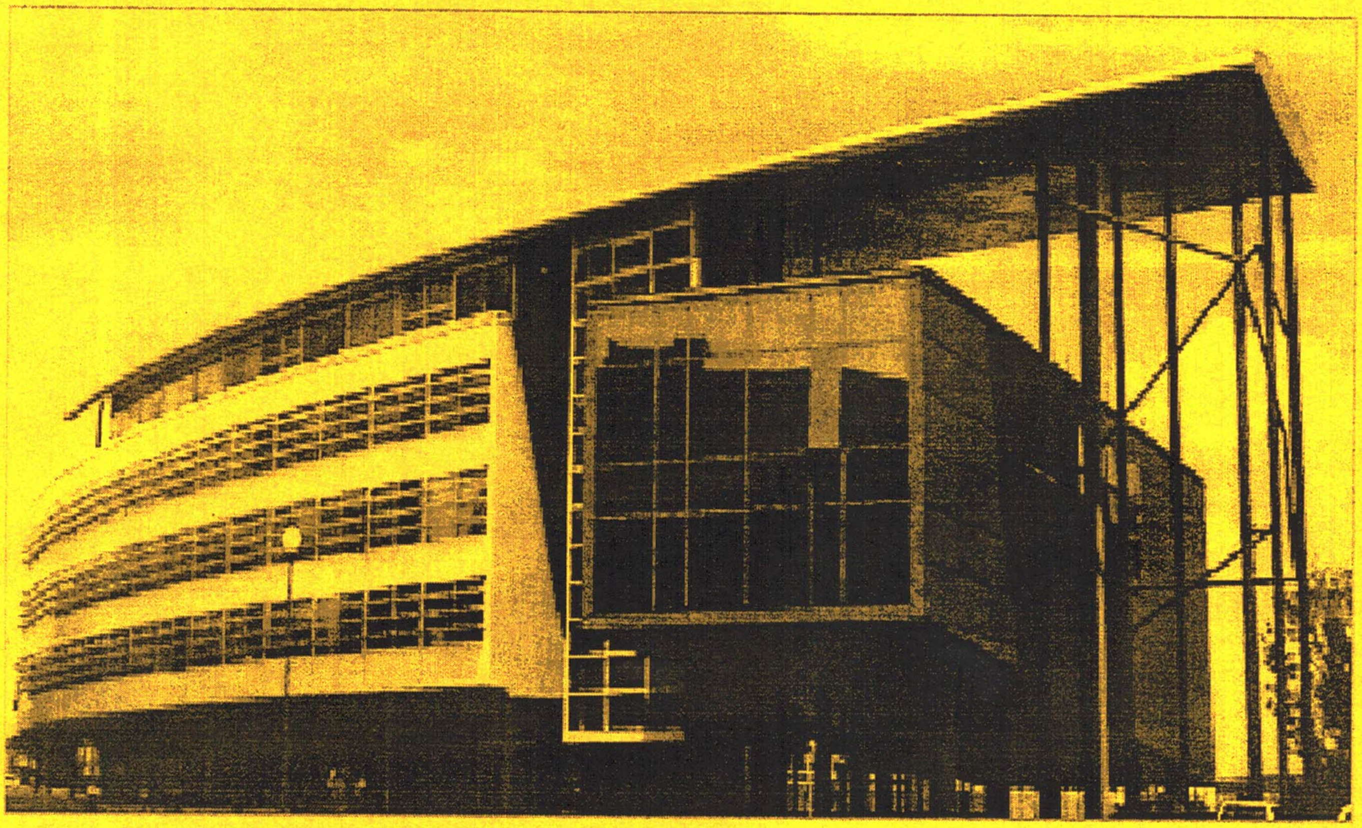
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
UNIVERSITÉ HENRI POINCARÉ - NANCY



Compléments d'analyse pour L'AGRÉGATION

Pierre RABOIN

N° 21

ANNÉE 2002-2003

Compléments d'Analyse pour l'Agrégation

P. RABOIN.

N° 21.

Année 2002.2003.

Compléments d'Analyse pour l'Agrégation : équations différentielles ordinaires à coefficients analytiques

1) La méthode itérative de PICARD s'applique au Problème de CAUCHY

$$(PC)\quad \begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

où f est une fonction holomorphe sur l'ouvert Ω du plan complexe (supposé contenir l'origine) et où x_0 est un nombre complexe, pour en trouver l'unique solution locale : il s'agit de trouver la solution de l'Equation Intégrale

$$(Ei)\quad x(t) = x_0 + \int_0^t f(x(u))\,du$$

où l'intégrale est prise, pour $|t|$ assez petit, le long du rayon $\vec{0t}$

autrement dit de trouver le point fixe de l'application en x définie par le membre de droite, en considérant la suite itérative

$$\begin{cases} x_0(t) = x_0 \\ x_{n+1}(t) = x_0 + \int_0^t f(x_n(u))\,du \end{cases}, \quad n \geq 0$$

Selon l'estimation découlant de l'inégalité des accroissements finis

$$|x_{n+1} - x_n|(t) \leq C|t| \int_0^1 |x_n - x_{n-1}|(st)\,ds$$

où C majore $|f'|$ sur le disque $D(0;R)$ contenu dans Ω et si z_{n-1}, z_n prennent leurs valeurs dans le même disque.

En partant de $|z_1(t) - z_0| \leq M|t|$ où M majore $|f|$ sur $D(0;R)$, on obtient pour $|t| < R/M$

$$|z_n - z_{n-1}|(t) \leq M\, C^{n-1} |t|^n / n!$$

en raisonnant par récurrence sur n, ce qui assure la convergence normale de la série de fonctions holomorphes $\sum_{n\geq 0} (z_{n+1} - z_n)$ donc de la suite (z_n), sur tout compact du disque $|t| < \rho$ avec $\rho = \frac{1}{C} \ln(1 + RC/M)$, vers une fonction qui est holomorphe sur le même selon un théorème de WEIERSTRASS et qui est solution de l'Ei selon un passage à la limite élémentaire dans la relation de récurrence.

Les mêmes estimations établissent l'unicité de la solution ainsi obtenue au PC : c'est le théorème de PICARD-LINDELÖF.

2) <u>La méthode d'identification de NEWTON</u> de résolution du PC où f est donc analytique sur le disque $D(0;R)$ conduit au même résultat selon <u>le calcul des limites de CAUCHY</u> :

- dans un premier temps, on cherche une solution série formelle

$$x(t) = \sum_{0}^{\infty} x_n t^n$$

où, par conséquent x_0 est donné, et où pour commencer

$$x_1 = \dot{x}(0) = f(x_0)$$

$$x_2 = \frac{1}{2!}\ddot{x}(0) = \frac{1}{2!} \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(x(t)) = \frac{1}{2!} f'(x_0)\, x_1$$

et, plus généralement x_{n+1} apparait comme une fonction poly-nomiale

$$P_{n+1}\left(x_0, x_1, \dots, x_n, f(x_0), f'(x_0), \dots, f^{(n)}(x_0)\right)$$

<u>à coefficients positifs</u>.

- comme, selon <u>les inégalités de CAUCHY</u>

$$\frac{1}{n!}\left|f^{(n)}(x_0)\right| \leqslant M/R^n$$

si l'on remplace $f(x)$ par $\dfrac{M}{1-\dfrac{x-x_0}{R}}$ la solution série formelle

du PC majorant

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{M}{1-\dfrac{x-x_0}{R}} \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

qu'il va supposer nul par la suite

va dominer x dans le sens où pour chaque n, son $n^{ème}$ coefficient majore celui de x.

– or, en séparant les variables, on obtient

$$\int_0^{x(t)} \left(1 - \frac{x}{R}\right) dx = Mt$$

qui donne $x(t)$ comme racine du trinôme $x^2 - 2Rx + 2MRt$

soit $x(t) = R - \sqrt{R^2 - 2MRt}$ qui définit (en prenant pour le radical la détermination principale liée à la coupure $(-\infty, 0]$) une fonction holomorphe sur le disque $|t| < R/2M$.

En conclusion, le PC possède une unique solution analytique locale.

3) Si $A(t)$ est une application matricielle holomorphe sur le <u>domaine simplement connexe D</u>, le PC linéaire

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = A \cdot \vec{x} \\ \vec{x}(0) = \vec{x}_0 \in \mathbb{C}^n \end{cases}$$

possède une unique solution analytique sur D en entier.

– Selon la méthode de 1), on convertit le PC selon l'EI où l'intégrale est prise le long d'un chemin joignant 0 au point courant (l'hypothèse de simple connexité est ici exercicielle) : en paramétrant ce chemin (de classe $\mathcal{C}^1$) selon

$u = \gamma(s)$ où s désigne l'abscisse curviligne, on a donc

$$x_{n+1}(t) = x_0 + \int_0^L A(\gamma(s)) \cdot x_n(\gamma(s))\, \gamma'(s)\, ds$$

où L est la longueur de la courbe et, par suite

$$|x_1(\gamma(s)) - x_0| \leqslant \|A\|_K \cdot |x_0| \cdot s$$

si $\|A\|_K$ majore $\|A\|$ sur un compact K de D contenant la courbe, puis

$$|x_2 - x_1|(\gamma(s)) \leqslant \|A\|_K^2 \cdot |x_0| \frac{s^2}{2}$$

et, en général

$$|x_{n+1} - x_n|(\gamma(s)) \leqslant |x_0| \frac{(\|A\|_K s)^n}{n!}$$

permettra de conclure.

– Le point 2) assure l'existence d'une unique solution analytique sur tout disque $D\left(t_0, \frac{R_K}{2M_K}\right)$ où $t_0 \in K$ et où

R_K désigne la distance de K au complémentaire de D dans $\mathbb{C}$

on peut donc prolonger la solution locale obtenue en 2) analytiquement le long de la courbe $\mathcal{C}$ joignant l'origine au point courant, selon le procédé de WEIERSTRASS qui consiste à recouvrir $\mathcal{C}$ à l'aide de N disques $D_j = D(t_j, \frac{R_K}{2M_K})$ où $t_j \in D_{j-1}$, $j = 1, \dots, N$ pour obtenir la solution globale en résolvant successivement les $(PC)_j$ $\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(t_j) = x_{j-1}(t_j) \end{cases}$.

4) Par exemple, la solution générale de l'EDO scalaire linéaire d'ordre 2

$$\ddot{x} + p\dot{x} + qx = 0$$

où p et q sont des fractions rationnelles, est localement analytique en dehors des pôles.

– Ainsi l'EDO de LEGENDRE d'indice n entier positif

$$(L_n) \quad (1-t^2)\ddot{x} - 2t\dot{x} + n(n+1)x = 0$$

possède en particulier comme solution le $n^{ième}$ polynôme de LEGENDRE

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!}\left((t^2-1)^n\right)^{(n)}$$

normalisé par la condition $P_n(1) = 1$, et sur lequel on peut s'appuyer pour trouver la solution générale x avec le théorème de LIOUVILLE qui donne un wronskien proportionnel à $1/_{1-t^2}$, de sorte que

$$\frac{x}{P_n}(t) = \int^t \frac{du}{(1-u^2)\,P_n^2(u)}$$

Sachant que $\{P_n\}_{n\geq 0}$ est la suite des polynômes orthogonaux sur $(-1,1)$ pour la mesure de LEBESGUE, les zéros de P_n sont 2 à 2 distincts dans l'intervalle $]-1,1[$ et, en les désignant par $(t_j)_{j=1}^{n}$ la quadrature s'effectuera en décomposant $\dfrac{1}{(1-u^2)\,P_n^2(u)}$ en éléments simples sous la forme

$$\frac{A}{1-u} + \frac{B}{1+u} + \sum_{j=1}^{n} \frac{A_j}{(u-t_j)^2}$$

car, selon 3) il ne saurait y avoir de singularité de branchement aux points t_j.

On obtient facilement

$$x(t) = a.P_n(t) + b.Q_n(t)$$ avec a, b complexes et

où

$$Q_n(t) = \frac{1}{2}P_n(t)\ln\frac{1+t}{1-t} - U_{n-1}(t)$$

avec U_{n-1} polynôme de degré $(n-1)$, est la fonction de LEGENDRE de seconde espèce. La fonction $\ln \frac{1+t}{1-t}$ peut être définie comme la composition de la détermination principale du logarithme pour la coupure $(-\infty, 0]$ avec la fonction homographique , ce qui correspond dans le plan $\mathbb{C}_t$ à la coupure $]-i\infty, -i] \cup [i, +i\infty[$ (donnant un ouvert simplement connexe) : elle fait apparaître les pôles ± 1 des coefficients p et q comme singularités de branchement de la solution générale de l'EDO.

– De même , pour l'EDO de BESSEL modifiée d'indice 0

$$(B_0) \quad t\ddot{x} + \dot{x} - tx = 0$$

l'origine apparaît comme une singularité polaire des coefficients de l'équation différentielle.

5) On aborde par conséquent le problème de l'EDO linéaire

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$$

où A est une application matricielle analytique sur un disque ouvert centré en 0 mais privé de son centre.

– Selon la démarche déjà suivie en 3) , il est alors possible de prolonger la solution locale X_0 du Problème de CAUCHY

$$\begin{cases} \dot{X} = A.X \\ X(t_0) = I \end{cases}$$ où t_0 est proche de 0 mais non nul

le long du cercle $\partial D(0, |t_0|)$ selon le procédé de WEIERSTRASS

au bout d'un tour, on obtient une solution X_1 de l'EDO

$\dot{X} = A.X$ qui va, en général, différer de la matrice fondamentale

X_0 au point t_0 et on obtient une relation de la forme

$$X_1 = X_0 . M$$

où la matrice constante inversible M est appelée <u>matrice de monodromie de l'EDO</u>.

- Si $\vec{v}$ désigne un vecteur propre de M, associé à la valeur propre λ, la solution $\vec{x}(t) = X_0(t).\vec{v}$ de l'EDO se prolonge selon $X_1(t).\vec{v} = \lambda\,\vec{x}(t)$, tout comme la fonction puissance t^r où $r = \dfrac{\ln(\lambda)}{2i\pi}$: autrement dit $t^{-r}\vec{x}(t) = \vec{\varphi}(t)$ est analytique au voisinage pointé de l'origine. Ainsi, pour une EDO scalaire d'ordre 2 telle que les coefficients p et q possède en 0 une singularité isolée, si la matrice de monodromie associée est diagonalisable, cela signifie que la solution générale prend la forme

$$x(t) = a\,t^{r_1}\cdot\varphi_1(t) + b\,t^{r_2}\cdot\varphi_2(t)$$

avec a, b complexes, φ_1 et φ_2 analytiques au voisinage de O sauf éventuellement à l'origine. Par contre, et si M n'est pas diagonalisable, il existe une solution de la forme

$$x_2(t) = t^r\varphi_1(t)(\ \ b\ln t + \psi(t))$$

– Selon que les fonctions φ et ψ possèdent en O une singularité polaire ou essentielle, on parle de <u>Point Singulier Régulier</u> ou <u>Irrégulier</u>.

Si O est un PSR, et en supposant M diagonalisable cela entrainera que le wronskien

$$W = x_1\dot{x}_2 - \dot{x}_1 x_2$$

est de la forme $t^{\alpha}\cdot y(t)$ avec y analytique à l'origine et comme $\dot{W} = -pW$ selon le théorème de LIOUVILLE, cela montre que $p(t)$ possède en O au plus une singularité polaire d'ordre 1, tandis que pour $q = -p\frac{\dot{x}}{x} - \frac{\ddot{x}}{x}$ cette singularit est d'ordre 2 au plus : sur cette lecture de la singularité à la vue des coefficients de l'EDO, on parle de <u>Point Singulier de 1ère espèce</u>. C'est par exemple le cas de l'EDO de BESSEL (B_0).

Le théorème de FUCHS établit la réciproque PS1 $\Rightarrow$ PSR, et sa démonstration repose sur la méthode d'identification vue en 2), cherchant à résoudre l'EDO sous la forme

$$x(t) = t^r . \sum_0^\infty x_n t^n$$

et en écrivant $\quad p(t) = \frac{1}{t} . \sum_0^\infty p_n t^n \;,\; q(t) = \frac{1}{t^2} . \sum_0^\infty q_n t^n$

On obtient la relation récurrente

$$(n+r)(n+r-1)\, x_n + \sum_{k=0}^{n} \left[(k+r)\, p_{n-k} + q_{n-k} \right] x_k = 0$$

pour n entier, et la condition $x_0 \neq 0$ conduit à <u>l'équation déterminante</u>

$$r(r-1) + r p_0 + q_0 = 0 .$$

- Ainsi pour (B_0), on a $r^2 = 0$ et il existe une solution entière

$$I_0(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t/2)^{2n}}{(n!)^2}$$

Une solution de (B_0) indépendante de I_0 peut s'obtenir par quadrature à partir du wronskien qui donne

$$x(t) = I_0(t)\int^t \frac{du}{u\cdot I_0^2(u)}$$

faisant apparaître à l'origine une singularité logarithmique.

Pour revenir au théorème de FUCHS, on peut en donner une démonstration plus rapide (mais moins constructive) en mettant pour commencer l'EDO scalaire sous la forme

$$\dot{\vec{y}} = \frac{1}{t} B\cdot\vec{y} \qquad \text{où} \qquad \vec{y}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ t\,\dot{x}(t) \end{pmatrix} \qquad \text{et avec}$$

B analytique au voisinage de 0. En posant $\vec{y}(\rho e^{i\theta}) = \tilde{y}(\rho,\theta)$ on obtient $|\partial_\rho \tilde{y}| \leqslant \|B\|\cdot|\tilde{y}|/\rho$ puis

$\partial_\rho|\tilde{y}| + \frac{\|B\|}{\rho}|\tilde{y}| \geqslant 0$ qui la croissance lente

$|\tilde{y}| \leqslant C\cdot\rho^{-\|B\|}$ de $\vec{y}$, et la conclusion cherchée avec les inégalités de CAUCHY.

6) On obtient une représentation intégrale de I_0 par la <u>méthode de LAPLACE complexe</u> qui consiste à chercher une

solution sous la forme

$$x(t) = \int_{\mathcal{C}} e^{-tz} X(z)\, dz$$

où le chemin d'intégration $\mathcal{C}$ et la transformée X sont inconnus : un calcul formel de dérivation sous le signe $\int_{\mathcal{C}}$ et d'intégration par parties donne

$$\dot{x}(t) = \int_{\mathcal{C}} e^{-tz} (-z X(z))\, dz$$

$$t\, \ddot{x}(t) = \int_{\mathcal{C}} z^2 X(z)\, d_z(-e^{-tz}) = -e^{-tz} z^2 X(z) \Big|_{\partial\mathcal{C}} + \int_{\mathcal{C}} e^{-tz} (z^2 X)'\, dz$$

et

$$t\, x(t) = \int_{\mathcal{C}} X(z)\, d_z(-e^{-tz}) = -e^{-tz} X(z) \Big|_{\partial\mathcal{C}} + \int_{\mathcal{C}} e^{-tz} X'(z)\, dz$$

En portant dans (B_0) et en séparant le terme tout intégré, on est naturellement conduit à considérer le système

$$\begin{cases} e^{-tz}(1-z^2) X(z) \Big|_{\partial\mathcal{C}} = 0 \\ (z^2 X)' - zX - X' = 0 \end{cases}$$

où l'intégration de l'EDO (linéaire d'ordre 1 à variables séparables donne $X(z)=\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$: un chemin $\mathcal{C}$ convenable joindra les points -1 et 1 dans le domaine simplement connexe défini par les coupures $]-\infty,-1]$ et $]1,+\infty[$ (sur lequel X est bien défini).

On vérifie maintenant sans difficulté que

$$x(t)=\int_{-1}^{1}\frac{e^{-ts}\,ds}{\sqrt{1-s^2}}$$

est une solution entière de (B_0), les opérations formelles étant licites. D'après 5), x est donc proportionnel à I_0 et, de fait

$$I_0(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{e^{-ts}}{\sqrt{1-s^2}}\,ds$$

(peut être d'ailleurs vérifiée en développant e^{-ts} en série, et en intégrant terme à terme).

Cette représentation intégrale permet d'obtenir le développement asymptotique de la fonction de BESSEL modifiée I_0 lorsque $t\to+\infty$ (selon la méthode de WATSON) :

$$I_0(t) = \frac{e^t}{\pi\sqrt{2}} \cdot \int_0^2 \frac{e^{-t\theta}}{\sqrt{\theta(1-\theta/2)}}\, d\theta \qquad \text{où} \qquad \int_1^2 \frac{e^{-t\theta}}{\sqrt{\theta(1-\theta/2)}}\, d\theta = G(e^{-t})$$

tandis que

$$\int_0^1 \frac{e^{-t\theta}}{\sqrt{1-\theta/2}} \cdot \frac{d\theta}{\sqrt{\theta}} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \int_0^1 e^{-t\theta} \left(\frac{\theta}{2}\right)^n \frac{d\theta}{\sqrt{\theta}} + R_N(t)$$

d'après le développement de TAYLOR de

$$(1-z)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} z^n + r_N(z)$$

où $r_N(z) = \dfrac{(2N)!}{(2^N N!)^2} (1-\xi_z)^{-\frac{2N+1}{2}} \cdot z^N$ avec ξ_z compris entre 0 et $z = \theta/2$ appartenant à $[0, \frac{1}{2}]$ conduit à l'estimation du reste

$$R_N(t) \leqslant \frac{(2N)!}{(2^N N!)^2} \sqrt{2} \int_0^1 e^{-t\theta} \theta^{N-1/2} d\theta .$$

Maintenant, et pour chaque n

$$\int_0^1 e^{-t\theta} \theta^{n-1/2} d\theta = \int_0^\infty e^{-s} s^{n-1/2} \frac{ds}{t^{n+1/2}} - \int_1^\infty e^{-t\theta} \theta^{n-1/2} d\theta$$

où l' $\int_1^\infty$, étant majorée par $e^{-t/2} \cdot \int_0^\infty e^{-t\theta/2}\, \theta^{n-1/2}\, d\theta$

est exponentiellement petite lorsque $t \to +\infty$. Tout cela

montre que

$$\int_0^1 \frac{e^{-t\theta}}{\sqrt{1-\theta/2}} \cdot \frac{d\theta}{\sqrt{\theta}} = \sum_0^{N-1} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \cdot \frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{2^n \cdot t^{n+1/2}} + O\left(1/t^{N+\frac{1}{2}}\right)$$

et conduit au DA

$$I_0(t) \underset{(t\to+\infty)}{\sim} \frac{e^t}{\sqrt{2\pi t}} \cdot \sum_{n\geq 0} \frac{((2n)!)^2}{2^{5n}(n!)^3} \cdot 1/t^n$$

On peut retrouver la forme de ce DA par la méthode de LIOUVILLE-STEKLOV qui consiste, pour commencer à éliminer le terme en $\dot{x}$ dans (B_0) en posant $x = \varphi . y$: on est naturellement conduit à poser $x(t) = \frac{y(t)}{\sqrt{t}}$, y obéissant à l'EDO

$$\ddot{y} - y = -y/4t^2 \quad \text{pour } t > 0$$

à laquelle on applique la méthode de LAGRANGE pour la transformer dans l' Ei

$$y(t) = ae^{t} + be^{-t} + \int_1^t \frac{sh(t-s)}{4s^2}\, y(s)\, ds$$

En posant $y(t) = e^{t} z(t)$, cela s'écrit encore

$$z(t) = a + be^{-2t} + \int_1^t \frac{1-e^{-2(t-s)}}{8s^2}\, z(s)\, ds$$

et si $Z(t) = \sup_{1 \leq s \leq t} |z(s)|$ pour $t \geq 1$, on obtient

$$|z(t)| \leq |a| + |b| + \frac{1}{8} Z(t)$$

qui montre que $Z(t) \leq \frac{8}{7}(|a|+|b|)$ est borné sur $[1, \infty[$:

ainsi, $z(t) = e^{-t}\sqrt{t}\,.\,x(t)$ est solution d'une Ei de VOLTERRA singulière de la forme

$$z(t) = a + be^{-2t} - \int_t^{+\infty} \frac{1-e^{-2(t-s)}}{8s^2}\, z(s)\, ds$$

où a, b désignent des constantes. On étudie par exemple l'Ei

$$(Ei)_\lambda \quad z(t) = 1 - \lambda \int_t^{\infty} \frac{1-e^{-2(t-s)}}{8s^2}\, z(s)\, ds$$

en cherchant une solution de la forme $\sum_0^\infty z_n(t)\,.\,\lambda^n$ selon la méthode d'identification de NEWTON qui conduit à étudier la suite récurrente

$$z_{n+1}(t) = -\int_t^{\infty} \frac{1-e^{-2(t-s)}}{8s^2}\, z_n(s)\, ds \quad , \; n \geq 0$$

avec $z_0 = 1$. On a pour commencer

$$|z_1(t)| = \left| -\int_t^{\infty} \frac{1-e^{-2(t-s)}}{8s^2}\, ds \right| \leq \frac{1}{8t}$$

puis

$$|z_2(t)| \leq \int_t^{\infty} \frac{ds}{8^2 s^3} = \frac{1}{2 \cdot 8^2 t^2}$$

et, en général

$$|z_n(t)| \leq \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{8t}\right)^n$$

estimation qui assure la convergence normale de la série $\sum_0^{\infty} z_n$ sur $[1, +\infty[$, la somme z étant solution de l'$(Ei)_1$; en outre ce développement est un DA au voisinage de $+\infty$.

Lectures :

1) E. GOURSAT Cours d'Analyse Mathématique § 389.

J. DIEUDONNÉ Calcul infinitésimal XI § 5.

2) E. GOURSAT § 383 – 388.

3) J. DIEUDONNÉ XII § 5.

G. VALIRON Equations fonctionnelles. Applications § 45 – 4

4) G. VALIRON § 119. 120

5) FG. TRICOMI Differential Equations § 44 – 46

E.A. CODDINGTON – N. LEVINSON Theory of ODE Chap 4 –

6) G. VALIRON § 264.

E.T. COPSON Asymptotic expansions § 22

A. ERDELYI Asymptotic expansions § 3.3

Compléments d'Analyse pour l'Agrégation : exemples d'étude qualitative d'EDO

1) Comme exemple d'étude de <u>système conservatif d'ordre 2</u>, on commence par l'EDO du pendule $\ddot{\theta} + \sin\theta = 0$ qui, mise sous la forme d'un Système Différentiel d'ordre 1 prend la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\sin x \end{cases} \qquad (1) \quad \dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}) \quad \left| \begin{array}{l} P(x,y) = y \\ Q(x,y) = -\sin x \end{array} \right.$$

selon <u>les variables d'état</u> $x = \theta$, $y = \dot{\theta}$ (écart-vitesse angulaire)

Il existe ici une <u>intégrale première</u> $V(x,y)$ du mouvement, c'est-à-dire une fonction restant constante le long de chaque trajectoire

$$\frac{d}{dt} V(x(t), y(t)) = 0$$

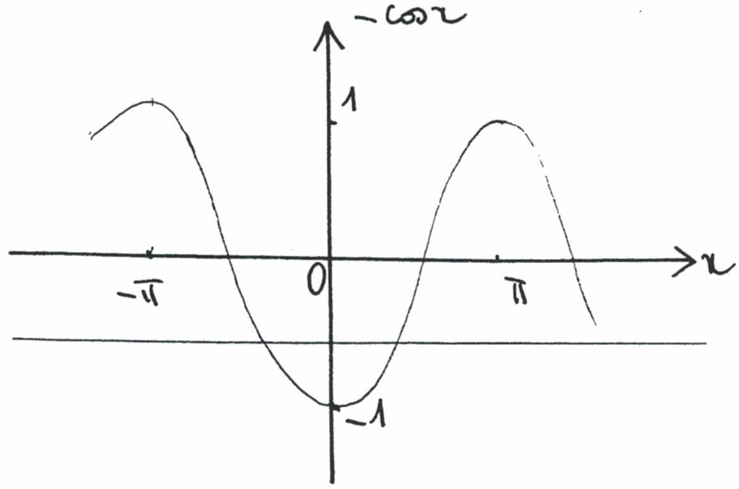
: il suffit que <u>la dérivée de V le long du flot différentiel</u>

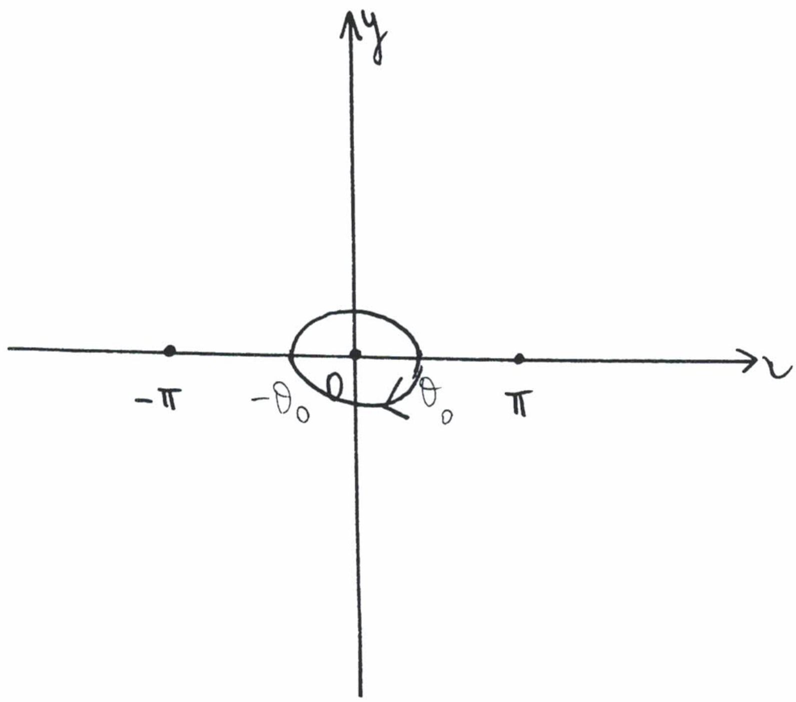
$$L_{\vec{f}}(V) = \vec{f} \cdot \vec{\nabla} V = y \frac{\partial V}{\partial x} - \sin x \frac{\partial V}{\partial y} = 0$$

En séparant les variables, on obtient une solution qui convient

$$V(x,y) = \frac{1}{2} y^2 - \cos x$$

et qui correspond, du point de vue Mécanique à l'énergie du pendule, somme de l'énergie cinétique $\frac{1}{2}\dot{\theta}^2$, et de l'énergie potentielle $-\cos x$. Cela conduit à étudier les lignes de niveau de la surface d'équation cartésienne $z = V(x,y)$:





les points critiques $(\pi, 0)$ de V correspondent aux <u>positions d'équilibre</u> de l'EDO (positions basse et haute du pendule) dans le <u>plan de phase</u> $\mathbb{R}^2_{(x,y)}$ des variables d'état.

Partant de la condition initiale $x(0) = \theta_0 \in]-\pi, \pi[$, $y(0) = 0$ (pendule écarté de sa position basse, et abandonné sans vitesse initiale) on obtient $V(x,y) = V(\theta_0, 0) = -\cos\theta_0$ soit

$$y^2 = 2(\cos x - \cos\theta_0)$$

qui donne une ligne de niveau bornée : la solution maximale du problème de CAUCHY est donc définie à chaque instant t, et la trajectoire est <u>un cycle</u>, dont on connaît l'équation implicite, par conséquent ; le cycle est orienté dans le sens horaire, la vitesse en $t=0$ étant donnée par le vecteur $\vec{f}(\theta_0, 0) \left| \begin{array}{l} 0 \\ -\sin\theta_0 < 0 \text{ pour } 0 < \theta_0 < \pi \end{array} \right.$.

Cela correspond au <u>mouvement d'oscillation</u> du pendule, tandis que pour une condition initiale $x(0) = 0$, $y(0) = \dot{\theta}_0 > 2$ par exemple, <u>le mouvement est de révolution</u>.

Pour la condition initiale limite $x(0) = 0$, $y(0) = 2$, on obtient l'équation implicite

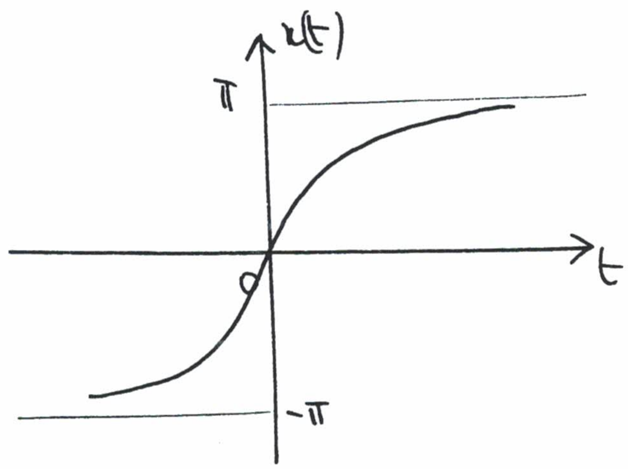
$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 4\cos^2\frac{x}{2}$$

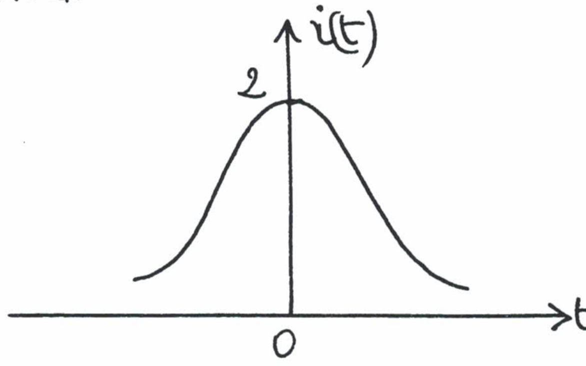
qui donne par quadrature

$$x(t) = 4\,\mathrm{Arctg}(e^{t}) - \pi$$

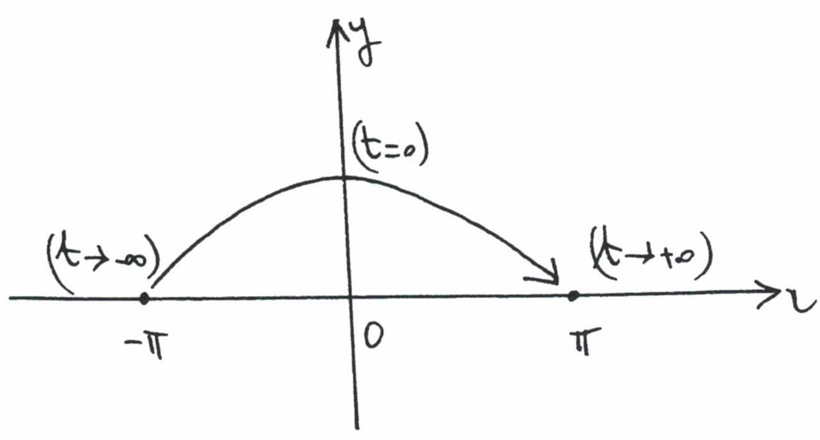
et $$i(t) = 2/\mathrm{ch}\,t$$

Le tracé des courbes intégrales correspondantes



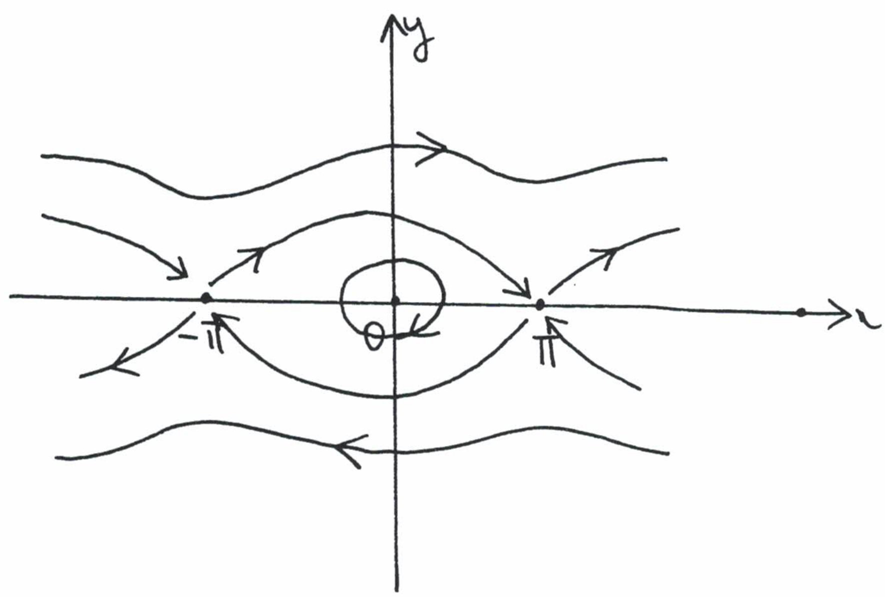


montre que la trajectoire associée



relie les équilibres haut : la ligne de niveau $\{V = 1\}$ contient une infinité de trajectoires ... en pratique l'équilibre haut et deux trajectoires appelées <u>homoclines</u> ou <u>séparatrices</u> (: des mouvements pendulaires).

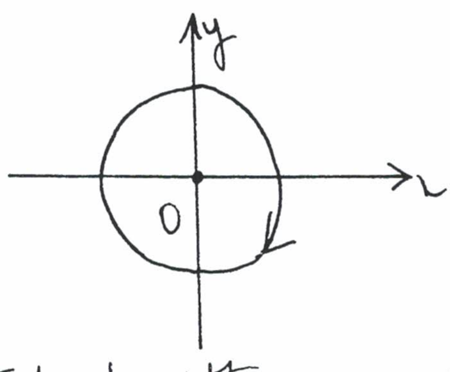
On peut ainsi tracer le portrait de phase de l'EDO du pendule :

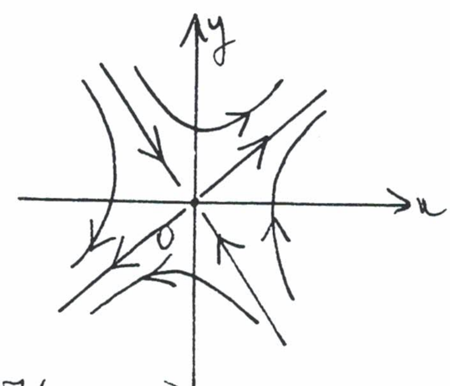


qui met en particulier en évidence la différence de nature des deux positions d'équilibre, l'origine (la position basse) étant stable (c'est un centre), l'équilibre haut étant instable (c'est un col). Les EDO linéarisées s'écrivent

$$(L)_0 \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases} \qquad\qquad (L)_{(0,\pi)} \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x \end{cases}$$

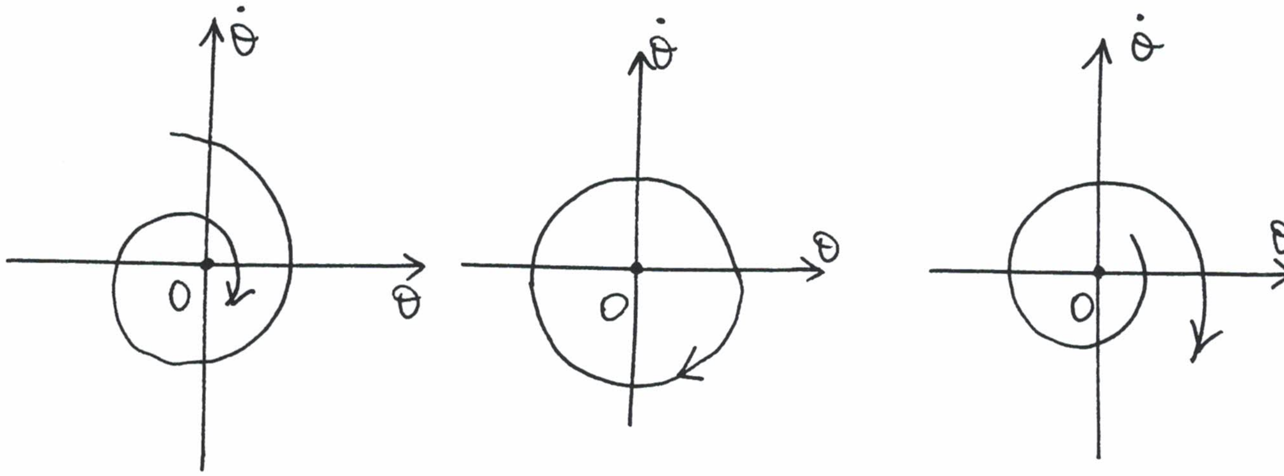
et leurs portraits de phase ressemblent localement à ceux du pendule près des équilibres correspondants





(étude des petits mouvements de la Mécanique)

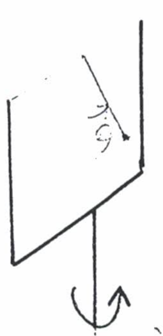
Il faut savoir que si cette ressemblance (en particulier la nature de la stabilité) est toujours vérifiée dans le cas d'un col (ou d'un noeud, ou d'un foyer), ce n'est pas le cas du centre : l'étude du pendule linéarisé avec frottement $+\varepsilon\dot{\theta}+\theta=0$ suffit à s'en convaincre :



$\varepsilon<0$ $\qquad$ $\varepsilon=0$ $\qquad$ $\varepsilon>0$

O foyer stable $\qquad$ O foyer instable

On aborde ici le problème de l'évolution du portrait de phase d'un SD dépendant d'un paramètre, et on pourra étudier l'exemple moins classique du pendule entraîné dans un mouvement de rotation de vitesse uniforme ω, régi par l'EDO



$$(1)_\omega \qquad \ddot{\theta} + \sin\theta - \omega^2 \sin\theta\cos\theta = 0$$

en mettant en évidence la valeur de bifurcation $\omega = 1$ du param

2) Comme exemple de SD d'ordre 1 non conservatif en dimension 2

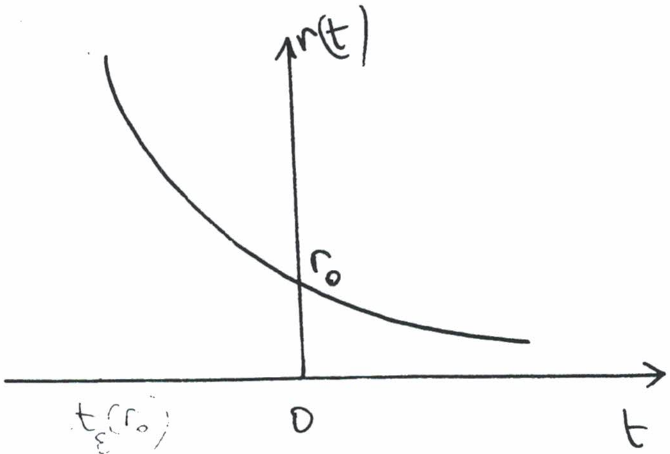
on commence par étudier

$$\begin{cases} \dot{x} = \varepsilon x - y - x(x^2+y^2) \\ \dot{y} = x + \varepsilon y - y(x^2+y^2) \end{cases}$$

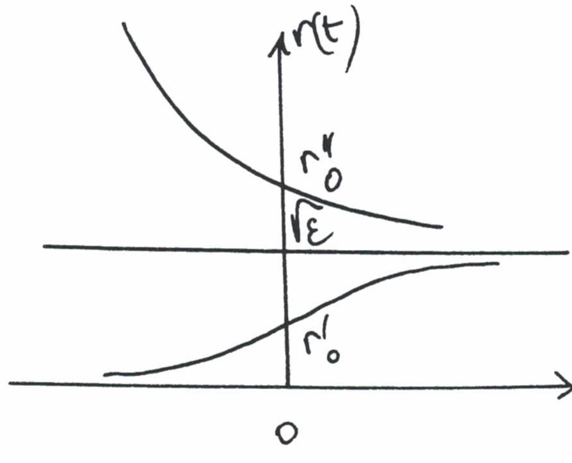
qui, en coordonnées polaires prend la forme

$$\begin{cases} \dot{r} = r(\varepsilon - r^2) \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases}$$

Ici $\theta(t) = \theta_0 + t$ mais l'intégration de l'EDO d'ordre 1 à variables séparables en r conduit à distinguer les cas



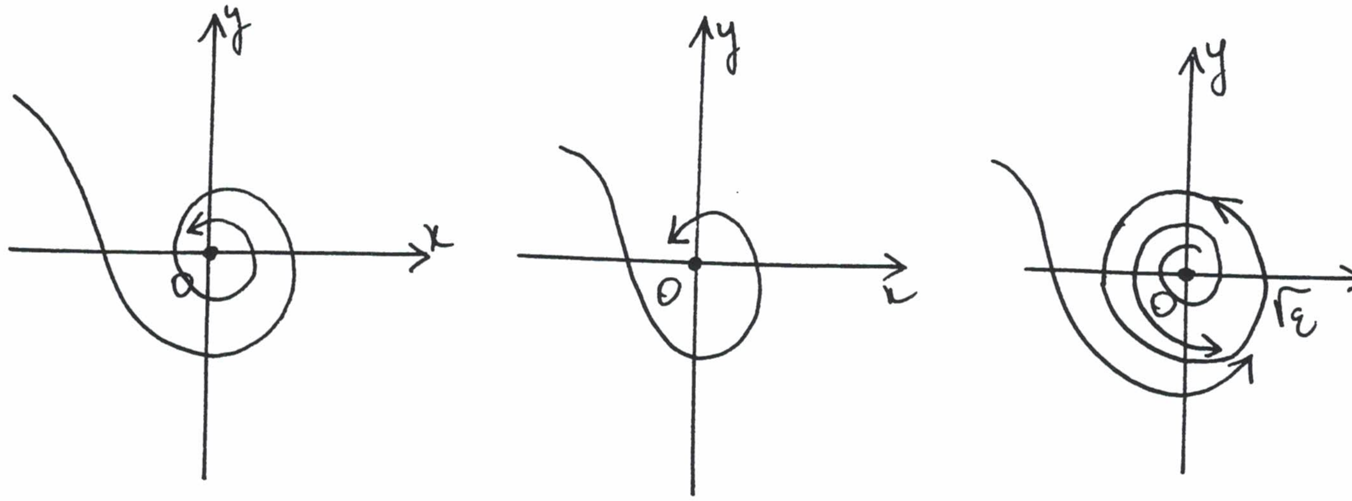
$\varepsilon < 0$



$\varepsilon > 0$

et pour $\varepsilon = 0$, la solution générale s'écrit $r(t) = \dfrac{r_0}{\sqrt{1+2tr_0^2}}$, $t > -\frac{1}{2r_0^2}$

L'origine étant en tous cas une position d'équilibre, on observe lorsque ε croît, une évolution du <u>portrait de phase</u> :



le foyer perdant sa stabilité à $\varepsilon = 0$ il apparaît un type nouveau de trajectoire, à savoir le cycle isolé $r = \sqrt{\varepsilon}$ vers lequel tendent toutes les autres trajectoires : on parle de <u>cycle limite</u>.

Ce <u>phénomène de bifurcation</u>, appelé <u>d'ANDRONOV_HOPF</u> est fondamental, car étant générique il explique le fonctionnement des oscillateurs en particulier.

Le système linéarisé en O s'écrit ici

$$(1)_\varepsilon \begin{cases} \dot{x} = \varepsilon x - y \\ \dot{y} = x + \varepsilon y \end{cases}$$

et on y lit la perte de stabilité du foyer lorsque ε passe par la valeur 0 de bifurcation. La démonstration de ce fait général n'est pas très difficile :

si (1) $\vec{\dot{x}} = \vec{f}(x)$ est une EDO dans $\mathbb{R}^2$ avec $\vec{f}$ champ des vitesses de classe $\mathcal{C}^1$ s'annulant en 0, avec $f'(0) = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$

où $\alpha < 0 < \beta$, l'équilibre 0 est en effet un foyer stable de (1).

En effet, en coordonnées polaires, l'EDO s'écrit

$$\begin{cases} \dot{r} = \alpha r + R(r,\theta) \\ \dot{\theta} = \beta + \Theta(r,\theta) \end{cases}$$

avec $R = O(r^2)$ et $\Theta = O(r)$ lorsque $r \to 0$ si $\vec{f}$ est de classe $\mathcal{C}^2$. Si $|R(r,\theta)| \leqslant \frac{\alpha}{2} r$, et $|\Theta(r,\theta)| \leqslant \beta/2$ pour $r \leqslant r_0$, $\theta \in \mathbb{R}$, on obtient $r(t) \leqslant r_0 e^{\frac{\alpha}{2}t}$ pour $t \geqslant 0$

car, pour commencer $\vec{f} \cdot \vec{OM} = \alpha r^2 + O(r^3) < 0$ sur le cercle $\{r = r_0\}$ où le champ des vitesses est donc rentrant

ce qui assure que la trajectoire est bien définie à chaque instant $t \geqslant 0$; ensuite $r(t) \leqslant r_0 e^{\frac{\alpha}{2}t}$ pour t proche de 0 permet de prolonger cette estimation sur $t \geqslant 0$ entier on a aussi $\dot\theta \geq \beta/2$ qui donne $\theta(t) \geq \theta_0 + \beta/2\, t$, de sorte que la trajectoire s'enroule autour de l'origine, en tendant vers l'équilibre, ressemblant ainsi à une spirale.

Ainsi est-il possible en général de détecter la perte de stabilité de l'équilibre par l'étude du système linéarisé, ce qui est facile.

3) Cas étudié : l'oscillateur d'ANDRONOV guidé par l'EDO

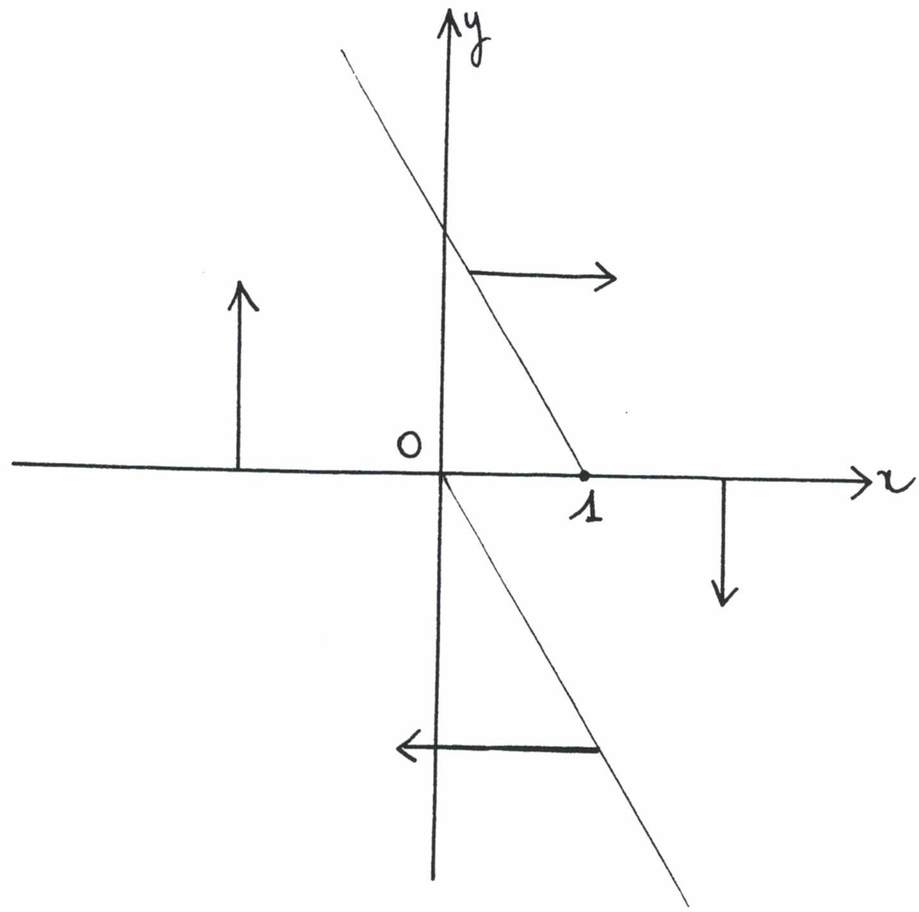
$$\ddot x + 2h\dot x + \omega_0^2 x = \omega_0^2 Y(\dot x) = \omega_0^2 \begin{cases} 1, & \text{si } \dot x \geq 0 \\ 0, & \text{si } \dot x < 0 \end{cases}$$

où $\omega_0 > 0$, $h > 0$ désigne une pulsation, un coefficient de frottement. Soit, sous forme d'un SD

$$\begin{cases} \dot x = y \\ \dot y = -\omega_0^2 x - 2hy + \omega_0^2 Y(y) \end{cases}$$

où le champ des vitesses $\vec f$ est donc non linéaire. Le tracé du champ dans <u>le plan de phase</u> $\mathbb{R}^2_{xy}$ met en évidence, en particulier <u>les lignes isoclines</u> Ox et $y = (\omega_0^2 - \omega_0^2 x)/2h$, y

$y = \frac{-\omega_0^2}{2h} x$, $y <$



et suggère de plus l'allure des trajectoires, autour de la position d'équilibre $(1,0)$. Comme le champ $\vec{f}$ subit une discontinuité à la traversée de l'axe des x, il faut préciser qu'on entend ici par solution de l'EDO une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ par morceau, et $\mathcal{C}^0$.

Maintenant l'étude précise du comportement des solutions repose sur la notion d'application de POINCARÉ pour la section Ox :

pour la position initiale $x(0)=x_0>1$, $y(0)=0$

la particule commence par être gouvernée par l'EDO

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

donc par prendre la forme

$$x(t) = x_0 e^{-ht}\left(\cos(\omega t) + \frac{h}{\omega}\sin(\omega t)\right)$$

où $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - h^2}$ (si $h < \omega_0$), du moins tant que

$$\dot{x}(t) = -\frac{\omega_0^2}{\omega}\sin(\omega t)$$

reste <0, c'est-à-dire jusqu'à l'instant $t_1 = \pi/\omega$ à partir duquel on passe au régime de l'EDO

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2$$

avec la condition de raccordement $x(t_1) = x_0 e^{-ht_1}\cos\omega t_1$

$\dot{x}(t_1) = 0$

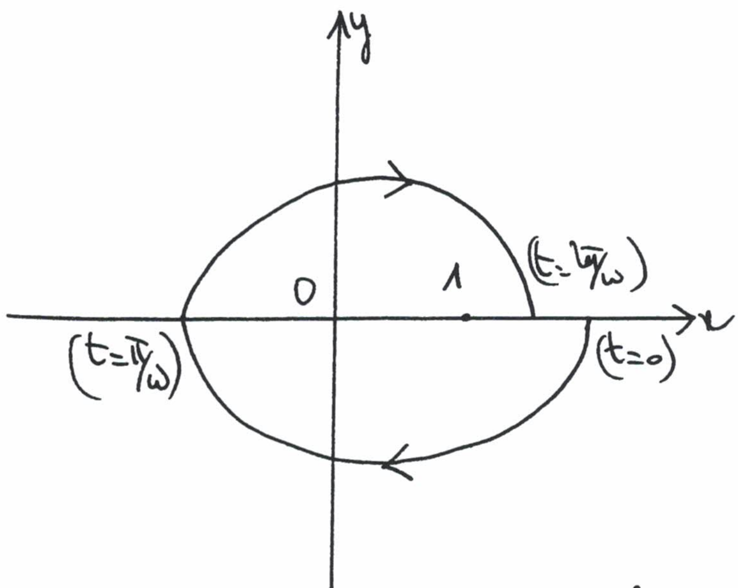
ce qui conduit à la nouvelle expression

$$x(t) = 1 - \left(1 + x_0 e^{-h\pi/\omega}\right) e^{-h(t-t_1)}\left(\cos\omega(t-t_1) + \frac{h}{\omega}\sin\omega(t-\right.$$

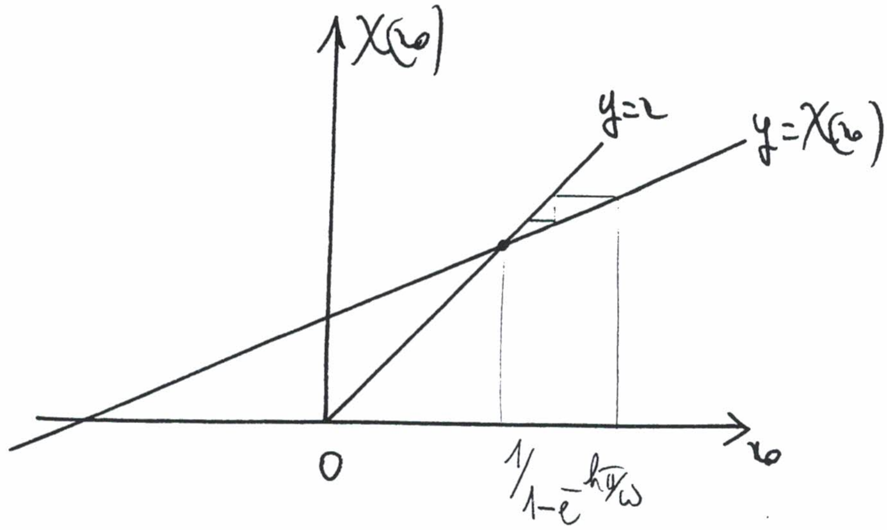
qui reste valable tant que $\dot{x}(t)$ est >0, soit jusqu'à l'instant $t_2 = 2\pi/\omega$ auquel x prend la valeur

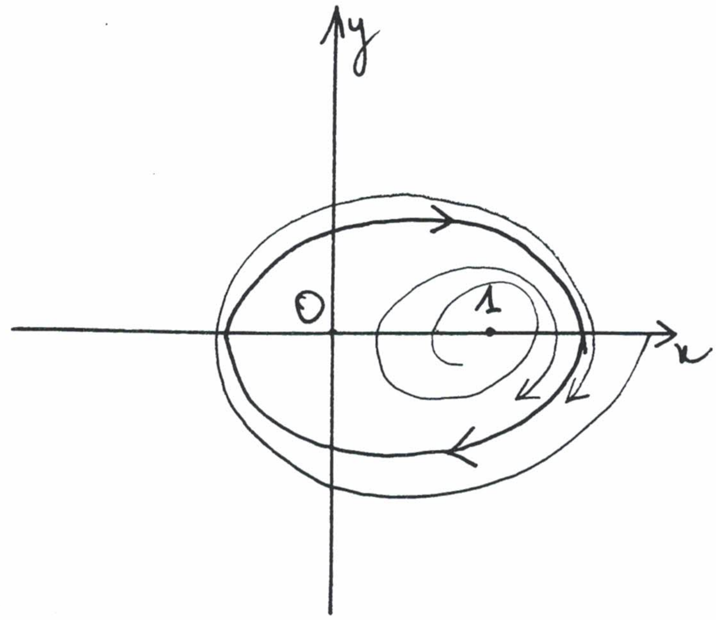
$$x(t_2) = 1 + e^{-h\pi/\omega}\left(1 + x_0 e^{-h\pi/\omega}\right)$$

et $\dot{x}(t_2)$ s'annule :



L'application $\mathcal{X} : x_0 \longrightarrow 1 + e^{-h\pi/\omega}\left(1 + x_0 e^{-h\pi/\omega}\right)$ qui rend compte du comportement de la trajectoire sur un tour est appelée <u>application de POINCARÉ</u>. Elle permet, à travers son point fixe $\dfrac{1}{1+e^{-h\pi/\omega}}$ de détecter le cycle-limite qui vient d'être ainsi caractérisé, ainsi que le comportement des autres trajectoires qui s'en approchent exponentiellement :





4) Cette notion d'application de POINCARÉ (sous la forme <u>application sur une période</u> dans l'espace des phases élargi) sert à détecter les solutions de l'EDO linéaire à coefficients périodique

$$(1)_\varepsilon \quad \ddot{x} + (\omega_0^2 - \varepsilon\cos t)\,x = \sin t$$

à petit paramètre ε, de même période 2π que le second membre.

On s'appuie sur les solutions de $(1)_0$ pour chercher une solution synchrone avec la méthode de LAGRANGE

$$x(t) = A(t)\cos(\omega_0 t) + B(t)\sin\omega_0 t$$

qui donne

$$x(t) = a\cos(\omega_0 t) + b\sin(\omega_0 t) + \frac{1}{\omega_0}\int_0^t \sin\omega_0(t-s)\,.\sin s\,ds$$

Cette solution de $(1)_0$ sera 2π-périodique si (a, b) obéit au système linéaire

$$\begin{cases} x(0) = x(2\pi) \\ \dot{x}(0) = \dot{x}(2\pi) \end{cases}$$

qui possède une unique solution sous la condition de non résonance $\omega_0 \notin \mathbb{N}$: la solution correspondante $x(t)$ est alors entièrement déterminée par ce qui précède, et les valeurs de a, b.

On considère maintenant la solution de $(1)_\varepsilon$ qui correspond à la position initiale

$$\begin{cases} x(0) = a + \alpha \\ \dot{x}(0) = b\omega_0 + \beta \end{cases}$$

Selon le théorème de dépendance dans la position initiale et le paramètre, cette solution $x(t, \varepsilon, \alpha, \beta)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, 2\pi]_t \times \mathbb{R}^3_0$ et admet par conséquent un dévelop-pement de la forme

$$x_0(t) + A(t)\alpha + B(t)\beta + C(t)\varepsilon + \dots$$

où A (resp. B) obéit à l'EDO de la première variation

$$\begin{cases} \ddot{A} + \omega_0^2 A = 0 \\ A(0) = 1 \quad \dot{A}(0) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \ddot{B} + \omega_0^2 B = 0 \\ B(0) = 0 \quad \dot{B}(0) = 1 \end{cases}$$

et vaut donc $\cos(\omega_0 t)$ (resp. $\sin(\omega_0 t)/\omega_0$).

L'application χ_ε sur la période 2π est donc régulière, et on en cherche les points fixes (pour les petites valeurs de ε) : en posant $\varphi(\varepsilon, \alpha, \beta) = \chi_\varepsilon(a+\alpha, b\omega_0 + \beta) - (a+\alpha, b\omega_0 + \beta)$

il s'agit donc de résoudre l'équation $\varphi(\varepsilon, \alpha, \beta) = 0$ dans $\mathbb{R}^2$ sachant que $\varphi(0,0,0) = 0$ et que $\dfrac{\partial \varphi}{\partial(\alpha,\beta)}(0,0,0)$

s'écrit

$$\begin{pmatrix} A(2\pi)-1 & B(2\pi) \\ \dot{A}(2\pi) & \dot{B}(2\pi)-1 \end{pmatrix}$$: compte-tenu de $\omega_0 \notin \mathbb{N}$,

on conclut grâce au théorème de la fonction implicite, à l'existence pour ε proche de 0, d'un unique cycle synchrone proche de celui obtenu pour $(1)_0$.

Lectures :

1) V. ARNOLD EDO 1 § 12.

2) idem § 5.

3) L. PONTRJAGUINE EDO § 29.

4) CODDINGTON - N. LEVINSON ODE Chap 14 sec 4.

Compléments d'Analyse pour l'Agrégation :

Analyse de FOURIER et équations aux dérivées partielles, exemples.

---

1) Afin de justifier le choix des exemples au sein des EDP linéaires du second ordre, on examine l'effet du changement de variables

$$\begin{cases} \xi = \varphi(x,y) \\ \eta = \psi(x,y) \end{cases}$$

sur l'opérateur différentiel L défini par

$$L(u) = a\,\partial^2_{xx} u + 2b\,\partial^2_{xy} u + c\,\partial^2_{yy} u$$

où a, b, c désigne des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ à valeurs réelles avec $a^2+b^2+c^2 \neq 0$ sur un ouvert Ω ; un calcul élémentaire montre que si $u(x,y) = v(\xi,\eta)$, Lu devient

$$\Lambda(v) = \alpha\,\partial^2_{\xi\xi} v + 2\beta\,\partial^2_{\xi\eta} v + \gamma\,\partial^2_{\eta\eta} v$$

avec

$$\alpha = a(\partial_x\varphi)^2 + 2b\,\partial_x\varphi\,.\,\partial_y\varphi + c(\partial_y\varphi)^2$$

$$\beta = a\,\partial_x\varphi\,.\,\partial_x\psi + b(\partial_x\varphi\,.\,\partial_y\psi + \partial_y\varphi\,.\,\partial_x\psi) + c\,\partial_y\varphi\,.\,\partial_y\psi$$

$$\gamma = a(\partial_x\psi)^2 + 2b\,\partial_x\psi\,.\,\partial_y\psi + c(\partial_y\psi)^2 .$$

Ainsi le signe du déterminant

$$ac - b^2 = (\alpha\gamma - \beta^2)\,.\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)}\right|^2$$

est-il invariant, et l'OD L est dit

elliptique si $ac - b^2 > 0$

hyperbolique si $ac - b^2 < 0$

parabolique si $ac - b^2 = 0$

et on montre la possibilité de l'écrire sous la forme

$$\Lambda(v) = \alpha \cdot \Delta v$$

$$= \begin{matrix} \alpha\left(\partial^2_{\xi\xi} v - \partial^2_{\eta\eta} v\right) \\ \text{ou} \\ 2\,\partial^2_{\xi\eta} v \end{matrix}$$

$$= \alpha\, \partial^2_{\xi\xi} v$$

selon le cas, par un changement de coordonnées locales.

On donne la démonstration dans le cas hyperbolique où l'on peut toujours supposer que $a \neq 0$ au point étudié : comme $ac - b^2 < 0$, le trinôme $a\lambda^2 + 2b\lambda + c$ possède deux racines $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ et on va donc chercher à résoudre le système d'EDP

$$\begin{cases} \partial_x \varphi - \lambda_1 \cdot \partial_y \varphi = 0 \\ \partial_x \psi - \lambda_2 \cdot \partial_y \psi = 0 \end{cases}$$

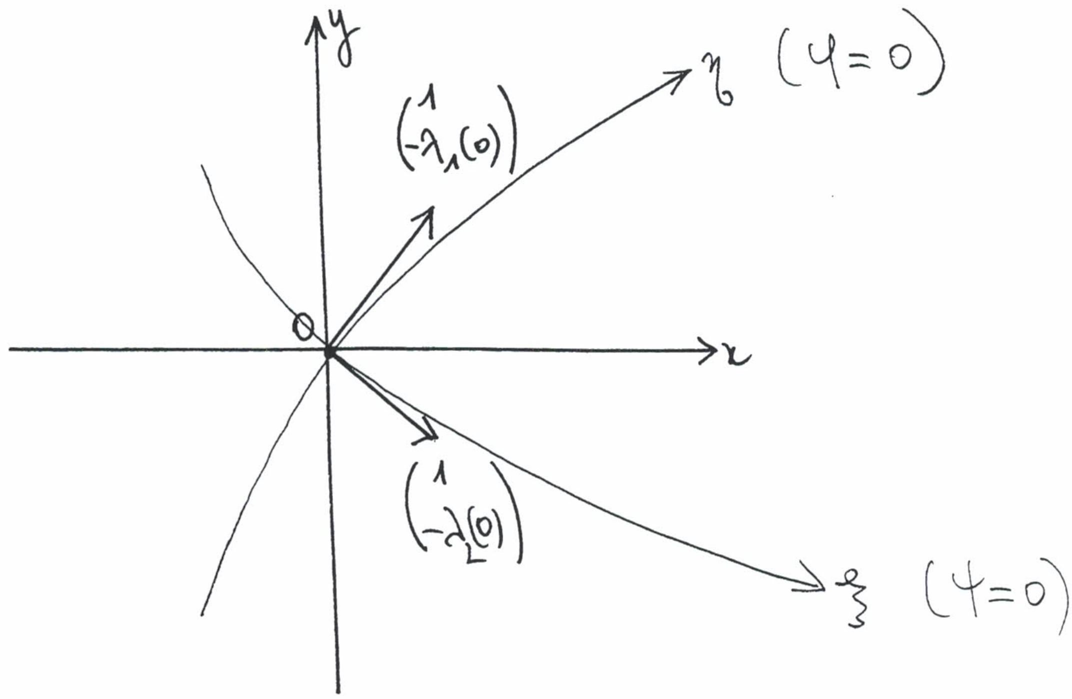
en s'assurant que $\left| \dfrac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(x, y)} \right| \neq 0$. Tout d'abord, λ_1 et λ_2

sont de classe $\mathcal{C}^1$ d'après le théorème de la fonction implicite.

On résoud ensuite localement le système d'EDP linéaires d'ordre 1 selon <u>la méthode des caractéristiques</u> qui consiste à faire appel aux systèmes dynamiques

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 \\ \dot{y} = -\lambda_1(x,y) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \dot{x} = 1 \\ \dot{y} = -\lambda_2(x,y) \end{cases}$$

ou encore à l'EDO non résolue $a y'^2 - 2b y' + c = 0$:



Comme $\left| \dfrac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(x,y)} \right| = \lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$, la conclusion suit.

2) On peut commencer à présenter la méthode de FOURIER sur la résolution d'un problème de DIRICHLET pour l'OD de LAPLACE

sur le disque-unité : il s'agit donc de résoudre le

$$PD \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } D(0;1) \\ u = \varphi & \text{donnée sur } \partial D(0;1) \end{cases}$$

Vue la symétrie, on passe en coordonnées polaires $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$

où le laplacien prend la forme $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}$, et

on peut commencer par chercher des fonctions harmoniques particulières

de la forme $R(r).\Phi(\theta)$ variables séparées : $\Delta(R.\Phi) = 0$

donnant alors

$$\frac{r(rR'' + R')}{R} = -\frac{\Phi''}{\Phi}$$

par conséquent constant. Si λ désigne cette constante, l'EDO

$$\Phi'' + \lambda\Phi = 0$$

ne peut admettre de solution telle que $\Phi(0) = \Phi(2\pi)$ que si

$\lambda = n^2$ avec n entier ; on obtient alors l'EDO en R

$$r^2R'' + rR' - n^2R = 0$$

qui relève du théorème de FUCHS (c'est une EDO d'EULER)

et admet les solutions fondamentales r^n et r^{-n} sur $]0,\infty[$

de cette manière, on obtient la famille de fonctions harmoniques

$$r^{|n|}e^{in\theta}, \quad n \text{ parcourant } \mathbb{Z}$$

sur $\mathbb{R}^2$.

– Si la donnée frontière φ est de classe $\mathcal{C}^1$, on peut la développer en Séries de FOURIER selon

$$\varphi(e^{i\theta}) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta}$$

avec $\displaystyle c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(e^{it})\, e^{-int}\, dt$ pour $n \in \mathbb{Z}$, et selon le principe de superposition assuré par la linéarité de l'EDP, il est naturel de chercher à résoudre le PD selon

$$v(r,\theta) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta} \cdot r^{|n|}$$

Par un calcul formel, on est ainsi conduit à considérer

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in(\theta-t)} \cdot \varphi(e^{it})\, dt$$

où la série se calcule facilement pour donner $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)\,\varphi(e^{it})$

avec

$$P_r(\theta) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta + r^2}, \quad 0 \leq r < 1$$

désignant le noyau de POISSON.

– Il reste maintenant à s'assurer que si φ est continue sur $\partial D(0,1)$

l'intégrale de convolution $\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)\, \varphi(e^{it})\, dt$ donne la solution au PD : que la fonction soit harmonique dans le disque ouvert se déduit immédiatement de la propriété analogue de P_r. Quant au fait que $v(r,\theta) \xrightarrow[r \to 1-]{} \varphi(e^{i\theta})$ c'est-à-dire que u tende radialement vers la donnée frontière, cela découle du fait que $(P_r)_{0 \leq r < 1}$ constitue une Unité Approchée. En effet

- $P_r \geq 0$ est 2π-périodique et paire
- $\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta)\, d\theta = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\theta}\, d\theta \,.\, r^{|n|} = 1$ pour $0 \leq r < 1$

(puisque la série converge alors normalement en θ)

- si $0 < \delta < \pi$, on a

$$\int_{\delta}^{\pi} P_r(\theta)\, d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos\delta + r^2}\, \pi \xrightarrow[(r \to 1-)]{} 0$$

– On expliquera l'unicité par la formule de GREEN

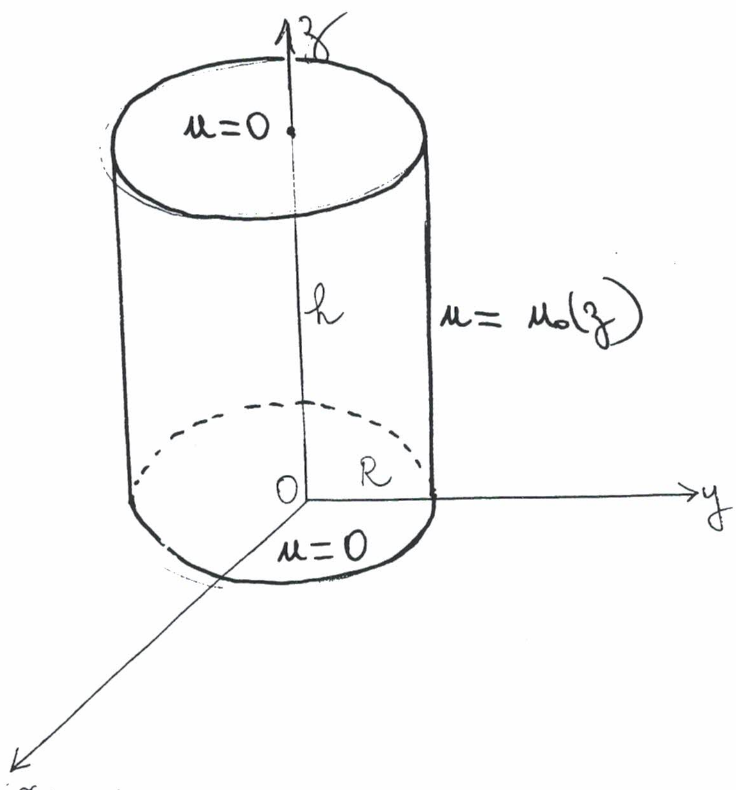
$$\iint_{D(0;1)} \mathrm{div}\left(u\, \vec{\nabla} u\right) dx\,dy = \int_{\partial D(0;1)} u\, \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nu}\, d\theta$$

soit $\iint \left(\|\vec{\nabla} u\|^2 + u\, \Delta u \right) dx\,dy = \int u \frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}}\, d\theta$

et qui montre que si $\varphi = 0$, $\vec{\nabla} u = 0$ dans $D(0;1)$ ce qui permet de conclure.

- Enfin, on expliquera comment résoudre à partir de là le PD sur un ouvert simplement connexe borné à l'aide de la transformation conforme.

3) On peut choisir un exemple moins répandu, en résolvant le PD pour un cylindre droit, avec une donnée frontière nulle sur les bases, et valant $u_0(z)$ sur la surface latérale.



- L'unicité de la solution découle encore de la formule de GREEN, et vue la forme de la donnée frontière, on la cherche sous la forme $v(r,z)$ (en coordonnées cylindriques). La fonction v doit obéir à l'EDP $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0$

– La recherche de solutions particulières de la forme $R(r).Z(z)$ conduit à étudier

$$\frac{rR''+R'}{rR} = -\frac{Z''}{Z} = \lambda$$

où $Z(0)=Z(h)=0$ impose (si l'on veut une solution non triviale) que $\lambda = \left(n\pi/h\right)^2$ avec n entier : on obtient alors $Z(z)$ proportionnel à $\sin\left(n\pi/h\, z\right)$, tandis que R doit obéir à l'EDO

$$rR''+R'-\omega^2 rR=0$$

qui est à rapprocher de l'EDO de BESSEL modifiée

$$(B_0)\quad t\ddot{x}+\dot{x}-tx=0$$

étudiée par ailleurs : comme R doit être régulière en 0, on obtient

$$R(r) = I_0\left(n\pi/h\, r\right)$$

à une constante multiplicative près. Ainsi dispose-t-on d'une famille

$$I_0\left(n\pi/h\, r\right).\sin\left(n\pi/h\, z\right) \quad , n\in\mathbb{N}^*$$

de fonctions harmoniques vérifiant les conditions sur les bases du cylindre.

– Selon le principe de superposition, on cherche v sous la forme

$$v(r,z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, I_0\left(\tfrac{n\pi}{h} r\right) \cdot \sin\left(\tfrac{n\pi}{h} z\right)$$

où les coefficients devront donc être liés au développement en Série de FOURIER de la fonction $\tilde{u}_0(z)$ obtenue en rendant u_0 impaire sur $[-h, h]$, puis en la rendant $2h$-périodique :

$$a_n \cdot I_0\left(\tfrac{n\pi}{h} R\right) = \frac{2}{h} \int_0^h u_0(z) \sin\left(\tfrac{n\pi}{h} z\right) dz \quad , \; n \in \mathbb{N}^*$$

et on est naturellement conduit à considérer la fonction

$$v(r,z) = \frac{2}{h} \sum_{n\geq 1}^{\infty} \int_0^h u_0(z) \sin\left(\tfrac{n\pi}{h} z\right) dz \cdot \frac{I_0\left(n\pi r/h\right)}{I_0\left(n\pi R/h\right)} \sin\left(\tfrac{n\pi}{h} z\right)$$

définie comme la somme d'une série normalement convergente sur tout cylindre $\{0 \leq r \leq \rho < R\} \times [0, h]_z$ si la donnée u_0 est par exemple continue. En effet, l'étude du comportement asymptotique de $I_0(t) \underset{(t \to +\infty)}{\sim} e^{t}/\sqrt{2\pi t}$ assure que le terme général de la série est contrôlé par

$$|c_n(u_0)| \frac{I_0(n\pi r/h)}{I_0(n\pi R/h)} \leq |c_n(u_0)| \cdot \frac{I_0(\frac{n\pi}{h}\rho)}{I_0(\frac{n\pi}{h}R)}$$

qui est exponentiellement petit à l'infini. Il reste à s'assurer de la possibilité de dériver sous le signe somme, par le même type d'arguments. Enfin, si l'on suppose u_0 de classe $\mathcal{C}^1$, la série $\sum_{1}^{\infty} |c_n(u_0)|$ converge (avec l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ et l'égalité de PARSEVAL), si bien que $v(r,z) \xrightarrow[r \to R-]{} u_0(z)$ le passage à la limite sous le signe somme étant licite par convergence dominée.

4) On étudie le problème de GOURSAT hyperbolique

$$(PG) \begin{cases} \partial^2_{xy} u = u & \text{sur } x>0, y>0 \\ u(x,0) = 1 \quad \forall x \geq 0, & u(0,y) = 1 \quad \forall y \geq 0 \end{cases}$$

selon différents procédés.

– En intégrant l'EDP sur le rectangle $[0,x] \times [0,y]$ à $x,y>0$ donnés, on transforme le PG selon l'

$$(Ei) \qquad u(x,y) = 1 + \int_0^x \int_0^y u(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta$$

et il s'agit là d'une Ei de VOLTERRA qui s'intègre par itération, en étudiant la suite

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1}(x,y) = \displaystyle\int_0^x\int_0^y u_n(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta\ , & n \geqslant 0 \end{cases}$$

(considérer l'$(Ei)_\lambda$ $\quad u = 1 + \lambda \displaystyle\int_0^{\cdot}\int_0^{\cdot} u\,d\xi\,d\eta$, et chercher à la résoudre selon $\displaystyle\sum_0^\infty u_n \lambda^n$ par identification selon les puissances de

Un calcul simple montre que $\quad u_n(x,y) = \dfrac{(xy)^n}{(n!)^2}$, et on reconnait dans la série $\displaystyle\sum_0^\infty \frac{(xy)^n}{(n!)^2}$ la valeur de I_0 au point $2\sqrt{xy}$

C'est là l'unique point fixe de l'application fonctionnelle Φ définie par $\Phi u = \displaystyle\int_0^{\cdot}\int_0^{\cdot} u\,d\xi\,d\eta$ qui s'avère en effet contractante sur l'espace de BANACH $\mathscr{C}^0([0,R]\times[0,R])$ une fois qu'on l'itère assez de fois.

– En admettant que la solution au (PG) vérifie une condition de croissance de la forme

$$|u(x,y)| \leqslant C e^{cx}$$

où $C, c > 0$, on peut considérer <u>la transformée de FOURIER</u>

complexe en x

$$V(\xi,y) = \int_0^\infty e^{-2i\pi\xi x}\, u(x,y)\, dx$$

de $u(\cdot,y)\, \mathbb{1}_{(0,\infty)}(\cdot)$, qui à $y \geq 0$ donné, est analytique en ξ sur le demi-plan $\operatorname{Im}(\xi) < -C/2\pi$. En faisant la même hypothèse sur $\frac{\partial u}{\partial y}$, on obtiendra

$$\frac{\partial V}{\partial y}(\xi,y) = \int_0^\infty e^{-2i\pi\xi x} \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\, dx$$

soit, en intégrant par parties

$$\frac{e^{-2i\pi\xi x}}{-2i\pi\xi} \cdot \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \Big|_{x=0}^{+\infty} + \frac{1}{2i\pi\xi} \int_0^\infty e^{-2i\pi\xi x} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x,y)\, dx$$

valant $\frac{1}{2i\pi\xi} V(\xi,y)$. Ainsi a-t-on $V(\xi,y) = K(\xi)\, e^{y/2i\pi\xi}$

avec $K(\xi) = V(\xi,0) = \int_0^\infty e^{-2i\pi\xi x}\, dx = 1/2i\pi\xi$ qui donne

$$V(\xi,y) = \frac{e^{y/2i\pi\xi}}{2i\pi\xi} \quad \text{pour} \quad \operatorname{Im}(\xi) < -C/2\pi$$

et suggère la solution

$$u(x,y) = \overline{\mathcal{F}}\, U(\cdot + i\eta, y)(x) . e^{-2\pi\eta x}$$

si $\zeta = \xi + i\eta$, car $U(\xi+i\eta, y) = \underset{L^1(\mathbb{R}_x)}{\mathcal{F}}\left(e^{2\pi\eta x} u(x,y)\right)(\xi$

ce qui s'écrit

$$u(x,y) = \frac{1}{2i\pi} \int_{i\eta-\infty}^{i\eta+\infty} e^{2i\pi\zeta x} . e^{y/2i\pi\zeta} \frac{d\zeta}{\zeta} \quad , \eta < -c/2\pi$$

où l'intégrale est prise au sens d'une valeur principale de CAUCH

– Le théorème de CAUCHY montre l'indépendance en η, et permet de transformer l'intégrale selon

$$u(x,y) = \frac{1}{2i\pi} \int_{i\eta-\infty}^{i\eta+\infty} e^{i\sqrt{xy}\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right)} \frac{d\zeta}{\zeta}$$

qu'on peut relier à l'expression intégrale de

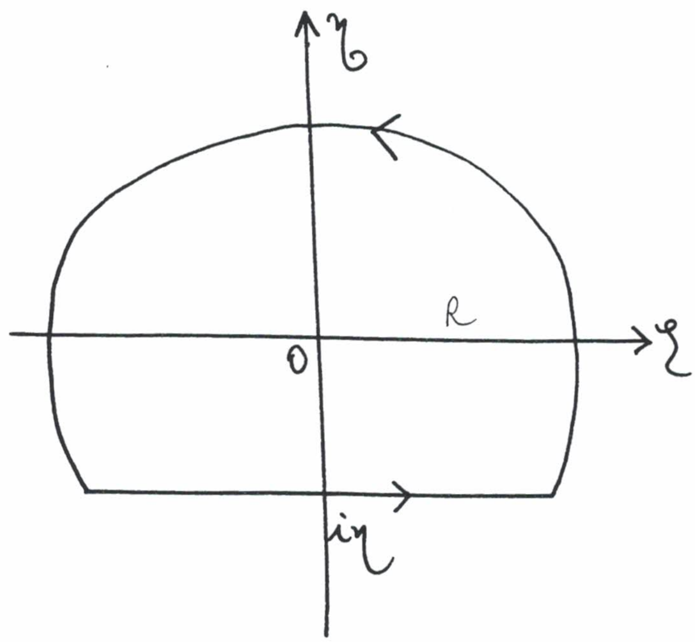
$$I_0(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} e^{-ts} \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}}$$

selon LAPLACE. En effet, celle-ci se lit comme l'intégrale curviligne $\displaystyle\frac{1}{2i\pi}\int_{\partial D(0;1)} e^{i\frac{t}{2}(\omega-1/\omega)}\frac{d\omega}{\omega}$ (intégrale de SONINE)

qui, avec le théorème d'homotopie de CAUCHY se transforme selon

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}_R} e^{i\frac{t}{2}(\omega-1/\omega)}\frac{d\omega}{\omega}$$

où



Pour conclure, il suffit maintenant de montrer que l'intégrale sur l'arc de cercle tend vers 0 lorsque son rayon $R\to+\infty$: cela découle de l'estimation

$$\int_0^{\pi} e^{-\frac{t}{2}(R-\frac{1}{R})\sin\theta}\,d\theta \underset{(R\to\infty)}{\longrightarrow} 0$$ par convergence dominée.

– Les estimations à priori sont satisfaites, en vertu du comportement asymptotique de I_0 et de sa dérivée.

5) On étudie le problème de diffusion (de type parabolique)

$$\partial_t u = \frac{\sigma^2}{2}\partial^2_{xx} u + \alpha u \quad \text{sur } t>0,\ 0<x<L$$

pour les Conditions Limites $u(t,0) = u(t,L) = 0 \quad \forall t \geq 0$

et la Condition Initiale $u(0,\cdot) = u_0$ donnée.

$\sigma > 0$ est le coefficient de diffusion, $\alpha > 0$ celui de création...

– En cherchant des solutions particulières de la forme $u(t,x) = T(t).X(x)$ à l'EDP et qui vérifient les CL, on est conduit à

$$\frac{\dot{T}}{T}(t) = \left(\frac{\sigma^2}{2}X'' + \alpha X\right)\Big/ X\,(x) = \lambda \in \mathbb{R}$$

et le

$$(PD)\begin{cases}\frac{\sigma^2}{2}X'' + (\alpha - \lambda)X = 0\\ X(0) = X(L) = 0\end{cases}$$

n'admet de solution non triviale que si $\lambda = \alpha - n^2\frac{\sigma^2\pi^2}{2L^2}$ avec n dans $\mathbb{N}^*$: $T(t)$ prend alors la forme

$$T(t) = e^{\lambda t}$$

et on obtient de cette manière une famille

$$e^{\left(\alpha - n^2\frac{\sigma^2\pi^2}{2L^2}\right)t} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad n \in \mathbb{N}^*$$

de solutions particulières.

On cherche donc à résoudre le problème d'évolution sous la forme

$$u(t,x) = e^{\alpha t} \cdot \sum_{1}^{\infty} c_n e^{-n^2\frac{\pi^2}{2L^2}t} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

où les coefficients (c_n) devront être tels que

$$u_0(x) = \sum_{1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

On prolonge donc u_0 sur $[-L,L]$ en la rendant impaire puis par 2L-périodicité : en supposant u_0 de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,L]$ cela conduit à prendre

$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L u_0(\xi) \sin\left(\frac{n\pi}{L}\xi\right) d\xi$$

Maintenant la série considérée plus haut converge normalement sur $[0,\infty[_t \times [0,L]_x$ et définit une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,\infty[_t \times [0,L]_x$, d'après le théorème de dérivation sous le signe somme. Aussi la diffusion régularise-t-elle la donnée initiale.

L'origine du problème pouvant être l'évolution d'une densité de population, il est important de s'assurer que si $u_0 \geqslant 0$, $u \geqslant 0$.

– Si $u(t,\cdot)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, on peut introduire la transformée de FOURIER

$$U(t,\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t,x) \cdot e^{-2i\pi\xi x}\,dx$$

et, en supposant les opérations licites, transformer l'EDP selon

$$\partial_t U(t,\xi) = -2\sigma^2\pi^2\xi^2 . U(t,\xi) + \alpha\, U(t,\xi)$$

ce qui conduit, en tenant compte de la CI au

$$(PC) \begin{cases} \partial_t U(t,\xi) = (\alpha - 2\sigma^2\pi^2\xi^2)\, U(t,\xi) \\ U(0,\xi) = \hat{u}_0(\xi) \end{cases}$$

de solution

$$U(t,\xi) = \hat{u}_0(\xi)\, e^{(\alpha - 2\pi^2\sigma^2\xi^2)t}$$

Comme $\hat{g} = g$ pour $g(x) = e^{-\pi x^2}$ fonction de GAUSS, cela amène à considérer, pour u_0 intégrable sur $\mathbb{R}$, la fonction

$$u(t,x) = u_0 \underset{L^1(\mathbb{R}_x)}{*} e^{\alpha t} . \frac{e^{-x^2/2\sigma^2 t}}{\sigma\sqrt{2\pi t}} \qquad (2)$$

soit

$$u(t,x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(y)\, e^{-\frac{(x-y)^2}{2\sigma^2 t}}\, dy \,.\, e^{\alpha t}$$

Maintenant, et comme $\left(g_t(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}}\, e^{-x^2/2\sigma^2 t} \right)_{t>0}$ est une

U.A., si u_0 est continue bornée sur $\mathbb{R}$, $u(t,x) \xrightarrow[t\to 0+]{} u$

de sorte que u résoud le

$$\text{PCi} \begin{cases} \partial_t u = \frac{\sigma^2}{2} \partial^2_{xx} u + \alpha u & \text{sur }]0,\infty[_t \times \mathbb{R}_x \\ u(0,\cdot) = u_0 \end{cases}$$

et, revenant au problème pré, en prolongeant u_0 selon $\tilde{u}_0$

comme on l'a fait par la première méthode, on est conduit

à considérer

$$u(t,x) = \frac{e^{\alpha t}}{\sigma\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}_0(y)\, e^{-\frac{(x-y)^2}{2\sigma^2 t}}\, dy$$

qui vérifie bien en outre la CL. En effet

$u(t,0) = 0$, l'intégrant étant impair

et

$$u(t,L) = \frac{e^{\alpha t}}{\sigma\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}_0(L-y)\, e^{-y^2/2\sigma^2 t}\, dy = 0$$

car $\tilde{u}_0(L+y) = \tilde{u}_0(-L+y) = -\tilde{u}_0(L-y)$.

On obtient ainsi une solution intégrale du problème, qui est naturellement positive.

— On relie directement les expressions série et intégrale (sans passer par l'unicité de la solution).

Pour u_0 continue bornée, on peut écrire

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{2}{L}\int_0^L u_0(\xi) \sin\left(\frac{n\pi}{L}\xi\right) d\xi \cdot e^{-n^2\frac{\sigma^2\pi^2}{2L^2}t} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) =$$

$$\frac{2}{L}\int_0^L \sum_{1}^{\infty} e^{-n^2\frac{\sigma^2\pi^2}{2L^2}t} \sin\left(\frac{n\pi}{L}\xi\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cdot u_0(\xi)\, d\xi$$

où, en linéarisant $2\sin\left(\frac{n\pi}{L}\xi\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = \cos\frac{n\pi}{L}(x-\xi) - \cos\frac{n\pi}{L}(x+\xi)$

et en tenant du fait que

$$-\int_0^L \cos n\frac{\pi}{L}(x+\xi)\, u_0(\xi)\, d\xi = \int_{-L}^0 \cos n\frac{\pi}{L}(x-\xi)\, \tilde{u}_0(\xi)\, d\xi$$

L'expression intégrale

$$u(t,x) = \int_{-L}^{L} \mathcal{N}(t, x-\xi)\, \tilde{u}_0(\xi)\, d\xi$$

de noyau

$$\mathcal{N}(t,x) = e^{\alpha t} \cdot \frac{1}{L} \cdot \sum_{1}^{\infty} e^{-n^2 \frac{\sigma^2 \pi^2}{2L^2} t} \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right).$$

On étudie maintenant la solution intégrale obtenue par la transformation de FOURIER

$$u(t,x) = \frac{e^{\alpha t}}{\sigma\sqrt{2\pi t}} \sum_{-\infty}^{+\infty} \int_{(2k-1)L}^{(2k+1)L} \tilde{u}_0(y)\, e^{-\frac{(x-y)^2}{2\sigma^2 t}}\, dy$$

soit, par le changement de variable $y = 2kL + \xi$ et le théorème d'intégration terme à terme

$$e^{\alpha t} \int_{-L}^{L} \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi-2kL)^2}{2\sigma^2 t}}\, \tilde{u}_0(\xi) \frac{d\xi}{\sigma\sqrt{2\pi t}}$$

où il apparaît le noyau

$$\mathcal{M}(t,x) = e^{\alpha t} \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}} \cdot \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-2kL)^2}{2\sigma^2 t}}$$

Or, l'identité $\mathcal{N} = \mathcal{M}$ n'est autre que la formule sommatoire de POISSON pour la fonction Θ de RIEMANN :

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \varphi(x+n) = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{2ik\pi x} \hat{\varphi}(2k\pi)$$

pour $\varphi(x) = e^{-x^2/2\sigma^2 t}$ à $t > 0$ fixé.

Lectures

1) R. COURANT – D. HILBERT MMP 2 – III § 1.

2) LAVRENTIEV – CHABAT Méthodes de la théorie des fonctions d'une variable complexe § 43 – 44.

3) R. COURANT – D. HILBERT MMP 1 – I § 6.

4) G. VALIRON 2 § 291.
E. GOURSAT § 499.

5) R. COURANT – D. HILBERT 2 – III § 6.

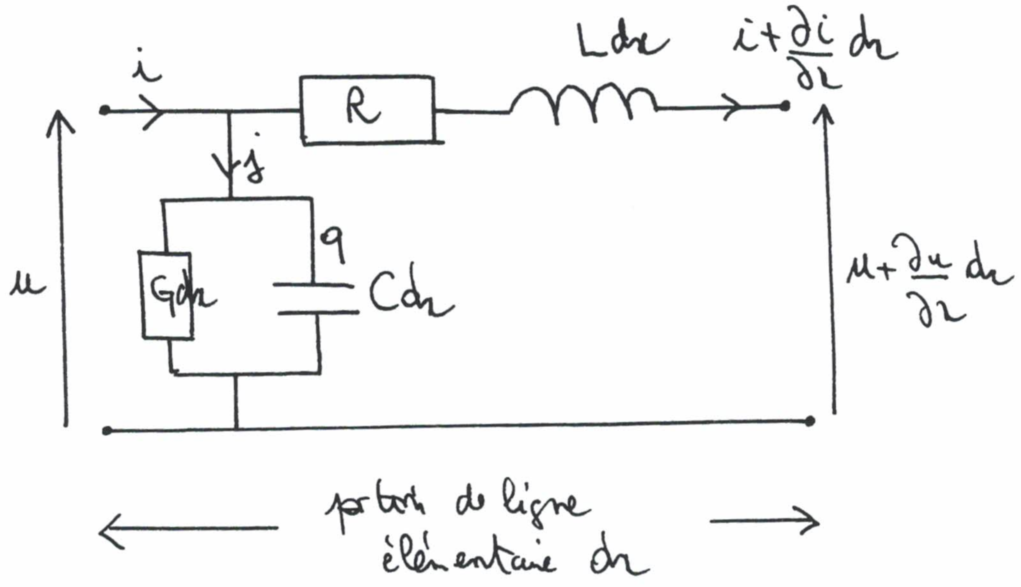
Développement (L216), sur l'EDP dite des télégraphistes.

Le choix se justifie par le thème applicatif "Propagation des Ondes (et l'usage de la transformation de LAPLACE, au programme de l'option Probabilités et Statistiques).

1) il s'agit d'étudier le système d'EDP

$$\begin{cases} \dfrac{\partial i}{\partial x} = -Gu - C\dfrac{\partial u}{\partial t} \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial x} = -Ri - L\dfrac{\partial i}{\partial t} \end{cases}$$

qui trouve son origine dans la modélisation des lignes électriques à constantes réparties :



$j = G\,dx.u + \frac{d}{dt}(C\,dx$

après élimination de l'inconnue $i(x,t)$, on est conduit à l'E

du type hyperbolique

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = LC\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (RC + GL)\frac{\partial u}{\partial t} + RGu$$

2) et on démontre que le problème de condition initiale

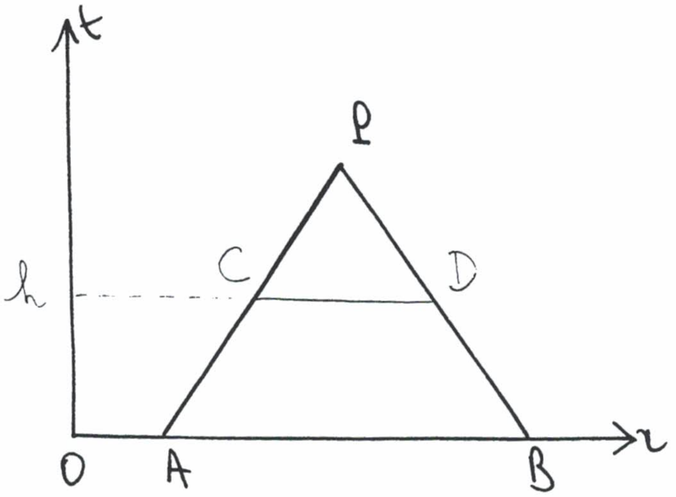
$u(x,0) = 0$, $i(x,0)=0$ (qui entraîne $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0$)

n'admet que la solution triviale $u=0$ par la méthode de l'énergie, laquelle consiste à intégrer (pour $LC=\omega_0^2=1$ afin de simplifier l'écriture) l'identité

$$2\partial_t u.\left(\partial^2_{tt} u - \partial^2_{xx} u + (RC+GL)\partial_t u + RGu\right) =$$

$$\partial_t\left(\|\nabla u\|^2\right) - 2\partial_x\left(2\partial_t u.\partial_x u\right) + 2(RC+GL)(\partial_t u)^2 + 2RGu\partial_t$$

sur le triangle



construit à partir d'un point courant $P(x,t)$ en menant les parallèles PA et PB aux caractéristiques $x \mp t = C^{te}$.

On montre avec la formule de GREEN-RIEMANN en particulier que l'énergie $E(h) = \int_{\mathcal{D}_h} \|\nabla u\|^2 \, dx$ obéit à l'inéquation intégrale

$$E(h) \leqslant C(\ell) \cdot \int_0^h E(t)\, dt$$

et, de là, on déduit que $E = 0$. Les calculs sont effectués dans <u>Courant-Hilbert MMP 2 V § 3.2</u>.

3) pour une ligne sans pertes ($R = G = 0$), on obtient la classique EDP des ondes $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \omega_0^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ où $\omega_0 = \sqrt{LC}$

et on peut calculer la solution du problème de condition initiale $u(x,0) = u_0(x)$, $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = v_0(x)$ données ... à l'aide de la transformation de FOURIER partielle en x qui conduit, en posant $\hat{u}(\xi, t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi\xi x} u(x,t)\, dx$ à l'EDO

$$\omega_0^2 \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2} + 4\pi^2 \xi^2 \hat{u} = 0$$

avec les ci $\hat{u}(\xi, 0) = \hat{u}_0(\xi)$, $\dfrac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\xi, 0) = \hat{v}_0(\xi)$

qui donnent après quadrature

$$\hat{u}(\xi, t) = \hat{u}_0(\xi) \cdot \cos\left(\frac{2\pi\xi}{\omega_0} t\right) + \hat{v}_0(\xi) \cdot \frac{\sin\left(\frac{2\pi\xi}{\omega_0} t\right)}{\left(\frac{2\pi\xi}{\omega_0}\right)}$$

Le premier terme s'écrit

$$\frac{1}{2}\left(e^{2i\pi\xi t/\omega_0}+e^{-2i\pi\xi t/\omega_0}\right)\hat{u}_0(\xi)$$

qui est la transformée de FOURIER de

$$\frac{1}{2}\left(u_0\left(\cdot+t/\omega_0\right)+u_0\left(\cdot-t/\omega_0\right)\right)$$, tandis que le second terme faisant apparaître la fonction sinus cardinal $\dfrac{\sin\pi\xi}{\pi\xi}$, transformée de FOURIER de la fonction rectangle $\mathbb{1}_{(-1/2,1/2)}$, on y reconnaît le produit de convolution

$$v_0 * \frac{\omega_0}{2}\mathbb{1}_{(-t/\omega_0,\,t/\omega_0)} \overset{(x)}{=} \frac{\omega_0}{2}\int_{x-t/\omega_0}^{x+t/\omega_0} v_0(y)\,dy$$

Ainsi, la transformation $\mathcal{F}$ permet-elle de découvrir la solution

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[u_0\left(x-t/\omega_0\right)+u_0\left(x+t/\omega_0\right)\right]+\frac{1}{2}\omega_0\int_{x-t/\omega_0}^{x+t/\omega_0} v_0(y)\,dy$$

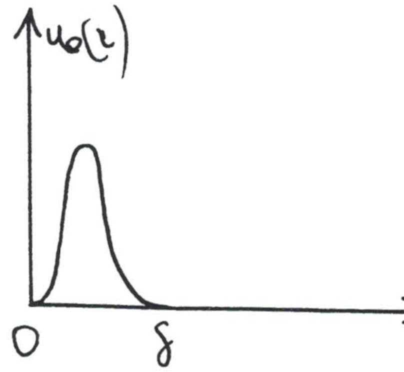
les calculs formels précédents se justifiant maintenant avec de bonnes hypothèses sur les données initiales.

<u>remarques</u>: i) Il est plus rapide d'effectuer le changement de variables $\begin{array}{l}\xi=t-\omega_0 x\\ \eta=t+\omega_0 x\end{array}$ des lignes caractéristiques, qui transform

l'EDP selon $\partial^2 \qquad = 0$ de solution générale $f(\xi) + g(\eta)$

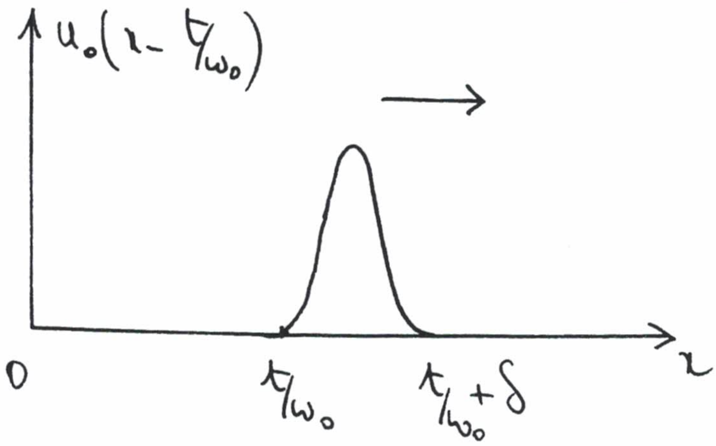
et de déterminer f, g à l'aide des CI.

ii) si, par exemple u_0 a la forme



$u_0\left(x - t/\omega_0\right)$ représente <u>une onde qui se propage à la vitesse</u> $1/\sqrt{LC}$

($\cong$ 300.000 km/s en pratique) le long de la ligne électrique, car



On trouvera une étude justifiée par une hypothèse de croissance sur u

dans <u>Titchmarsh, Introduction to the theory of FOURIER integrals § 10.11</u>

4) en transformant le système d'EDP avec LAPLACE

obtient, en supposant les CI u_0, i_0 données, le SD

ordinaire
$$\begin{cases} \dfrac{\partial I}{\partial x} = -GU - C(pU - u_0) \\[2ex] \dfrac{\partial U}{\partial x} = -RI - L(pI - i_0) \end{cases}$$

où $I(x,p) = \int_0^\infty e^{-tp} i(x,t)\,dt$ et $U(x,p) = \int_0^\infty e^{-tp} u(x,t)\,dt$.

Avec des ci nulles, on obtient $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \gamma^2 U = 0$ où

$\gamma^2 = (R+Lp)(G+Cp)$ ... de solution

$$U(x,p) = A(p) e^{\gamma x} + B(p) e^{-\gamma x}$$

donnant alors

$$I(x,p) = \sqrt{\frac{G+Cp}{R+Lp}}\left(-A(p)e^{\gamma x} + B(p)e^{-\gamma x}\right)$$

En pratique, l'Electricien se donne une tension d'entrée $u(0,t)$ et ferme sa ligne sur une impédance de charge $Z(p)$, c'est-à-dire que $Z(p).I(x,p) = U(x,p)$ où l désigne la longueur de la ligne. On trouvera ce type de calcul dans <u>Angot, Compléments de Mathématiques § 8.4</u> ...

5) par exemple, pour une ligne sans perte ($G=0$, câble parfaitement isolé) fermée sur sa propre impédance caractéristique $Z(p) = \sqrt{\frac{Lp+R}{Cp}}$, à laquelle on applique l'échelon unité, on est conduit à $I(x,p) = \sqrt{\frac{C}{p(R+Lp)}} \cdot e^{-\sqrt{Cp(R+Lp)}\cdot x}$

dont il s'agit de trouver l'originale $i(x,t)$: le calcul est fait dans <u>Lavrentiev-Chabat, Méthodes de la théorie des fonctions d'une variable complexe Chapitre VI § 87 6)</u>

et $i(x,t)$ s'exprime à l'aide de la fonction de BESSEL modifiée I_0

$$i(x,t) = \sqrt{\frac{C}{L}} \cdot e^{-\alpha t} \cdot I_0\left(\alpha\sqrt{t^2 - LCx^2}\right) . Y\left(t - x\sqrt{LC}\right)$$

où $\alpha = R/2L$ et Y désigne l'échelon-unité d'HEAVISIDE.

Compte-tenu du comportement asymptotique de I_0, et de Y, on assiste encore à la propagation d'une onde de courant, à la même vitesse.

On donne les étapes du calcul de la transformée de LAPLACE de $I_0\left(\alpha\sqrt{t^2-\tau^2}\right) . Y(t-\tau)$ pour $\tau \, (= \omega_0 x) > 0$, à partir de la représentation intégrale de SONINE

$$I_0(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(0;1)} e^{i\frac{t}{2}\left(\omega - \frac{1}{\omega}\right)} \frac{d\omega}{\omega}$$

qui donne

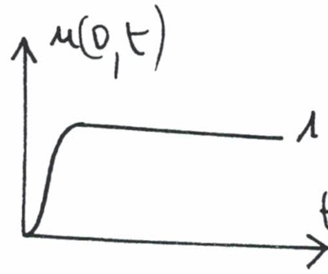
$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(0;1)} \int_{\tau}^{\infty} e^{-pt} . e^{i\frac{\alpha}{2}\left(\xi - \frac{1}{\xi}\right)t} dt \; e^{i\frac{\alpha}{2}\left(\xi + \frac{1}{\xi}\right)\tau} \frac{d\xi}{\xi}$$

après le "chgt de variable" $w = \sqrt{\frac{t+\tau}{t-\tau}}\cdot\xi$ et avec le théorème de FUBINI. Le théorème des résidus permet de calculer alors

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\partial D(0,1)} \frac{e^{i\alpha\tau\xi}}{p-\frac{i}{2}\alpha\left(\xi-\frac{1}{\xi}\right)}\cdot\frac{d\xi}{\xi} = \frac{2i}{\alpha}\,\text{rés}_{\frac{i}{\alpha}\left(-p+\sqrt{p^2-\alpha^2}\right)}$$

pour conclure.

<u>critique:</u> ayant supposé $u(x,0)=0$, il faut présenter le calcul précédent comme une idéalisation de



On trouvera d'autres cas d'étude de l'EDP des télégraphistes, avec les éléments nécessaires sur la transformée de LAPLACE dans

<u>Courant-Hilbert 2 III §3. p.215–</u>, en particulier.

Compléments d'Analyse pour l'Agrégation : approximation par des fonctions polynomiales, par morceaux

1) Pour une fonction f continue sur le segment $[a,b]$, le <u>théorème de WEIERSTRASS</u> assure l'existence d'une suite $(P_n)_{n\geq 0}$ de polynômes qui converge vers f uniformément sur $[a,b]$. Une démonstration possible est de faire appel à <u>l'unité approchée de LANDAU</u> $L_n(t) = c_n(1-t^2)^n$ sur $[a,b]=[-1,1]$ auquel on se ramène par translation - homothétie où $c_n>0$ est tel que $\int_{-1}^{1} L_n(t)\,dt = 1$, une autre est celle de BERNSTEIN qui sur $[a,b]=[0,1]$ établit que la suite

$$B_n f(t) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, t^k (1-t)^{n-k} . f\left(\frac{k}{n}\right)$$

convient. Il convient d'en signaler la démonstration probabiliste qui fait le lien avec la loi des grands nombres, mais il s'agit là encore d'un argument de type U.A.

On précise le résultat à l'aide du module de continuité

$$\omega(\delta) = \sup_{|t-s|\leq\delta} |f(t)-f(s)|$$

sachant que, d'après le théorème de HEINE $\omega(\delta) \underset{\delta \to 0+}{\longrightarrow} \delta$:

$$|f(x) - B_n f(x)| \leq \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\left| \frac{k}{n} - x \right| \sqrt{n} + 1 \right) x^k (1-x)^{n-k} \cdot \omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

avec la formule du binôme de NEWTON et le fait que

$$\left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leq \omega\left(\left|x - \frac{k}{n}\right|\right) \leq \left(\left|x - \frac{k}{n}\right| \sqrt{n} + 1\right) \omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

(car, en général $\omega(\lambda \cdot \delta) \leq (\lambda + 1) \omega(\delta)$ si $\lambda > 0$) :

avec l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ, on en déduit que

$$\sup_{[0,1]} |f - B_n(f)| = \| f - B_n(f) \|_\infty \leq \frac{3}{2} \omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

2) On examine les effets du remplacement de f par $B_n(f)$ sur l'intégration et la dérivation. Ainsi

$$\int_0^1 B_n f(x)\, dx = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k \, B(k+1, n-k+1)$$

apparaît comme $\dfrac{1}{n+1} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$, une somme de RIEMANN de f, et conduit-elle au calcul approché de $\int_0^1 f\,dx$ selon la méthode des rectangles. D'autre part, en supposant f

de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, on montre que

$$\|B_n(f)' - f'\|_\infty \leqslant \omega_{f'}\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{3}{2}\omega_{f'}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \leqslant \frac{5}{2}\omega_{f'}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) :$$

en effet,

$$B_n(f)'(x) = n\sum_{k=0}^{n-1}\left(f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) C_{n-1}^k\, x^k(1-x)^{n-1-k}$$

et on conclut avec le théorème des accroissements finis.

3) Si f est une fonction entière, <u>un théorème de KANTOROVITCH</u> affirme que $(B_n(f))$ converge vers f uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$: si $f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m z^m$, comme

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{m\geqslant 0} c_m\left(\frac{k}{n}\right)^m C_n^k\, x^k(1-x)^{n-k}$$

$$= \sum_{m\geqslant 0} c_m\, B_n(x^m)(x)$$

où $B_n(x^m)$ désigne le $n^{\text{ème}}$ polynôme de BERNSTEIN de x^m, il s'agit de remarquer tout d'abord que $B_n(x^m) \xrightarrow[n\to\infty]{u.c.} x^m$.

Pour cela, on montre que $B_n(x^m)$ est de degré m si $n \geqslant m$

puis d'utiliser le fait que dans l'espace vectoriel de dimension finie $\mathbb{R}_m[X]$, la norme de la convergence uniforme sur $[0,1]$ est équivalente à celle de la convergence uniforme sur le compact $[-X,X]$.

Ensuite, il faut justifier le passage à la limite, lorsque $n \to \infty$, sous le signe $\sum_{m \geq 0} c_m \| B_n(x^m) - f \|_{\infty, X}$ en montrant qu'étant donné $X > 0$, il existe $A > 0$ avec $|B_n(x^m)(x)| \leq A^m$ si $|x| \leq X$ et pour tout n et m : on conclut alors avec le théorème de convergence dominée (puisque $\sum_{m=0}^{\infty} \| c_m (B_n(x^m) - x^m) \|_{\infty, X} \leq$

$$\sum_{m=0}^{\infty} |c_m| \cdot (A^m + X^m) < +\infty).$$

L'opérateur de BERNSTEIN $B_n : f \longmapsto B_n(f)$ est évidemment continu de $\mathcal{C}^0([0,1])$ sur $\mathbb{R}_n[X]$ muni de la norme uniforme sur $[0,1]$, de norme 1 et surjectif.

4) Étant donné un espace normé Φ et une famille libre $\{\varphi_j\}$ de Φ, tout élément f de Φ possède <u>un meilleur approximant linéaire</u> $\sum_{1}^{n} c_j \cdot \varphi_j$, dans le sens où

$$E_n(f) = \inf_{\lambda \in \mathbb{K}^n} \| f - \sum_1^n \lambda_j \varphi_j \| \quad \text{est atteint :}$$

la fonction $\lambda \mapsto \| \sum_1^n \lambda_j \varphi_j \|$ étant continue atteint sa borne inférieure sur la sphère unité et comme la famille est libre, ce minimum m est strictement positif. Alors la fonction $F(\lambda)$ à étudier est minorée par $m \|\lambda\|_{\mathbb{K}^n} - \|f\|$ qui tend vers $+\infty$ avec $\|\lambda\|_{\mathbb{K}^n}$: ainsi, une suite minimisante est-elle bornée et on conclut par un argument de compacité.

$E_n(f)$ s'appelle l'<u>erreur d'approximation</u>.

Par exemple, prenant pour Φ l'espace $L^2(-1,1)$ pour la mesure de LEBESGUE, et pour $\varphi_j(x)$ le monôme x^j, il existe pour f un polynôme de meilleure approximation quadratique de degré n donné, qui est d'ailleurs fourni par le théorème de projection de HILBERT $\sum_{j=0}^{n} c_j L_j$ où L_j désigne le $j^{\text{ième}}$ <u>polynôme de LEGENDRE</u>, $c_j = \int_{-1}^{1} f L_j \, dx$ étant le $j^{\text{ième}}$ coefficient de FOURIER-LEGENDRE.

Dans l'exemple précédent, il y a unicité du meilleur approximant comme plus généralement dans tout espace $\mathcal{E}$ strictement normé (c'est-à-dire tel que $\|f+g\| = \|f\| + \|g\|$ entraîne f et g proportionnels).

5) Considérant à nouveau l'espace $\mathcal{C}([a,b])$ des fonctions continues sur le segment $[a,b]$, muni de la norme uniforme il existe ainsi pour toute f, à n donné, un polynôme de meilleure approximation uniforme : par exemple, il existe un polynôme $x^{n+1} - \sum_0^n c_j x^j$ réalisant

$$\inf_c \sup_{|x|\leqslant 1} \left| x^{n+1} - \sum_0^n c_j x^j \right| .$$

Il est facile de montrer que si $E_n(f) = \|f - P\|_\infty$ alors $(f-P)$ prend nécessairement les valeurs $E_n(f)$ et $-E_n(f)$, et que si $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ est tel qu'il existe $(n+2)$ points

$$a \leqslant x_0 < x_1 < \ldots < x_{n+1} \leqslant b$$

avec $(f-Q)(x_j)$ du signe de $(-1)^j$, alors

$$E_n(f) \geqslant \|f - Q\|_\infty$$

celui de la VALLÉE-POUSSIN, mais la démonstration du théorème de TCHEBYTCHEV disant que pour que P soit un meilleur approximant de degré n, il faut et il suffit que le segment $[a, b]$ contienne $(n+2)$ points avec

$$(f - P_n)(x_j) = \varepsilon(-1)^j \, \|f - P_n\|_\infty$$

où $\varepsilon = +1$ ou -1 ne dépend pas de $j = 0, 1, \ldots, n+1$, est plus délicate à exposer. Du même coup, il y a unicité du meilleur approximant.

On se contente de rechercher, à titre d'exemple, le polynôme $P = x^{n+1} - \sum_{0}^{n} c_j x^j$ qui s'écarte le moins de 0 sur le segment $[-1, 1]$: si $M = E_n(x^{n+1})$, il existe par conséquent $(n+2)$ points x_j de $[-1, 1]$ en lesquels P prend la valeur $\pm M$: si $|x_j| < 1$, cela entraîne $P'(x_j) = 0$ et comme P' est de degré n, et non nul, il existe n points intérieurs au segment $[-1, 1]$, et $x_0 = -1$, $x_{n+1} = 1$ par conséquent. Ainsi, les polynômes $M^2 - P^2$ et $(1 - x^2)P'^2$ sont-ils proportionnels, et on aboutit à la relation différentielle

$$M^2 - P^2(x) = \frac{1}{(n+1)^2}(1-x^2)(P'(x))^2$$

qui s'intègre pour donner la forme de

$$P(x) = M \cos\left((n+1)\arccos x + C\right)$$

Comme $T_n(x) = \cos(n \arccos x) \in \mathbb{R}_n[X]$, on obtient finalement $P(x) = 2^{-n} . T_{n+1}(x)$ où T_n désigne le $n^{\text{ième}}$ polynôme de TCHEBYTCHEV.

6) En travaillant avec les fonctions continues 2π-périodiques ($f \in \mathcal{C}^0_{2\pi}$) on peut préciser $E_n(f)$ (dont une estimation a été obtenue en 1)) en s'aidant des séries de FOURIER.

Si $D_n(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\sin(2n+1)t/2}{\sin(t/2)}$ désigne le $n^{\text{ième}}$ noyau de DIRICHLET, on note $S_n(f) = D_n * f$, et la moyenne de CÉSARO $\sigma_n(f) = \frac{1}{n}\left(S_0(f) + \dots + S_{n-1}(f)\right)$ s'écrit donc sous la forme $K_n * f$ où $K_n(t) = \frac{1}{2\pi n} \cdot \left(\frac{\sin n t/2}{\sin t/2}\right)^2$ est le $n^{\text{ième}}$ noyau de FÉJER.

La suite (K_n) étant une U.A., $K_n * f \xrightarrow[n\to\infty]{u} f$, donnant ainsi une approximation de $f \in \mathcal{C}^0_{2\pi}$ par une suite de polynômes trigonométriques.

Si f est K-lipschitzienne, on montre que

$$\|\sigma_n(f) - f\|_\infty \leqslant K C_f \frac{\ln n}{n} \quad , n \geqslant 1$$

où $C_f > 0$ ne dépend que de f (théorème de BERNSTEIN) :

en effet, $\sigma_n(f)(t) \doteq \frac{1}{2\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-\theta)\left(\frac{\sin n\theta/2}{\sin \theta/2}\right)^2 d\theta$ vaut encore

$$\frac{1}{\pi n}\int_0^{\pi/2} \left(f(t+2\theta) + f(t-2\theta)\right)\left(\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}\right)^2 d\theta$$ de sorte que

$$|\sigma_n(f) - f|(t) \leqslant \frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi/2} |f(t+2\theta) + f(t-2\theta) - 2f(t)|\left(\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}\right)^2 d\theta$$

$$\leqslant \frac{4K}{\pi n}\int_0^{\pi/2} \theta\left(\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}\right)^2 d\theta$$

$$\leqslant \frac{4K}{\pi n}\cdot\frac{\pi^2}{4}\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 n\theta}{\theta}\, d\theta$$

avec

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2 n\theta}{\theta}\,d\theta = \int_0^{n\pi/2}\frac{\sin^2 t}{t}\,dt \leqslant \int_0^{\pi/2} t\,dt + \int_{\pi/2}^{n\pi/2}\frac{dt}{t} \leqslant 2\ln n$$

pour n assez grand, ce qui permet de conclure.

En utilisant <u>la constante de LEBESGUE</u>

$$|||\sigma_n|||_{\mathcal{L}(\mathcal{C}^0_{2\pi})} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{\sin(2n+1)t/2}{\sin t/2}\right|dt \underset{(n\to\infty)}{\sim} \frac{4}{\pi^2}\ln n$$

on obtient $\|A_n(f)-f\|_\infty \leq (3+\ln n).E_n(f)$ car si T_n désigne un meilleur approximant de f de degré n, on a

$$\|A_n(f)-f\|_\infty \leq \|A_n(f)-A_n(T_n)\|_\infty + \|T_n-f\|_\infty$$

en utilisant le fait que $A_n(T_n)=T_n$, ce qui donne le majorant $(|||A_n|||+1).E_n(f)$ recherché.

Le noyau de <u>la VALLEE-POUSSIN</u>

$$V_n = \frac{1}{n}\left(D_n + \dots + D_{2n-1}\right)$$

$$= 2.K_{2n} - K_n$$

réunit les avantages de D_n et de K_n, à savoir :

. $V_n(\mathcal{T}_{2n-1}) \subset \mathcal{T}_{2n-1}$ espace des polynômes trigonométriques de degré au plus $(2n-1)$

. $V_n * f \xrightarrow[n\to\infty]{u} f$

$$\cdot ||| V_n * ||| \leqslant 3$$

et il en résulte que

$$\| V_n * f - f \|_\infty \leqslant 4 . E_n(f)$$

Par exemple, l'étude du développement de $|\cos t|$ montre que

$$V_n * f \ (\pi/2) \geqslant C/2n$$

et on en déduit que $E_n(|x|) \geqslant C/8n$ tandis que

$$\Big| A_n(f) - f = \frac{4}{\pi} \sum_{k > [n/2]} (-1)^k \frac{\cos 2kt}{4k^2-1} \Big| \leqslant C/n$$

ce qui entraîne pour $|x|$ une approximation par les polynômes de TCHEBYTCHEV de l'ordre de C/n.

7) Le noyau de JACKSON $\quad J_n(t) = \frac{1}{\lambda_n} \cdot \left(\frac{\sin n t/2}{\sin t/2} \right)^4$ avec

$$\lambda_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\sin n t/2}{\sin t/2} \right)^4 dt = \frac{1}{3} n (2n^2+1)$$ et une U.A. telle

que

$$|J_n * f - f|(t) \leqslant (1 + 3\pi/2) . \omega\left(\frac{1}{n}\right)$$

et il en résulte que $E_n(f) \leqslant 12 \cdot \omega\left(\frac{1}{n}\right)$.

8) Ainsi, pour revenir à $f \in \mathcal{C}^0([a,b])$, a-t-on

$$E_n(f) \leqslant C\, \omega\left(\frac{b-a}{n}\right)$$

et, pour diminuer l'erreur, on peut soit augmenter le degré, soit commencer par subdiviser le segment $[a,b]$, cette dernière solution conduisant à <u>l'approximation polynomiale par morceaux</u>.

Ainsi, une vieille méthode de tracé de belles courbes consistait-elle à forcer une latte de bois de passer par des plots fixes, et selon la théorie de l'élasticité, on résolvait pratiquement le problème d'extremum

$$\inf_{\substack{f(x_j)=y_j\\ 0\leqslant j\leqslant n}} \int_a^b \frac{(f''(x))^2}{\left(1+(f'(x))^2\right)^{5/2}}\,dx\,.$$

Pour simplifier, on étudie ici le problème simplifié

$$\inf_{\substack{f(x_j)=y_j\\ 0\leqslant j\leqslant n}} \int_a^b (f''(x))^2\,dx$$

ce qui va introduire la notion d'approximation spline cubique par morceaux.

Le problème $\inf_{\substack{f(0)=y_0 \\ f(1)=y_1 \\ f\in\mathcal{C}^2([0,1])}} \int_0^1 (f''(x))^2 dx$ admet la solution évidente

f affine, et on présente sa résolution par le Calcul des Variations qui servira au cas général :

Il s'agit donc de minimiser la fonctionnelle

$$J(f) = \int_0^1 (f''(x))^2 dx$$

où f est soumise aux contraintes indiquées et, si $\varphi \in \mathcal{C}^2([0,1])$ s'annule en 0 et 1, on doit aussi

$$\frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} J(f+\varepsilon\varphi) = 0$$

soit $\int_0^1 f''\varphi'' dx = 0$. On conclut alors à la forme de f par le lemme de du BOIS-REYMOND dont la version élémentaire s'énonce ainsi :

si $\displaystyle\int_0^1 f'\varphi'\,dx = 0$ pour toute fonction φ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$

avec $\varphi(0)=\varphi(1)=0$, f est alors constante.

En effet, en posant $\displaystyle\varphi(x) = \int_0^x (f-\bar f)\,dt$ où $\displaystyle\bar f = \int_0^1 f\,dx$

désigne la valeur moyenne de f, on obtient $\displaystyle\int_0^1 (f-\bar f)^2\,dx = 0$

et la conclusion suit.

Pour le cas qui nous intéresse, on introduit la fonction d'essai

$$\varphi(x) = \int_0^x \left(\int_0^u \left(f''(\xi) - (a+b\xi)\right)d\xi\right)du$$

qui est bien de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$, et où on commence

par imposer $\varphi(1)=0$ soit la condition

$$\int_0^1 \int_0^u \left(f''(\xi) - (a+b\xi)\right)d\xi\,du = 0 .$$ On a ainsi

$$\int_0^1 f''(x)\cdot\left(f''(x) - (a+bx)\right)dx = 0$$, de sorte qu'en imposant

en outre $$\int_0^1 (a+bx)\left(f''(x)-(a+bx)\right)dx = 0$$, on pourra conclure

Ainsi une extrémale f doit-elle être cubique sur $[0,1]$: dès lors une intégration par parties est possible qui donne

$$\int_0^1 f''\varphi''\,dx = f''\varphi'\Big|_0^1 - f'''\int_0^1 \varphi'\,dx$$

donc

$$f''(1).\varphi'(1) - f''(0).\varphi'(0) = 0$$

relation devant être valable pour toute fonction d'essai, et entraînant naturellement $f''(0) = f''(1) = 0$ donc $f'' = 0$

9) On étudie maintenant le problème d'extremum

$$\inf_{\substack{f(x_j)=y_j \\ 0\leq j\leq n \\ f\in\mathcal{C}^2([0,1])}} \int_0^1 (f''(x))^2\,dx$$

La méthode d'EULER précédente montre que, si f réalise le minimum, on doit aussi en particulier i

$$\int_0^1 f''\varphi''\,dx = 0 \qquad \text{si } \varphi \in \mathcal{C}^2([0,1]) \text{ avec } \varphi(y_j) = \varphi(y_{j+1}) =$$

et $\varphi = 0$ en dehors de $[y_j, y_{j+1}]$, de sorte que f doit

être cubique sur $[y_j, y_{j+1}]$, $j = 0, 1, .., n-1$. Alors, on a

$$\int_0^1 f''\varphi''\,dx = \sum_0^{n-1} \int_{y_j}^{y_{j+1}} f''\varphi''\,dx$$

$$= \sum_0^{n-1} \left(f''\varphi' - f'''\varphi \right)\Big|_{y_j}^{y_{j+1}}$$

où $\varphi(y_j) = 0$ pour tout j, qui conduit à la relation

$$f''(1).\varphi'(1) - f''(0).\varphi'(0) = 0$$

entraînant <u>la condition limite naturelle</u>

$$f''(0) = f''(1) = 0 \,.$$

Comme on a $J(f+\varepsilon\varphi) = J(f) + 2\varepsilon \int_0^1 f''\varphi''\,dx + \varepsilon^2 J(\varphi$

il est facile de voir que f cubique par morceaux, et vérifiant

cette condition limite est bien extremale.

La détermination de f nécessite la connaissance de $4n$ coeffi-
-cients, les contraintes imposant

. $3.(n-1)$ conditions de raccordement à l'ordre 2 en

$x_1, \dots, x_{n-1}$

. $(n+1)$ conditions d'interpolation

et . les 2 conditions limite naturelles, ce qui donne un
système de $4n$ équations linéaires qui se résoud par balayage

<u>Lectures</u> :

1) à 8) NATANSON Konstruktive Funktionentheorie
Akademie Verlag 19..

5) et 8) BAKHVALOV Eléments d'Analyse Numérique
Ed. MIR

5 à 7) LORENTZ Approximation of functions

AHLBERG_NILSON_WALSH The theory of splines and their...

8) application

CIARLET Introduction à l'Analyse Numérique matricielle
et à l'optimisation (§ 3.7)

ROMBALDI Problèmes corrigés d'Analyse Numérique (Pb n°=3...