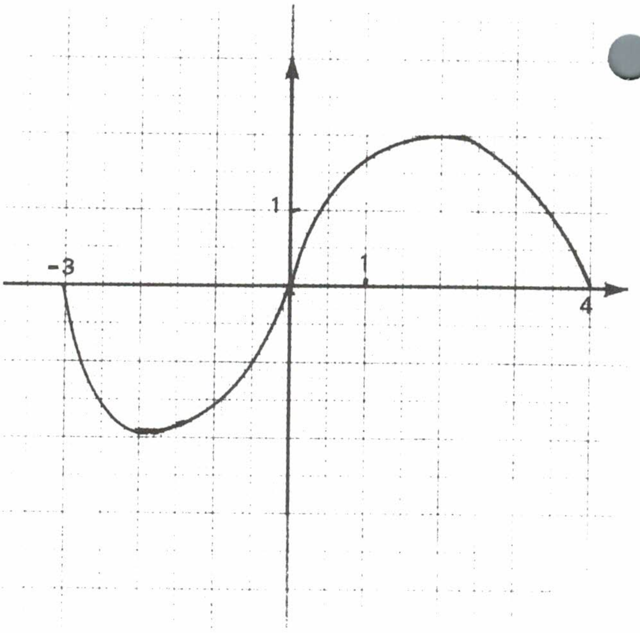
(Tu préciseras pour quelles valeurs de $x$, la fonction $k$ est définie).

### ☆☆ Exercice $IV_{80}$ :

On a dessiné le graphique d'une fonction $f$ définie sur $[-3;4]$.

a) Pour quelles valeurs de $x$, la fonction $g : x \to f(x^2)$ est-elle définie ? Trace le graphique de $g$.

b) Pour quelles valeurs de $x$, la fonction $h : x \to f(\sqrt{x})$ est-elle définie ? Trace le graphique de $h$.




### ☆☆ Exercice $IV_{81}$ :

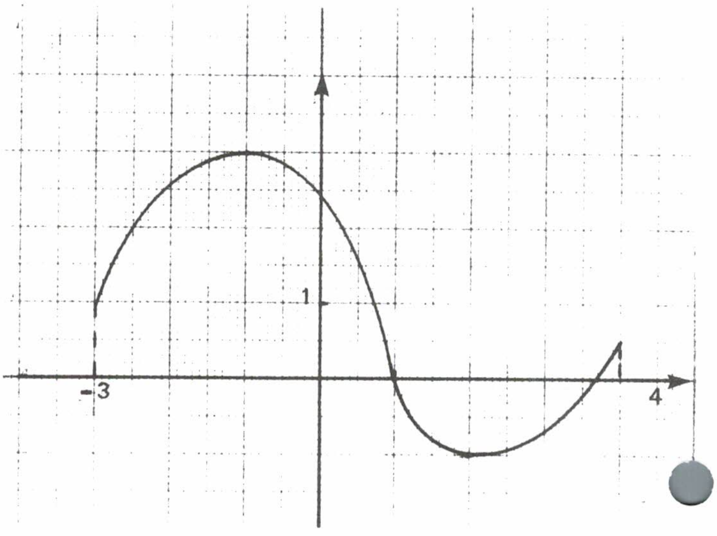
On a dessiné le graphique d'une fonction $f$ définie sur $[-3;4]$.

a) Trace le graphique de

$$g : x \to [f(x)]^2$$

b) Trace le graphique de

$$h : x \to \sqrt{|f(x)|}$$




### ☆☆ Exercice $IV_{82}$ :

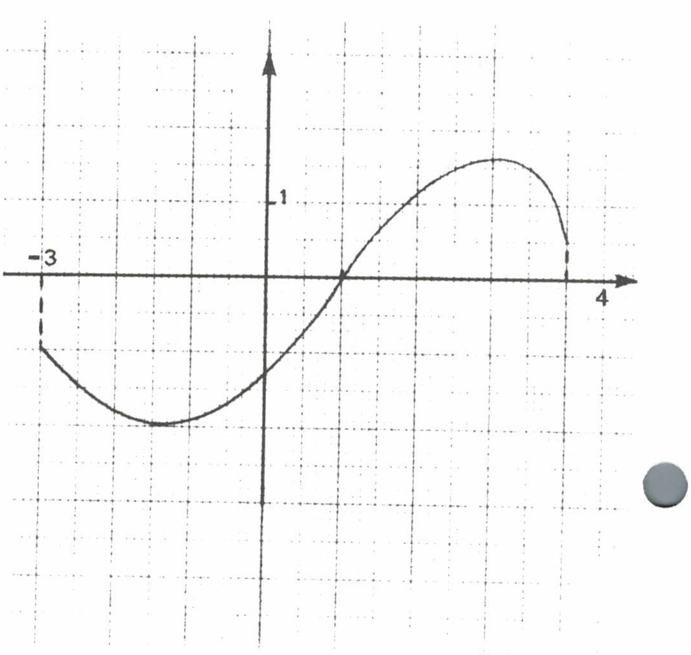
On a dessiné ci-contre le graphique d'une fonction $f$ définie pour $-3 \leq x \leq 4$.

a) Trace le graphique de

$$g : x \to |f(x)|$$

b) Trace le graphique de

$$h : x \to \frac{1}{2}\,[f(x) + |f(x)|]$$



☆☆ **Exercice IV$_{83}$ :**

*On a dessiné le graphique d'une fonction $f$ définie pour $-5 \leq x \leq 1$. Pour chacune des fonctions suivantes, tu dois :*

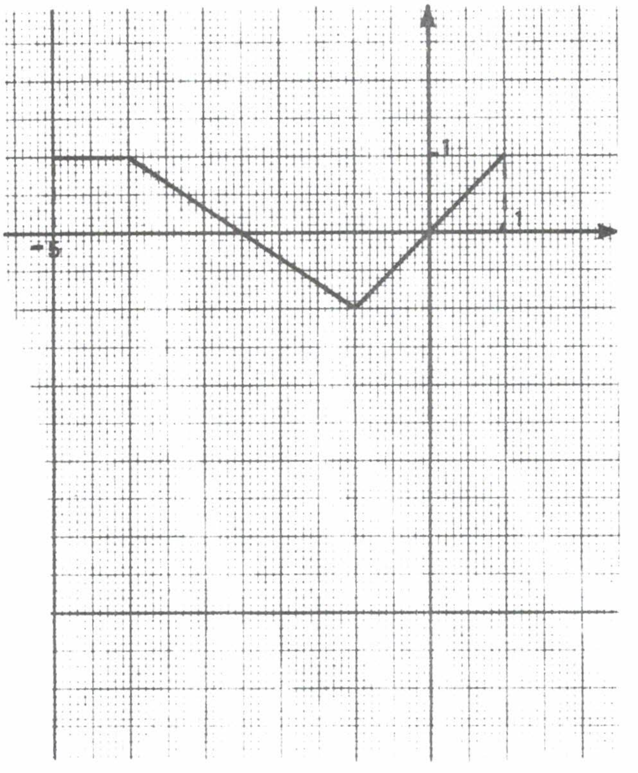
- *Dire pour quelles valeurs de $x$ elle est définie.*
- *Dessiner son graphique (axes orthonormés, unité : 1 cm).*

$g : x \rightarrow f(2x)$

$h : x \rightarrow f(1 - 2x)$

$j : x \rightarrow |f(-x)|$

$k : x \rightarrow |f(x) + f(-x)|$




☆☆ **Exercice IV$_{84}$ :**

*On a dessiné le graphique d'une fonction $f$ définie sur $[-3;+4]$. Pour chacune des fonctions suivantes, tu dois :*

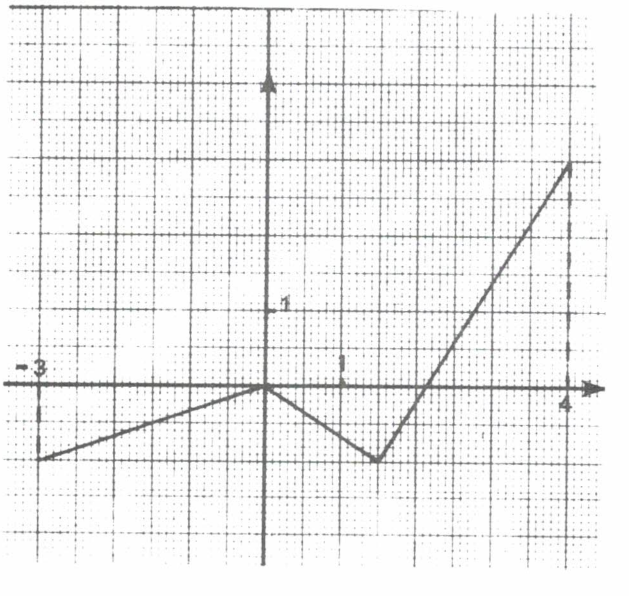
- *Dire pour quelles valeurs de $x$ elle est définie.*
- *Tracer son graphique (axes orthonormés, unité : 1 cm).*

$g : x \rightarrow 2f(2x)$

$h : x \rightarrow f(x) + |f(x)|$

$j : x \rightarrow f(2x + 3)$

$k : x \rightarrow f(\sqrt{x} + 1)$



☆☆☆ **Exercice IV$_{85}$ :** *On considère les fonctions $f : x \to x^2 + 2x$ , $g : x \to x^2 + 2x + 1$ et $h : x \to x^2$.*

1) *Trace sur un même graphique les courbes représentatives de $f$, $g$ et $h$ (repère orthonormé, unité : 1 cm).*

2) *Choisis une valeur $\alpha$ et trace le triangle $M(\alpha, f(\alpha))$, $N(\alpha, g(\alpha))$, $P(\alpha+1, h(\alpha+1))$.*
*Choisis une valeur $\beta$, et trace le triangle $M'(\beta, f(\beta))$, $N'(\beta, g(\beta))$, $P'(\beta+1, h(\beta+1))$.*
*Puis une autre valeur $\gamma$ ,... Que constates-tu ?*

3) *Calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{M_xN_x}$ , $\overrightarrow{M_xP_x}$ et $\overrightarrow{N_xP_x}$ (où $M_x(x, f(x))$, $N_x(x, g(x))$ et $P_x(x+1, h(x+1))$) .*

*Il existe des transformations géométriques simples qui transforment le graphique de $h$ en celui de $f$, et en celui de $g$. Quelles sont ces transformations ?*

☆☆☆ **Exercice IV$_{86}$ :**

1) *Trace les courbes représentatives des fonctions*

$$x \to f(x) = 2x^2 - x \quad \text{et} \quad x \to g(x) = 2x^2 .$$

2) *Vérifie que $f(x) = g\left(x - \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{8}$. Choisis des nombres $\alpha$ , $\beta$ ,... puis trace les vecteurs*

$$\overrightarrow{MN} \text{ (où } M(\alpha, f(\alpha)) \text{ et } N\left(\alpha - \frac{1}{4}, g\left(\alpha - \frac{1}{4}\right)\right),$$
$$\overrightarrow{M'N'} \text{ (où } M'(\beta, f(\beta)) \text{ et } N'\left(\beta - \frac{1}{4}, g\left(\beta - \frac{1}{4}\right)\right),\ldots$$

*Que remarques-tu ?*

*La courbe représentative de $f$ est image de celle de $g$ par une translation. Quel est le vecteur de cette translation ?*

☆☆☆☆ **Exercice IV$_{87}$ :** *Soit les deux fonctions $f : x \to x^2$ et $g : x \to x^2 - 2x + 3$.*

a) *Détermine des nombres $a$ et $b$ tels que (quel que soit $x$) : $g(x) = f(x + a) + b$.*

b) *Trace en axes orthonormés (unité : 2 cm) les graphiques de $f$ et de $g$ (limiter à $-3 \leq x \leq 3$).*

*Il existe une transformation géométrique qui transforme le graphique de $f$ en celui de $g$. Quelle est cette transformation ?*

☆☆☆☆ **Exercice IV$_{88}$ :** *Soit les deux fonctions* $f : x \to \frac{1}{2}x^2$ *et* $g : x \to \frac{1}{2}x^2 + 2x - 1$ .

a) *Détermine des nombres* $a$ *et* $b$ *tels que (quel que soit* $x$*) :* $g(x) = f(x + a) + b$ .

b) *Trace en axes orthonormés (unité : 2 cm) les graphiques de* $f$ *et de* $g$ *(limiter à* $-3 \leq x \leq 3$*)* .

*Il existe une transformation géométrique qui transforme le graphique de* $f$ *en celui de* $g$ *. Quelle est cette transformation ?*

☆☆☆☆ **Exercice IV$_{89}$ :** *Soit les deux fonctions* $f : x \to -2x^2$ *et* $g : x \to -2x^2 + 4x - 5$ .

a) *Détermine des nombres* $a$ *et* $b$ *tels que (quel que soit* $x$*) :* $g(x) = f(x + a) + b$ .

b) *Trace en axes orthonormés (unité : 2 cm) les graphiques de* $f$ *et de* $g$ *(limiter à* $-3 \leq x \leq 3$*)* .

*Il existe une transformation géométrique qui transforme le graphique de* $f$ *en celui de* $g$ *. Quelle est cette transformation ?*

☆ **Exercice IV$_{90}$ :** *Soit les deux fonctions*

$$f : x \to -x^2 + 4x - 1 \quad \text{et} \quad g : x \to -2x^2 + 8x - 2$$

a) *Trace sur des feuilles séparées, en axes orthogonaux*

- *Le graphique de* $f$ *(unités : 1 cm en abscisse, et 1 cm en ordonnée)* . *Limiter à* $-3 \leq x \leq 3$ .
- *Le graphique de* $g$ *(unités : 1 cm en abscisse, et 0,5 cm en ordonnée)* . *Limiter à* $-3 \leq x \leq 3$ *. Que remarques-tu ?*

b) *Trace (sur la même feuille) les graphiques de* $f$ *et* $g$ *en axes orthonormés (unité : 2 cm)* .

☆☆☆**Exercice IV$_{91}$ :** *On considère la fonction* $f : x \to \frac{1-x}{x+2}$ .

a) *Pour quelles valeurs de* $x$ , $f(x)$ *est-elle définie ?*

b) *Démontre que* $f(x) = \frac{3}{x+2} - 1$ .

c) *On considère les fonctions*

$$g : x \to \frac{3}{x} \quad ; \quad h \to \frac{3}{x+2}$$

*Donne un tableau des valeurs de* $f$, $g$, $h$ *pour tous les nombres entiers de* $-15$ *à* $+15$ . *Dessine les graphiques de ces trois fonctions dans un même système d'axes orthonormés (unité : 1 cm) .*

d) *Il existe des translations qui transforment le graphique de* $g$ *en celui de* $h$ , *et en celui de* $f$ . *Quelles sont ces translations ?*

☆☆☆**Exercice IV$_{92}$ :** *On considère la fonction* $f : x \to \frac{x-1}{x+4}$ .

a) *Pour quelles valeurs de* $x$ , $f(x)$ *est-elle définie ?*

b) *Démontre que* $f(x) = 1 - \frac{5}{x+4}$ .

c) *Fais un tableau de valeurs et dessine sur un même graphique les fonctions* $f$ , $g : x \to \frac{-5}{x}$ *et* $h : x \to \frac{-5}{x+4}$ *(on se limite à* $-10 \leq x \leq 10$) .

d) *Il existe des transformations simples qui transforment le graphique de* $g$ *en celui de* $h$ , *et en celui de* $f$ . *Quelles sont ces transformations ?*

☆☆☆**Exercice IV$_{93}$ :** *On considère la fonction* $f : x \to \sqrt{x^2 - 1/4}$ .

a) *Dessine le graphique de* $g : x \to x^2 - 1/4$ *(axes orthonormés, unité : 1 cm . Limiter à* $-4 \leq x \leq 4$) .

b) *Pour quelles valeurs de* $x$ , $f(x)$ *est-elle définie ?*

c) *Trace la représentation graphique de* $f$ *(axes orthonormés, unité : 2 cm . Limiter à* $-4 \leq x \leq 4$) .

d) *Quel est le sens de variation de* $f$ ?

e) *Résous graphiquement l'équation* $f(x) = 1 - x$ . *Vérifie par le calcul.*

☆ **Exercice $IV_{94}$ :**

a) *Trace sur une même feuille les graphiques des fonctions*

$$f : x \to x^2 - 4 \quad \text{et} \quad g : x \to |x^2 - 4|$$

*(axes orthonormés, unité : 1 cm . Limiter à $-4 \leq x \leq 4$) .*

b) *La fonction g est-elle paire ? impaire ?*

☆☆☆☆ **Exercice $IV_{95}$ :**

a) *Vérifie que (quel que soit x) : $x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1)$ . Puis trace le graphique de $f : x \to x^2 - 2x - 3$ (axes orthonormés, unité 1 cm . Limiter à $-4 \leq x \leq 4$) .*

b) *Pour quelle valeurs de x , les fonctions*

$$g : x \to \sqrt{x^2 - 2x - 3} \quad \text{et} \quad h : x \to \frac{1}{\sqrt{x^2-2x-3}}$$

*sont-elles définies ?*

c) *Trace les graphiques de g et h (mêmes axes et mêmes limitations qu'en a)) .*

d) *Que peut-on dire du sens de variation de f, de g, de h ?*

☆ **Exercice $IV_{96}$ :**

a) *Trace le graphique de la fonction $f : x \to x^2 - 1$ (axes orthonormés, unité : 2 cm . Limiter à $-3 \leq x < 3$) .*

b) *Trace dans les mêmes axes les graphiques des fonctions*

$$g : x \to |x^2 - 1| \quad \text{et} \quad h : x \to \frac{1}{|x^2-1|}$$

c) *Les fonctions g et h sont-elles impaires ? paires ?*

☆☆ **Exercice $IV_{97}$ :**

a) *Trace le graphique de la fonction $f : x \to x^2 - x - 2$ (axes orthonormés, unité : 2 cm . Limiter à $-3 \leq x \leq 3$) .*

*Quels sont les points communs de ce graphique et de l'axe 0x ?*

b) *Trace dans les mêmes axes le graphique de $g : x \to |x^2 - x - 2|$ .*

c) *Trace le graphique de*

$$h : x \to \frac{1}{2} [\, f(x) + g(x) \,]$$

☆☆☆☆**Exercice IV98 :** *On considère la fonction* $f : x \to 8x^3 - 19x^2 + 15x$ .

1) *On se propose de représenter graphiquement* $f$ *pour* $0 \leq x \leq 1{,}5$ *(unités : 5 cm en abscisse et 4 cm en ordonnée).*

*Place les points correspondant à* $x = 0 ; 0{,}5 ; 1 ; 1{,}5 ; 2$ . *Trace la courbe.*

2) *On veut préciser l'allure de la courbe entre les abscisses* $0{,}5$ *et* $1$ . *Pour cela calcule* $f(0{,}6)$ ; $f(0{,}7)$ ; $f(0{,}8)$ ; $f(0{,}9)$ . *Trace à nouveau la courbe en tenant compte de ces valeurs.*

3) *On veut préciser l'allure de la courbe entre les abscisses* $0{,}7$ *et* $0{,}9$ . *Calcule* $f(0{,}71)$ ; $f(0{,}72)$ ;...; $f(0{,}89)$ . *La fonction est-elle croissante sur* $[0 ; 1{,}5]$ ?

*Attention, dans ce dernier calcul il faut que tu obtiennes une précision de l'ordre du dix millième sur les valeurs de* $f$ . *Pour cela tu as peut être intérêt à utiliser l'écriture*

$$f(x) = 8x^2(x - 0{,}5) + 15x(1 - x)$$

☆☆☆☆ **Exercice IV99 :** *On considère la fonction* $f : x \to \frac{x^3}{3} - \frac{9x^2}{40} + \frac{x}{20}$ .

1) *Trace la représentation graphique de* $f$ *pour* $0 \leq x \leq 2$ *(unités : 2 cm en abscisse, et 5 cm en ordonnée).*

2) *Trace un agrandissement (unités : 20 cm en abscisse et 50 cm en ordonnée) de la partie de la courbe correspondant aux abscisses comprises entre* $0{,}1$ *et* $0{,}4$ .

3) *Trace un agrandissement (unités : 200 cm en abscisse, et 500 cm en ordonnée) de la partie de la courbe correspondant aux abscisses comprises entre* $0{,}18$ *et* $0{,}28$ . *La fonction* $f$ *est-elle croissante entre* $0$ *et* $1{,}5$ ?

*Pour cette question il faut que tu calcules les valeurs de* $f$ *avec une incertitude inférieure à* $10^{-5}$ .

☆☆☆☆ **Exercice IV100 :** *Soit* $f : x \to x^3 - \frac{x^2}{20}$ . *On veut savoir si* $f$ *est croissante pour* $-10 \leq x \leq 10$ .

1) *Calcule* $f$ *pour les valeurs entières comprises entre* $-10$ *et* $10$ .

2) *Calcule* $f$ *pour les valeurs de la forme* $\frac{p}{10}$ *(p entier compris entre -10 et 10).*

3) *Calcule* $f$ *pour les valeurs de la forme* $\frac{p}{100}$ *(p entier compris entre -100 et 100). Que constates-tu ?*

4) *On a* $f(x) = x^2\left(1 - \frac{x}{20}\right)$ . *Ceci prouve que* $f$ *a un mininum en* $0$ . *Pourquoi ?*

☆☆☆☆ ***Exercice IV 101*** : *Soit* $f : x \to 20x^3 + 59x^2 + 58x + 19$ .

1) *On se propose de déterminer les racines de l'équation* $f(x) = 0$ *comprises entre* $-2$ *et* $0$ . *Trace le graphique de* $f$ *(unités : 4 cm en abscisse et 1mm en ordonnée). Résous graphiquement l'équation.*

2) *On se propose de résoudre l'équation* $f(x) = 1$ *(toujours avec* $-2 \leq x \leq 0$*). Résous graphiquement l'équation.*

*Pour avoir plus de précision dessine un agrandissement de la courbe au voisinage du point d'abscisse* $-1$ . *Essaie ainsi de déterminer la(ou les) solution(s) avec une incertitude inférieure à* $1/100$ . *Que remarques-tu ? Que penses-tu de la réponse que tu as donnée à la question 1 ?*

*Thème : INCERTITUDES*

## *VALEURS APPROCHEES*

*Dans de nombreux cas on est incapable de déterminer exactement les nombres avec lesquels on doit calculer.*

***Premier exemple :*** *Certains de ces nombres sont les mesures de certaines grandeurs. Une mesure n'est jamais exacte. Selon le soin que l'on a pris, selon l'instrument de mesure que l'on a utilisé, elle est plus ou moins précise. D'ailleurs, physiquement, toute mesure qui dépasserait une certaine précision n'aurait aucune signification. Il est, par exemple, absurde d'essayer de mesurer la largeur d'une table à un micron près : parce qu'une telle mesure supposerait que la table soit parfaitement rectangulaire, que ses bords soient parfaitement rectilignes ,...*

***Deuxième exemple :*** *La plupart des calculs que l'on fait sont sources d'imprécisions. Tu as déjà remarqué que le résultat d'une division ne peut presque jamais être écrit de façon exacte. Ainsi lorsque l'on divise 2 par 3 , on trouve 0,66666 ... ; toutes les décimales successives sont des 6 ; mais il y en a une infinité, autrement dit, quel que soit le nombre de 6 que j'ai eu le courage d'écrire, je n'aurai qu'une valeur approchée du résultat. De même, en divisant 10 par 11 , je trouve 0,9090909 ... ; avec une suite de décimales qui sont alternativement des 0 et des 9 , mais qui ne se termine pas : elle est infinie. Bien sûr dans de telles situations, on peut utiliser la notation fractionnaire ; ces résultats que l'on ne parvient pas à écrire sous forme décimale, peuvent s'écrire* $\frac{2}{3}$ *ou* $\frac{10}{11}$ .

*Mais il existe des nombres plus difficiles à manipuler. Par exemple* $\sqrt{2}$ . *Si je tape sur ma calculette 2 puis* $\sqrt{\ }$, *elle affiche 1,4142136 . Et pourtant*

$$(1{,}4142136)^2 = 2{,}00000010642496$$

*n'est pas égal à 2 . D'ailleurs d'autres machines, plus perfectionnées, ou moins perfectionnées, donnent des valeurs différentes lorsqu'on leur demande* $\sqrt{2}$. *En fait* $\sqrt{2}$ *est ( comme* $\frac{2}{3}$ *ou* $\frac{10}{11}$ *) un nombre qui ne peut pas être écrit sous forme décimale (car il faudrait écrire une infinité de décimales) . Mais* $\sqrt{2}$ *ne peut pas non plus être écrit sous forme d'une fraction. Ceci était connu des mathématiciens grecs voici plus de 20 siècles.*

*Exercice 1 : Supposons que $\sqrt{2}$ soit le quotient de deux entiers $a$ et $b$.*

a) *Pourquoi peut-on alors écrire $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, où les nombres entiers $p$ et $q$ ne sont pas tous les deux des nombres pairs ?*

b) *Démontre que si $p = q\sqrt{2}$ (donc $p^2 = 2q^2$)*

- *Il est impossible que $p$ et $q$ soient tous deux impairs.*
- *Il est impossible que $p$ soit impair, et $q$ pair.*
- *Il est impossible que $p$ soit pair et $q$ impair.*

c) *Compare les conclusions de a) et de b) ; puis conclus.*

*Exercice 2 : Démontre, en t'inspirant de l'exercice précédent, que $\sqrt{3}$ n'est pas le quotient de deux entiers $u$ et $v$.*

*Si ma calculette me donne un résultat approché lorsque je lui demande $\sqrt{2}$, c'est donc parce qu'il est impossible d'écrire la valeur exacte sous forme décimale. Elle me donne un résultat avec 7 décimales (avec 8 chiffres en tout) parce que son cadran ne peut contenir plus de 8 chiffres.*

*La situation est identique pour $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, cos 43°, sin 71°,... (avec des démonstrations un peu plus compliquées). Une bonne partie des nombres que tu as l'habitude de manipuler, ne peuvent pas s'écrire sous forme décimale.*

*Troisième exemple : Les moyens de calcul que l'on emploie nous donnent souvent des valeurs approchées parce qu'ils ne sont pas assez perfectionnés. Ainsi, lorsque je calcule $3{,}121306 \times 2{,}123144$, ma calculette me donne $6{,}6268897$, alors que le résultat exact comporte 12 chiffres après la virgule.*

## ENCADREMENTS ET INCERTITUDES

*Si j'achète 1,95 kg de viande à 80,5 F/kg je paierai environ 160 F (car $2 \times 80 = 160$). Un tel calcul rapide, que je peux effectuer mentalement, qui peut être utile pour savoir quels billets je dois sortir de mon porte-monnaie, n'a aucune valeur dans le traitement d'un problème scientifique. En effet il ne donne aucun renseignement sur l'erreur que l'on fait en remplaçant $1{,}95 \times 80{,}5$ par 160.*

*Un autre calcul, à peine plus compliqué, nous donnerait : le prix à payer est supérieur à 152 F (car 1,9 × 8 = 152) et inférieur à 162 F (car 2 × 81 = 162). Nous obtenons ainsi un encadrement du résultat exact ; c'est-à-dire deux valeurs l'une plus petite, l'autre plus grande que le résultat exact. Dans un calcul scientifique, donner une valeur approchée d'un résultat est considéré comme sans intérêt, on s'attache toujours à donner un encadrement.*

*Considérons un nombre $r$ dont nous connaissons un encadrement $a \leq r \leq b$. On dit que $a$ est un minorant de $r$ et que $b$ est un majorant de $r$.*

*Si nous représentons les nombres considérés sur un axe, ceci signifie que $r$ est entre $a$ et $b$ ; on dit aussi que $r$ est dans le segment $[a,b]$. Le milieu de ce segment*


*est le nombre $m = \frac{a+b}{2}$, la longueur du segment est $b - a$. La distance de $r$ à $m$ est $|r - m|$. Et dire que $r$ est entre $a$ et $b$ revient à dire que cette distance est au plus égale à la moitié de la longueur du segment. Autrement dit, la double inégalité $a \leq r \leq b$ se traduit par $|r - m| \leq \frac{b-a}{2}$ ; soit encore*

$$\left| r - \frac{a+b}{2} \right| \leq \frac{b-a}{2} .$$

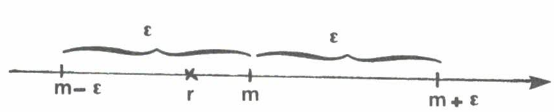
*Nous retiendrons :*

$$a \leq r \leq b \Leftrightarrow \left| r - \frac{a+b}{2} \right| \leq \frac{b-a}{2}$$

*Nous disposons ainsi d'une nouvelle façon pour noter un encadrement. Si nous avons $a \leq r \leq b$, nous appellerons valeur centrale le nombre $m = \frac{a+b}{2}$, et incertitude le nombre $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$ ; et nous dirons que "la valeur centrale $m$ est une valeur approchée de $r$ à $\varepsilon$ près". Ce n'est qu'une autre notation de l'encadrement, elle est très souvent utilisée ; mais, nous le verrons plus loin, lorsqu'il s'agit de faire des calculs, il est souvent plus commode de revenir à la double inégalité.*

*Nous retiendrons :*

$$m - \varepsilon \leq r \leq m + \varepsilon \Leftrightarrow |r - m| \leq \varepsilon$$



**Exemple :** *L'encadrement* $3,14159 \leq \pi \leq 3,14160$ *est équivalent à*

$$|\pi - 3,141595| \leq 0,000005 .$$

*Ce qui se lit " 3,141595 est une valeur approchée de* $\pi$ *, à 0,000005 près ".*

*Inversement, si je dis que 1,414 est une approximation de* $\sqrt{2}$ *à 0,0005 près, ceci signifie que*

$$1,414 - 0,0005 = 1,4135 \leq \sqrt{2} \leq 1,4145 = 1,414 + 0,0005 .$$

**Remarque :**

*Il existe encore deux autres façons de noter l'encadrement* $a \leq r \leq b$ *:*

*On peut dire que "a est une valeur approchée de r à b - a près par défaut".*

*On peut dire que "b est une valeur approchée de r à b - a près par excès".*

**Exemple :** *Pour exprimer que* $1,73 \leq \sqrt{3} \leq 1,74$ *on dira :*

*1,73 est une valeur approchée de* $\sqrt{3}$ *à 0,01 près par défaut.*

*1,74 est une valeur approchée de* $\sqrt{3}$ *à 0,01 près par excès.*

**Exercice 3 :** *Détermine un encadrement de x , dans les cas suivants :*

- $x = 1,71$ *à 0,01 près*
- $x = 2,117$ *à 0,017 près par défaut*
- $x = -1,27$ *à 0,033 près*
- $x = 0,17$ *à 0,43 près par excès*
- $x = 121,17$ *à 0,92 près*
- $x = 0,9999$ *à 0,0001 près par défaut*

**Exercice 4 :** *Détermine la "valeur centrale de x et l'incertitude" dans les cas suivants :*

- $0,71 \leq x \leq 0,722$
- $11,12 \leq x \leq 11,17$
- $x = 1,23$ *à 0,01 près par défaut*
- $-1,22 \leq x \leq -1,18$
- $-0,72 \leq x \leq 0,14$
- $x = 22,1$ *à 0,1 près par excès*

**Exercice 5 :** *En utilisant les valeurs des nombres suivants donnés par ta calculette, donne :*

- *une approximation de* $\cos 17°$ *à* $0,001$ *près*
- *une approximation de* $tg\ 11°$ *à* $10^{-4}$ *près*
- *une approximation de* $\sqrt{17}$ *à* $10^{-2}$ *près par défaut*
- *une approximation de* $\sqrt{43}$ *à* $10^{-5}$ *près*

## CALCULS DES INCERTITUDES ET DES ENCADREMENTS

### ENCADREMENT D'UNE SOMME

*Considérons deux nombres* $r$ *et* $r'$ *dont on connaît seulement des encadrements* $a \leq r \leq b$ *et* $a' \leq r' \leq b'$. *Que sait-on de* $r + r'$ *?*

*Puisque* $a \leq r$, *on peut affirmer que* $a + a' \leq r + a'$. *Puisque* $a' \leq r'$, *on peut affirmer que* $r + a' \leq r + r'$. *Et par conséquent* $a + a' \leq r + a' \leq r + r'$ *; d'où* $a + a' \leq r + r'$.

*De même* $r + r' \leq b + b'$. *Et nous obtenons ainsi un encadrement de* $r + r'$ *:*

$$a + a' \leq r + r' \leq b + b' .$$

**Exemple :**

*Supposons que les encadrements de* $r$ *et* $r'$ *soient donnés sous la forme suivante :*

*$m$ est une valeur approchée de $r$ à $\varepsilon$ près*
*$m'$ est une valeur approchée de $r'$ à $\varepsilon'$ près*

*Autrement dit* $|r - m| \leq \varepsilon$ *et* $|r' - m'| < \varepsilon'$. *Ce que nous pouvons aussi écrire*

$$m - \varepsilon \leq r \leq m + \varepsilon \quad \text{et} \quad m' - \varepsilon' \leq r' \leq m' + \varepsilon' .$$

*En reprenant le calcul qui a été fait ci-dessus, nous aurons :*

$$(m - \varepsilon) + (m' - \varepsilon') \leq r + r' \leq (m + \varepsilon) + (m' + \varepsilon')$$

*soit :*

$$(m + m') - (\varepsilon + \varepsilon') \leq r + r' \leq (m + m') + (\varepsilon + \varepsilon')$$

*Ce qui s'écrit encore :*

$$|(r + r') - (m + m')| \leq (\varepsilon + \varepsilon')$$

*Autrement dit,* $m + m'$ *est une valeur approchée de* $r + r'$, *à* $\varepsilon + \varepsilon'$ *près.*

***Pour avoir une valeur approchée de*** $r + r'$***, on a fait la somme d'une valeur approchée de*** $r$ ***et d'une valeur approchée de*** $r'$***. L'incertitude est la somme des incertitudes.***

***Exemple :*** *Puisque* $1{,}4142$ *est une valeur approchée de* $\sqrt{2}$ *à* $0{,}0001$ *près, et* $1{,}7320$ *une valeur approchée de* $\sqrt{3}$ *à* $0{,}0001$ *près,* $1{,}4142 + 1{,}7320$ *est une valeur approchée de* $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ *à* $0{,}0002$ *près.*

## *ENCADREMENT D'UNE DIFFERENCE*

*Considérons deux nombres* $r$ *et* $r'$ *dont on connaît seulement des encadrements* $a \leq r \leq b$ *et* $a' \leq r' \leq b'$. *Que sait-on de* $r - r'$ *?*

*De* $a \leq r$, *on déduit* $a - b' \leq r - b'$. *De* $r' \leq b'$, *on déduit* $r - b' \leq r - r'$. *Donc* $a - b' \leq r - b' \leq r - r'$ ; *d'où* $a - b' \leq r - r'$.

*De* $r \leq b$, *on déduit* $r - a' \leq b - a'$. *De* $a' \leq r'$, *on déduit* $r - a' \geq r - r'$. *Donc* $r - r' \leq r - a' \leq b - a'$ ; *d'où* $r - r' \leq b - a'$.

*Nous obtenons ainsi l'encadrement :*

$$a - b' \leq r - r' \leq b - a' .$$

***Exemple :*** $1{,}73 \leq \sqrt{3} \leq 1{,}74$ *et* $1{,}41 \leq \sqrt{2} \leq 1{,}42$ ;

*donc* $1{,}73 - 1{,}42 \leq \sqrt{3} - \sqrt{2} \leq 1{,}74 - 1{,}41$ .

*Supposons maintenant que les encadrements de* $r$ *et* $r'$ *soient donnés sous la forme :*

$m$ *est une valeur approchée de* $r$ *à* $\varepsilon$ *près*
$m'$ *est une valeur approchée de* $r'$ *à* $\varepsilon'$ *près*

*Ce qui signifie* $|r - m| \leq \varepsilon$ *et* $|r' - m'| \leq \varepsilon'$ ; *ou encore :* $m - \varepsilon \leq r \leq m + \varepsilon$ *et* $m' - \varepsilon' \leq r' \leq m' + \varepsilon'$. *En reprenant le calcul qui a été fait ci-dessus, nous obtiendrons :*

$$(m - \varepsilon) - (m' + \varepsilon') \leq r - r' \leq (m + \varepsilon) - (m' - \varepsilon')$$
$$(m - m') - (\varepsilon + \varepsilon') \leq (r - r') \leq (m - m') + (\varepsilon + \varepsilon')$$

*Ce qui s'écrit encore :*

$$|(r - r') - (m - m')| \leq \varepsilon + \varepsilon' \ .$$

*Donc* $m - m'$ *est une valeur approchée de* $r - r'$, *à* $\varepsilon + \varepsilon'$ *près.*

*Pour avoir une valeur approchée de* $r - r'$, *on a fait la différence entre une valeur approchée de* $r$ *et une valeur approchée de* $r'$. *L'incertitude est la* **somme des incertitudes** .

**Exemple :** $|\sqrt{7} - 2{,}64575| < 0{,}00001$ *et* $|\sqrt{10} - 3{,}1622| < 0{,}0001$ ; *donc* $3{,}1622 - 2{,}64575$ *est une valeur approchée de* $\sqrt{10} - \sqrt{7}$, *à* $0{,}00011$ *près.*

## ENCADREMENT D'UN PRODUIT

*Considérons deux nombres* $r$ *et* $r'$ *dont on connaît seulement des encadrements* $a \leq r \leq b$ *et* $a' \leq r' \leq b'$. *On suppose que ces* $6$ *nombres sont tous positifs. Que sait-on du produit* $rr'$ ?

*De* $a \leq r$ *et* $a' \geq 0$, *on déduit* $aa' \leq ra'$. *De* $a' \leq r'$ *et* $r \geq 0$, *on déduit* $ra' \leq rr'$. *Donc* $aa' \leq ra' \leq rr'$ ; *d'où* $aa' \leq rr'$.

*De* $r \leq b$ *et* $b' \geq 0$, *on déduit* $rb' \leq bb'$. *De* $r' \leq b'$ *et* $r \geq 0$, *on déduit* $rr' \leq rb'$. *Donc* $rr' \leq rb' \leq bb'$ ; *d'où* $rr' \leq bb'$.

*On a donc un encadrement* $aa' \leq rr' \leq bb'$.

**Exemple :** *Si un rectangle* $R$ *a une longueur* $L$ *comprise entre* $10{,}2$ cm *et* $10{,}3$ cm, *et une largeur* $\ell$ *comprise entre* $7{,}1$ cm *et* $7{,}2$ cm, *alors son aire* $A = L \times \ell$ *est comprise entre* $10{,}2 \times 7{,}1$ cm$^2$ *et* $10{,}3 \times 7{,}2$ cm$^2$.

*Supposons maintenant que les encadrements de* $r$ *et* $r'$ *soient donnés sous la forme suivante :*

$m$ *est une valeur approchée de* $r$, *à* $\varepsilon$ *près*
$m'$ *est une valeur approchée de* $r'$, *à* $\varepsilon'$ *près*

*Autrement dit* $|r - m| \leq \varepsilon$ *et* $|r' - m'| \leq \varepsilon'$ ; *ou encore* $a = m - \varepsilon \leq r \leq m + \varepsilon = b$ *et* $a' = m' - \varepsilon' \leq r' \leq m' + \varepsilon' = b'$. *En reprenant le calcul précédent (en supposant toujours* $a$ *et* $a'$ *positifs), nous obtiendrons :*

$$aa' \leq rr' \leq bb'$$

soit $$(m-\varepsilon)(m'-\varepsilon') \leq rr' \leq (m+\varepsilon)(m'+\varepsilon')$$

$$A = mm' - \varepsilon m' - \varepsilon' m + \varepsilon\varepsilon' \leq rr' \leq mm' + \varepsilon m' + \varepsilon' m + \varepsilon\varepsilon' = B$$

*Nous obtenons donc un encadrement de* $rr'$*. Sa valeur centrale est* $\frac{A+B}{2} = mm' + \varepsilon\varepsilon'$ *; ce n'est pas* $mm'$*. L'incertitude correspondante est* $\frac{B-A}{2} = \varepsilon m' + \varepsilon' m$.

*En pratique* $\varepsilon$ *et* $\varepsilon'$ *sont beaucoup plus petits que* $m$ *et* $m'$ *; il en résulte que le produit* $\varepsilon\varepsilon'$ *est beaucoup plus petit que l'incertitude* $\varepsilon m' + \varepsilon' m$ *; c'est pourquoi le plus souvent on néglige* $\varepsilon\varepsilon'$*, et on considère que* $mm'$ *est une valeur approchée de* $rr'$*, avec pour incertitude* $\varepsilon' m + \varepsilon m'$*. Ce qui — en toute rigueur — est faux ! C'est la "forme simplifiée du résultat".*

**Exemple 1 :** *Si* $1{,}711$ *est une valeur approchée de* $r$ *à* $0{,}001$ *près et* $2{,}412$ *une valeur approchée de* $r'$ *à* $0{,}001$ *près, alors* $M = 1{,}711 \times 2{,}412 + 0{,}001 \times 0{,}001$ *est une valeur approchée de* $rr'$ *à* $E = 1{,}711 \times 0{,}001 + 0{,}001 \times 2{,}412$ *près. L'incertitude* $E$ *est* $0{,}004123$ *et la valeur approchée* $M = 4{,}126932 + 0{,}000001$. *Nous obtenons des valeurs assez compliquées ;* $M$ *est un nombre à 7 chiffres, mais l'incertitude étant un peu plus grande que* $0{,}004$*, les trois derniers (peut être même les quatre derniers) de ces chiffres n'ont aucune signification. En particulier* $\varepsilon\varepsilon' = 0{,}000001$ *est négligeable devant l'incertitude. On annoncera donc :* $4{,}127$ *est une valeur approchée de* $rr'$*, à* $0{,}005$ *près.*

**Exemple 2 :** *Si* $314{,}1$ *est une valeur approchée de* $r$*, à* $0{,}1$ *près, et* $2{,}170$ *une valeur approchée de* $r'$ *à* $0{,}001$ *près, on aura :*

$$M = 314{,}1 \times 2{,}170 + 0{,}1 \times 0{,}001 = 681{,}597 + 0{,}0001$$

et $$E = 314{,}1 \times 0{,}001 + 2{,}170 \times 0{,}1 = 0{,}5311$$

*On néglige alors* $\varepsilon\varepsilon' = 0{,}0001$ *et les deux dernières décimales de* $M$ *; ce qui nous donne pour valeur approchée* $681{,}6$ *(plutôt que* $681{,}5$*) ; et on arrondit l'incertitude en* $0{,}6$*. On annoncera donc* $681{,}6$ *est une valeur approchée de* $rr'$*, à* $0{,}6$ *près.*

**Exercice 6 :** *Calcule la valeur centrale de $x$ et l'incertitude dans les cas suivants :*

- $x = a + b$ — $a = 1{,}01$ à $0{,}01$ près par défaut ; $b = 2{,}03$ à $0{,}005$ près
- $x = a + b$ — $1{,}71 \leq a \leq 1{,}72$ ; $b = 1{,}91$ à $0{,}1$ près par excès
- $x = a - b$ — $a = 1{,}71$ à $0{,}01$ près ; $b = 2{,}17$ à $0{,}02$ près
- $x = 3a - 7{,}1\,b$ — $a = 3{,}17$ à $0{,}005$ près ; $b = 9{,}11$ à $0{,}01$ près par excès
- $x = 2a - 3{,}2b$ — $a = 9{,}1$ à $0{,}1$ près ; $7{,}31 \leq b \leq 7{,}32$

**Exercice 7 :** *Calcule une valeur approchée de $ab$, et l'incertitude, dans les cas suivants : (utilise le procédé d'estimation rapide)*

| | |
|---|---|
| $a = 1{,}17$ à $0{,}01$ près | $b = 2{,}41$ à $0{,}01$ près |
| $a = 1{,}107$ à $0{,}001$ près | $b = 3{,}1$ à $0{,}1$ près |
| $a = 2{,}041$ à $10^{-3}$ près | $b = 3{,}071$ à $0{,}002$ près |
| $a = 10{,}1$ à $0{,}1$ près | $b = 0{,}0131$ à $0{,}0001$ près |
| $a = 1{,}01$ à $0{,}005$ près | $b = 1743$ à $1$ près |

**Exercice 8 :** *Je sais que $b = 1{,}07$ à $0{,}01$ près, et que $a = 2{,}1734567213$ ... Quelle valeur approchée de $a$ dois-je prendre si je veux calculer une valeur approchée de $ab$ ?*

1) à $1/10$ près : 2,1 ? 2,17 ? 2,173 ? ...
2) à $5/100$ près
3) à $1/100$ près

**Exercice 9 :** *Calcule une valeur approchée de $a^2$, de $a^3$, de $a^4$. Quelles sont les incertitudes ? (Utilise le procédé d'estimation rapide)*

$a = 1{,}31$ à $0{,}005$ près

$a = 2{,}171$ à $0{,}001$ près

$a = 3{,}15$ à $0{,}1$ près

***Exercice 10 :*** *Soit* $y = \frac{x+3}{x-1}$ . *On veut calculer une valeur approchée de* $y$ , *et l'incertitude correspondante, sachant que :*

$$x = 1{,}71 \text{ à } 0{,}01 \text{ près par défaut}$$

a) *Calcule un encadrement de* $x + 3$ , *et un encadrement de* $x - 1$ .

b) *Calcule un encadrement de* $y$ ; *puis donne le résultat cherché.*

***Exercice 11 :*** *Pour avoir une valeur approchée de* $\pi^2$ *à* $10^{-3}$ *près, doit-on utiliser la valeur approchée* 3,14 *de* $\pi$ ? *ou la valeur approchée* 3,1416 ?

***Exercice 12 :*** *On a mesuré le rayon d'un cercle et trouvé* $R = 17{,}4$ cm *à* 0,3 cm *près. Quelle valeur approchée de* $\pi$ *vas-tu utiliser pour calculer sa longueur :* 3,14 ? 3,1416 ? 3,141592 ?...

## INCERTITUDES RELATIVES

*Considérons un nombre* $a$ *dont on a une valeur approchée* $x$ *avec une incertitude* $\varepsilon$ . *Le nombre* $\frac{\varepsilon}{x}$ *est appelé l'incertitude relative ; on l'exprime souvent sous la forme d'un pourcentage.*

***Exemple :*** *"a vaut 1,43 à 2 % près" signifie que l'incertitude que l'on a lorsque l'on remplace* $a$ *par* 1,43 *est " 2 % de 1,43 ", c'est-à-dire* $0{,}02 \times 1{,}43 = 0{,}0286$ . *Donc :*

$$1{,}43 - 0{,}0286 \leq a \leq 1{,}43 + 0{,}0286$$

***Exercice 13 :*** *Le nombre* $a$ *vaut* 1,74 *avec une incertitude relative de* 1 % ; *tandis que* $b$ *vaut* 2,17 *avec une incertitude relative de* 1,5 % .

a) *Calcule un encadrement de* $a$ , *un encadrement de* $b$ , *et un encadrement de* $ab$ .

b) *Calcule une valeur approchée de* $ab$ , *et l'incertitude relative correspondante.*

***Exercice 14 :*** *Calcule une valeur approchée de* $a + b$ *et l'incertitude relative correspondante sachant que :*

a) $a$ *vaut* 334,2 *à* 1 % *près et* $b$ *vaut* 17,1 *à* 5 % *près.*

b) $a$ *vaut* 0,217 *à* 1 % *près et* $b$ *vaut* 2,11 *à* 0,1 % *près.*

c) $a$ *vaut* 0,217 *à* 10 % *près et* $b$ *vaut* 1341,5 *à* 0,2 % *près.*

d) $a$ *vaut* 3,11 *à* 1,8 % *près et* $b$ *vaut* 31,5 *à* 1,8 % *près.*

e) $a$ *vaut* 51,1 *à* 3 % *près et* $b$ *vaut* 61,2 *à* 3 % *près.*

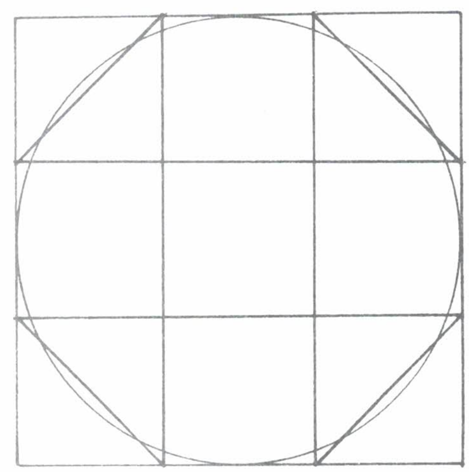
*L'aire d'un disque de rayon $R$ est donnée par la formule $A = \pi R^2$, où :*

$$\pi = 3{,}1415926535897932384626433...$$

## QU'EST CE QU'UNE VALEUR APPROCHEE DE $\pi$ ?

*Dès la plus haute antiquité on savait que l'aire du disque de rayon $R$ est égale à un plus de trois fois celle du carré de côté $R$. Voici un calcul qui date de l'Egypte ancienne.*

*Inscrivons le cercle de rayon $R$ dans un carré, que nous découpons en 9 petits carrés égaux. Ces petits carrés sont de côté $\frac{2}{3}R$ ; et ils ont pour aire $\frac{4}{9}R^2$. Enlevons les quatre coins (comme sur la figure) ; nous obtenons un octogone qui — la figure l'atteste — est à peu près de même aire que le disque. Il a pour aire*



$$A = (2R)^2 - 4 \times \frac{1}{2}\frac{4}{9}R^2 = \frac{28}{9}R^2 = 3{,}111...\ R^2$$

*Donc $\frac{28}{9}$ est une valeur approchée de $\pi$.*

*La valeur ainsi déterminée diffère assez peu de la valeur réelle ; pourtant un tel calcul est à peu près sans intérêt. En effet il nous dit que " $\pi$ est à peu près égal à $\frac{28}{9}$ ", mais il ne nous donne aucun renseignement sur l'erreur que l'on fait en remplaçant $\pi$ par $\frac{28}{9}$.*

*Pour qu'une valeur approchée $\alpha$ du nombre $\pi$ soit utilisable, il faut qu'elle soit accompagnée d'informations sur l'erreur que l'on fait en remplaçant $\pi$ par $\alpha$. Autrement dit il faut que l'on puisse calculer l'incertitude.*

***Exemple :*** *Si j'écris $\alpha = 3{,}14...$, il est sous-entendu que les " ... " représentent des décimales que je n'ai pas su, ou que je n'ai pas le courage d'écrire. Autrement dit ceci signifie $3{,}14 \leq \pi \leq 3{,}15$.*

*Soit encore $3{,}145 - 0{,}005 \leq \pi \leq 3{,}145 + 0{,}005$.*

*Ou $|\pi - 3{,}145| \leq 0{,}005$.*

*Ainsi calculer une approximation de* $\pi$ *c'est déterminer deux nombres* $\pi^-$ *et* $\pi^+$ *tels que* $\pi^- \leq \pi \leq \pi^+$ *; c'est-à-dire déterminer un encadrement de* $\pi$ *.*

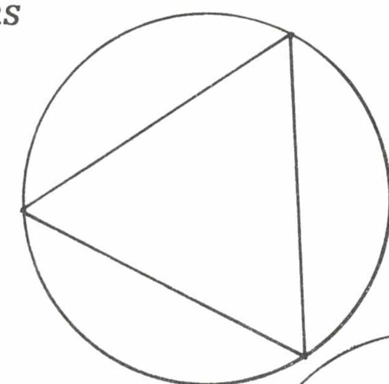
*Le premier encadrement de* $\pi$ *qui fut connu est*

$$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7}$$

*(Notons que* $3 + \frac{10}{71} = 3{,}1408...$ *et* $3 + \frac{1}{7} = 3{,}14285...$*)*

*Il fut établi par Archimède (-287 ; -212) . Nous allons essayer de comprendre les principes de ce calcul.*

### *UTILISATION DES POLYGONES REGULIERS*

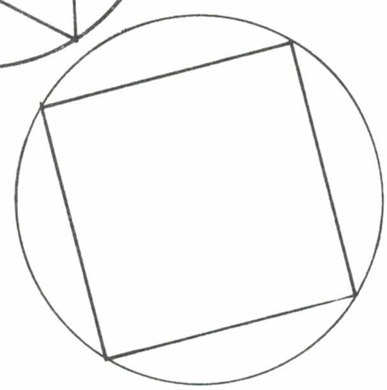


*Partageons un cercle* $\Gamma$ *en* $n$ *arcs égaux. Nous obtenons* $n$ *points* $A_1 A_2 \ldots A_n$ *; et l'on a*

$A_1A_2 = A_2A_3 = \ldots = A_{n-1}A_n = A_nA_1$ .

*Le polygone obtenu en joignant ces points est appelé " polygone régulier à* $n$ *côtés inscrit dans* $\Gamma$ *".*

***Exemples :*** *Pour* $n = 3$ *, on obtient un triangle équilatéral. Pour* $n = 4$ *, on obtient un carré.*



***Exercice 1 :*** *Dessine un polygone régulier à 5 côtés (ie : un pentagone régulier) inscrit dans un cercle* $\Gamma$ *.*

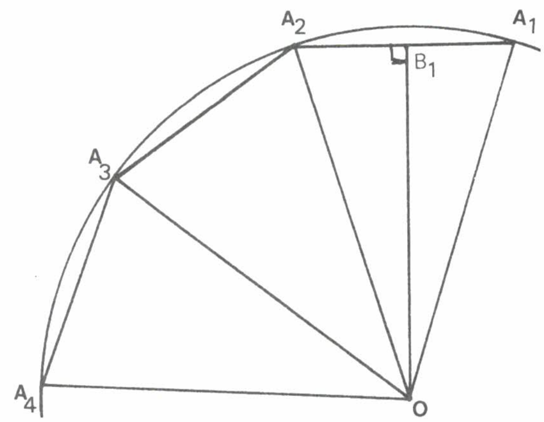
***Exercice 2 :*** *Dessine un polygone régulier à 6 côtés (ie : un hexagone régulier) inscrit dans un cercle* $\Gamma$ *. Explique pourquoi il est la réunion de six triangles équilatéraux.*

***Exercice 3 :*** *Soit* $A_1 \ldots A_5$ *un polygone régulier à 5 côtés inscrit dans un cercle* $\Gamma$ *. Soit O le centre de* $\Gamma$ *. Explique pourquoi la droite* $OA_1$ *est un axe de symétrie de la figure.*

*Soit* $\Delta$ *la médiatrice de* $A_1A_2$ *, explique pourquoi c'est un axe de symétrie de la figure.*

*Combien as-tu ainsi d'axes de symétrie de* $A_1 \ldots A_5$ *?*
*Recommence pour un polygone à 6 côtés, puis pour un polygone à 7 côtés.*

Soit $A_1A_2 \ldots A_n$ un polygone régulier à $n$ côtés inscrit dans le cercle $\Gamma$ de centre $O$. Les angles $A_1\widehat{OA}_2$, $A_2\widehat{OA}_3$ ... sont tous égaux à $\frac{360}{n}$ degrés.




Soit $B_1$ le milieu de $A_1A_2$, $B_2$ le milieu de $A_2A_3$,... Les distances $OB_1$, $OB_2$,... sont toutes égales. Pour s'en convaincre on peut utiliser les axes de symétrie mis en évidence dans l'exercice 3. Mais il est facile de les calculer : le triangle $OA_1A_2$ est isocèle ; donc $OB_1$ est perpendiculaire à $A_1A_2$, et :

$B_1\widehat{OA}_1 = \frac{1}{2} A_1\widehat{OA}_2$ (= $\frac{360}{2n}$ degrés, dans la suite cet angle sera noté $\alpha_n$).

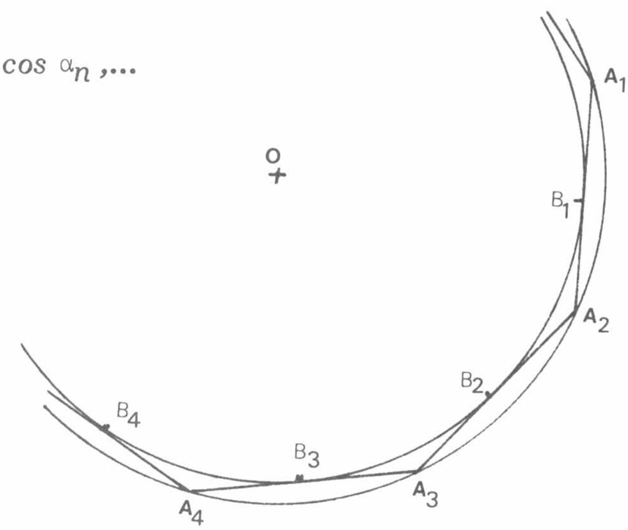
On a :

$$OB_1 = OA_2.\cos\alpha_n = R\cos\alpha_n$$

Et de même

$$OB_2 = R\cos\alpha_n \ , \ OB_3 = R\cos\alpha_n, \ldots$$

Il en résulte que le cercle $\Gamma'$ de centre $O$ et de rayon $R\cos\alpha_n$ est tangent aux $n$ côtés en leurs milieux.




Le domaine intérieur au polygone contient donc le disque $\Gamma'$ et est contenu dans le disque $\Gamma$. Nous avons donc

(a) $$\text{Aire } \Gamma' = \pi R^2\cos^2\alpha_n \leq \text{Aire } (A_1A_2 \ldots A_n) \leq \text{Aire } \Gamma = \pi R^2$$

Nous allons calculer Aire $(A_1A_2 \ldots A_n)$ et nous en déduirons des encadrements de $\pi$ (il y en aura un pour chaque $n$)

$$\begin{aligned}\text{Aire } (A_1A_2 \ldots A_n) &= n \times \text{Aire } (A_1OA_2)\\ &= n \times \frac{1}{2} \times OB_1 \times A_1A_2\\ &= n \times OB_1 \times B_1A_2\\ &= n \times \frac{1}{2} \times R\cos\alpha_n \times 2R\sin\alpha_n\end{aligned}$$

Donc les inégalités (a) deviennent :

$$\pi R^2\cos^2\alpha_n \leq nR^2\cos\alpha_n\sin\alpha_n \leq \pi R^2$$

*soit, en divisant par* $R^2$ :

$$\pi \cos^2 \alpha_n \leq n \cos \alpha_n \sin \alpha_n \leq \pi$$

*De l'inégalité* $\pi \cos^2 \alpha_n \leq n \cos \alpha_n \sin \alpha_n$ *nous déduisons*

$$\pi \leq n \frac{\sin \alpha_n}{\cos \alpha_n} = n \tan \alpha_n \quad .$$

*Et par conséquent nous obtenons un encadrement de* $\pi$ :

(b) $$n \sin \alpha_n \cos \alpha_n \leq \pi \leq n \tan \alpha_n \quad .$$

***Exercice 4 :*** *On prend* $n = 4$ . *Le polygone est un carré. Calculer le rayon du cercle* $\Gamma'$. *Quel encadrement de* $\pi$ *obtient-on ?*

***Exercice 5 :*** *On prend* $n = 6$ . *Le polygone est un hexagone régulier. Calcule le rayon de* $\Gamma'$. *Quel encadrement de* $\pi$ *obtient-on ?*

***Exercice 6 :*** *On prend* $n = 90$ . *En calculant* $\cos \alpha_n$ , $\sin \alpha_n$ *et* $\tan \alpha_n$ *au moyen de ta calculette, donne un encadrement de* $\pi$ .

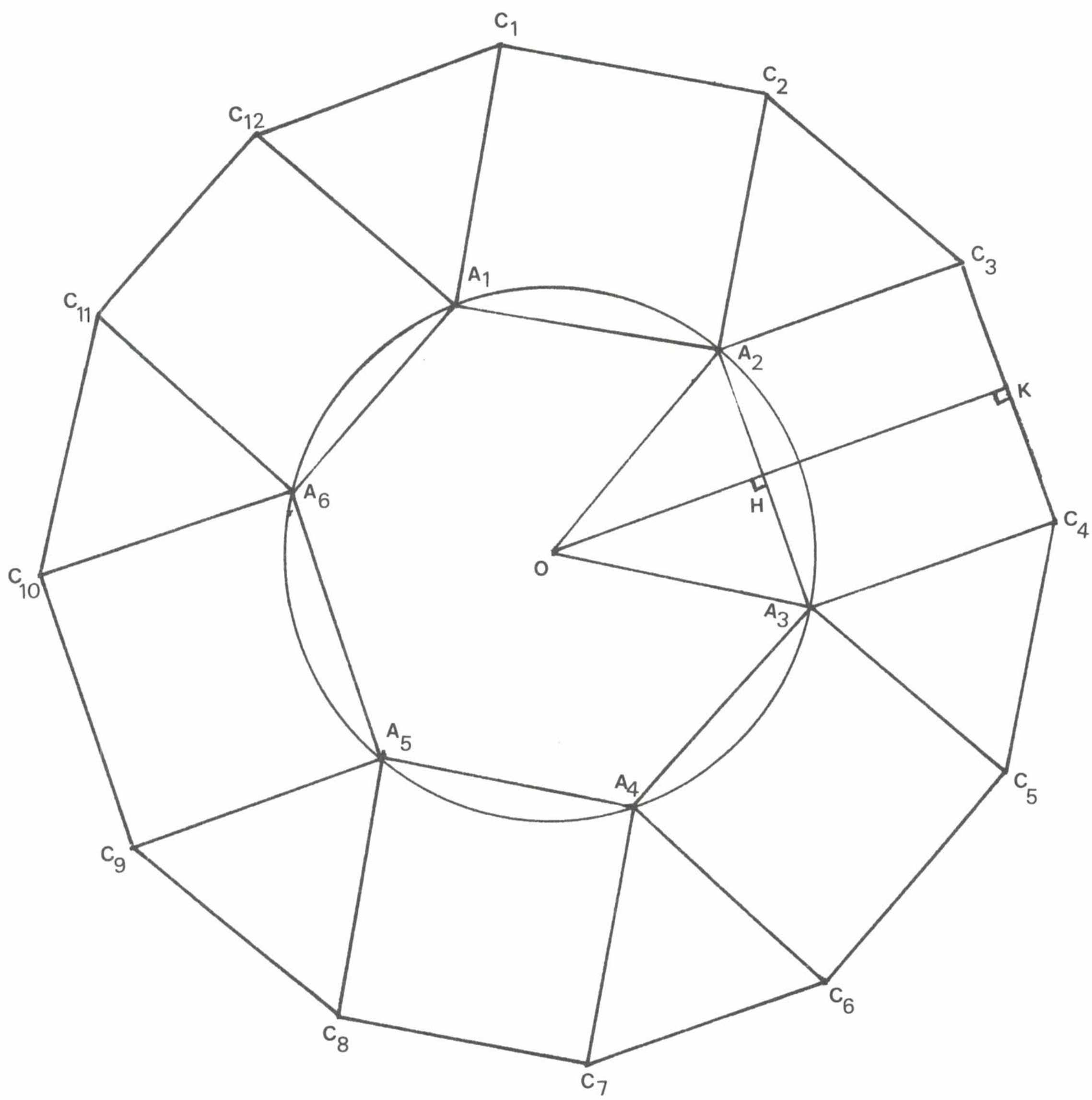
## *LE DOUBLEMENT DU NOMBRE DES COTES*

*Dans ce qui précède nous avons triché, en utilisant les fonctions trigonométriques. Pour que notre calcul soit complet, il faudrait dire comment on calcule* $\sin \alpha_n$ *et* $\cos \alpha_n$ ; *ce qui est plus difficile que le calcul de* $\pi$ .

*Nous avons vu dans deux exercices ci-dessus que pour* $n = 4$ *ou* $6$ , *on peut facilement calculer le rayon de* $\Gamma'$ . *Malheureusement ce sont les seuls cas faciles, et ils donnent de bien mauvaises approximations de* $\pi$ .

*Regardons la figure page 61. Partant d'un hexagone régulier* $A_1A_2 \ldots A_6$ , *on a construit sur chacun de ses côtés un carré. On obtient ainsi un polygone* $C_1 \ldots C_{12}$ *à 12 côtés (c'est-à-dire : un dodécagone) .*

*En utilisant les axes de symétrie de l'hexagone (exercice 3) il est facile de démontrer que les points* $C_1 \ldots C_{12}$ *sont tous à la même distance de* $O$ .



C1
C2
C12
C3
A1
C11
A2
K
A6
H
C4
O
C10
A3
A5
C5
A4
C9
C6
C8
C7

***Exercice 7 :*** *Quelles symétries de l'hexagone utilises-tu pour justifier que* $OC_2 = OC_3$ *? pour justifier que* $OC_1 = OC_2$ *? pour justifier que* $OC_1 = OC_5$ *?*

*Pour calculer cette distance, on regarde le triangle rectangle* $OKC_3$ *, et on obtient* $OC_3 = R\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

***Exercice 8 :*** *Explique complètement le calcul de* $OC_3$ .

*Par ailleurs les triangles* $A_iC_{2i-2}C_{2i-1}$ *sont équilatéraux (avec la convention* $C_o = C_{12}$*).*

***Exercice 9 :*** *Calcule l'angle* $C_2A_2C_3$ *et explique pourquoi le triangle* $A_2C_2C_3$ *est équilatéral.*

*Donc le dodécagone* $C_1C_2 \ldots C_{12}$ *est régulier, il est inscrit dans un cercle* $\Gamma_1$ *de rayon* $R_1 = R\sqrt{2+\sqrt{3}}$ *. Et le cercle* $\Gamma'_1$ *qui passe par les milieux des côtés, a pour rayon* $R'_1 = OK = R\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

***Exercice 10 :*** *Calcule l'aire du dodécagone* $C_1C_2 \ldots C_{12}$ *. Ceci nous donne un nouvel encadrement de* $\pi$ *. Quel est cet encadrement ?*

*On a ainsi, connaissant toutes les données relatives à l'hexagone, déterminé celles qui correspondent au dodécagone. On peut de même en construisant des rectangles sur les côtés du dodécagone, construire un polygone régulier à 24 côtés.*

***Exercice 11 :*** *Essaye de dessiner ces rectangles. Quelles dimensions faut-il donner à ces rectangles ?*

*Et le processus peut se prolonger aussi longtemps que l'on veut. On obtient ainsi toutes les données relatives aux polygones à 12, 24, 48, 96, 192, 384,... côtés. Ceci nous donne des approximations de* $\pi$ *qui sont toujours meilleures (c'est-à-dire des incertitudes de plus en plus petites) . Il suffit d'être un peu patient. L'encadrement donné par Archimède, provient du polygone à 192 côtés.*

# ◆ *Fiche 10 : SUBSTITUTIONS*

1. On considère $f(x) = x^2 - 3x + 1$ .

   Calculer $f(1)$ , $f(-1)$ , $f\left(\frac{1}{2}\right)$ et $f\left(-\frac{3}{2}\right)$ .

   Calculer $f(10^3)$ , $f(10^{-3})$ , $f(10^6)$ et $f(10^{-6})$ .

   Calculer $f(a)$ , $f(-a)$ et $f(2a)$ .

2. a) Soit $f(x) = x^2 - 4x + 3$ ; calculer $f(2x)$ , $f(2u)$ , $f(2x + 1)$ , $f(1 + 2u)$ .

   b) Soit $f(x) = x^2 - 5x + 1$ ; calculer $f(x + 3)$ et $f(-x + 3)$ .

   c) Soit $f(x) = -x^2 + 4x - 1$ ; calculer $f(1 + 2x)$ et $f(1 - 2x)$ .

   d) Soit $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 - 6x + \frac{1}{4}$ ; calculer $f\left(x - \frac{1}{4}\right)$ , $f\left(1 - \frac{1}{3}x\right)$ et $f\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}x\right)$ .

3. a) Soit $f(x) = -x^2 + 4x - 3$ . Calculer $f(1 - x)$ , $f(1 + x)$ , $f(1 + 2u)$ , $f(1 - 2u)$ .

   b) Soit $f(x) = -x^2 - 2x + 1$ . Calculer $f\left(\frac{3x}{4}\right)$ , $f(3u)$ , $f(-3u)$ , $f(-u - 2)$ .

   c) Soit $f(x) = x^2 - 4x + 4$ . Calculer $f(\sqrt{x})$ , $f(-\sqrt{x})$ , $f(1 + \sqrt{x})$ et $f(-2 - \sqrt{x})$ .

   d) Soit $f(x) = -x^2 - \sqrt{3}x + 1$ . Calculer $f(2 - \sqrt{3})$ , $f(-\sqrt{3} - 1)$ , $f(\sqrt{2})$ et $f(\sqrt{2} - \sqrt{3})$ .

4. a) Soit $f(x) = -x^2 + 5x - 4$ . Calculer $f(4 - x)$ . L'égalité $f(x) = f(4 - x)$ est-elle vraie pour certaines valeurs de $x$ ? pour toutes les valeurs de $x$ ? ou pour aucune valeur de $x$ ?

   b) Soit $f(x) = (-x + 3)(4 - x)$ . Calculer $f(-x + 1)$ et $f(x + 2)$ . Etudier (comme en a)) l'équation $f(x + 2) = f(-x + 1)$ .

   c) Soit $f(x) = x^2 - x + 1$ . Etudier (comme en a)) l'équation $f(x + 1) = f(-x)$ .

   d) Soit $f(x) = x^2 + 2x - 1$ . Etudier (comme en a)) l'équation $f(x + 3) = f(-x - 1)$ .

5. a) Soit $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 2x + 4$ . Calculer $f(2-x)$ , $f(-u+2)$ , $f(-2+x)$ , $f(-2-x)$ .

b) Soit $f(x) = -x^3 + x - 1$ . Calculer $f(x+1)$ , $f(3x)$ , $f(\sqrt{x})$ .

c) Soit $f(x) = -x^2 - x + 3$ . Calculer $f(-1-\sqrt{x})$ , $f(1+x\sqrt{x})$ , $f\left(1-\frac{1}{x}\right)$ , $f\left(1+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)$ .

d) Soit $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 2$ . Calculer $f\left(-1-\frac{1}{x}\right)$ , $f\left(2-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ , $f(-3-4x\sqrt{x})$ , $f(-5+4\sqrt{x})$ .

6. a) Soit $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x - 7$ . Calculer $f(1-x) + f(1+x)$ .

b) Soit $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x + 1$ . Calculer $f\left(2+\frac{x}{2}\right) - f\left(2-\frac{x}{2}\right)$ .

c) Soit $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$ . Calculer $f(-x+1) + f(x+2) + f(3-x)$.

d) Soit $f(x) = \sqrt{2}\,x^2 + x - \sqrt{2}$ . Calculer $f(x-\sqrt{2}) + f(-x+2\sqrt{2})$ .

7. a) Soit $f(x) = \frac{x^3}{3} - 4x + \frac{1}{3}$ . Calculer $f(3-2x) - f(-1-x)$ .

b) Soit $f(x) = \frac{x^2}{5} - \frac{x}{3} + 1$ . Calculer $f\left(x-\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{1}{3}-x\right)$ .

c) Soit $f(x) = x^3 - x + 1$ . Calculer $f\left(\frac{x}{2}-1\right) + f\left(\frac{x}{2}+1\right)$ .

d) Soit $f(x) = x^3 - \frac{x^2}{2} + 1$ . Calculer $f(3+x) + f(3-x)$ .

8. Calculer $f(g(x))$ où :

| | |
|---|---|
| a) $f(x) = x^2 - 5x + 1$ | $g(x) = x - 3$ |
| b) $f(x) = x^2 - 4x + 3$ | $g(a) = 3 - 2a$ |
| c) $f(u) = u^2 - 2u + 1$ | $g(x) = 1 - \frac{1}{2}x$ |
| d) $f(u) = u^3 - u + 3$ | $g(v) = v - 1/3$ |
| e) $f(x) = \frac{3}{2}x - \frac{1}{4}$ | $g(a) = a^2 - a + 3$ |

9. Calculer $f(g(x))$ et $g(f(x))$ avec :

| | |
|---|---|
| a) $f(x) = x^2 + 3x - 1$ | $g(x) = 2x - \frac{1}{2}$ |
| b) $f(x) = x^2 - x + 4$ | $g(x) = \frac{1}{2}x - 1$ |
| c) $f(x) = x - \frac{4}{3}$ | $g(x) = \frac{1}{2}x + 1$ |
| d) $f(u) = u^2 - u + 1$ | $g(u) = u - 3$ |
| e) $f(t) = t^2 - t$ | $g(t) = t^2 + t$ |

## ◆ *Fiche 11: MISE en FACTEURS I*

(1) Compléter :

$2x^2 - 6x + 4 = (x - 1) \times \ldots$

$3x^2 - 4x - 4 = (x - 2) \times \ldots$

$2x^2 - 3x + 1 = (2x - 1) \times \ldots$

$4x^2 - 2x - 12 = (2x + 3) \times \ldots$

$6x^2 + x - 1 = (3x - 1) \times \ldots$

$x^2 + x - 2 = (x - 1) \times \ldots$

$2x^2 - x - 1 = (x - 1) \times \ldots$

$x^2 - 4x + 4 = (x - 2) \times \ldots$

$6x^2 + 5x + 1 = (3x + 1) \times \ldots$

$4x^2 + 8x + 3 = (2x + 1) \times \ldots$

(2) Compléter :

$-x^2 + x + 2 = (-x + 2) \times \ldots$

$-\frac{3}{4}x^2 + x + 1 = (x - 2) \times \ldots$

$-x^2 + x + 12 = (x + 3) \times \ldots$

$-x^2 - x + \frac{15}{4} = (2x - 3) \times \ldots$

$x^2 - 6x - \frac{45}{4} = (2x + 3) \times \ldots$

$-3x^2 + x + 2 = (1 - x) \times \ldots$

$-4x + 3 + x^2 = (3 - x) \times \ldots$

$21 - x^2 + 4x = (3 + x) \times \ldots$

$2x + 8 - 3x^2 = (2 - x) \times \ldots$

$3x^2 - 2 - x = (1 - x) \times \ldots$

(3) Chacun des polynômes suivants a une racine entière simple. La déterminer, puis écrire le polynôme sous forme d'un produit de facteurs de degré 1 :

$x^2 - 2x - 3$

$x^2 - x - 2$

$x^2 - 3x$

$x^2 - 6x + 8$

$x^2 - 5x - 6$

$x^2 - 2x$

$x^2 - 7x + 6$

$x^2 + 3x + 2$

$x^2 + 5x$

$x^2 + 4x - 5$

$x^2 + 9x + 8$

$x^2 + 3x + 2$

$x^2 - x - 2$

$x^2 - 3x + 2$

(4) Compléter :

$3x^2 - x - 4 = (x + 1) \times \ldots$

$x^3 - 2x^2 + x + 4 = (x + 1) \times \ldots$

$x^3 - 3x^2 + 6x - 4 = (x - 1) \times \ldots$

$3x^3 + 5x^2 - 15x - 14 = (x - 2) \times \ldots$

$x^3 + 1 = (x + 1) \times \ldots$

$x^3 - x^2 + x - 1 = (x^2 + 1) \times \ldots$

$8x^3 + 1 = (2x + 1) \times \ldots$

$x^3 + x^2 + x + 1 = (x + 1) \times \ldots$

$x^3 + 2x^2 + 3x + 6 = (x + 2) \times \ldots$

(5) Déterminer $a$ pour que la mise en facteurs soit possible. Puis factoriser :

$x^2 + ax + a = \left(x - \frac{1}{2}\right) \times \ldots$

$3x^2 - x + a = \left(x - \frac{3}{4}\right) \times \ldots$

$\frac{3}{2}x^2 + x + a = \left(\frac{3}{2}x + 1\right) \times \ldots$

$-x^2 - \frac{3}{4}x + a = \left(1 - \frac{1}{2}x\right) \times \ldots$

$\frac{1}{2}x^2 - ax + a = (2 - x) \times \ldots$

$x^2 - x + a = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}x\right) \times \ldots$

$x^2 - x + a = (3 - 2x) \times \ldots$

$-x^2 - x + a = \left(\frac{1}{2} - x\right) \times \ldots$

$-\frac{3}{4}x^2 - ax + 1 = \left(\frac{1}{2} - 3x\right) \times \ldots$

$-3x^2 + x + a = (3 - x) \times \ldots$

(6) Ecrire sous forme d'un produit de facteurs en utilisant les identités
$(a + b)^2 = \ldots$ , $(a - b)^2 = \ldots$ et $(a + b) \times (a - b) = \ldots$

$9x^2 - 6x + 1$

$4x^2 - 9y^2$

$x^2 + 18x + 81$

$x^2 - 4(x^2 + 4x + 4)$

$(x^2 - 6x + 9) - (4x^2 - 4x + 1)$

$4x^2 - 6xy + \frac{9}{4}y^2$

$x^2 - (4x^2 + 4x + 1)$

$(x^2 + 6x + 9)^2 - (4x^2 + 8x + 4)^2$

$9x^2y^2 - 6xy + 1$

$4x^2 - 8x + 4$

(7) Ecrire sous forme d'un produit de facteurs :

$x^2 + 5x - 6$

$16x^2 - 72x + 81$

$(x^2 - 1) + (3x^2 - 4x - 7)$

$(x - 1)^2 + (5x^2 + 4x - 9)$

$(x^2 + 6x + 9) + 2x^2 - 18$

$(x^2 - 4) + (x^3 + x^2 - 2x - 8)$

$(x^4 - 1) + (x^4 - 2x^2 + 1)$

$(x^2 - y^2) + (x^2 + 2xy + y^2)$

$(x^4 - 1) + (x^2 + 2x + 1)$

$(1 - x^2) + (x^2 - 2x + 1)$

(8) Trouver un polynôme de degré 1 qui est facteur commun à $A$ et $B$.
Puis factoriser $A$ et $B$ :

$A = (x^2 - 1) + (2x^2 + 4x + 2)$

$A = (x^2 - 4) + (3x^2 - 5x + 5)$

$A = x - 2 + 3x^2 + 6x + 6$

$A = (3x + 1)^2 - (x - 1)^2$

$A = x^2 - 5$

$B = x^2 + 6x + 5$

$B = (3x^2 - 6x + 3)$

$B = \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2}$

$B = (x + 1)^2 - x^2 + 2x - 1$

$B = 2x^2 + 4\sqrt{5}x + 10$

## Fiche 12 : FRACTIONS RATIONNELLES

1. Mettre sous forme d'une fraction unique :

$\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2} =$

$\frac{x+1}{x-1} + \frac{x-1}{x+1} =$

$\frac{x-2}{x+1} - \frac{x+1}{x-2} =$

$\frac{x-3}{1-x} + \frac{x+1}{2x+1} =$

$\frac{x+3}{2x+3} + \frac{x+1}{2x-1} =$

$\frac{x-1}{x} + \frac{x}{x-1} =$

$\frac{x}{x+1} + \frac{x-1}{x} =$

$\frac{x-2}{x+3} - \frac{x+3}{x-1} =$

$\frac{2x-1}{2x+1} - \frac{1-x}{2-x} =$

$\frac{x-1}{2x-1} + \frac{x-3}{2x+4} =$

2. Mettre sous forme d'une fraction unique :

$\frac{x}{x^2-1} + \frac{1}{x-1} =$

$\frac{1}{x^2-1} + \frac{1}{(x+1)^2} =$

$\frac{2-x}{3-x} + \frac{1-x}{9-x^2} =$

$\frac{3-x}{x-2} + \frac{1}{(x-2)^2} =$

$\frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} =$

$\frac{x}{(x+1)^2} + \frac{1}{x+1} =$

$\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{1-x^2} =$

$\frac{3-2x}{x^2-4} + \frac{3}{(x-2)^2} =$

$\frac{1+x}{x^2-9} + \frac{1}{x-3} =$

$\frac{2x+4}{(x-3)^2} + \frac{2x-1}{x^2-9} =$

3. Déterminer le domaine de définition de la fonction f . Puis mettre f sous forme d'une fraction unique :

$f(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}$

$f(x) = \frac{1}{x^2+2x+1} - \frac{1}{x^2-1}$

$f(x) = \frac{1}{x^2+6x+9} - \frac{1}{x^2-4}$

$f(x) = \frac{1}{x^2-6} - \frac{1}{(x-3)^2}$

$f(x) = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x^2-4}$

$f(x) = \frac{1}{x^2+4x+4} - \frac{1}{x-2}$

$f(x) = \frac{1}{x^2-9} + \frac{1}{x^2-5}$

$f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-3)} + \frac{1}{x^2-2x+1}$

4. Résoudre les équations :

a) $\frac{x}{x+1} - \frac{x+1}{x-1} = 0$

b) $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} = 0$

f) $\frac{x-1}{x-4} + \frac{x+4}{x-1} = 2$

g) $\frac{x-1}{x+1} + \frac{2x-1}{2x+1} = 2$

c) $\frac{x}{x-1} - \frac{1}{x-2} = 1$

d) $\frac{x-4}{x-1} + \frac{x-1}{x-4} = 2$

e) $\frac{1-x}{2x+1} + \frac{2x-1}{x+1} = 1,5$

h) $\frac{2x}{x-4} + \frac{x}{x-5} = 3$

i) $\frac{2x}{x-3} + \frac{x-3}{2x-1} = 2,5$

j) $\frac{1+x}{-x+2} - \frac{-x-1}{3-x} = -2$

5 On cherche s'il existe des nombres A et B tels que l'égalité soit vraie pour toutes les valeurs de x pour lesquelles les deux membres ont un sens.

a) Déterminer les domaines de définition des deux membres.

b) Choisir deux nombres a et b dans ces domaines de définition (par exemple 0 et 1 , ou 1 et 2 ,...). Puis déterminer A et B de telle façon que l'égalité soit vraie pour ces deux valeurs de x .

c) Existe-t-il des nombres A et B qui rendent l'égalité vraie pour tout x dans le domaine de définition ?

a) $\frac{x}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$

b) $\frac{2x}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$

c) $\frac{3}{x^2+3x+2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+1}$

d) $\frac{3x}{x^2+3x-4} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+4}$

e) $\frac{x}{(2x+1)(3-2x)} = \frac{A}{2x+1} + \frac{B}{3-2x}$

f) $\frac{1}{(x^2+1)(x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x^2+1}$

g) $\frac{x^2-x}{(x^2+1)(x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x^2+1}$

h) $\frac{1+x^2}{(x^2+1)(2x+1)} = \frac{A}{2x+1} + \frac{B}{x^2+1}$

i) $\frac{1}{(x+1)(2+3x^2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx}{2+3x^2}$

j) $\frac{1-x}{(2x+1)(2x^2+1)} = \frac{A}{2x+1} + \frac{Bx}{2x^2+1}$

k) $\frac{2-x^2}{(2x-1)(x^2+4)} = \frac{A}{2x-1} + \frac{B}{x^2+4}$

ℓ) $\frac{3-x+x^2}{(x+3)(x^2+1)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x^2+1}$