UNIVERSITE
DE LIMOGES

irem

Institut de Recherche
sur l'Enseignement des Mathématiques

Calcul algébrique en seconde :

Des activités pour la classe

Publication de l'IREM de Limoges
avec le soutien de la DLC
et de la MAFPEN de Limoges.

janvier 1999

INSTITUT DE RECHERCHE SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES

UNIVERSITÉ DE LIMOGES

123, Avenue Albert Thomas
87060 LIMOGES CEDEX
Tél. : 05 55 45 72 49 - Fax : 05 55 45 73 20
E-mail : irem @ unilim.fr

Calcul algébrique en seconde : Des activités pour la classe

Colette CHAUPRADE Aline COUDERT
Jean-Luc MILLET Geneviève PATUREAU

Avec la participation de :

Martine GRIMAUD Marie-Madeleine ROUMILHAC
Madeleine MICHARD Geneviève TRONCHE

dans le cadre du Groupe de Recherche Actions-Formation en Calcul Algébrique

Action soutenue par la MAFPEN de Limoges et la Direction des Lycées et Collèges

SOMMAIRE

A - INTRODUCTION page 4

B - DES ACTIVITÉS POUR LA CLASSE

n° 1 : Mise en route en calcul algébrique. page 9

n° 2 : Des chiffres et des lettres. page 11

n° 3 : Les ensembles de nombres. page 13

n° 4 : Calculer avec des quotients, des puissances page 16

n° 5 : Configurations et racines carrées. page 18

n° 6 : Etre ou ne pas être solution. page 20

n° 7 : Transformer des écritures - Le triangle de Pascal. page 22

n° 8 : Classer des équations (ou des inéquations) avant de les résoudre. page 24

n° 9 : Valeur exacte - Valeur approchée. page 27

n° 10 : Contrôler des résolutions d'équations. page 29

n° 11 : Calcul mental - Calcul rapide, exemple de fiche. page 31

n° 12 : Égalité - Implication - Équivalence. page 33

n° 13 : Rédiger en algèbre : démontrer une égalité. page 36

n° 14 : Choisir la bonne forme pour ... page 39

n° 15 : Racine d'un polynôme et factorisation. Fiche 1. page 42

n° 16 : Racine d'un polynôme et factorisation. Fiche 2 page 44

C - ANNEXES page 47

INTRODUCTION

Avec le soutien de la Direction des Lycées et Collèges et la MAFPEN de Limoges.

Introduction

Pour un élève de seconde, ce sont les difficultés en calcul algébrique qui semblent les plus difficiles à surmonter[1]. De nombreux travaux mettent en évidence la stabilité des performances des élèves[2] ; par exemple, à propos de la résolution d'équations apparemment simples [$x^2 = 9$ et $x^2 + 3 = 0$], la réussite conjointe (45%), observée en seconde et en première, est pour le moins inquiétante. Il semblerait qu'il n'y ait aucune amélioration entre les classes de seconde et de première, un peu comme si les élèves n'avaient rien appris ...

Les ruptures entre le numérique et l'algébrique viennent de ce que l'algèbre présente un détour formel dans la résolution de problèmes habituellement traités intuitivement (traitement arithmétique) et de l'introduction, souvent implicite, d'objets mathématiques nouveaux (équation, inconnue, fonction, variable, polynôme...)[3]. En l'absence de situation (donnant du sens) et d'une identification des objets manipulés, les règles d'action construites par les élèves ne résistent pas à la moindre variation dans la formulation de la question et dans le format des « expressions » mises en jeu.

I - A propos des difficultés des élèves.

☐ Les travaux (didactiques) sur l'algèbre repèrent des sources de difficultés pour les élèves :

• Utilisation du signe «=», appris mais jamais enseigné. L'élève doit l'utiliser pour transformer une « expression » (deux écritures désignant le même objet mais ne donnant pas la même information) ou une égalité (dans ce cas, les objets désignés peuvent changer).

• Utilisation des parenthèses, des écritures simplifiées (produits, puissances ...) ; par exemple, dans le choix des opérations arithmétiques prioritaires pour résoudre une équation.

• Utilisation des lettres, pour modéliser

☐ Certaines études proposent des concepts descriptifs

• Matz[4] identifie trois grandes sources d'erreurs :
- généralisations abusives,
- connaissances correctes mais mal adaptées au problème posé,
- erreurs à l'intérieur de la procédure de résolution.

Quelques exemples de généralisations abusives :
- le développement de $(a + b)^3$ donne $a^3 + 3\,a\,b + b^3$,
- l'équation $(x - 2)(x + 1) = -2$ équivaut à $x - 2 = -2$ ou $x + 1 = -2$,
- l'équation $\frac{1}{3} = \frac{1}{x} + \frac{1}{7}$ équivaut à $3 = x + 7$

...

• François Boule identifie des sources d'erreurs possibles relatives aux procédures[5] :

La procédure n'est pas connue, elle est utilisée hors champ (une procédure possède un champ de validité limité par des conditions), elle est **illicite** et provient d'un déplacement d'une autre procédure.

On peut qualifier une **procédure** de :

- **fermée**(elle fonctionne comme une totalité, la procéduralisation n'est plus réversible),
- **rigide** (certaines règles, mémorisées sous une forme partiellement instanciée, résistent aux énoncés voisins),

---

[1] E. Josse
[2] F. Boule, E. Josse, J.L. Millet
[3] G. Vergnaud
[4] in « Prendre en compte les erreurs en mathématiques à l'école et au collège »
[5] Une procédure est un ensemble univoque et ordonné d'actions en vue d'un but déterminé (F.Boule)

- **illicite** et **fermée**, dans ce cas Boule parle de « faux pli » qui provient d'une absence de test de validité ou d'un déplacement.

La fermeture et la rigidité peuvent se traduire par le fait que la procédure n'est pas déclenchée si l'élève ne peut pas lire tous les indices (par exemple, dans la factorisation de $x^3 + 3$ où 3 n'est pas un carré parfait) ou s'il doit continuer un algorithme partiellement exécuté (par exemple, dans la résolution de l'équation : $(x + 2)(2x - 6) = 0$). Le «faux pli » quant à lui risque d'apparaître dans la résolution d'équations du type : $(x + 2)(2x - 6) = 12$.

On peut aussi observer des phénomènes de « focalisation », c'est à dire une augmentation du nombre d'erreurs lorsque la procédure doit être déclenchée pour réaliser une tâche secondaire (incluse dans une autre).

• On peut trouver des analogies entre le travail de F. Boule et celui de R. Noirfalise. Les connaissances procédurales ne sont pas construites d'emblée par l'élève qui doit d'abord spécifier la classe de problèmes correspondant à chaque programme de traitement.

Il peut y avoir surspécification ou surgénéralisation :

Il y a **surspécification** quand la classe de problèmes correspondant à un programme de traitement est trop restreinte. Une règle d'action conditionnée par la question posée n'est pas déclenchée en l'absence de celle-ci . En fait, pour une même « expression algébrique » l'élève peut déclencher des procédures différentes suivant la tâche (factorisation, résolution d'équation ...) et ne pas être troublé par des réponses contradictoires (par exemple, affirmer qu'un polynôme $p(x)$ n'est pas factorisable et trouver des solutions à l'équation $p(x) = 0$).

On peut parler de **surdétermination** quand le déclenchement d'une règle d'action est surconditionné par des caractéristiques des expressions ou équations mises en jeu, caractéristiques pouvant être liées au format ou à des conditions sur les coefficients. Par exemple, un élève peut affirmer que le polynôme $n - 3$ n'est pas factorisable car, pour lui, 3 n'est pas un carré.

II A Propos des activités sur le calcul algébrique.

Le calcul algébrique relève d'un apprentissage long qui commence à l'école élémentaire et se poursuit au lycée.

Dès l'école élémentaire l'élève est confronté au calcul algébrique sur des expressions numériques[6] , il utilise des règles qui seront explicitées au collège (le calcul algébrique passe du numérique au littéral). Ce n'est que beaucoup plus tard que ces règles deviendront les objets d'une théorie (l'algèbre).

Dans les programmes officiels l'algèbre apparaît comme un outil plutôt que comme un objet d'étude. Les connaissances nécessaires n'étant pas toujours explicitées.

Les activités proposées dans ce fascicule permettent aux élèves **d'agir** mais surtout de **formuler**, **confronter** et **valider** les connaissances utilisées.

Le calcul mental, qu'il soit rapide ou réfléchi, ne fait pas qu'exercer la mémoire, il développe l'attention, la concentration et surtout la capacité à **choisir**, **exécuter**, **formuler** et **contrôler** une procédure de résolution.

[6] Modification d'une écriture ne donnant pas l'écriture canonique d'un nombre par exemple : $12 \times 3 = (10 + 2) \times 3 = (10 \times 3) + (2 \times 3)$.

Lors de la lecture de l'énoncé du problème qu'il doit résoudre, l'élève prend des informations lui permettant de se construire une représentation (mentale), en fonction des indices prélevés et de ses expériences (sociale et scolaires) il choisit une procédure de résolution qu'il doit instancier (contextualiser aux données particulières) puis exécuter, enfin il doit communiquer sa réponse. A chaque étape l'élève peut contrôler ses actions en revenant à une des étapes précédentes. Chaque activité proposée, tout en obligeant l'élève à traiter un problème dans sa totalité, travaille plus particulièrement une des étapes précédentes.

Les activités de type « méta » (ex. classer des équations en fonction du mode de résolution) ne prennent du sens pour les élèves en difficultés que si elles sont accompagnées du traitement mathématique effectif (par exemple, résoudre les équations classées).

Notre but principal est d'assurer une meilleure liaison dans l'apprentissage, entre le calcul numérique et le calcul algébrique au collège, et l'algèbre en classe de première.

Pour ce faire, nous consolidons les objectifs explicites des programmes officiels de savoirs et de savoir-faire complémentaires qui sont les suivants :

- Acquérir des méthodes (ex. : pour factoriser, pour résoudre une équation...).
- Vérifier et contrôler ses actions, ses réponses.
- Justifier, valider, démontrer en algèbre.
- Changer de point de vue et de stratégie (en anticipant par exemple).
- Accéder à des concepts plus généraux (exemples le statut de la lettre en mathématiques, le statut des expressions, le degré d'une équation...).
- Prendre conscience de sa propre démarche et de ses erreurs (analyse systématique des erreurs, critique de méthodes...).

Notre démarche consiste à :

- Renforcer l'aspect technique sur des cas simples (avec du calcul mental et du calcul rapide en particulier).
- Proposer des situations plus complexes pour donner du sens au calcul algébrique et repérer les bons invariants.
- Revenir sur les cas plus simples du programme.

Il s'agit tout au long de l'année de :

- Consolider le calcul algébrique en s'appuyant sur le calcul numérique, par exemple : utiliser les transformations d'écritures sur les quotients, les puissances et les radicaux pour conjecturer et démontrer des règles...
- Jouer sur la formulation des questions : démontrer des égalités ou des inégalités, critiquer des productions d'élèves...
- Utiliser les changements de registre : (fonction ; lecture graphique...).
- Organiser différents types de situations : activités, débats...
- Utiliser toutes les structures (cours, travaux dirigés, modules) pour repérer avec les élèves les connaissances nécessaires pour faire du calcul algébrique.

Pour planifier les activités nous nous aidons des tableaux *annexe 1* et *annexe 2*.

DES ACTIVITÉS POUR LA CLASSE

N° 1

Mise en route en Calcul numérique

Difficultés	Connaissances mobilisées	Objectifs
- Les règles « généralisées » telle que $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ donne $\sqrt{a + b}$. - Remplacer une lettre par un nombre négatif.	Les règles du calcul numérique du programme de 3ème.	- Réinitialiser les règles de calcul dans $\mathbb{R}$ et les priorités opératoires. - Travailler sur les risques d'erreurs.

Gestion	Commentaires
Durée : 1 h - Recherche individuelle puis par groupes de deux élèves sur les trois premiers calculs. - Correction collective avec débat : analyse des erreurs, écriture des règles utilisées. - Même démarche avec les trois expressions sur les puissances. - Puis avec les quatre dernières.	• Il s'agit de la première séance de l'année. Les élèves ne se connaissent pas et peuvent avoir du mal à travailler avec le voisin. L'enseignant encourage les discussions dans les groupes en cas de désaccord, retourne les questions aux élèves, mais ne donne pas de réponse. • Lors des corrections collectives l'enseignant choisit d'interroger en premier les groupes qui ont des réponses fausses, pour provoquer un débat et analyser au fur et à mesure les erreurs commises, avant d'écrire les « bonnes » règles. • Les nombres proposés dans l'exercice ont été choisis afin que les règles abusives généralement utilisées par les élèves apparaissent.

Institutionnalisation

- Les règles de calcul dans $\mathbb{R}$.

Calcul mental - Calcul rapide

Proposer des calculs simples, du type :

$\frac{1}{2} + \frac{3}{4}$; 2×5^2 ; $\frac{3}{2} \times \frac{5}{9}$ et demander d'écrire le résultat simplifié sans écrire de calcul intermédiaire.

N° 1

Mise en route en Calcul numérique

Consigne Parmi les réponses proposées, indiquer celles qui sont correctes.

Ecrire dans la troisième colonne les éventuels calculs intermédiaires qui vous sont nécessaires.

$\frac{1}{2}+\frac{3}{4}$	$\frac{4}{6}$; $\frac{5}{4}$; 1,25 ; $\frac{10}{8}$.	
$\frac{1}{6}-\frac{1}{9}$	$\frac{3}{54}$; 0,05 ; $\frac{1}{18}$.	
$\frac{10}{7} : 5$	$\frac{50}{7}$; $\frac{10}{35}$; 0,28 ; $\frac{2}{1,4}$.	
0,000 000 037	37^{-9} ; $3,7 \times 10^{-8}$; -37×10^{9}.	
2×5^2	$(2 \times 5)^2$; 50 ; 20 ; 100.	
5^{-2}	-10 ; 0,04 ; -25 ; $\frac{1}{25}$.	
$\sqrt{4 + 16}$	6 ; 10 ; $2\sqrt{5}$; 4,47	
$(\sqrt{5} - 2)^2$	1 ; $9 - 4\sqrt{5}$; 9 ; $1 + 4\sqrt{5}$.	
Lorsque $x = 6$ et $y = -4$, l'expression $x^2 - y^2$ prend la valeur :	4 ; 100 ; 20 ; 52	
Lorsque $x = 7$ et $y = -3$, l'expression $\sqrt{x^2 + y^2}$ prend la valeur.	4 ; $2\sqrt{10}$; 10 ; $\sqrt{58}$.	

N° 2

Des chiffres et des lettres

Difficultés	Connaissances mobilisées	Objectifs
- Utiliser une lettre : • pour mettre un problème en équation ; • pour généraliser. - Le rôle de l'exemple et du contre- exemple.	- Mises en équations et résolutions d'équations. - Règles de calculs sur les quotients.	- Les différents statuts de la lettre en mathématiques. - Utiliser des lettres : • dans les exercices de mises en équations • pour prouver qu'une propriété est vraie.

Gestion	Commentaires
durée : 2 h - Travail par groupe de 2 ou 3 élèves. - Corriger un exercice toutes les 10 ou 15 min. - L'exercice 6 peut éventuellement être demandé en travail à la maison pour rester dans les temps.	- Cette activité est longue : l'enseignant ne doit pas perdre de vue les objectifs prioritaires de la séquence et ne pas trop s'attarder sur tous les problèmes ou les erreurs produites qui ne correspondent pas à ces objectifs. Exercice 5 : Il nécessite plus de temps. En général les élèves procèdent par « essais ». - La notion de « programme de calcul » et la notation f(x) sont introduites lors de la correction. La construction point par point de la courbe représentant l'aire hachurée a été demandée en devoir à la maison. - Une démonstration par des calculs sur les inégalités peut être reportée au moment du cours sur l'ordre dans $\mathbb{R}$.

Institutionnalisation

- Les différents rôles de la lettre en mathématiques :
  la lettre pour décrire une figure ou un ensemble de nombres (lettre désignation),
  un programme de calcul (lettre variable) ;
  pour prouver une règle (lettre paramètre) ;
  pour résoudre une équation (lettre inconnue).

Calcul mental - Calcul rapide

Calculs d'expressions en remplaçant une lettre par des nombres.

ex. : $f(x) = 2x^2 + 1$. Calculer $f(1)$; $f(-1)$; $f(2)$; $f(\sqrt{2})$.

N° 2

Des chiffres et des lettres

Exercice 1

Déterminer un ou plusieurs nombres entiers sachant que le produit de ce nombre par son suivant surpasse son carré de 13.

Exercice 2

Traduire en termes mathématiques l'affirmation suivante :

« Quand plusieurs fractions sont égales, et qu'on les ajoute terme à terme, on obtient une nouvelle fraction égale aux précédentes ».

Exercice 3

Un père a 45 ans, son fils 9 ans.

Dans combien d'années l'âge du père sera-t-il le triple de l'âge du fils ?

Exercice 4

L'affirmation suivante est-elle toujours vraie ?

« La somme de trois nombres entiers consécutifs est toujours divisible par trois ».

Exercice 5

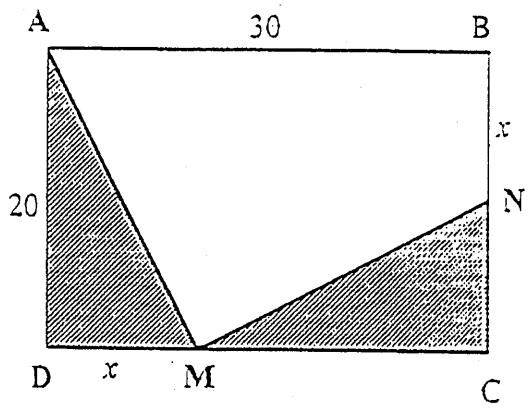
ABCD est un rectangle.

On a (en cm) AB = 30,

AD = 20,

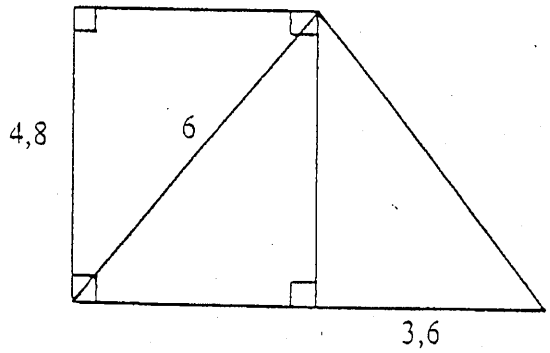
BN = DM = x.

Où faut-il placer le point M sur le segment [DC] pour que l'aire hachurée soit minimum ?



Exercice 6

Écrire un énoncé correspondant à la figure ci-dessous :



N° 3

Les ensembles de nombres

Difficultés	Connaissances mobilisées	Objectifs
- Un nombre et ses différentes écritures. - Valeur exacte, valeurs approchées d'un nombre.	- Géométrie : théorèmes de Pythagore et de Thalès.	- Inventaire des différents types de nombres rencontrés au collège. - Introduire la droite des réels.

Gestion	Commentaires
durée : 1 h - Recherche individuelle ou par groupe des exercices 1 et 2. - Bilan des démarches et correction collective. - L'exercice 3 est proposé aux élèves les plus rapides.	- Cette fiche est proposée après la présentation des ensembles de nombres. - La compréhension du texte, le décodage des figures et le choix de la stratégie posent problème à certains groupes (l'enseignant peut suggérer le théorème à utiliser à ceux qui ne « démarrent » pas dans l'exercice 2). - Il ne nous semble pas nécessaire de proposer des exercices de ce type en évaluation.

Institutionnalisation

- Les ensembles de nombres : notations, définitions.

Calcul mental - Calcul rapide

- Mémorisation des différentes écritures de nombres « courants »

ex. : $\frac{1}{4} = 0{,}25$; $\frac{5}{4} = 1{,}25$; $\frac{2}{3} \approx 0{,}666...$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{2}$ etc.

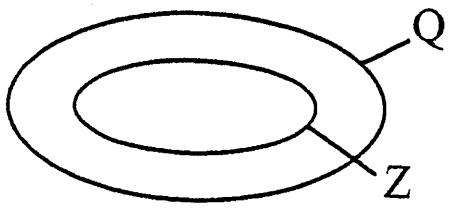
- Trouver une équation ayant des solutions dans $\mathbb{Z}$ mais pas dans $\mathbb{N}$; dans $\mathbb{D}$ mais pas dans $\mathbb{Z}$; etc.

N° 3

Les ensembles de nombres

Exercice 1

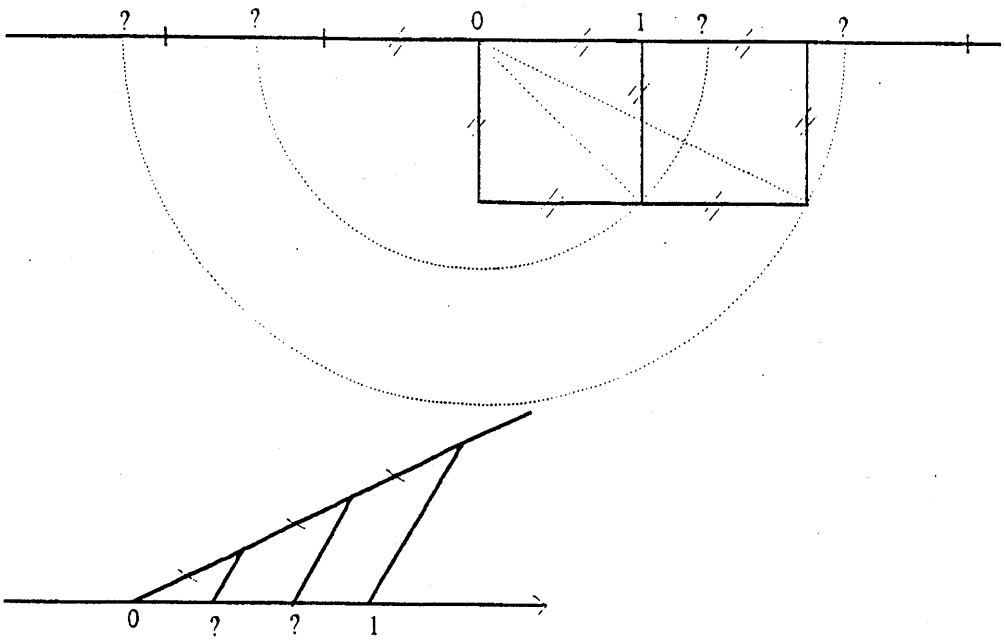
a) Compléter le schéma ci-dessous en plaçant les ensembles suivants : $\mathbb{R}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{D}$.



b) Placer dans ce schéma les nombres suivants :
$\frac{6}{7}$; $\sqrt{3}$; - 0,75 ; 3^{-2} ; $-\frac{3}{4}$; $2\sqrt{9}$; 10,33... ; $\frac{630}{42}$.

Exercice 2

1) Compléter, en justifiant les graduations ci-dessous :



N° 3 (suite)

Exercice 3

a) A l'aide d'une calculatrice, compare $0,6\overline{6}$ ..... et $\frac{6}{9}$;

$0,15\overline{15}$ .... et $\frac{15}{99}$;

$0,127\overline{127}$ .... et $\frac{127}{999}$.

Trouve une règle généralisant les résultats précédents.

b) Écrire sous forme de fraction $\frac{a}{b}$ ($a \in \mathbb{Z}$; $b \in \mathbb{Z}$)

les nombres suivants : $0,44\overline{4}$ .... ; $0,004\overline{4}$ ... ; $2,3544\overline{4}$.

Exercice 4

On donne $A(x) = (x^2 - 5)(2x - 7)(x - 3)(x^2 + 2)(3x + 2)$.

Résoudre l'équation $A(x) = 0$:

a) dans $\mathbb{R}$ b) dans $\mathbb{Q}$ c) dans $\mathbb{D}$ d) dans $\mathbb{Z}$

N° 4

Calculer avec des quotients des puissances

Difficultés	Connaissances mobilisées	Objectifs
- Utiliser des lettres pour démontrer.	- Les règles de calculs sur les quotients et les puissances.	utiliser des lettres : - pour généraliser ; - donner du sens aux transformations d'écriture.

Gestion	Commentaires
- Recherche individuelle ou par groupe lors de séances d'exercices d'entraînement.	• Cette fiche n'est pas utilisée telle quelle. Elle présente certains exercices donnés comme entraînement lors des séances de travaux dirigés sur le calcul numérique. • Les premiers temps, les élèves vérifient les résultats demandés sur un ou plusieurs exemples et considèrent ces vérifications comme des preuves. • Une évolution est observée ensuite : certains groupes proposent des calculs avec des lettres même s'ils n'aboutissent pas toujours.

Institutionnalisation

Rappel sur les différents statuts de la lettre, notamment la lettre pour conjecturer ou démontrer (la lettre paramètre).

Calcul mental - Calcul rapide

Dicter des calculs en langage naturel, l'élève doit les traduire en symboles mathématiques.

ex: la somme des inverses de a et de b ;
l'inverse de la somme de a et de b ;
etc...

N° 4

Calculer avec des quotients des puissances

(d'après cahiers d'évaluation à l'entrée en 2° et Terracher seconde).

Exercice 1

On considère deux nombres a et b. On note s leur somme et p leur produit.

1°) on donne $a = 9$ et $b = \frac{9}{8}$, calculer s et p.

2°) On donne $a = \frac{17}{11}$ et $b = \frac{17}{6}$, calculer s et p.

3°) Si cela est possible, citer deux fractions de numérateur 41 telles que $s = p$.

Exercice 2

On pose $A = \frac{x}{1 + x + x^2}$ où x désigne un nombre réel.

1°) Calculer A pour $x = \frac{1}{3}$ puis pour $x = 3$.

2°) Calculer A pour $x = -\frac{1}{5}$ puis pour $x = -5$.

3°) Quel résultat peut-on conjecturer ? Démontrer la conjecture.

Exercice 3

Calculer $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \ldots + \frac{1}{1990 \times 1991}$

Aide : $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \ldots$

Exercice 4

Calculer $B(n) = \frac{(8^{n+1} + 8^n)^2}{(4^n - 4^{n-1})^3}$ pour $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$, ...

Que peut-on conjecturer ? Pouvez-vous le prouver ?

Exercice 5

n désigne un nombre entier naturel.

Ranger par ordre croissant : $\frac{n+8}{n+7}$, $\frac{n+6}{n+7}$, 1 et $\frac{n+6}{n+5}$.

N° 5

Configurations et racines carrées

Difficultés	Connaissances mobilisées	Objectifs
- La notion de racine carrée (sens). - Les calculs avec des radicaux. - Vérification d'une égalité.	- Les configurations en géométrie du programme de 3ème. - Calculs avec radicaux.	- Utiliser le calcul algébrique pour démontrer en géométrie. - Revoir les configurations de base. - Introduire le cours sur les racines carrées.

Gestion

• Exercice 1 :
recherche individuelle rapide puis débat classe entière
En synthèse : 1ère définition de la racine carrée d'un nombre positif.

• Recherche individuelle ou en groupe des autres exercices .
Correction collective éventuelle si nécessaire.

Commentaires

• On retrouve dans les réponses des élèves toutes les erreurs classiques sur les racines carrées. Elles sont analysées et corrigées lors de la synthèse.

• L'écriture $\sqrt{3\sqrt{3}}$ étonne beaucoup les élèves : c'est l'occasion de décomposer un calcul.

• Le suivi individuel des élèves permet de les faire travailler sur la rédaction de démonstrations simples.

Institutionnalisation

- Deux définitions pour $\sqrt{a}$ $(a > 0)$:
  - c'est le nombre positif dont le carré est a.
  - c'est la solution positive de l'équation $x^2 = a$.
- Les règles de calcul sur les radicaux.

Calcul mental - Calcul rapide

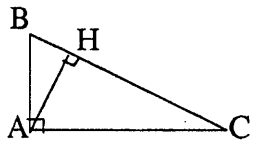
L'enseignant dicte un calcul en langage naturel, l'élève le traduit en langage symbolique avant de l'effectuer.
ex.: le carré de la somme de $\frac{1}{2}$ et 2.
la racine carrée du produit de 9 par 2...

N° 5

Configurations et racines carrées

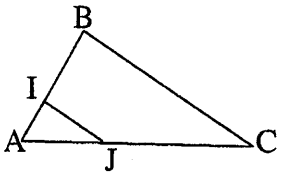
1 - Vrai ou faux ? (d'après IREM de BORDEAUX)

Proposition	V	F	Proposition	V	F
9 a pour carré $\sqrt{3}$			9 est la racine carrée de 81		
9 est le carré de 3 et de (-3)			(-9) est la racine carrée de (-81)		
(-3) a pour carré 9			$(-\sqrt{3})$ a pour carré 3		
(-3) est la racine carrée de 9			$3\sqrt{3}$ a pour carré 27		



ABC est un triangle rectangle en A. [AH] est une hauteur.
L'aire de ce triangle est 12 cm^2 .On donne AB = 2 $\sqrt{3}$.
Calculer AC, BC et AH.

3 -

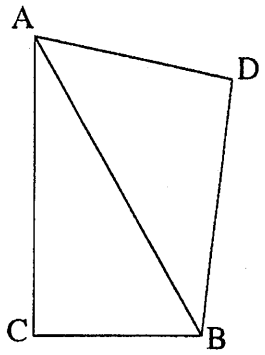


ABC est un triangle tel que :
AB = $\sqrt{5}$ + 1 ; AC = 5 ; BC = $\sqrt{5}$ + 4.
I est un point de [AB] tel que AI = 1.
La parallèle à (BC) passant pat I coupe (AC) en J.
Calculer le périmètre du triangle AIJ.

4 - Les mesures de certains côtés de la figure ci-contre sont les suivantes :

AB = 3 + $\sqrt{3}$; AC = 2 $\sqrt{3\sqrt{3}}$;

AD = 1 + $\sqrt{3}$; BD = 2 + $\sqrt{3}$.



a) Développer $(3 - \sqrt{3})^2$ et $(\sqrt{3} - 3)^2$.

b) ABC est rectangle en C . Calculer la valeur exacte de BC.

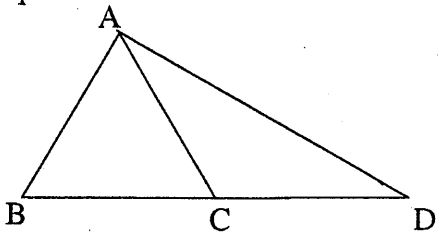
C) Le triangle ADB est-il rectangle ?

5 - ABC est un triangle équilatéral, et C est le milieu de [BD].

La longueur AB vaut 5cm.

Calculer la longueur AD.

Expliquer clairement la méthode utilisée.



N° 6

Etre ou ne pas être solution

Difficultés	Connaissances mobilisées	Objectifs
- Incapacité à contrôler une résolution d'équation.	- Les règles de calcul numérique. - Les résolutions d'équations simples de la forme : • $ax + b = 0$ • $ax^2 = b$ • équations produits.	- redonner du sens à « être solution d'une équation ». - montre qu'une résolution d'équation est aussi une démonstration.

Gestion	Commentaires
durée : 1/2 h - Travail individuel puis par groupe de deux. - Correction collective avec débat.	- La **version 1** est une activité d'introduction aux équations du 1er degré. - La **version 2** est proposée ultérieurement pour introduire les équations-produits. - On peut envisager encore d'autres versions du même genre (avec des équations quotient ou des inéquations par exemple).

Institutionnalisation

- Pour savoir (pour soi) si un nombre est solution d'une équation, on remplace la lettre inconnue de l'équation de départ par ce nombre et on regarde si l'égalité est vérifiée.

- (Pour la version 2) résoudre une équation, c'est chercher tous les nombres qui vérifient l'égalité et montrer que ce sont les seuls.

Calcul mental - Calcul rapide

Version 1 : résoudre sans calcul intermédiaire des équations du type $ax + b = c$ ou $ax + b = cx + d$.

Version 2 : ajouter des équations du type $(ax + b)(ax + d) = 0$.

N° 6

Etre ou ne pas être solution

Version 1

Pour chacune des équations ci-dessous, mettre une croix dans la case correspondante lorsqu'un nombre est solution, ou mettre une croix dans la dernière colonne si aucun des nombres proposés ne convient.

Nombres / Équations	- 9	- 3	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	Aucune solution parmi les nombres proposés.
$2x - 6 = 0$					
$x^2 - \frac{1}{9} = 0$					
$(x - 3)(x - 9) = 0$					
$x^2 - 9 = 0$					
$(x - \frac{1}{3})^2 = 0$					

Version 2

Pour chaque phrase, dire si elle est vraie ou fausse :

a) (-1) est une solution de l'équation $3x^2 + 5x + 1 = 0$;

b) 4 est une solution de l'équation : $-2x^2 + (8 + \sqrt{3})x - 4\sqrt{3} = 0$;

c) 2 est la solution de l'équation : $\frac{x - 1}{2} + \frac{x + 1}{3} = \frac{3}{2}$;

d) - 6 et 0 sont les solutions de l'équation : $(x + 3)^2 - 9 = 0$;

e) 3 et - 3 sont les solutions de l'équation : $x^3 - 9x = 0$.

N° 7

Transformer des écritures
Le triangle de Pascal

Difficultés	Connaissances mobilisés	Objectifs
- Instancier les règles de calcul algébrique (égalités remarquables). - Identifier le statut du signe « - ». - Généraliser abusivement des règles de calcul, par exemple : $(a + b)^2 \neq a^2 + b^2$.	- Calcul algébrique de troisième.	- Changer de stratégie pour mieux mémoriser et utiliser les égalités remarquables.

Gestion

durée : 1 h 30

1ère phase : Recherche individuelle de l'exercice I a). Synthèse collective avec analyse des erreurs.

2ème phase : Recherche en groupe de l'exercice I b). Synthèse collective avec présentation du triangle de Pascal.

Recherche des exercices I c) et d).

3ème phase : Recherche en groupe de l'exercice II.

Commentaires

Les réponses proposées par les élèves dans l'exercice I font apparaître :

- plusieurs généralisations abusives du genre :

$a^2 + b^2 + c^2 + 3$ abc pour $(a + b + c)^2$ ou $a^3 + b^3 + 3$ ab pour $(a + b)^3$.

- des erreurs sur le statut du signe moins. Le sens de l'écriture - a est à rappeler à chaque fois.

- des procédures erronées dans le développement d'un produit de trois facteurs.

L'exercice I c) d) permet de vérifier la bonne utilisation du triangle de Pascal.

Dans l'exercice II, la factorisation par a - b pour $a^3 - b^3$ a été soit induite par l'enseignant dans certains groupes ou obtenue après la factorisation de $a^4 - b^4$ sous la forme intermédiaire : $(a^2 + b^2)\ (a^2 - b^2)$.

Institutionnalisation

- Pour développer, une seule identité à connaître : le carré d'une somme.

- Le triangle de Pascal sert à développer $(a + b)^3$, $(a - b)^3$, etc.

Calcul mental - Calcul rapide

Développer des produits du type $(ax + b)\ (cx + d)$ ou $(ax - b)\ (bx + d)$ avec des coefficients a, b, c et d entiers relatifs.
Factoriser avec $a^2 - b^2$.

N° 7

Transformer des écritures
Le triangle de Pascal

Exercice I : DÉVELOPPER (les lettres désignent des nombres réels).

a) $(a+b+c)^2 =$	$(a+b-c)^2 =$	$(a-b-c)^2 =$

b) $(a+b)^2 =$

$(a+b)^3 =$

$(a+b)^4 =$

$(a+b)^5 =$

c) $(a-b)^2 =$

$(a-b)^3 =$

$(a-b)^4 =$

$(a-b)^5 =$

d) $(2x-3)^3 =$

Exercice II : FACTORISER (les lettres désignent des nombres réels).

a) Compléter les égalités :

$\mathbf{x^2}$ + 8x + ... = ( )^2 **2** $\mathbf{x^2}$ - ..... + 4 = (-)^2

9 x^2 - 12x + ... = (.)^2 4 $\mathbf{x^2}$ - ... . + 3 = (-)^2

$\mathbf{x^2}$ + x + ... = (.)^2

b)

$a^2-b^2 =$	$a^3-b^3 =$	$a^4-b^4 =$

N° 8

Classer des équations (ou des inéquations) avant de les résoudre

Difficultés	Connaissances mobilisées	Objectifs
- Choisir une méthode pour résoudre une équation.	- Méthodes de résolution d'équations de troisième (1er degré et équation - produit).	- Anticiper sur le degré avant de résoudre une équation (ou une inéquation).

Gestion	Commentaires
durée : 1 h (pour une version). - Travail individuel puis par groupe de 3 ou 4 élèves. - Synthèse des différents classements obtenus dans chaque groupe. Critique, analyse et choix d'un même classement pour tous, à partir du degré de l'équation. - Résolution d'une ou deux équations dans chaque catégorie en travail individuel.	- Il faut bien préciser la consigne : les élèves ont tendance à résoudre aussitôt ou cherchent un classement sur des critères de forme (ex. « les équations avec des fractions ») et non suivant le mode de résolution (pour la version 2). - Proposer de « démarrer » une résolution pour les équations que le groupe ne sait pas où placer. - Autre gestion possible : initialiser le classement dès le départ, classe entière. - Le même type d'activité à partir d'inéquations est proposé ultérieurement et le critère de classement suivant le degré est alors trouvé plus vite.

Institutionnalisation

- Rédaction d'une fiche méthode :

Comment résoudre une équation.

Comment résoudre une inéquation.

Calcul mental - Calcul rapide

ex : - résoudre des équations-produits.
- écrire des équations dont les solutions sont 5 et - 7
dont une solution est 2...

ou

- résoudre des inéquations simples du premier degré.

N° 8

Classer des équations avant de les résoudre

◆ *Classer les équations suivant leur mode de résolution.*

◆ *Résoudre (au moins) une équation de chaque catégorie.*

Version 1

a) $-4x^2+25=0$

b) $4x^2=8x$

c) $5(3-x\sqrt{2})+7=12-7x\sqrt{2}$

d) $4x^3-x=0$

e) $2x^2-4x+4=3x^2+x-(1-x)^2$

f) $(x-\sqrt{2})^2=4x^2$

g) $(2x-1)^2=(2x-4)(2x+4)$

h) $x^2-4=16$

i) $3x^2-3x=(x+1)^2$

j) $x^2-4+(x+2)^2=0$

k) $(3x+5)^2-(x+1)^2=0$

l) $(x-8)(-2x-2)=(x+4)^2$

Version 2

a) $3x+2=0$

b) $(3x+1)^2=(3x+4)(3x-4)$

c) $(5x+2)(1-x)=0$

d) $7x^2+14x=0$

e) $\frac{x}{3}=\frac{1}{2}$

f) $\frac{x^2}{4}=\frac{1}{2}$

g) $(2x+1)^2=(x+3)^2$

h) $x^2-10=0$

i) $25x^2-9=0$

j) $\frac{x+7}{4}-\frac{x-1}{6}=\frac{x+2}{3}$

k) $7x^2+14=0$

l) $2(x+7)=26+3(x-4)-x$

m) $(3x+1)^2-(x-2)^2=0$

N° 8 bis

Classer des inéquations avant de les résoudre

◆ *Classer les inéquations suivant leur mode de résolution.*

◆ *Résoudre (au moins) une inéquation de chaque catégorie.*

☐ **A :** $2x - 3(4x + 1) + 6 \leq 6x - 2(3x + 1)$.

☐ **B :** $9x^2 > 16$.

☐ **C :** $2(x + 1)(x - 3) > 2x^2 - 18$.

☐ **D :** $(a - 3)^2 \leq 2(a + 4)(3 - a)$.

☐ **E :** $-5 < -2x + 5 \leq 15$.

☐ **F :** $\frac{x - 7}{5} + 1 > \frac{8}{5} - \frac{3x + 4}{2}$.

☐ **G :** $4 < (x + 3)^2 \leq 9$.

☐ **H :** $\frac{x - 5}{2 - x} \geq 0$.

☐ **I :** $2a^3 + 4a^2 + 2a \geq 0$.

☐ **J :** $25y^2 - 4 > (5y + 2)(4y - 7)$.

N° 9

Valeur Exacte - Valeurs Approchées

Difficultés	Connaissances mobilisées	Objectifs
- Confusion entre la valeur exacte et une valeur approchée. - Mauvaise analyse d'un résultat obtenu à la calculatrice.	- Utilisation de la touche puissance d'une calculatrice. - Les relations métriques dans un triangle rectangle.	- Distinguer la nature d'un résultat (valeur exacte - valeur approchée). - Choisir suivant le contexte la valeur appropriée. - Critiquer un résultat.

Gestion	Commentaires
Durée : 1 h - Recherche individuelle de l'exercice 1, suivie d'un débat. - Recherche individuelle des exercices 2 et 3. - Synthèse et institutionnalisation. - Exercice 4 (qui peut-être terminé à la maison).	• Suivant le type de calculatrices, les élèves ne trouvent pas le même résultat. Le débat porte sur « Comment prouver que le résultat n'est pas correct ?». • Les élèves pensent souvent que lorsque l'écran de la calculatrice est plein, la valeur est exacte. L'exercice 3 permet de prouver que ce n'est pas toujours le cas. • Dans l'exercice 3, la justification du c) n'est pas du niveau seconde mais l'inexactitude du résultat est acceptée du fait de la variété des réponses obtenues. • L'exercice 4 permet aux élèves de constater que suivant les valeurs utilisées, le résultat final peut être très différent.

Institutionnalisation

- Recensement de méthodes pour contrôler la vraisemblance d'un résultat, pour reconnaître si la valeur obtenue est approchée.

- Utilisation des signes « = » et « ≈ ».

- Utilisation des mémoires et de la touche «Ans» de la calculatrice.

N° 9

Valeur Exacte - Valeurs Approchées

Exercice 1

a) Utiliser la calculatrice pour compléter :

$(0{,}5)^{345} =$; $\dfrac{10^{23}}{23^{10}} =$; $7896542^2 - 7896540 \times 7896544 =$

b) Ces résultats semblent-ils corrects ? Essayer d'argumenter la réponse.

Exercice 2

Pour chaque valeur de x, rayer les valeurs approchées :

x				
π	3,14	$\frac{22}{7}$	3,1415954	$\frac{355}{113}$
$\sqrt{0{,}0625}$	0,2	0,25	$\frac{1}{4}$	0,3
sin 45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0,707106781	0,7	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\frac{53}{15625}$	0,003	0,003392	0,0034	$\frac{159}{46875}$
$\frac{1}{3}$	0,3	0,333333333	$\frac{3}{10}$	$\frac{33}{100}$

Exercice 3

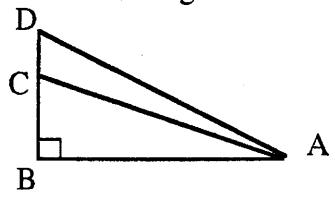
a) Le nombre 2,645751311 est-il une valeur exacte de $\sqrt{7}$?

b) Le nombre 2,447265625 est-il une valeur exacte de $\frac{1253}{512}$?

c) Le nombre 0,587785252 est-il une valeur exacte de sin 36° ?

Exercice 4

On donne la figure suivante :



Pour calculer la longueur CD, voici deux solutions données par 2 élèves. Qu'en pensez-vous ? En avez-vous une autre à proposer ?

données :

$BC = 30.$ $\widehat{BAC} = 25°.$ $\widehat{BAD} = 35°.$

Solution 1

Dans le triangle ABC rectangle en B :

$\tan 25° = \dfrac{BC}{AB}$, donc $0{,}46 = \dfrac{30}{AB}$;

on en déduit : $AB = \dfrac{30}{0{,}46} = 65{,}21$

Dans le triangle ABD rectangle en B :

$\tan 35° = \dfrac{BD}{AB}$, donc $0{,}7 = \dfrac{BD}{65{,}21}$

on en déduit $BD = 0{,}7 \times 65{,}21 = 45{,}64$;

donc $CD = BD - BC = 45{,}64 - 30 = 15{,}64$.

Solution 2

Dans le triangle ABC rectangle en B :

$\tan 25° = \dfrac{BC}{AB}$, donc $0{,}47 = \dfrac{30}{AB}$;

on en déduit : $AB = \dfrac{30}{0{,}47} = 63{,}83$

Dans le triangle ABD rectangle en B :

$\tan 35° = \dfrac{BD}{AB}$, donc $0{,}7 = \dfrac{BD}{63{,}83}$

on en déduit $BD = 0{,}7 \times 63{,}83 = 44{,}68$;

donc $CD = BD - BC = 44{,}68 - 30 = 14{,}68$.

N° 10

Contrôler des résolutions d'équations

Difficultés	Connaissances mobilisées	Objectifs
- Manque de moyens de contrôle d'une résolution d'équation. - Analyse des erreurs.	- Les règles de calcul algébrique. - Les méthodes de résolutions d'équations.	Justifier des méthodes de résolutions d'équations.

Gestion

Durée : 1 h

- Travail individuel (20 min)

-Travail de groupe (3 à 4 élèves). Le groupe doit se mettre d'accord sur chaque équation et rédiger son analyse sur un transparent qu'il présentera ensuite à la classe.

- Synthèse collective.

Commentaires

• Beaucoup d'élèves dans un premier temps se contentent de répondre juste ou faux : l'enseignant leur rappelle qu'il s'agit surtout de justifier leurs réponses.

• Procédures le plus souvent mobilisées :

- résolution de l'équation ;
- calculs pour vérifier l'égalité de départ avec les solutions données.

• L'activité qui consiste à analyser leurs propres erreurs sur les exercices proposés en évaluation par exemple, est systématique tout au long de l'année, mais ne débouche pas sur les mêmes objectifs : il s'agit plutôt d'une vérification pour soi.

Institutionnalisation

* Peut-on rectifier une résolution en testant les solutions ? (lien entre degré et nombre de racines).
* Quand on « simplifie » (divise) les deux membres d'une équation par x c'est que $x = 0$ est **une** solution. On considère alors $x \neq 0$ pour en déterminer éventuellement d'autres.

* On ne « divise » pas les deux membres d'une équation d'inconnue x, par une expression contenant cette inconnue, car cette expression peut être nulle.

* Cas particulier de l'équation $x^2 = a$.

* Traitement des résolutions d'équations par équivalence ; chaque étape étant justifiée par des règles de calcul algébrique.

Calcul mental - Calcul rapide

• Inventer une équation du second degré • sans solution ;
• avec une seule solution ;
• avec deux solutions.
• Inventer une équation du second degré dont les solutions sont 1 et 2 ou 1 et - 2 etc.
• Résolution d'équations simples ; ex. : $x^2 + x = 0$.

N° 10

Contrôler des résolutions d'équations

Voici les résolutions de cinq équations. Sont-elles correctes ? (Expliquer les réponses).

Equation 1

$$x^2 + 3x = 2x^2 - x$$
$$x(x + 3) = x(2x - 1)$$
$$x + 3 = 2x - 1$$
$$x = 4$$

Equation 2

$$(x - 2)(x + 2)(x^2 + 2) = 0$$
$$x = 2 \text{ ou } x = -2 \text{ ou } x = -\sqrt{2}$$

Equation 3

$$x^4 - x^3 + x^2 - x = 0$$
$$x^2(x^2 - x) + x^2 - x = 0$$
$$(x^2 - x)(x^2 + 1) = 0$$
$$x = 0 \text{ ou } x = 1$$

Equation 4

$$3x^3 - x + 6x^2 - 2 = 0$$
$$x(3x^2 - 1) + 2(3x^2 - 1) = 0$$
$$(3x^2 - 1)(x + 2) = 0$$
$$(3x - 1)(x + 1)(x + 2) = 0$$
$$x = \frac{1}{3} \text{ ou } x = -1 \text{ ou } x = -2$$

Equation 5

$$x^4 - 6x^2 + 8 = 0$$
$$(x^2 - 3)^2 - 1 = 0$$
$$(x^2 - 3)^2 = 1$$
$$x^2 = 4$$
$$x = 2 \text{ ou } x = -2$$

Pour les résolutions qui sont fausses, trouver une équation dont les solutions sont celles qui ont été trouvées.

N° 11

Calcul mental - Calcul rapide
Exemple de fiche

Difficultés	Connaissances mobilisées	Objectifs
- Mémorisation de calculs intermédiaires. - Rapidité d'exécution.	- Techniques de base en calcul algébrique.	- Entraînement sur des techniques de base (développer, factoriser). - Automatiser des procédures.

Gestion	Commentaires
Consigne Ne doit figurer sur la feuille que le résultat final. Tous les calculs intermédiaires sont à faire mentalement. Travail individuel Pour chaque exercice les élèves démarrent en même temps et signalent en levant la main quand ils ont terminé. Une correction collective rapide est donnée en signalant les calculs intermédiaires qui étaient à faire mentalement.	- La vitesse est un enjeu pour beaucoup d'élèves ; c'est à celui qui terminera le premier, sans faire d'erreur. - Le fait que les calculs intermédiaires ne doivent pas être écrits « bloquent » certains élèves. L'enseignant les aide à analyser leurs difficultés et éventuellement leur permet de ne pas respecter la consigne en écrivant le moins possible de calculs intermédiaires. - L'exercice 4 posent plus de problèmes, beaucoup d'élèves ne font pas le lien avec l'exercice 3 pour l'exemple 1 et 3. L'exemple 2 est un « piège » : un tableau de signes intermédiaire est nécessaire.

Institutionnalisation

Pour soulager la mémoire de travail certains calculs doivent être automatiques : d'où l'importance du calcul mental et d'un entraînement régulier.

Calcul mental - Calcul rapide

N° 11

Calcul mental - Calcul rapide
Exemple de fiche

1)

Expression	Forme développée, réduite et ordonnée	Forme factorisée
$25\,x^2 - 4 - (5x + 2)(-x + 1)$		
$(-x + 2)^2 - 4\,x^2$		
$x^2 - 6x + 9 - (2x - 1)^2$		

2)

Équation	Ensemble des solutions
$-3x + 9 = 0$	
$-9x - 20 = x$	
$(5x + 15)(-2x + 14) = 0$	
$6x(-3x - 2) = 0$	

3)

Inéquation	Ensemble des solutions
$2x - 6 > 0$	
$2x - 6 \leq 0$	
$-3x - 9 > 0$	
$-3x - 9 \leq 0$	

4)

$(2x - 6)(-3x - 9) > 0$	
$(-3x + 2)(4x - 8) \leq 0$	
$\frac{2x - 6}{-3x - 9} \leq 0$	

Égalité - Implication Équivalence

Difficultés	Connaissances mobilisées	Objectifs
- Distinguer une expression (désignant un objet) d'une proposition (phase exprimant une relation). - Confusions entre = et ⇔, entre ⇒ et ⇔ .	Balayage d'un grand nombre de connaissances de seconde.	- Utiliser et distinguer les notions : implique ... équivaut à ... est égale à ... - Connaissance des symboles ⇒ ; ⇔ ; = .

Gestion	Commentaires
durée : 2 fois 1 heure ou 1 heure 30. Pour chaque exercice : - recherche en groupe. - débat et bilan collectifs.	- L'exercice 1 est traité rapidement. La mise en commun des résultats dans la classe permet de corriger une fois de plus des erreurs courantes. - La recherche en groupe de l'exercice 2 demande plus de temps. - Ce type d'activité peut être proposé plusieurs fois dans l'année à partir d'exemples correspondant au champ étudié pendant cette période (exemple : au moment de l'étude des vecteurs).

Institutionnalisation

- Un contre- exemple suffit pour montrer qu'une implication est fausse.
- Une équivalence est une « double implication ».
- Le signe = se place entre deux expressions désignant des nombres.
- Les signes ⇒ et ⇔ se placent entre deux phrases.
- Utilisation du signe ⇔ dans la rédaction d'une résolution d'équation ou d'inéquation.

Calcul mental - Calcul rapide

- Répondre par Vrai ou Faux.
  ex. : si $x = 1$ alors $x^2 - 1 = 0$;
  si $x^2 - 1 = 0$ alors $x = 1$.

- Inventer des implications vraies, des équivalences fausses, etc...

N° 12

Égalité - Implication
Équivalence

$\Rightarrow$	*signifie*	***entraîne***	*et sépare deux phrases*
$\Leftrightarrow$	*signifie*	***équivaut à***	*et sépare deux phrases*
=	*signifie*	***est égal à***	*et sépare deux expressions*

Exercice 1 : Voici une liste de phrases :

	Phrases A	**Phrases B**
1	J'habite en Haute-Vienne	J'habite en France
2	J'ai la grippe	Je suis malade
3	ABCD est un parallélogramme	AB = DC
4	$x > 5$	$x > 3$
5	I est le milieu de [AB]	IA = IB
6	$x^2 = 9$	$x = 3$
7	x est un entier relatif	x est un réel
8	$x \in [1 ; +\infty[$	$x \geq 1$
9	$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont colinéaires	A, B, D sont alignés
10	$x = 2$	x est solution de l'équation $(x - 2)(3x + 1) = 0$
11	$x^2 \geq 1$	$x \geq 1$
12	ABC est un triangle rectangle et isocèle	ABC est un triangle qui a un angle de 45°
13	$x \in [1 ; 2]$	$x \geq 0$

Compléter le tableau suivant par VRAI ou FAUX en utilisant les phrases précédentes :

	Si on a **A**, alors on a **B** **A** entraîne **B** **A $\Rightarrow$ B**	Si on a **B** alors on a **A** **B** entraîne **A** **B $\Rightarrow$ A**	Si on a A alors on a B et si on a B alors on a A **A équivaut à B : A $\Leftrightarrow$ B** **B équivaut à A : B $\Leftrightarrow$ A**
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			
13			

N° 12

Exercice 2

Voici une liste d'étiquettes (phrases ou expressions) :

A $(x-3)^2-16$	**H** $(x+\sqrt{2})^2-5$	**O** $(x+1)(x-7)=0$
B $6x+4y-4=0$	**I** $x+1=0$ ou $x-7=0$	**P** $x+1>0$ et $x-7>0$
C $3x+2y-2$	**J** $\begin{cases} 2x-3y=1 \\ -4x+6y=-2 \end{cases}$	**Q** $5 \leq L+1 \leq 7$
D $x^2 \geq 4$	**K** $4 \leq L \leq 5$ et $1 \leq 1 \leq 2$	**R** $6x+4y-4$
E $(x+1)(x-7)>0$	**L** $(x-7)(x+1)$	**S** $9x^2-25$
F $(9x-5)(9x+5)$	**M** $x+1>0$ ou $x-7>0$	**T** $3x+2y-2=0$
G x^2-3	**N** $x=2$ et $y=1$	**U** $x \geq 2$

Compléter le tableau ci-dessous en utilisant ces étiquettes (utiliser au moins une fois chaque étiquette).

	... = ...	... $\Leftrightarrow$ ...	... $\Rightarrow$ ...
phrases vraies			
phrases fausses			

N° 13

Rédiger en algèbre : Démontrer une égalité

Difficultés	Connaissances mobilisées	Objectifs
- Rédiger la démonstration d'une égalité.	Les règles de calcul algébrique.	- Rédiger une démonstration en algèbre.

Gestion	Commentaires
Durée : 1 h - Travail individuel.	• Cette fiche est accompagnée d'une fiche d'aide sur les différentes façons de démontrer une égalité. • L'activité se fait en module, chaque élève travaille à son rythme. • Seuls les meilleurs élèves abordent le dernier exercice.

Institutionnalisation

Comment rédiger la démonstration d'une égalité.

Calcul mental - Calcul rapide

Expressions simples à factoriser ou à développer.

N° 13

Rédiger en algèbre : Démontrer une égalité

1 - Vérifier les égalités suivantes : $2^2 + 2 = 3^2 - 3$;
$3^2 + 3 = 4^2 - 4$;
$20^2 + 20 = 21^2 - 21$.

Compléter de même : $110^2 + 110 = \ldots\ldots$.

Peut-on écrire une égalité : $a^2 + a = \ldots\ldots$? Justifier

2 - Démontrer les égalités suivantes (préciser si nécessaire les valeurs interdites).

- $(x + y)^2 - (x - y)^2 = 4xy$
- $\frac{a}{b} - \frac{a}{a+b} = \frac{a}{b} \times \frac{a}{a+b}$
- $x^2 + x - 9 = (x + \frac{1}{2})^2 - \frac{37}{4}$
- $\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = \sqrt{3} - 1$
- $\frac{1}{x-1} + \frac{x}{x-5} = \frac{(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})}{(x-3)^2 - 4}$

3 - On donne $A(x) = (2x - 1)^2 - 4x^2$ et $B(x) = -x(1 - 2x) - 1$.
Calculer $A(\frac{1}{2})$ et $B(\frac{1}{2})$. Calculer $A(-2)$ et $B(-2)$.
Peut-on dire que $A(x) = B(x)$?

4 - Des égalités curieuses à vérifier :

$\sqrt{4} + \sqrt{1} = 4 - 1$;
$\sqrt{9} + \sqrt{4} = 9 - 4$;
$\sqrt{16} + \sqrt{9} = 16 - 9$;
et $\sqrt{25} + \sqrt{16} = ?$

Vérifier que :

$\sqrt{(n+1)^2} + \sqrt{n^2} = (n+1)^2 - n^2$, pour tout entier naturel n.

N° 13 bis

Fiche d'aide : Démontrer une égalité

◆ Égalité et équation

Une égalité est une affirmation. Elle est vraie quelles que soient les valeurs données aux lettres (« variables »), exceptées les valeurs interdites (à l'avance).

Une équation n'est vraie que pour certaines valeurs données aux lettres (« inconnues »). Résoudre une équation c'est chercher toutes ces valeurs.

◆ Comment démontrer l'égalité A = B ?

• *On peut transformer A de façon à obtenir B .*

exemple : Pour démontrer que $2(a+3) - (a+1)^2 = 5 - a^2$;

j'écris : $2(a+3) - (a+1)^2 = 2a + 6 - (a^2 + 2a + 1)$

$= 2a + 6 - a^2 - 2a - 1$

$= 5 - a^2$.

• *On peut transformer A et B de façon à obtenir une même expression C.*

exemple : Pour démontrer que $(a+1)^2 - 2a = (a-1)^2 + 2a$;

j'écris : $(a+1)^2 - 2a = a^2 + 2a + 1 - 2a$

$= a^2 + 1$

$(a-1)^2 + 2a = a^2 - 2a + 1 + 2a$

$= a^2 + 1$

donc $(a+1)^2 - 2a = (a-1)^2 + 2a$.

• *On peut calculer A - B et trouver que c'est égal à 0 .*

exemple : Pour démontrer que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$,

je calcule la différence : $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) - (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CB}$

$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BC}$

$= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA}$

$= \overrightarrow{0}$.

J'en déduis que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$.

• *On peut, si A et B sont de même signe et contiennent des radicaux, comparer leurs carrés.*

exemple : Pour démontrer que $26\sqrt{5} = 2\sqrt{845}$;

j'écris : $(26\sqrt{5})^2 = 676 \times 5 = 3380$;

$(2\sqrt{845})^2 = 4 \times 845 = 3380$.

Comme $26\sqrt{5}$ et $2\sqrt{845}$ sont des nombres positifs, j'en déduis que : $26\sqrt{5} = 2\sqrt{845}$.

N° 14

Choisir la bonne forme pour...

Version 1
Version 2

Difficultés	Connaissances mobilisées	Objectifs
- Trouver une stratégie pour résoudre un problème : (résoudre une équation. ...).	- Développer. - Factoriser. - Produit nul. Pour la version 2 : - Étude des fonctions et fonctions associées.	- Identifier des expressions algébriques égales. -Trouver la forme adaptée pour résoudre une équation, répondre à une question posée.

Gestion	Commentaires
durée :1 h (Pour une version). - Recherche par groupes de trois ou quatre élèves pour identifier les expressions égales (10 min). - Synthèse collective sur la rédaction de la démonstration. - Recherche en groupes sur les résolutions d'équations. - Synthèse collective et bilan.	- Identifier les expressions égales ne soulève pas de difficulté particulière dans les groupes. Les élèves se corrigent mutuellement les erreurs de calculs. - C'est dans la rédaction de la démonstration que des incorrections apparaissent. - Dans certains groupes une aide est nécessaire pour faire le lien entre les deux questions.

Institutionnalisation

- Fiches méthodes : « Comment démontrer que deux expressions sont égales ».

« Comment résoudre une équation ».

Calcul mental - Calcul rapide

- Développer et factoriser des expressions simples

$(5x + 2)(x - 1)$;
$(x + 3)^2 - 25$.

- Résoudre des équations simples

$-3x + 9 = 0$;
$(5x + 1)(-x + 2) = 0$;
$4x^2 + x = 0$.

N° 14

Choisir la bonne forme pour...

Version 1

I 1°) Retrouver les expressions égales :

$A(x) = -49x^2 + 14x + 3$;

$B(x) = 3x(x - 6)$;

$C(x) = 3x + 2)(x - 2) - (x - 2)$;

$D(x) = 2x - 3)^2 - x^2 - 6x - 9$;

$E(x) = 4 - (7x - 1)^2$;

$F(x) = 3x^2 - 5x - 2$;

$G(x) = (3 - 7x)(1 + 7x)$.

2°) Résoudre dans R les équations :

a) : $-49x^2 + 14x + 3 = 0$;

b) : $4 - (7x - 1)^2 = 3$;

c) : $(2x - 3)^2 = x^2 + 6x + 9$;

d) : $3x^2 - 5x - 2 = 0$.

N° 14 bis

Choisir la bonne forme pour...

Version 2

1. Parmi les expressions suivantes, retrouver celles qui sont égales :

$A(x) = (x-3)^2 + 2$

$B(x) = 8 - (x+1)^2$

$C(x) = -x^2 - 2x + 7$

$D(x) = (2x-3)(2x+3) - (x-2)(3x+2)$

$E(x) = x(x-6) + 11$

$F(x) = (3-x)(3+x) - 2(x+1)$

$G(x) = (x+2)^2 - 9$

2. Choisir la bonne forme pour répondre aux questions suivantes :

a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $-x^2 - 2x + 7 = 0$.

b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les deux inéquations : $x^2 - 6x + 11 \geq 0$ et $x^2 + 4x - 5 < 0$.

c. Etudier le sens de variation de la fonction $f : x \longrightarrow -x^2 - 2x + 7$.

d. Construire la courbe représentative de la fonction $g : x \longrightarrow x^2 + 4x - 5$
(on pourra utiliser la parabole d'équation $y = x^2$).

Racine d'un polynôme et Factorisation

Difficultés	Connaissances	Objectifs
• Factoriser certaines expressions polynômiales.	- Monôme de plus haut degré. - Monôme de plus bas degré.	- Amener les élèves qui réussissent à expliciter leurs connaissances « en acte » en calcul algébrique.

Gestion	Commentaires
• Situation de communication. Autant de groupes « récepteurs » que de groupes « émetteurs ».	Les groupes « émetteurs » ont la liste des polynômes sous forme factorisée. Les groupes « récepteurs » ont la liste de ces mêmes polynômes sous forme développée.
1ère phase (en groupe). Les émetteurs réalisent leurs messages et les récepteurs leurs questions.	• Chaque groupe « émetteur » doit donner des renseignements sur un des polynômes de sa liste désigné par l'enseignant pour que le groupe « récepteur » qui lui est associé puisse identifier la forme développée correspondante. • Les groupes « récepteurs » prévoient les questions qu'ils aimeraient poser si les renseignements que vont leur fournir les émetteurs ne suffisaient pas.
2ème phase : Synthèse collective.	Dès qu'un groupe émetteur croit avoir fourni assez de renseignements, le message est passé au groupe récepteur ; si l'enseignant estime que les informations fournies sont suffisantes, il donne les formes développées au groupe émetteur (pour les occuper). Si les informations sont insuffisantes, le groupe récepteur envoie son questionnaire au groupe émetteur.
3ème phase (en groupe). Les critères sont mis à l'épreuve avec tous les polynômes.	L'enseignant sollicite d'abord un groupe récepteur qui a échoué ; « Quels renseignements avez-vous eu ? » « Quels renseignements manquaient ? ». Puis un groupe qui a réussi. Les renseignements (critères) fournis sont écrits au tableau (dans le langage des élèves).
4ème phase: Synthèse collective.	L'enseignant essaie de faire « décontextualiser » les renseignements utilisés par les élèves en leur demandant de résumer les critères utilisés. Il espère ainsi obtenir une formulation générale.

Institutionnalisation

Il ne s'agit pas ici d'enseigner des savoirs de la classe de première sur les polynômes.

Sur une forme factorisée, on peut « lire » ;

- les racines ;
- le terme du plus haut degré ;
- le terme du plus bas degré.

Calcul mental - Calcul rapide

• Exercice 1 et Exercice 2 de la fiche élève

N° 15

Racine d'un polynôme et Factorisation

Polynômes fournis aux élèves ;

Formes factorisées :

A : $x(x-1)^2 (x + 1)(x + 4)$;

B : $x(x-1)(x + 2)^2$;

C : $x(x - 1)^2(x + 2)^2$;

D : $x(x - 1)^2(x + 4)$.

Formes développées :

a : $x^5 + 2x^4 - 3x^3 - 4x^2 + 4x$;

b : $x^4 + 3x^3 - 4x$;

c : $x^4 + 2x^3 - 7x^2 + 4x$;

d : $x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 3x^2 + 4x$.

EXERCICES DE RÉINVESTISSEMENT

ex 1) : Lorsque cela est possible, terminer la factorisation :

$x^2 + 2x - 8 = (x - 2)$ .....

$x^2 + x - 2 = (x - 1)$ .....

$x^2 - 3x + 1 = (x - 2)$ .....

$2x^2 + 5x + 3 = (x + 1)$ .....

$-3x^2 - 4x + 4 = (x + 2)$ .....

ex 2) : Ecrire une équation du second degré dont les solutions sont 2 et - 3.

ex 3) : Factoriser chaque expression :

$A(x) = 2x^2 - 4 + (x - 1)(x - \sqrt{2})$;

$B(x) = x^2 + 5x - 6 + (x - 1)(x - 2)$.

N° 16

Racine d'un polynôme - Factorisation par x - a

Difficultés	Connaissances mobilisées	Objectifs
• Utiliser un graphique pour vérifier mais non pour prouver. • Traduire algébriquement un problème graphique.	- Résolution d'équations. - Lecture graphique.	- Se donner des moyens de vérifier une résolution d'équation. - Factoriser un polynôme quand une racine est connue. - Associer degré d'une équation et nombre de solutions.

Gestion

Durée : 1 h

- Travail individuel puis par groupes de deux ou trois élèves.

- 1ère synthèse intermédiaire rapide avant la résolution de l'équation : $f(x) = g(x)$.

- Recherche en groupe de la résolution de cette équation.

- Synthèse et bilan.

Commentaires

Cette fiche est proposée en synthèse du travail sur le calcul algébrique en seconde.

- L'enseignant doit veiller à ce que les procédures utilisées pour associer courbes et fonctions soient explicitées.

- L'utilisation de la calculatrice uniquement, ou le calcul de l'image d'un nombre quelconque plutôt que d'un nombre particulier comme 0 sont discutés classe entière dans une première synthèse.

- L'ordonnée du point d'abscisse 2 est donnée graphiquement et certains groupes ne proposent que cette solution avec ou sans vérification par le calcul.

- Le prolongement des courbes pour trouver l'autre solution est rarement proposé.

- Le problème de la résolution de l'équation $f(x) = g(x)$ est posé à tous après une synthèse collective intermédiaire.

- La résolution $f(x) = g(x)$ pose problème, les procédures erronées sont critiquées et la méthode générale rappelée (il faut factoriser le 1er membre de l'équation $f(x) - g(x) = 0$).

- Certains élèves utilisent la forme canonique utilisée sur des exemples dans une leçon précédente sur le sens de variation d'une fonction..

Institutionnalisation

Quand **a** est racine d'un polynôme, on peut factoriser ce polynôme par **x - a.**

Calcul mental - Calcul rapide

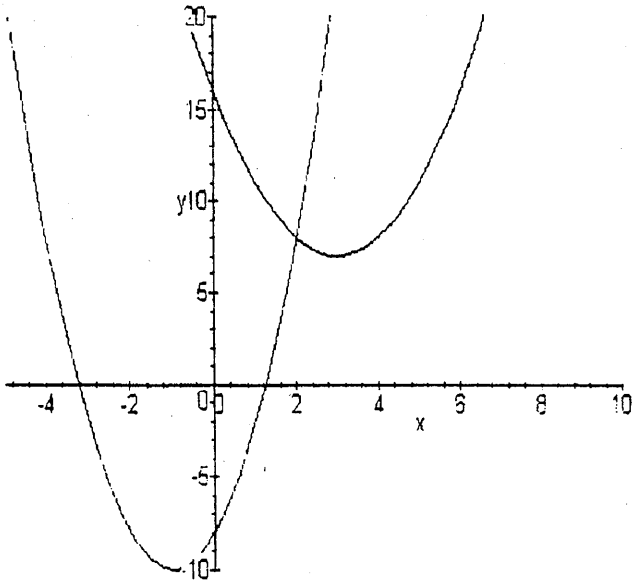
• Résolution des équations simples du type $x^3 + x = 0$;
$x^2 + 3x + 2 = 0$.

• Inventer des équations répondant à certaines conditions. ex. :
  • du second degré dont une solution est 2 ;
  • du 3ème degré ayant - 1; 1 et 3 comme solutions ;
  • du 3ème degré n' ayant que 2 solutions.

N° 16

Racine d'un polynôme - Factorisation par x - a

(d'après une idée de R. Douady)



f et g sont deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = 2x^2 + 4x - 8$
$g(x) = x^2 - 6x + 16$

Avec une calculatrice graphique, on a obtenu les courbes C_1 et C_2.

Déterminer celle qui représente f et celle qui représente g.

Déterminer les coordonnées des points d'intersection de C_1 et C_2.

ANNEXES

Bibliographie

1) Boule F. (1994). *Difficultés algébriques - Analyse de réponses.* Feuille de vigne n° 52, IREM de Dijon.

2) Bronner A. (1992). *Connaissances d'élèves maliens à propos de la racine carrée.* Petit x n° 28, IREM de Grenoble.

3) Capponi B. Clarou Ph. (1985). *Éléments pour l'élaboration d'activités de calcul algébrique en premier cycle.* Petit x n° 5, IREM de Grenoble.

4) Chevallard Y. (1991) La transposition didactique. La Pensée sauvage, Grenoble.

5) Chevallard Y. (1985). *Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège*, première partie, *L'évolution de la transposition didactique..* Petit x n° 5, IREM de Grenoble.

6) Chevallard Y. (1989). *Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège*, deuxième partie, *Perspectives curriculaires : la notion de modélisation..* Petit x n° 19, IREM de Grenoble.

7) Chevallard Y. (1989-1990). *Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège*, troisième partie, *Voies d'attaque et problèmes didactiques* . Petit x n° 23, IREM de Grenoble.

8) Cortès A. (1994). *Modélisation cognitiviste : Invariants opératoires dans la résolution des équations.* Vingt ans de didactique des mathématiques en France, La pensée sauvage, Grenoble.

9) Duverneuil J. (1995). Prendre en compte les erreurs en mathématiques à l'école et au collège. CRDP Midi-Pyrénées.

10) Josse E. (1994). *Que faut-il savoir en mathématiques en fin de troisième pour réussir en seconde.* Cahier DIDIREM n° Spécial, IREM Paris VII.

11) Millet J.L. (1995). *Calcul algébrique en classe de seconde.* IREM de Limoges.

12) Noirfalise R. (1991). *Connaissances ou capacités.* Repères IREM n° 5.

13) Tonnelle J; (1979). *Le monde clos de la factorisation au premier cycle.*

14) Vergnaud G. (1988). *Long terme et court terme dans l'apprentissage de l'algèbre.* Actes du, premier colloque franco-allemand de didactique des mathématiques, La pensée sauvage, Grenoble.

Publications IREM

15) Poitiers (1987). *Calcul littéral au collège.*

16) Rennes (1994). *Recherche x désespérément... Le débat scientifique.*

17) Publication APMEP (1991). *Évaluation du programme de mathématiques en classe de seconde.* Publication n° 88.

Annexe 1

Difficultés au niveau	Types d'erreurs, de difficultés	Exemples d'activités
Compréhension en lecture d'un énoncé ou d'une expression algébrique Repérage d'indices. Construction d'une représentation.	• Rôle des parenthèses. • Confusion dans les écritures entre les signes « x » et « + ». • non reconnaissance de la forme d'une expression (ex. : $a^2 - b^2$).	• décrire autrement : changement de registre de formulation (langage naturel, langage symbolique). • utiliser un autre contexte : géométrique ou fonctionnel.
Élaboration ou choix d'une stratégie ou d'une procédure	• Réticence à utiliser des lettres (pour modéliser une situation, pour généraliser, pour démontrer). • Pas assez de disponibilité de méthodes. • Mauvaise prise d'indices : non identification des bons invariants.	• Analyser les différents statuts de la lettre en mathématiques. • Élaborer des fiches méthodes : ex. : Comment factoriser, comment résoudre une équation, etc).
Instanciation - Exécution d'une stratégie	• Surdétermination. • Surspécification. • Algorithmisation excessive. • Manque d'anticipation.	• Entraîner au calcul mental ou calcul rapide pour renforcer l'aspect technique. • Choisir la bonne forme dans l'écriture d'une expression. • Utiliser un autre cadre pour vérifier.
Contrôle - Critique	• Aucune (ou pas suffisamment de) procédure de contrôle dans les calculs.	• Analyser ses erreurs.

Annexe 2

Des activités intégrées à une progression annuelle « spiralaire »

qui visent différents types de savoirs

Thèmes	Période 1 Septemb. Octob.	Période 2 Novemb. Décemb.	Période 3 Janvier - Février	Période 4 Mars - Avril	Période 5 Mai - Juin
Calcul numérique Calcul littéral	• Équation (premier degré) Équations produits • Structures algébriques (règles de calcul) • Transformer des écritures	• Équations quotients (simples) • Ordre : inégalités, intervalles. • Inéquations 1er degré	• Inéquations • Valeur absolue	• Systèmes • Régionnement du plan	• Calcul algébrique (synthèse) (préparation entrée première)
Relations numériques Fonctions	• Exprimer en fonction de... • Notation f(x)	• Fonctions affines (équation réduite d'une droite) • Généralités (image - antécédent - lect.graph.)	• Fonctions (sens de variation)	• Fonctions de référence	• Fonctions trigo. • Fonctions associées
Exemple de programmation des activités sur le calcul algébrique	1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5	6 ; 7 ; 8 ; 9	10 ; 8 bis ; 11 ; 13	12 ; 13 ; 14	14 bis ; 15

I. Auteurs

Colette CHAUPRADE - Aline COUDERT - Jean-Luc MILLET - Geneviève PATUREAU

II. Titre

CALCUL ALGÉBRIQUE EN SECONDE : DES ACTIVITÉS POUR LA CLASSE

III. Caractéristiques

Édité par l'IREM de Limoges.
Format : A4, 50 p.
ISBN : 2-910165-09-4

IV. Type de documents et support

Brochure.
Papier.

V. Matériel utilisé dans l'ouvrage

VI. Public visé

Enseignants de collège et de lycées.

VII. Contenus

RÉSUMÉ : Les activités proposées dans ce fascicule sont des tentatives de réponses aux difficultés rencontrées dans l'apprentissage du calcul algébrique par des élèves de seconde.

MCL : APPRENTISSAGE - CALCUL ALGÉBRIQUE - CALCUL LITTÉRAL - CALCUL MENTAL - CALCUL RAPIDE - CALCUL NUMÉRIQUE - DIFFICULTÉS.