Remise à l'Honneur

des Méthodes Géométriques

en Second Cycle

(Réédition)

UNIVERSITE DE LIMOGES

INSTITUT DE RECHERCHE
SUR
L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES
123, Avenue Albert Thomas
87060 LIMOGES CEDEX
Téléphone 55 45 72 49
Télécopie 55 45 73 20

Groupe Géométrie
Second Cycle

SOMMAIRE

Cette brochure présente le travail effectué au cours des années scolaires 86-87 et 87-88 par le groupe IREM : "Remise à l'honneur des méthodes géométriques"

<u>Liste des participants</u> :

Colette CHAUPRADE	Juliette PENAUD
Martine CLEMENT	Marie-José PESTEL
Francine DELAFOSSE	Françoise PETIGNAUD
Claire DILLENSEGER	Jeannette PEYRIERAS
Evelyne ESPINASSE	Bernard RAULT
Nicole ETIENNE	Marcelle REBY
Bernard FELDMAN	Raoul RIGONDAUD
Colette GUERIN	Jean-Paul ROUMILHAC
Georges LION	Madeleine ROUMILHAC
Christiane PAGNOUX	Noëlle VIGIER

Beaucoup ont rédigé quelques exercices.

Tous les membres du groupe remercient :

Bernadette POUGET, secrétaire à l'IREM de Limoges, qui a très bien assuré la frappe des documents

et

Georges LION, Professeur à la Faculté des Sciences de Limoges, qui, par sa compétence, a guidé leur travail et, par son enthousiasme, a su leur faire partager son amour pour la géométrie.

Les réalisateurs de la brochure

Martine CLEMENT - Bernard FELDMAN
Jeannette PEYRIERAS

INTRODUCTION

La réalisation d'un ouvrage tel que la brochure que j'ai le plaisir de présenter ci-dessous est un travail de longue haleine et, à des auteurs dépourvus de toute décharge de service, cette tâche aura demandé plus d'années que n'en compte le mandat de directeur d'IREM. C'est donc à la délicatesse de mon successeur et à l'amité de Martine CLEMENT, de Bernard FELDMAN et de Jeanne PEYRIERAS que je dois l'honneur de rédiger cette introduction.

En 1985, la rédaction d'un recueil d'exercices de géométrie m'avait semblé s'imposer tant pour des raisons de circonstances que pour de raisons de fond.

Les raisons de circonstances correspondaient à l'existence de préjugés diamétralement opposés sur la géométrie, et qui sont toujours d'actualité.

C'est peut être à cause de l'apostrophe de Platon : "que nul n'entre ici s'il n'est géomètre" qu'à de nombreux professeurs, et aussi à beaucoup de parents d'élèves, la géométrie apparaît comme un sujet très ardu, où les conduites automatiques n'ont que rarement cours, et qui doit nécessairement rebuter les élèves. Nous voulons donc convaincre ici les uns et les autres que la géométrie, pourvu que l'on y consacre le temps et l'énergie nécessaires, est une matière agréable à étudier et que, par ses possibilités d'insertion dans la vie réelle, elle est pour de nombreux élèves la meilleure voie d'accès aux mathématiques.

A l'opposé il m'a été donné de recueillir les réactions négatives de nos jeunes collègues formés à "grands coups" de structure moderne dans les année 70. Aux yeux de ceux là, la géométrie, par manque d'axiomatique, n'a rien à voir avec les mathématiques - C'est réduire ces dernieres à une démarche purement intellectuelle, et cette réduction nous est interdite tout autant par les objectifs de la société que par notre propre expérience. A mon avis un dialogue sincère et tolérant doit permettre de nous enrichir par l'échange des cultures et la présente brochure a sa place dans cet échange.

Mais les avatars des programmes en vigueur, et les retours de balancier, n'auraient pas suffi à lancer cette entreprise : pour plaider la cause de la géométrie il existe aussi des arguments qui tiennent à l'histoire des mathématiques, à leur nature même, et à leur enseignement.

A sa naissance, tout sujet mathématique est justiciable d'expériences, de tâtonnement, de foisonnement d'idées. Le même sujet sera reconnu comme ayant atteint son état de perfection ultime, lorsque les travaux de synthèse et d'économie de pensée lui auront donné l'harmonie et la simplicité, en un mot lorsque ce sujet sera totalement "géométrisé".

La géométrie et, j'ose le dire, <u>elle seule</u>, peut rendre compte à un niveau élémentaire, de ces deux états et des états intermédiaires, de toute évolution mathématique : Dans le travail qui suit le lecteur ne manquera pas de le constater, et de le vivre réellement en cherchant lui même les exercices.

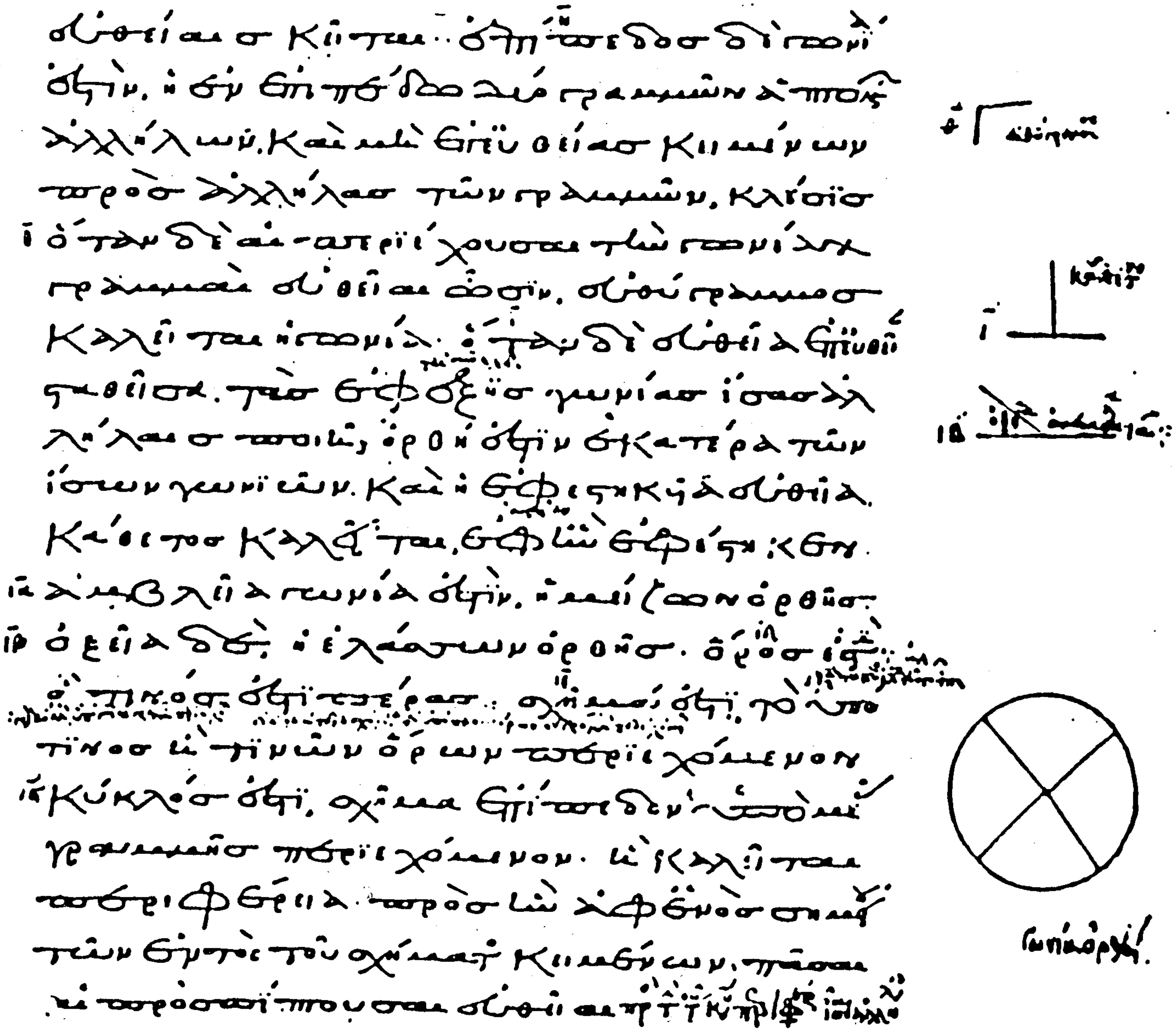
Mais l'apprentissage de la géométrie n'est pas utile aux seuls futurs mathématiciens. Dans les domaines plus appliqués, le va et vient constant entre <u>modèle</u> et <u>représentation</u> est une habitude de travail qui s'apprend en faisant de la géométrie, même élémentaire. Cette brochure le manifeste, par exemple à l'occasion des problèmes de construction qui font l'objet d'un important développement.

Il serait trop long de développer ici tout ce que l'histoire des mathématiques a puisé dans l'évolution de la géométrie. Des auteurs plus compétents que moi l'ont expliqué et mon seul souhait serait que l'envie de les lire saisisse notre lecteur à l'issue de son travail sur cette brochure.

Ce fascicule est copieux, en partie parce que les auteurs ont choisi de donner non des solutions détaillées, mais au moins des pistes de travail : Pour ne pas être cruel, disons simplement que la diversité des formations de nos enseignants actuels rend ces explications nécessaires.

J'ai déjà exprimé les liens d'amitié qui m'unissent aux auteurs de ce travail. Au delà, je voudrais terminer cette introduction en donnant témoignage de ma très sincère estime, et de la reconnaissance qu'ils méritent.

Georges LION



Manuscrit des *Éléments* d'EUCLIDE.

(Bibliothèque Nationale de Paris, Fonds grec n° 2344, fol. 17, XII^{e} siècle.
Fac-similé du début : définitions du point, de la ligne, etc.)

EVIDENCE ET DEMONSTRATION

EVIDENCE ET DEMONSTRATION

Si l'on veut convaincre l'élève de la nécessité de démontrer, il faut lui proposer des situations motivantes où l'intuition peut être mise en défaut.

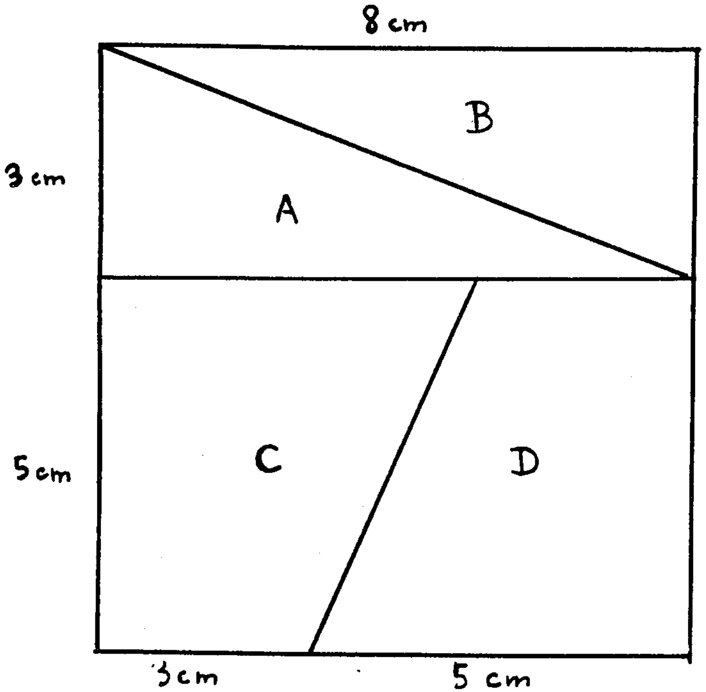
Les exemples suivants ne sont pas originaux, ils ont l'avantage d'être rassemblés

Exemple 1 64 = 65 ...! (problème de Lewis Caroll)

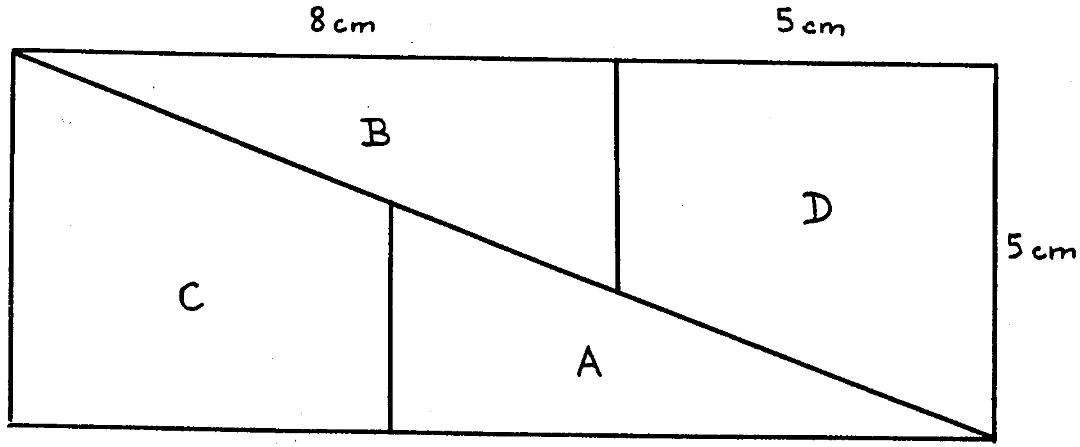
Un carré de côté 8 cm est découpé selon les lignes de la figure (1). Les morceaux sont replacés comme l'indique la figure (2)

L'aire du carré est égale à l'aire du rectangle, donc : $8 \times 8 = 13 \times 5$

Qu'en penser ?



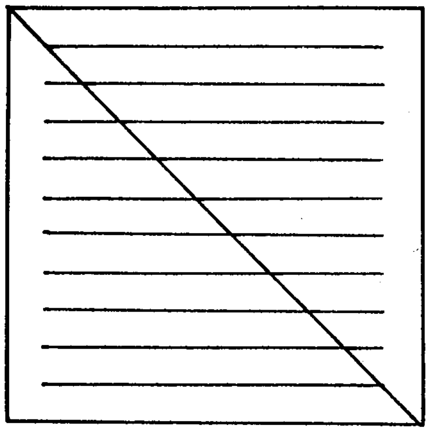
(figure 1)

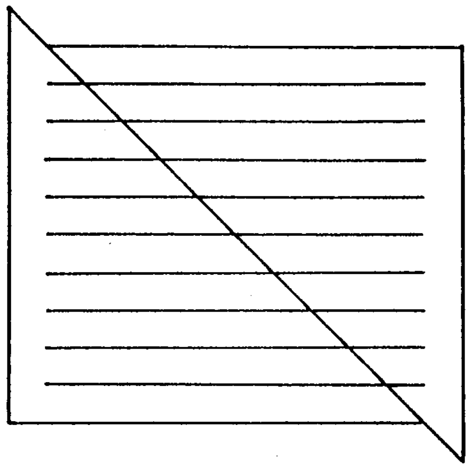


(figure 2)

Exemple 2 Où est passée la 10ème ligne ?

On déplace les deux moitiés triangulaires selon la diagonale en les décalant d'un intervalle Il n'y a plus que 9 lignes au lieu de 10. Que s'est-il passé ?





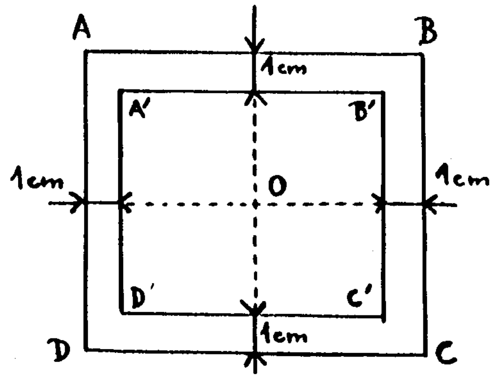
Cette situation est étudiée avec d'autres dans : Bulletin de l'APMEP n° 294 - A.Deledicq

Exemple 3

ABCD est un rectangle de centre O tel que AB = 9 cm BC = 8 cm

A'B'C'D' est un rectangle aux côtés parallèles à ceux de ABCD

Les points O, A et A' sont ils alignés ?

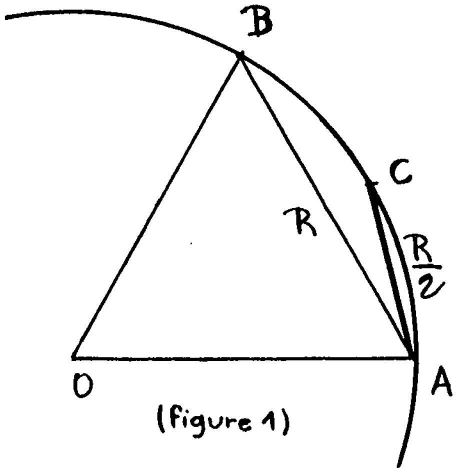


Cet exercice proposé avec plusieurs solutions par Terracher, (2nde p. 210)
Collection HACHETTE
est très motivant et permet aux élèves de faire une conjecture qu'il faut alors infirmer ou confirmer.

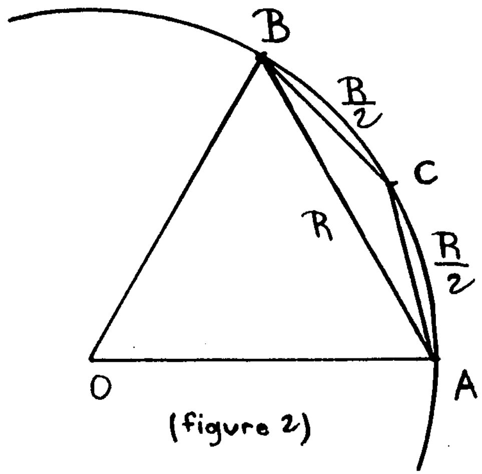
Exemple 4

Si à partir d'un point d'un cercle, je reporte avec le compas le rayon, j'obtiens un arc de 60°.

Si je reporte le demi-rayon, j'obtiens donc un arc de 30°. Vrai ou faux ? (figure 1)



(figure 1)



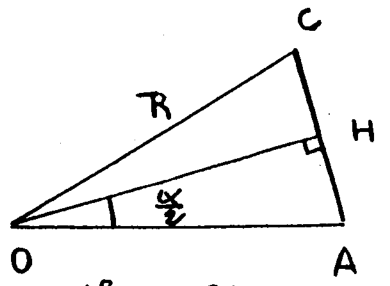
(figure 2)

Ce problème s'est posé lors de la correction du 1er Tournoi de Mathématique du Limousin. Il avait été proposé le sujet suivant : "Construire avec le compas seul les quatre sommets d'un carré".

Un bon nombre de candidats présentaient la solution ci-dessus voulant compléter un angle de 60° pour avoir un angle droit.

Si la propriété était exacte, en reportant 2 fois le demi-rayon (figure 2) on obtiendrait un arc de 60°. On aurait donc AB = AC + CB ce qui est impossible car A, B et C ne sont pas alignés.
Cette démonstration géométrique très simple prouve donc que la propriété est fausse.

Il peut être intéressant d'évaluer une mesure α de l'arc obtenu (figure 3).

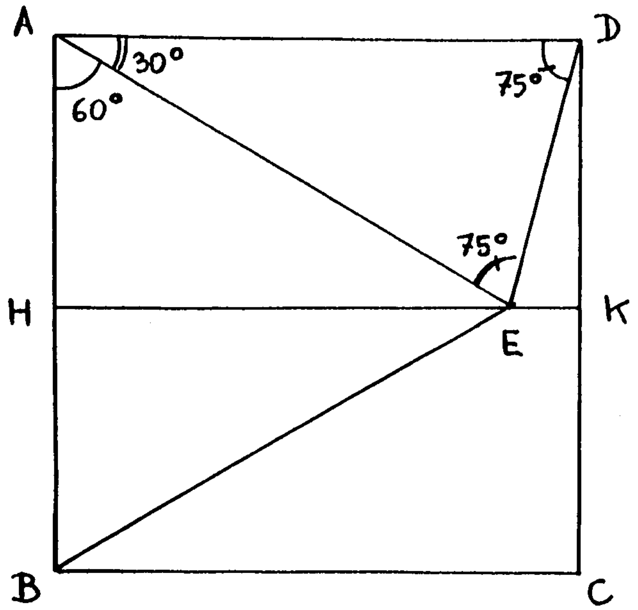


(figure 3)

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{AH}{OH} = \frac{\frac{R}{4}}{\sqrt{R^2 - \frac{R^2}{16}}} = \frac{R}{4} \times \frac{1}{\frac{\sqrt{15}\,R}{4}} = \frac{1}{\sqrt{15}} \quad \text{ou} \quad \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{AH}{OA} = \frac{1}{4}$$

donc : $\frac{\alpha}{2} \simeq 14°\,28'$ soit $\underline{\alpha \simeq 28°\,56'}$

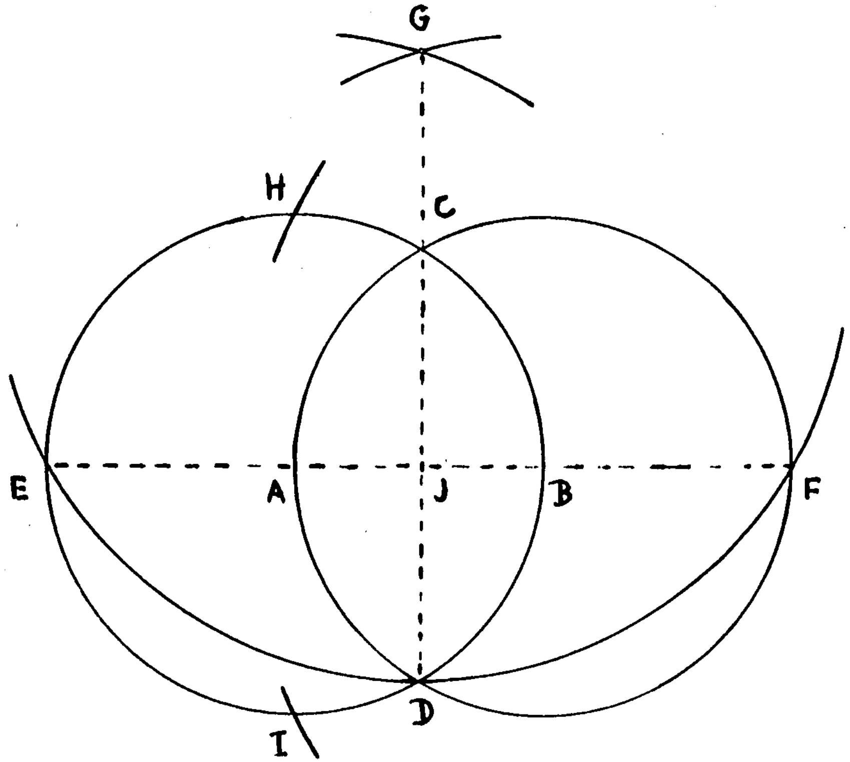
<u>Appendice 1</u> calcul de tan 15° abordable dès le collège.

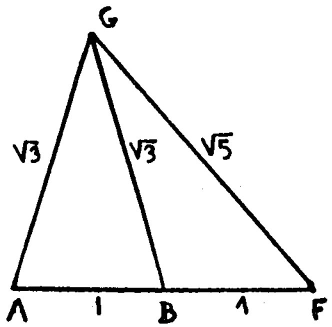


(ABCD) est un carré de côté 1.
On construit à l'intérieur le triangle équilatéral ABE
La parallèle en E à (AD) coupe (AB) en H et (DC) en K .
$\widehat{EAD} = 30°$
ADE est isocèle en A d'où $\widehat{AED} = \widehat{ADE} = 75°$ donc $\widehat{EDK} = 15°$
$\tan\widehat{EDK} = \frac{EK}{DK} = \frac{HK - HE}{DK} = \underline{2 - \sqrt{3}}$

<u>Appendice 2</u> : **Quelques constructions des 4 sommets d'un carré au compas seul trouvées lors du 1er Tournoi de Mathématiques du Limousin.**

1)





$AB = 1$

$\left.\begin{array}{l}\mathcal{C}(A,\ 1)\\ \mathcal{C}(B,\ 1)\end{array}\right\} \longrightarrow C,\ D$ $\qquad CD = \sqrt{3}$

$\mathcal{C}(C, \sqrt{3}) \rightarrow E,\ F$

B milieu de [AF]

A milieu de [BE]

$\left.\begin{array}{l}\mathcal{C}(A,\ \sqrt{3})\\ \mathcal{C}(B,\ \sqrt{3})\end{array}\right\} \rightarrow G$

$$GJ^2 = GB^2 - JB^2$$
$$= 3 - \frac{1}{4} = \frac{11}{4}$$

$$GF^2 = GJ^2 + JF^2$$
$$= \frac{11}{4} + \frac{9}{4} = 5 \qquad GF = \sqrt{5}$$

$\mathcal{C}(F, \sqrt{5}) \rightarrow H,\ I$

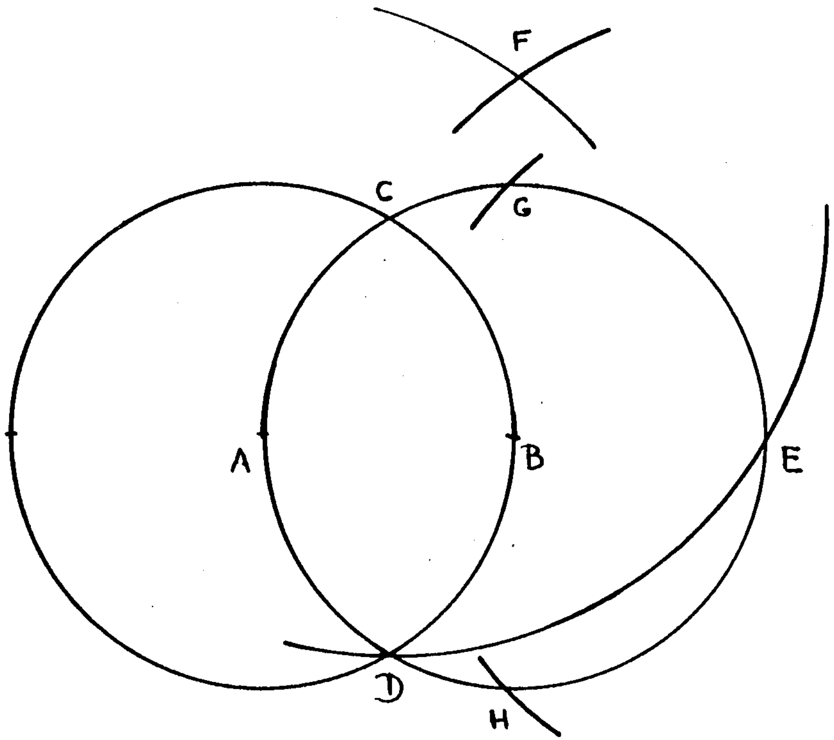
$5 = 4 + 1$

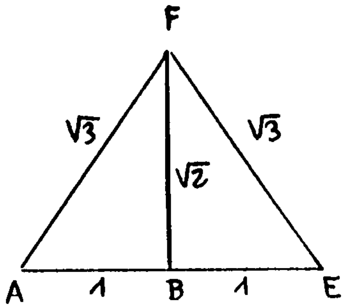
$FH^2 = FA^2 + AH^2$

$(HA) \perp (AF)$

<u>carré : B H E I</u>

2)





$$AB = 1$$

$$\left.\begin{array}{l}\mathcal{C}(A,\ 1)\\ \mathcal{C}(B,\ 1)\end{array}\right\} \rightarrow C,\ D \qquad CD = \sqrt{3}$$

$$\mathcal{C}(C,\ \sqrt{3}) \rightarrow E$$

B milieu de $[AE]$

$$\left.\begin{array}{l}\mathcal{C}(A,\ \sqrt{3})\\ \mathcal{C}(E,\ \sqrt{3})\end{array}\right\} \rightarrow F$$

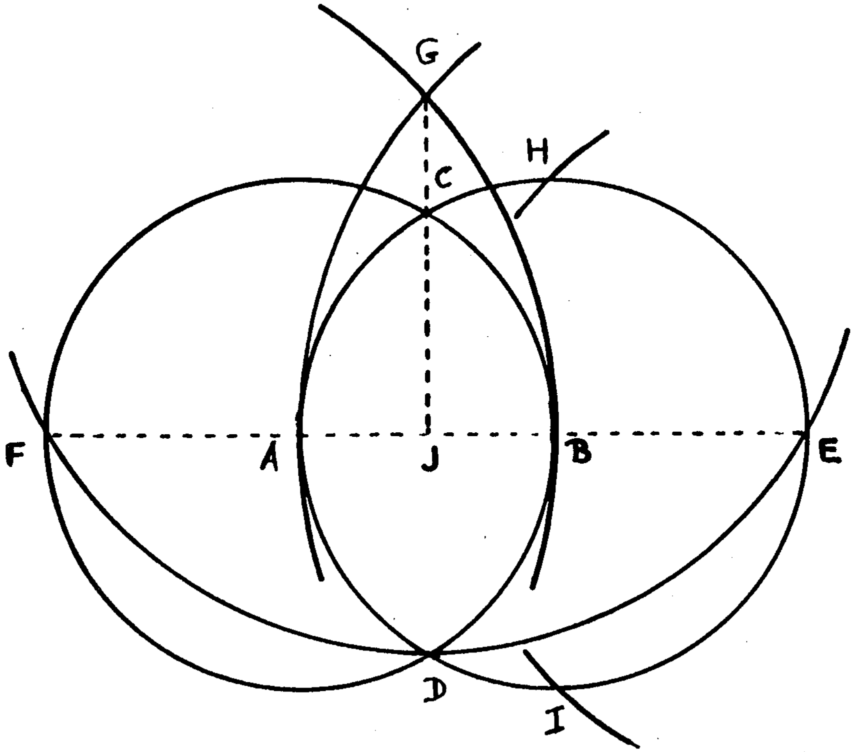
$$BF^2 = EF^2 - BE^2$$
$$= 3 - 1 = 2$$

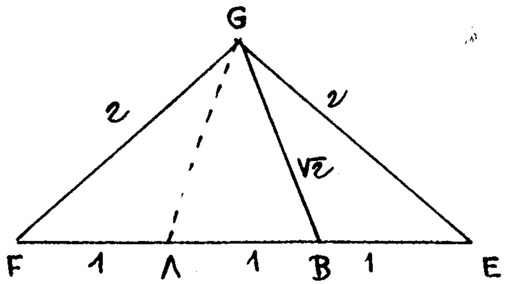
$$BF = \sqrt{2}$$

$$\mathcal{C}(E,\ \sqrt{2}) \rightarrow G,\ H$$

<u>carré : AHEG</u>

3)





$$AB = 1$$

$$\left.\begin{array}{l}\mathcal{C}(A,\ 1)\\ \mathcal{C}(B,\ 1)\end{array}\right\} \rightarrow C,\ D \qquad CD = \sqrt{3}$$

$$\mathcal{C}(C,\ \sqrt{3}) \rightarrow E,\ F$$

B milieu de [AE]

A milieu de [BF]

$$\left.\begin{array}{l}\mathcal{C}(E,\ 2)\\ \mathcal{C}(F,\ 2)\end{array}\right\} \rightarrow G$$

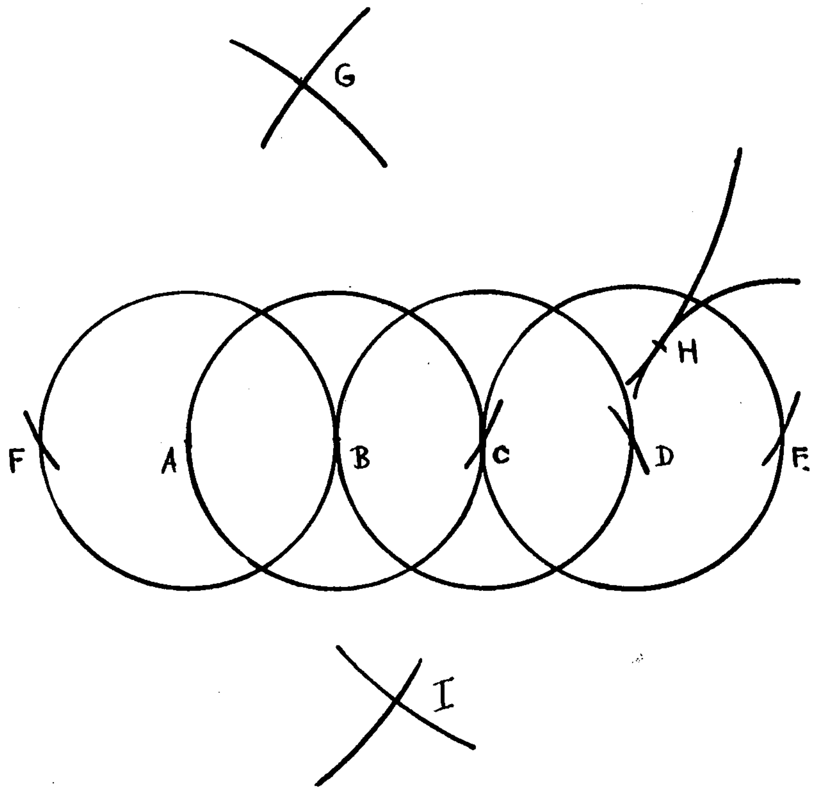
$$GJ^2 = GE^2 - JE^2$$
$$= 4 - \frac{9}{4} = \frac{7}{4}$$

$$BG^2 = GJ^2 + JB^2$$
$$= \frac{7}{4} + \frac{1}{4} = 2 \qquad BG = \sqrt{2}$$

$$\mathcal{C}(E,\ \sqrt{2}) \rightarrow H,\ I$$

<u>carré : AIEH</u>

4)



En réitérant la méthode permettant d'obtenir deux points diamétralement opposés sur un cercle, on construit successivement les cercles de centre A, B, C, D de rayon 1

$\mathcal{C}(F, 3)$ et $\mathcal{C}(E, 4)$ $\rightarrow$ G

$$\left.\begin{array}{l} EF = 5 \\ FG = 3 \\ GE = 4 \end{array}\right\} \quad \text{donc } (FG) \perp (EG)$$

$\mathcal{C}(G,3)$ et $\mathcal{C}(E, 1)$ sont tangents en H, aligné avec E et G

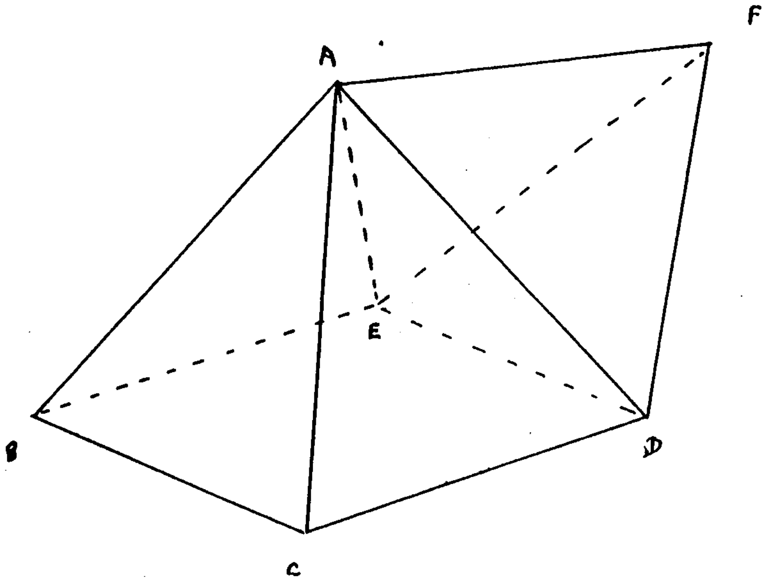
$(FG) \perp (GH)$ et $FG = GH = 3$

On complète le carré en prenant l'intersection I de $\mathcal{C}(F, 3)$ et $\mathcal{C}(H, 3)$

<u>carré : FGHI</u>

Exemple 5

Une pyramide est à base carrée, toutes les arêtes ont pour longueur a, on la met en contact par une face triangulaire avec un tétraèdre régulier d'arête a. Quel est le nombre de faces du polyèdre obtenu ?



A B C D E est la pyramide régulière
A D E F est le tétraèdre

Soit G le point tel que $\vec{CD} = \vec{AG}$
alors $\vec{BE} = \vec{AG}$

$AG = CD = a$
$\vec{CA} = \vec{DG}$ donc $DG = a$
$\vec{AB} = \vec{GE}$ donc $GE = a$

AEDG est une pyramide régulière : **G = F**
D'après $\vec{AF} = \vec{CD}$ et $\vec{BE} = \vec{AF}$ les points
A, C, D, F d'une part, A, B, E, F d'autre part
sont coplanaires.
le polyèdre a 5 faces.

(idée proposée par l'IREM de Strasbourg
TP en 1ère Scientifique)

PERFORMANCE DES METHODES GEOMETRIQUES

PERFORMANCE DES METHODES GEOMETRIQUES

Les exemples suivants veulent illustrer l'intérêt mais aussi les limites des méthodes géométriques

1°) L'outil géométrique peut dans certains cas être très performant

a) en mettant en jeu des notions plus simples que celles nécessitées par une méthode analytique et non encore abordées à un niveau donné.

Exemple 1

L'exemple type est l'utilisation de la réflexion dans l'optimisation d'un trajet.

Certes, la méthode géométrique est dans ce cas très efficace mais en contre partie, l'élève a du mal à la découvrir. C'est pourquoi il est proposé, dans ce premier exemple, une progression qui permet, en se ramenant aux cas déjà étudiés, de résoudre le problème.

Exemple 2

La brochure "Travaux pratiques en 1ères Scientifiques" de l'IREM de STRASBOURG indique une solution analytique et une solution géométrique à ce problème. Contrairement à la 1ère, cette dernière peut être comprise par un élève de 1er cycle.

Exemple 3

Cet exercice proposé par l'IREM de POITIERS peut être traité dès le collège sans attendre la connaissance d'éléments de trigonométrie.

Exemple 4

Cet exercice a été donné au 3ème Tournoi Mathématique du LIMOUSIN.

La solution géométrique proposée, très performante et élégante, a été trouvée par de nombreux élèves et en particulier par des lycéens de 1ère A et B se jugeant "peu doués en géométrie" et "ne sachant pas", (peut être heureusement), "calculer l'aire de l'hexagone".

Exemple 4'

Cet exercice liant calcul d'aires et suite arithmétique peut se traiter facilement par une remarque géométrique.

b) en simplifiant de beaucoup la solution par rapport à une méthode analytique connue mais plus lourde et plus difficile.

Exemples 5 - 6

Ces deux textes sont extraits des annales du baccalauréat C - 84.

L'énoncé suggère une méthode analytique qui dans le cas du second exercice est particulièrement délicate, demandant une technique des valeurs absolues et des racines carrées non exigible de la majorité des élèves de T C - T E. Bien sûr, ces exercices datent de la 1ère année d'application des nouveaux programmes mais ces textes sont reproduits tels quels dans les nouvelles éditions et continuent à être posés ainsi dans certaines classes.

2°) Si l'outil géométrique ne permet pas de résoudre complétement le problème il peut amener une simplification

Exemples 7 - 8

Dans ces deux exemples, la géométrie ne conduit pas à prouver l'existence d'un élément extrémal cherché.

Dans *l'exemple 7*, elle permet :

- d'une part d'affirmer que, s'il existe un triangle d'aire maximale, ce triangle ne peut être qu'équilatéral.
- d'autre part d'améliorer la méthode analytique en remarquant qu'il suffit de se limiter à un triangle ABC isocèle.

L'exemple 8, proposé par M. Georges LION, de l'IREM de LIMOGES, fait vérifier, géométriquement, que s'il existe un périmètre minimum, il ne peut être obtenu qu'en choisissant les milieux I, J et K des arêtes respectives [A, E], [B,C], [G,H] .

3°) La géométrie peut aussi offrir des méthodes moins performantes

Exemples 9 et 10

Ces exercices prouvent l'intérêt d'une méthode analytique.

Elégance et performance d'une méthode géométrique ne sont pas toujours synonymes de facilité pour l'élève dans la découverte d'une telle démarche. Il faut donc essayer par exemple de l'aider :

- *exemple 1* : en lui proposant la progression choisie
- *exemple 3* : en lui proposant le quadrillage et en l'invitant à faire apparaître un secteur angulaire de mesure $a + b$

à avoir une idèe de l'élément extrémal cherché dans un problème d'optimisation :

- *exemple 2* : en l'invitant à construire plusieurs triangles et à mesurer les aires obtenues
- *exemple 8* : en lui faisant penser à un phénomène physique d'équilibre d'un élastique tendu autour des trois arêtes.

La comparaison de plusieurs méthodes pour un même exercice est bien sûr une activité très intéressante et très formatrice dans l'éducation mathématique de l'élève.

Exemple 1 :

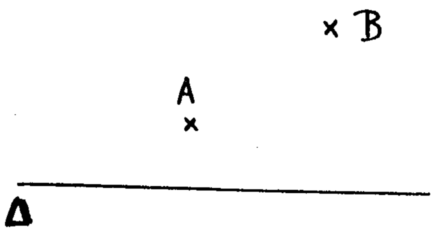
A) on donne une droite Δ et deux points A et B.

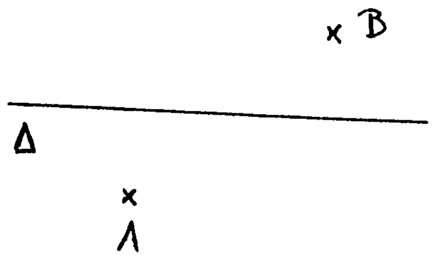
1) Trouver M sur Δ qui rend minimum AM + MB
   a) quand A et B sont de part et d'autre de Δ
   b) quand A et B sont d'un même côté

2) Trouver M sur Δ qui rend maximum $|MA - MB|$
   a) quand A et B sont d'un même côté de Δ
   b) quand A et B sont de part et d'autre de Δ

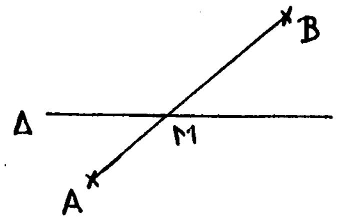
Trajet minimum
Réflexion
Inégalité triangulaire

à partir de la Seconde





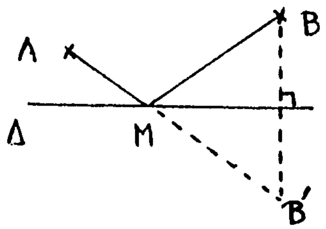
1) a)



MA + MB minimum quand AMB alignés

b)

L'idée est de se ramener au cas précédent

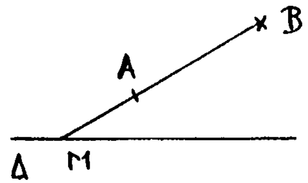


MA + MB = MA + MB'

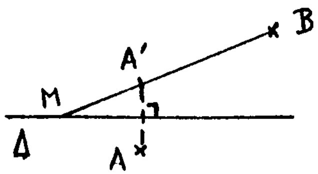
2) a)

$|MA - MB| \leqq AB$

$|MA - MB|$ max quand $|MA - MB| = AB$
soit MAB alignés



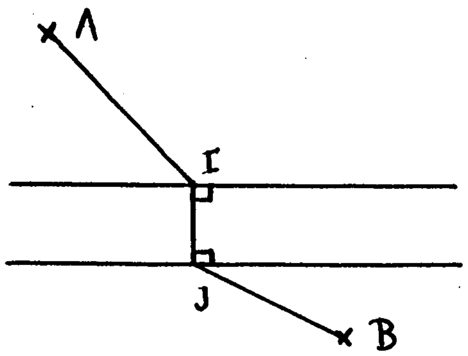
b)



L'idée est de se ramener au cas précédent

$|MA - MB| = |MA' - MB|$

B) A et B sont de part et d'autre d'une rivière
En quel point I faut-il embarquer pour que
AI + IJ + J B soit minimum ?



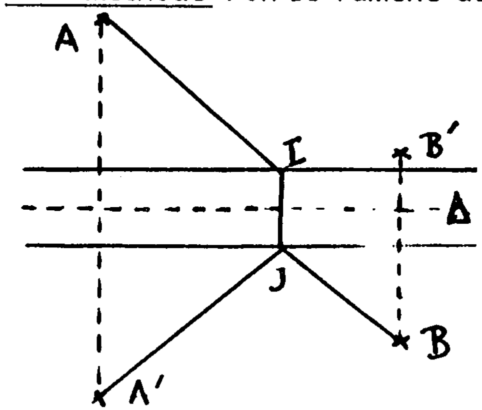
Trajet minimum

Translation ou réflexion

à partir de la Seconde

IJ est constant donc AI + IJ + JB est minimum quand AI + JB est minimum

<u>1ère méthode</u> : on se ramène au cas A 1° b) de l'exercice précédent :



soit $A' = s_{\Delta}(A)$ où Δ est l'axe de la rivière

$AI + JB = A'J + JB$

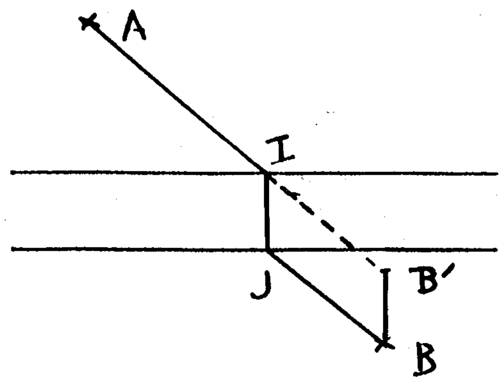
<u>2ème méthode</u> : on se ramène au cas A 1°a) de l'exercice précédent

Soit $B' = t_{\vec{JI}}(B)$

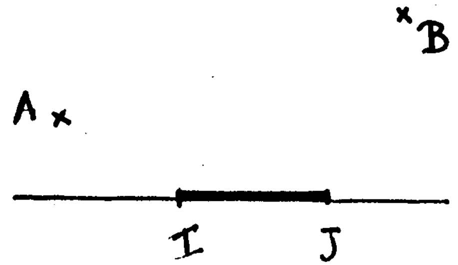
$JB = IB'$

$AI + JB = AI + IB'$

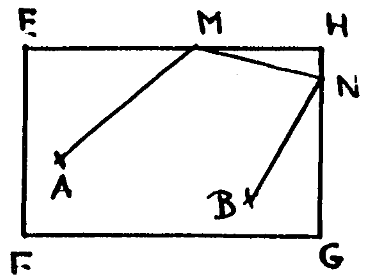
minimum quand AIB' alignés



C) Un avion canadair, décolle de A, doit se ravitailler en eau dans la rivière sur une longueur l donnée et éteindre un incendie en B . Où doit-il commencer à puiser l'eau pour minimiser le trajet ?

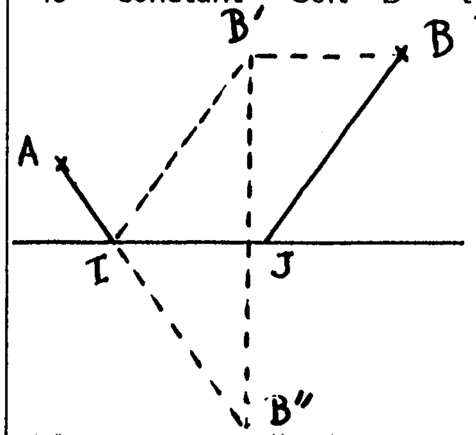


D) A et B sont deux points intérieurs au rectangle EFGH . Trouver M sur [EH] et N sur [HG] tels que AM + MN + NB soit minimum



Trajet minimum Translation réflexion	à partir de le Seconde

$\vec{IJ}$ constant, Soit $B' = t_{\vec{JI}}(B)$



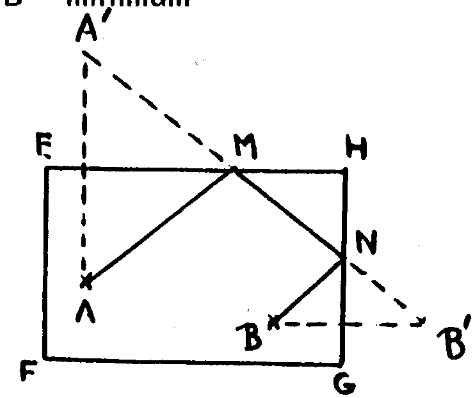
$AI + JB = AI + IB' = AI + IB''$

minimum pour AIB'' alignés

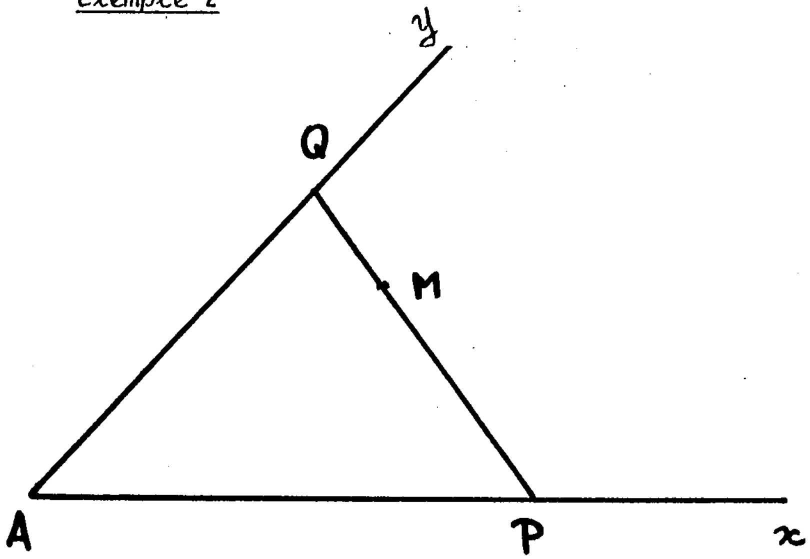
Trajet minimum réflexion	à partir de la Seconde

Soit $A' = s_{(EH)}(A)$; soit $B' = s_{(HG)}(B)$

$AM + MN + NB = A'M + MN + NB'$ minimum quand $A'MNB'$ alignés



Exemple 2



M est un point appartenant au secteur angulaire $\widehat{xAy}$

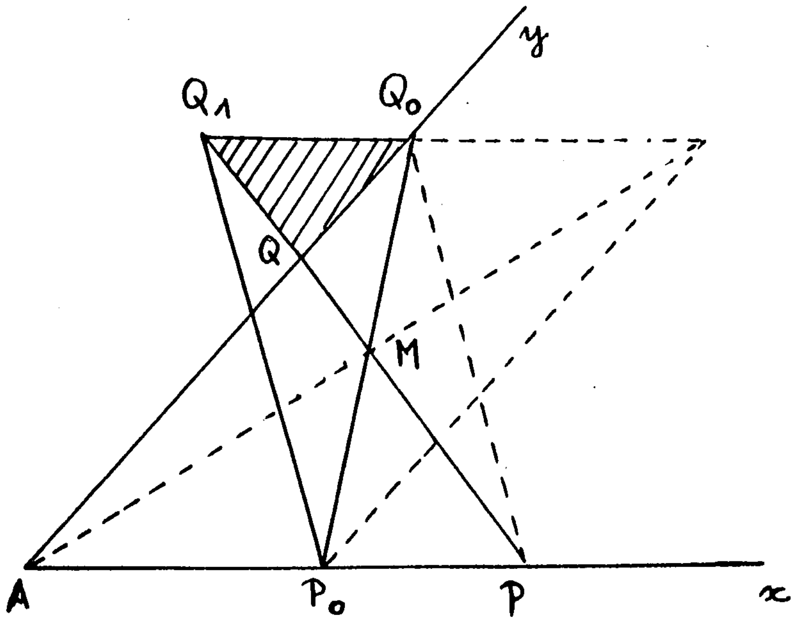
Une droite contenant M détermine avec Ax et Ay un triangle APQ

1° pour plusieurs positions de la droite évaluer l'aire de APQ

2° chercher et construire une droite contenant M et déterminant un triangle d'aire minimum.

d'après IREM de STRASBOURG
premières scientifiques
Avril 1986

L'étude de plusieurs situations peut faire supposer que si M est le milieu de [PQ] alors l'aire du triangle est minimum



La construction d'un parallélogramme de centre M, de sommet A de côtés issus de A portés par Ax et Ay permet d'obtenir les points P_o de Ax et Q_o de Ay tels que M soit milieu de $[P_o\ Q_o]$

Si l'on considère une autre sécante [PQ] passant par M, on appelle Q_1 le 4ème sommet du parallélogramme $P_oPQ_oQ_1$

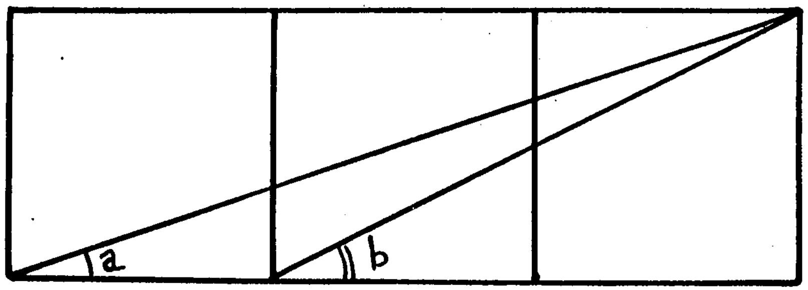
Si P est à l'extérieur de $[AP_o]$ on a :

Aire (APQ) - Aire (AP_oQ_o) = Aire $(Q_oQ_1Q) > 0$

donc : Aire (APQ) > Aire (AP_oQ_o)

Il en est de même si P est à l'intérieur de $[AP_o]$

Exemple 3



Le rectangle est formé de 3 carrés

Que vaut $a + b$?

IREM de POITIERS

Géométrie de 4ème - Fascicule I

Mai 1988

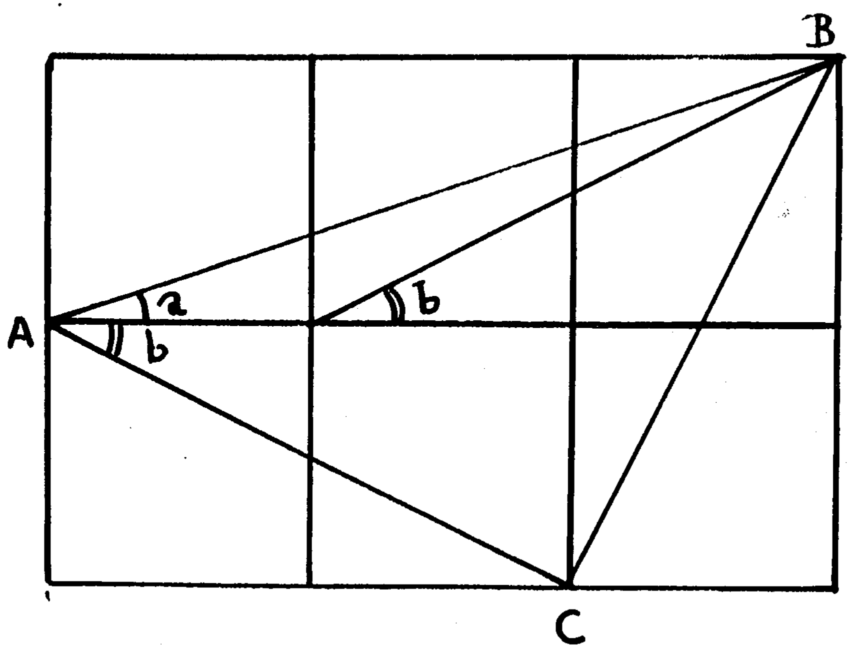
démonstration proposée en 1ère ou Tle

$\tan a = \frac{1}{3}$ $\qquad$ $\tan b = \frac{1}{2}$

$\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} = 1$ $\qquad$ donc $\quad a + b = 45°$

démonstration géométrique

On complète la figure



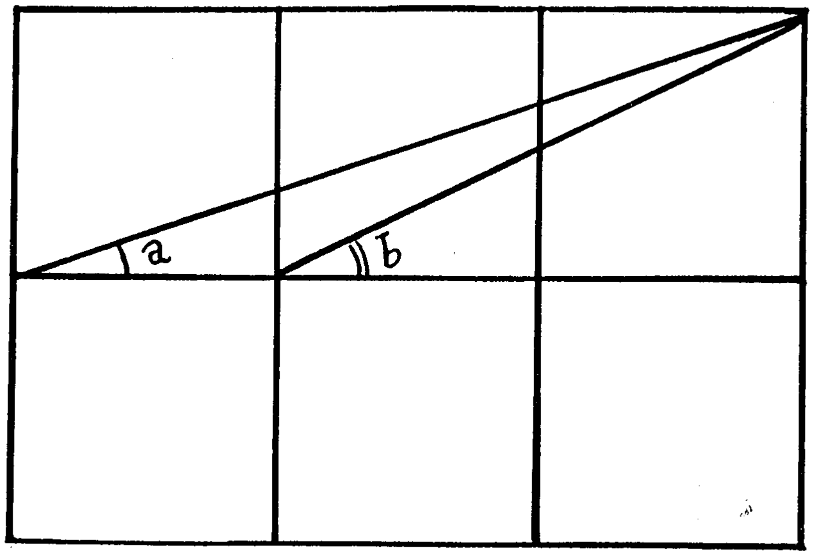
ABC est rectangle isocèle en C car :

$AB^2 = AC^2 + CB^2$ $\quad$ et $\quad AC = CB$

donc : $\widehat{BAC} = a + b = 45°$

Cette méthode permet de traiter cet exercice avec des notions connues au collège. Comme le souligne l'IREM de POITIERS, la solution est certes très performante mais beaucoup trop astucieuse, "astuce et élégance sont affaire de spécialistes".

On peut donc proposer aux élèves le texte suivant pour essayer de les mettre sur la voie :

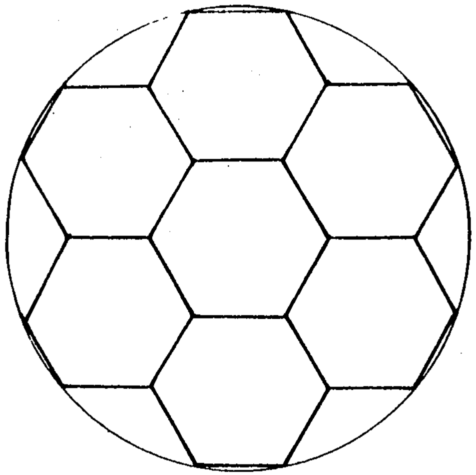


Dans ce quadrillage à mailles carrées on veut calculer $a + b$

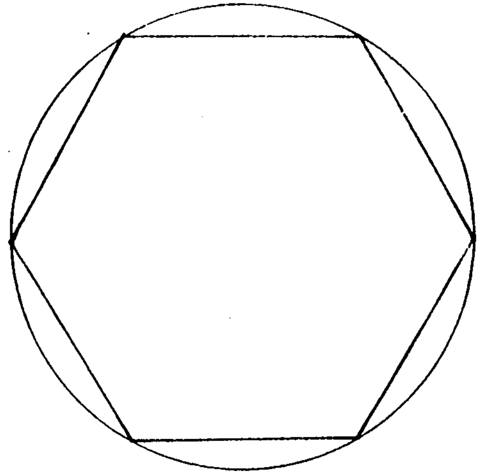
1° utiliser les noeuds de ce quadrillage pour construire un triangle ABC tel que $\widehat{A} = a + b$

2° calculer alors $a + b$

Exemple 4



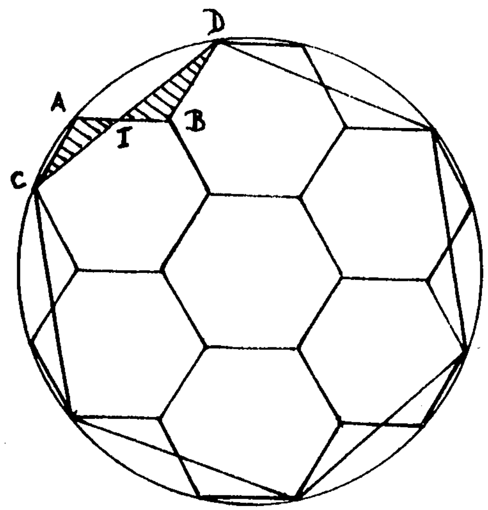
7 hexagones réguliers dans un cercle
de rayon R



1 hexagone régulier dans un cercle
de rayon R

Comparer les aires couvertes par les sept hexagones du 1er cercle, et par l'unique hexagone de 2ème cercle.

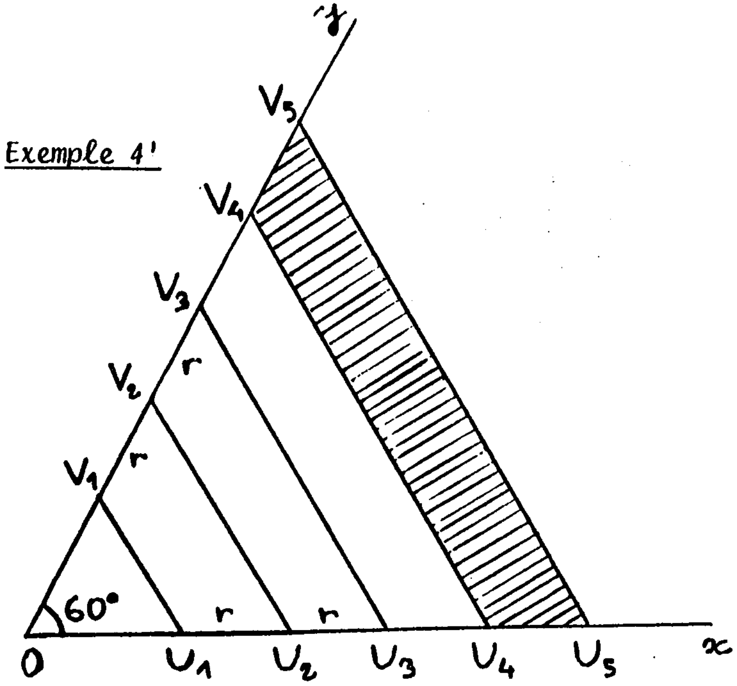
Il suffit de retrouver le grand hexagone dans la 1ère figure.



Les deux triangles (ACI) et (BDI) ont, par symétrie par rapport à I, la même aire.

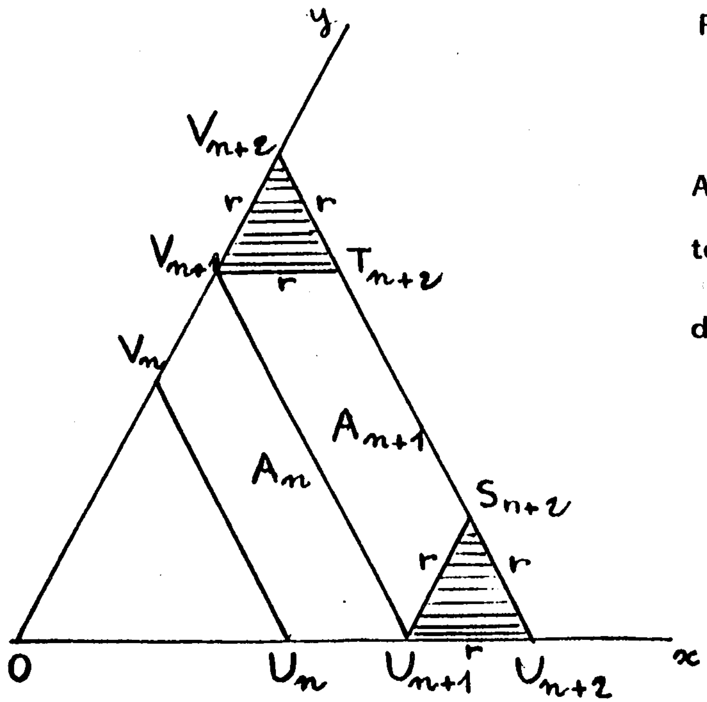
Les aires couvertes par les sept hexagones du 1er cercle et par l'unique hexagone du 2ème cercle sont donc égales.

Exemple 4'



On considère une suite de triangles équilatéraux $(OU_n V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que les suites (OU_n) et (OV_n) soient des suites arithmétiques de raison r.

Montrer que la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite arithmétique où A_n est l'aire du trapèze $U_n V_n V_{n+1} U_{n+1}$.



Par symétrie par rapport à $(U_{n+1} V_{n+1})$ on a :

$$A_n = \text{Aire } (U_{n+1} V_{n+1} T_{n+2} S_{n+2})$$

$A_{n+1} - A_n$ est donc égale à l'aire de la réunion des deux triangles équilatéraux $(U_{n+1} U_{n+2} S_{n+2})$ et $(V_{n+1} V_{n+2} T_{n+2})$ de côté r

d'où :
$$A_{n+1} - A_n = 2 \, \frac{r \times r \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{r^2 \sqrt{3}}{2}$$

Exemple 5 : Dans un plan P muni d'un repère orthonormé (O, i, j), on appelle disque unité l'ensemble :

D = { M ε P / OM ≤ 1 }. On appelle distance d'un point M à D, et on note d (M, D), la plus petite des distances de M aux points de D.

1. Démontrer que si M est extérieur au disque, alors d(D,M) = MM_o où M_o est l'intersection du cercle unité avec le segment [O, M].

En déduire que si x et y sont les coordonnées de M, on a alors :

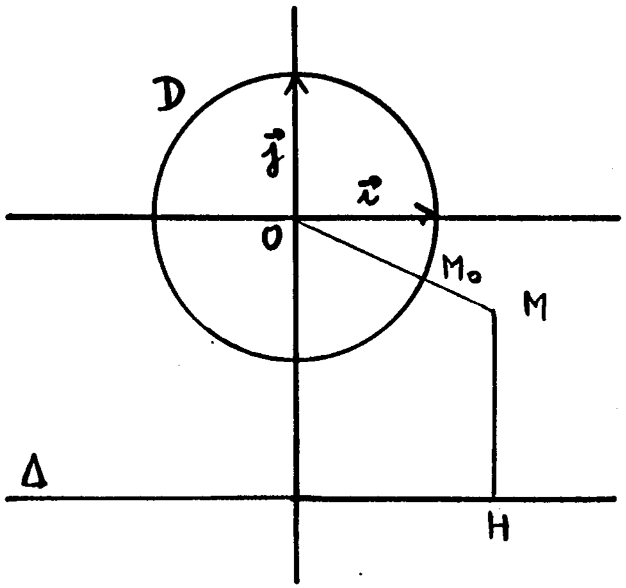
$$d\,(M, D) = \sqrt{x^2 + y^2} - 1$$

2. Soit Δ la droite d'équation y = - 2. Chercher l'ensemble des points M du plan tels que :

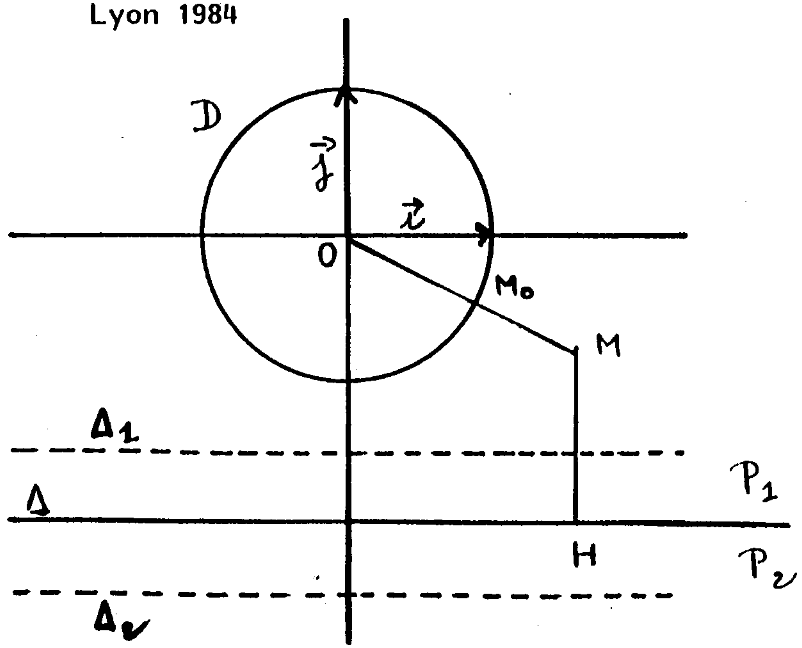
$$d\,(M, D) = 2\,d\,(M, \Delta).$$

Représenter D, Δ et l'ensemble obtenu sur une même figure.

Lyon 1984



(fig 1)



(Fig 2)

1. ébauche de la solution analytique (fig. 1)

$d(M, D) = \sqrt{x^2 + y^2} - 1$ $\qquad\qquad$ $d(M, \Delta) = |y + 2|$

$$d(M, D) = 2\, d(M, \Delta) \iff \sqrt{x^2 + y^2} - 1 = 2\,|y + 2|$$

$$\text{"} \iff \sqrt{x^2 + y^2} = 2\,|y + 2| + 1$$

$$\text{"} \iff \left(\begin{array}{l} \sqrt{x^2 + y^2} = 2y + 5 \text{ et } y \geqq -2 \\ \text{ou} \\ \sqrt{x^2 + y^2} = -2y - 3 \text{ et } y \leqq -2 \end{array} \right.$$

$$\text{"} \iff \left(\begin{array}{l} x^2 + y^2 = (2y + 5)^2 \text{ et } y \geqq -2 \\ \text{ou} \\ x^2 + y^2 = (2y + 3)^2 \text{ et } y \leqq -2 \end{array} \right.$$

d'où l'équation de 2 branches d'hyperboles ...

2. solution géométrique (fig. 2)

La droite Δ partage le plan P en deux demi plans P_1 et P_2

$$d(M, D) = 2\, d(M, \Delta) \iff MM_0 = 2\, MH$$

$$\text{"} \iff MM_0 + 1 = 2\left(MH + \frac{1}{2}\right)$$

$$\text{"} \iff \left(\begin{array}{l} OM = 2\, d(M, \Delta_1) \text{ et } M \in P_2 \\ \qquad\text{ou} \\ OM = 2\, d(M, \Delta_2) \text{ et } M \in P_1 \end{array} \right.$$

où $\Delta_1 = t_{\frac{1}{2}\vec{j}}(\Delta)$ $\qquad$ et $\qquad$ $\Delta_2 = t_{-\frac{1}{2}\vec{j}}(\Delta)$

L'ensemble cherché est donc constitué de 2 branches d'hyperbole

- l'une de foyer O de directrice associée Δ_1
- l'autre de foyer O de directrice associée Δ_2

Remarque : il est facile ainsi de généraliser le problème en étudiant l'ensemble des points M de P tels que :

$$d(M, D) = h\, d(M, \Delta) \quad \text{où} \quad h > 0$$

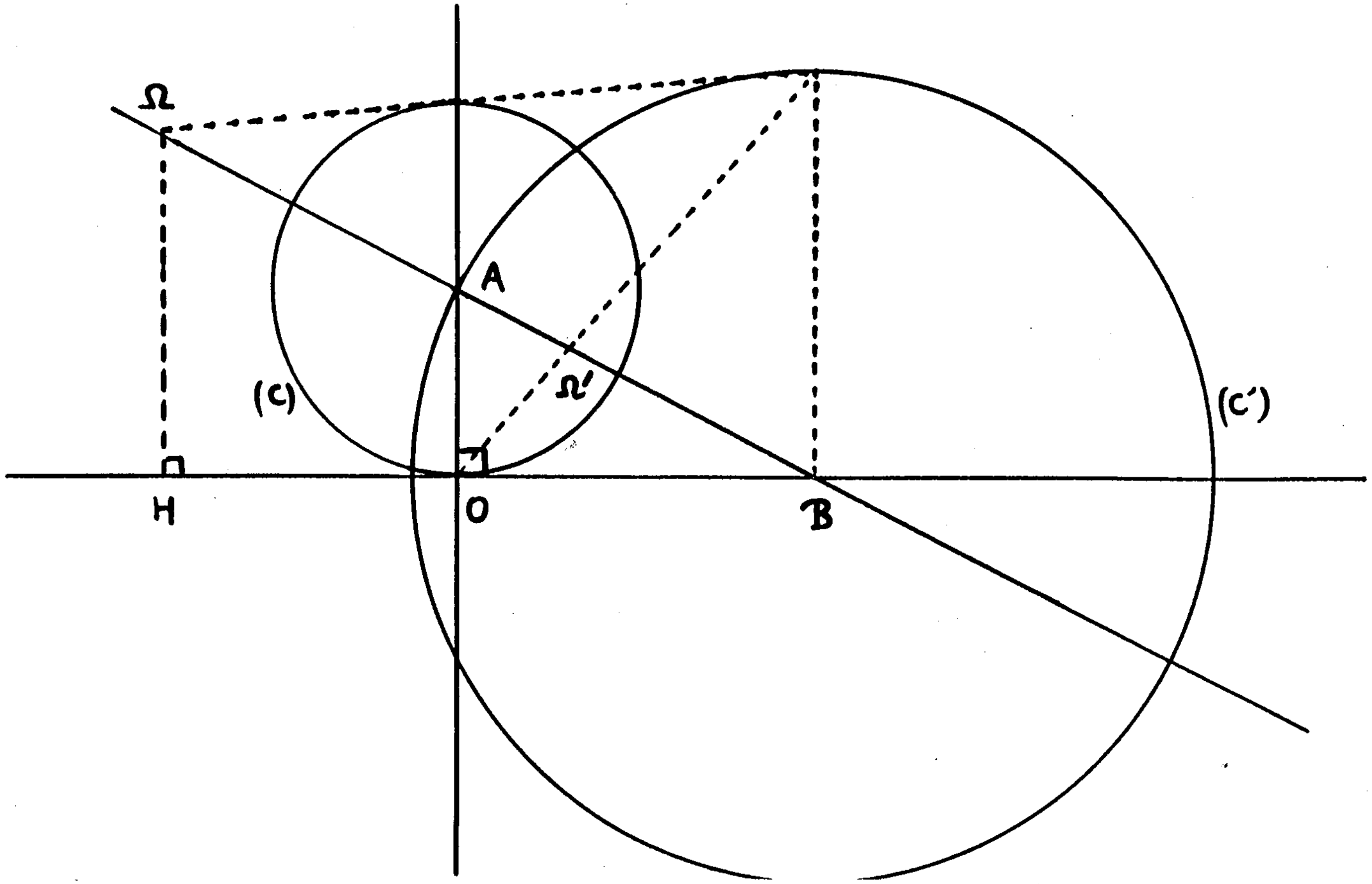
Exemple 6 : Dans le plan orienté rapporté à un repère orthonormal direct $(O,\vec{I},\vec{J})$, on donne le point A de coordonnées (0,1) et le cercle (C) de centre A et de rayon 1. Soit B un point de l'axe des abscisses, distinct de O. Soit (C') le cercle de centre B passant par A.

1. On appelle ϕ la mesure de l'angle $(\vec{AO}, \vec{AB})$, appartenant à l'intervalle $\left] -\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2} \right[$.
Exprimer en fonction de ϕ l'abscisse de B et le rayon du cercle (C').

2. a) Déterminer les 2 homothéties qui transforment (C) en (C') : on déterminera le rapport et les coordonnées du centre de chacune de ces homothéties.

b) Montrer que l'ensemble des centres de ces homothéties, lorsque B parcourt l'axe des abscisses (en restant distinct de O), est inclus dans une parabole que l'on demande de construire.

Nice 1984



Il est facile et intéressant de construire les deux centres d'homothétie Ω et Ω'.

On a donc : $\dfrac{\Omega A}{\Omega B} = \dfrac{OA}{AB}$ (C) étant le cercle de centre A de rayon OA
(C') étant le cercle de centre B de rayon AB

Si H est le projeté orthogonal de Ω sur l'axe des abscisses, on obtient, en considérant les triangles homothétiques (AOB) et (ΩHB) :

$$\frac{OA}{AB} = \frac{H\Omega}{\Omega B}$$

donc $\dfrac{\Omega A}{\Omega B} = \dfrac{H\Omega}{\Omega B}$ soit $\underline{\Omega A = H\Omega}$

<u>Ω est donc sur la parabole de foyer A et de directrice l'axe des abscisses</u>

Exemple 7 : De tous les triangles inscrits dans le cercle trouver ceux d'aire maximale

1ère partie On démontre analytiquement la propriété P suivante :

De tous les triangles inscrits dans un cercle donné celui qui a l'aire la plus grande est le triangle équilatéral.

1°) Soit un triangle ABC inscrit dans un cercle dont la longueur du rayon est prise comme unité

a) Montrer que la mesure S de l'aire de ce triangle est :

$$2 \sin\widehat{A} \sin\widehat{B} \sin\widehat{C}$$

b) x et y étant les mesures en radians de $\widehat{A}$ et $\widehat{B}$ ($x \in]0, \pi[$, $y \in]0, \pi[$) calculer S en fonction de x et y

2°) Une remarque géométrique

Soit ABC un triangle inscrit dans un cercle $\mathfrak{C}$ dont la longueur du rayon est prise comme unité.

a) Construire un triangle isocèle ABC_1 de sommet C_1 inscrit dans le cercle $\mathfrak{C}$. Indiquer le nombre de solutions.

b) Montrer qu'il existe par cette construction, toujours au moins un triangle isocèle inscrit dans le cercle $\mathfrak{C}$ dont l'aire est plus grande (ou égale) que celle du triangle ABC

c) Montrer que s'il existe un triangle d'aire maximale ce triangle ne peut être qu'équilatéral.

3°) La remarque géométrique précédente autorise à partir d'un triangle ABC isocèle en A.

Calculer S en fonction de la mesure x en radians de $\widehat{A}$ ($x \in]0, \pi[$)

4°) Montrer la propriété P

2ème partie Construction à partir d'un triangle isocèle inscrit dans un cercle $\mathfrak{C}$ d'une suite de triangles, convergente vers un triangle équilatéral.

Le cercle est orienté, la longueur de son rayon est prise comme unité.

Les trois sommets de ces triangles seront désignés par trois lettres toujours lues et placées sur le cercle suivant le sens d'orientation choisi.

Soit ABC un triangle isocèle de sommet A inscrit dans le cercle
On définit $(A_n B_n C_n)$ $n \in \mathbb{N}$ la suite de triangles isocèles de sommets A_n inscrits dans le cercle $\mathcal{C}$ par :

$$A_0 = A, \quad B_0 = B, \quad C_0 = C \quad \text{et par } \forall n \in \mathbb{N} \qquad B_{n+1} = A_n \quad C_{n+1} = B_n$$

1°) Θ_0 est la mesure en radians de $\hat{A}$ ($\Theta_0 \in]0, \pi[$)

Pour $\Theta_0 = \frac{\pi}{6}$ construire sur une même figure les six premiers triangles de la suite. Que remarque-t-on ?

2°) Θ_0 étant quelconque ($\Theta_0 \in]0, \pi[$) on définit la suite $(\Theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où Θ_n est la mesure en radians du secteur angulaire $\hat{A}_n$

a) Montrer que $\Theta_{n+1} = f(\Theta_n)$, f étant une application de R dans R à déterminer.

b) Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ représenter graphiquement les courbes représentatives des applications f et g définies par : $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$ · et $\forall x \in \mathbb{R}$ $g(x) = x$

le point K de l'axe des abscisses, d'abscisse Π est tel que OK = 12 cm.

Représenter sur cette figure les six premiers termes de la suite

3°) a) Démontrer qu'il existe un unique réel L tel que $f(L) = L$

b) Démontrer qu'il existe un réel ℓ à déterminer tel que :

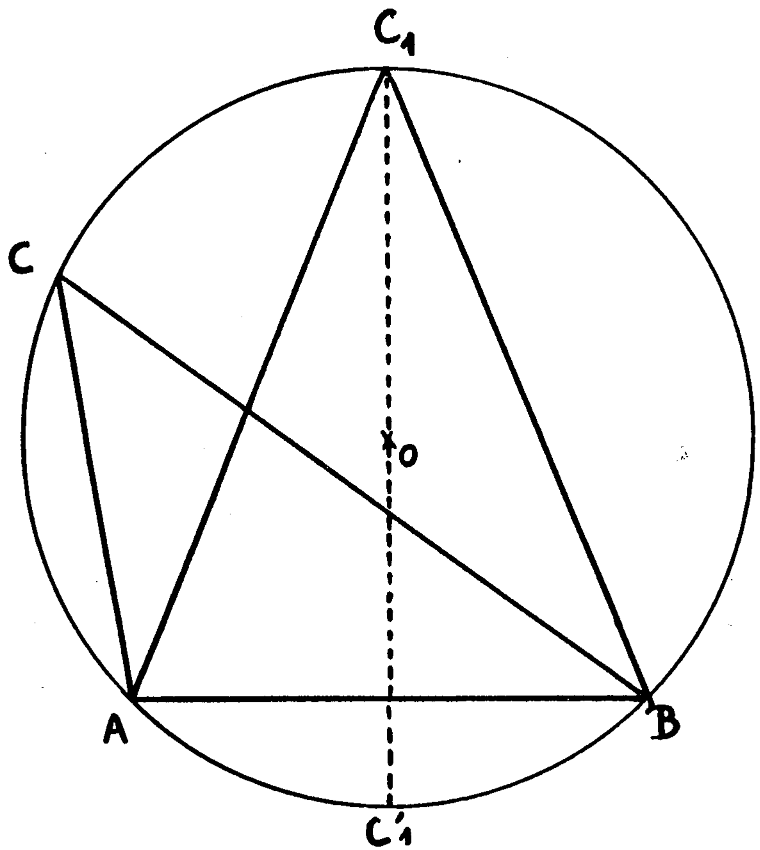
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \Theta_{n+1} - L = \ell(\Theta_n - L)$$

c) En déduire Θ_n en fonction de Θ_o et n puis la limite de $(\Theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$

4°) a) Combien de triangles isocèles suffit-il de construire pour obtenir un triangle tel que Θ'_n soit une valeur approchée de la limite de $(\Theta'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à 1 près si $\Theta'_o = 30$, Θ'_n étant la mesure en degré de $\widehat{A}_n$.

b) Même question avec $\Theta'_o = 179$.

D'après un texte proposé au CAPES pratique
par M. Dominique GIRAL



1ère partie

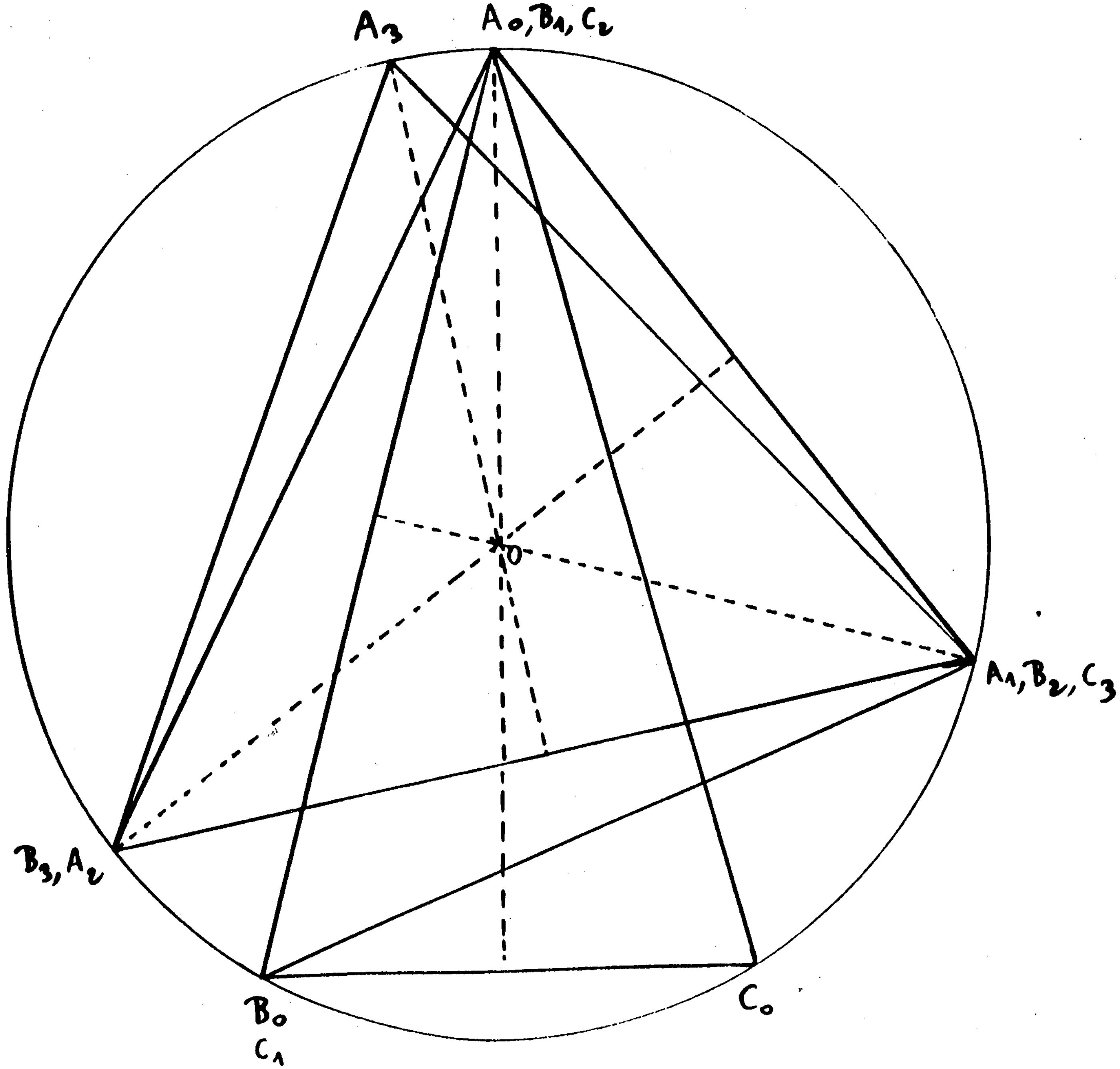
2°) Une remarque géométrique

Le triangle isocèle ABC_1 a une aire supérieure ou égale à celle de ABC

Si ABC n'est pas équilatéral, il existe donc un triangle isocèle d'aire strictement plus grande : il ne peut donc être d'aire maximale.

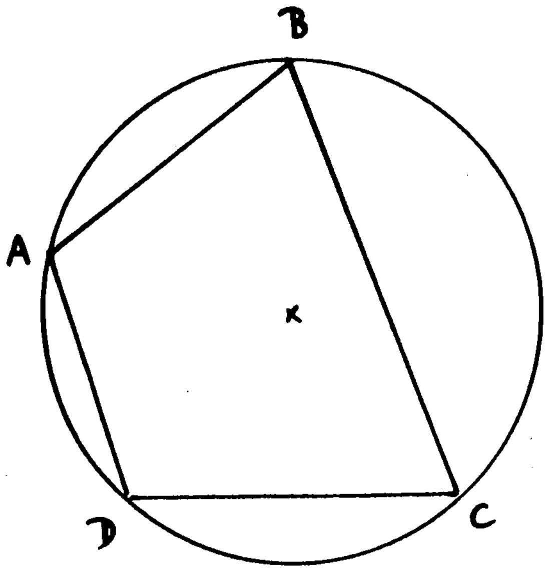
2ème partie

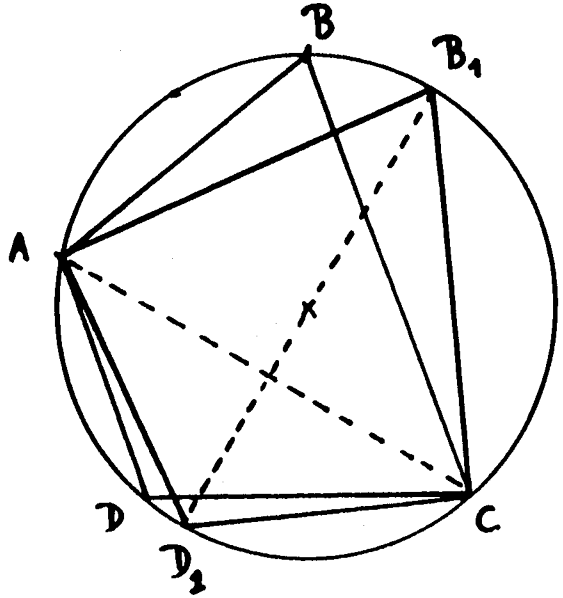
Construction des premiers termes de la suite des triangles isocèles $A_n\ B_n\ C_n$



<u>Remarque</u> : La même remarque géométrique permet de résoudre complétement et simplement le problème suivant :

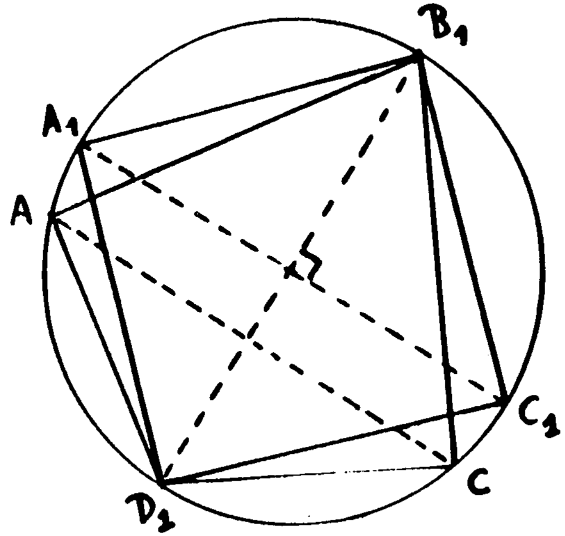
"De tous les quadrilatères inscrits dans un cercle donné celui qui à l'aire le plus grand est le carré"





Aire (ABCD) $\leq$ Aire (AB_1CD_1)

$[B_1D_1]$ est un diamètre



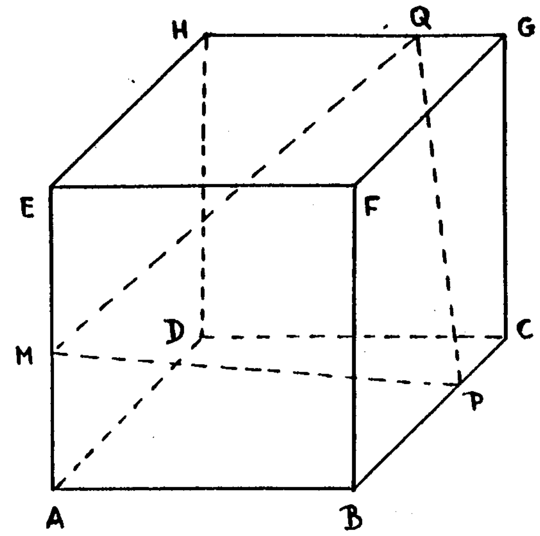
Aire $(AB_1CD_1) \leq$ Aire $(A_1B_1C_1D_1)$

$[B_1D_1]$ et $[A_1C_1]$ sont deux diamètres orthogonaux

<u>L'aire du quadrilatère (ABCD) est donc inférieure ou égale à l'aire du carré $(A_1B_1C_1D_1)$</u>

Exemple 8 : Un Problème d'extremum dans le Cube

proposé par Georges LION, IREM de LIMOGES (IREMOIS n° 16)

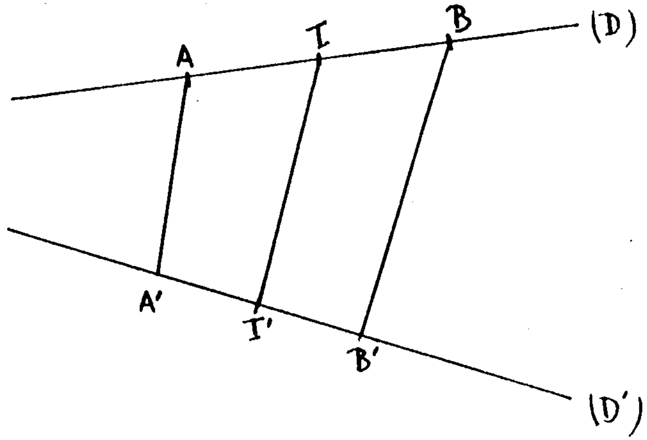


1 - Le cube dessiné ci-contre étant donné, comment choisir M sur $[A, E]$, P sur $[B, C]$, Q sur $[G, H]$ de façon que le périmètre $MP + PQ + QM$ soit minimum.
(Question posée par Louis Corrieu, Inspecteur Général).

Solution : On admet au préalable que la position de périmètre minimum est effectivement atteinte ; pour justifier cela on peut se ramener à un résultat de nature topologique (minimum d'une fonction numérique continue sur un cube compact) ; ou bien on peut encore interpréter la position de périmètre minimum comme étant la position d'équilibre d'un élastique tendu autour de 3 arêtes.

Ceci étant, on doit démontrer un résultat préliminaire :
Soit D et D' deux droites non coplanaires ; A et B deux points de D, A' et B' deux points de D', I le milieu de $[A, B]$, I' le milieu de $[A', B']$

Alors on a : $II' \leq \dfrac{AA' + BB'}{2}$, l'égalité ne pouvant survenir que si $A = B$ et $A' = B'$.



<u>**Démonstration**</u> : $\vec{II'} = \vec{OI'} - \vec{OI} = \dfrac{\vec{OB'} + \vec{OA'}}{2} - \dfrac{\vec{OB} + \vec{OA}}{2} = \dfrac{\vec{BB'} + \vec{AA'}}{2}$

Il s'agit donc d'appliquer l'inégalité triangulaire à la norme euclidienne ; on sait que l'on a égalité si et seulement si $\vec{AA'}$ et $\vec{BB'}$ sont colinéaires et cela ne peut se produire que pour $A = B$ et $A' = B'$.

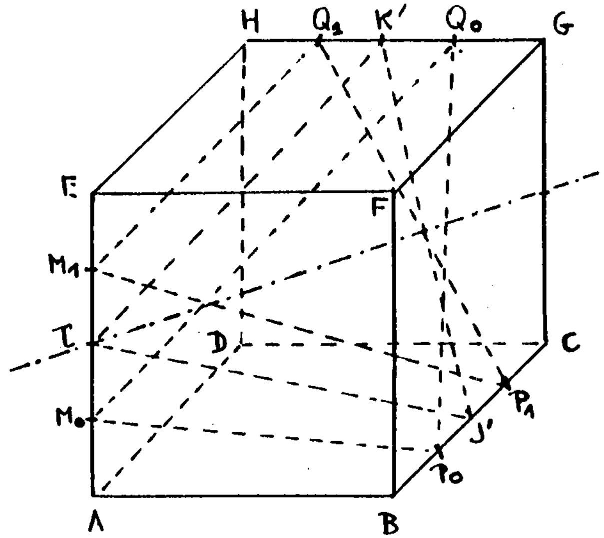
Appliquons ceci au problème posé ; supposons que le triangle $[M_o, P_o, Q_o]$ qui minimise le périmètre <u>ne soit pas</u> le triangle dont les sommets sont les milieux I, J, K des arêtes respectives $[A, E], [B, C], [G, H]$.

Supposons par exemple $M_o \neq I$; soit d le demi-tour ayant pour axe la droite joignant les milieux de [A, E] et [C, G].

Ce demi-tour conserve globalement le cube, échange les points A et E et les arêtes [G, H] et [C, B].

Posons $M_1 = d(M_o)$, $P_1 = d(Q_o)$, $Q_1 = d(P_o)$.

I est le milieu de $[M_o, M_1]$, J' celui de $[P_o, P_1]$, K' celui de $[Q_o, Q_1]$



D'après le résultat démontré plus haut, on a :

$$I\,J' < \frac{M_o\,P_o + M_1\,P_1}{2}$$

$$I\,K' < \frac{M_o\,Q_o + M_1\,Q_1}{2}$$

$$J'\,K' \leqq \frac{P_o\,Q_o + P_1\,Q_1}{2}$$

$$I\,J' + I\,K' + J'\,K' < \frac{M_o\,P_o + P_o\,Q_o + Q_o\,M_o}{2} + \frac{M_1\,P_1 + P_1\,Q_1 + Q_1\,M_1}{2}$$

Or ces deux demi périmètres sont égaux, car d est une isométrie.

Le triangle [I, J', K'] aurait donc un périmètre strictement inférieur à celui de $[M_o, P_o, Q_o]$, cela étant impossible, l'hypothèse faite au début est contredite, on a nécessairement :

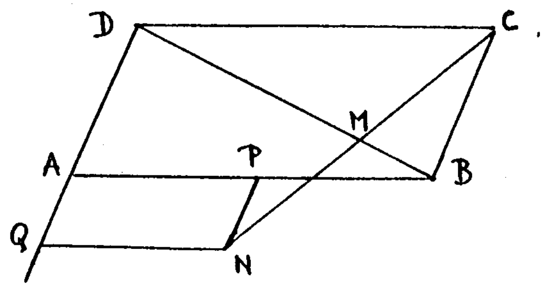
$$M_o = I, \quad P_o = J, \quad Q_o = K.$$

Exemple 9 :

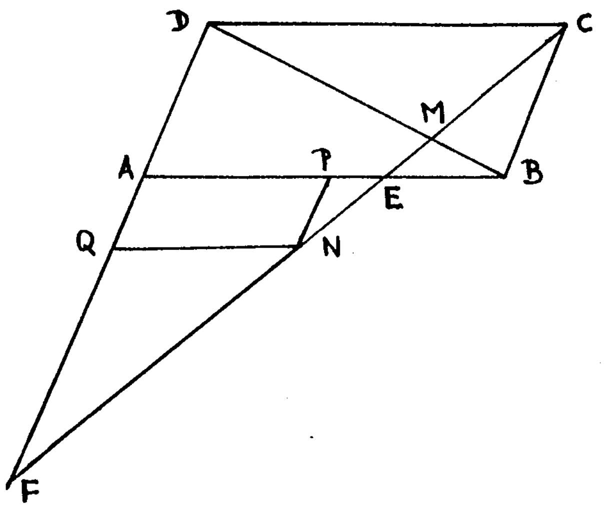
Texte trouvé dans un ouvrage de 1ère à propos de calcul dans un repère :

On donne un parallélogramme ABCD ; M est un point quelconque de la diagonale (BD), N le symétrique de C par rapport à M . P (respectivement Q) le projeté de N sur (AB) (respectivement (AD)) parallélement à (AD) (respectivement (AB))

Montrer que MPQ sont alignés.



Solutions :



Calcul dans un repère; par exemple dans $(A, \vec{AB}, \vec{AD})$ aisé

Une méthode géométrique :

$h\ (M,\ k) \qquad k = \dfrac{\overline{MF}}{\overline{MN}}$

$N \longmapsto F$

$$k = \frac{\overline{MF}}{\overline{MN}} = -\frac{\overline{MF}}{\overline{MC}} = -\frac{\overline{MD}}{\overline{MB}} = -\frac{\overline{MC}}{\overline{ME}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{ME}}$$

donc par h : $E \longmapsto N$

Donc $\vec{MN} = k\ \vec{ME}$

P et l'intersection de (NP) et (EP) d'images par h (FQ) et (NQ) donc h (P) = Q donc M, P, Q alignés

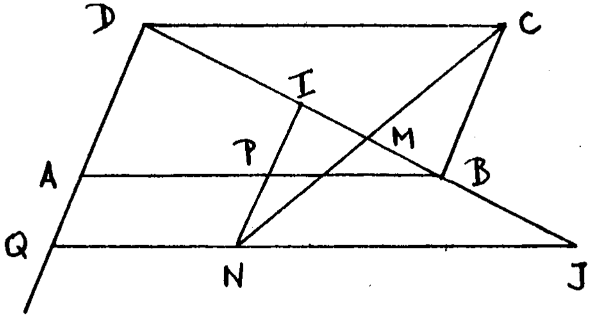
Autre méthode géométrique

M est le milieu de [NC] donc celui de [IB] et celui de [DJ]

h (M, k)

$I \longmapsto D \qquad k = \dfrac{\overline{MD}}{\overline{MI}} = \dfrac{-\overline{MJ}}{-\overline{MB}} = \dfrac{\overline{MJ}}{\overline{MB}}$

donc $B \longmapsto J$



P intersection de (NP) et (BP) a pour image par h l'intersection de (AQ) et (NQ) : Q .

Donc M, P, Q sont alignés

Reprenant les hypothèses de départ (sauf $M \in (BD)$) on montre facilement, par une méthode analytique :

$M \in (BD)$	$\Longleftrightarrow$	M, P, Q alignés
"	$\Longleftrightarrow$	(PQ) // (AC)
"	$\Longleftrightarrow$	(AN) // (BD)
"	$\Longleftrightarrow$	(DN) et (CQ) se coupent sur (AB)

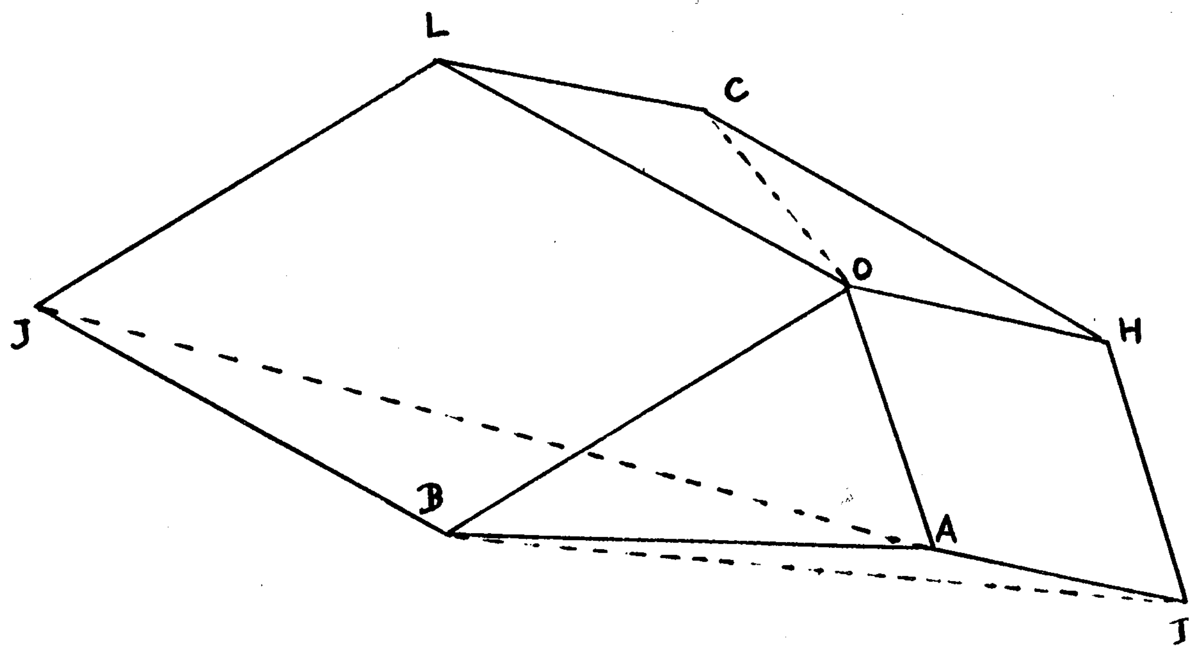
Par des méthodes géométriques, cela exigerait au moins quatre démonstrations.

Exemple 10 :

Les trois exercices suivants sont proposés par Georges LION, Professeur à la Faculté des Sciences de Limoges. Une méthode algébrique donne assez aisèment une solution. Magré leur énoncé très simple, ces problèmes n'ont pas reçu de justifications géométriques élémentaires.

(pour une démonstration géométrique utilisant des outils plus élaborés lire l'article de Georges LION "INVOLUTIONS DANS LE PLAN" - Irémois n° 19 Journal de l'IREM de LIMOGES).

a)

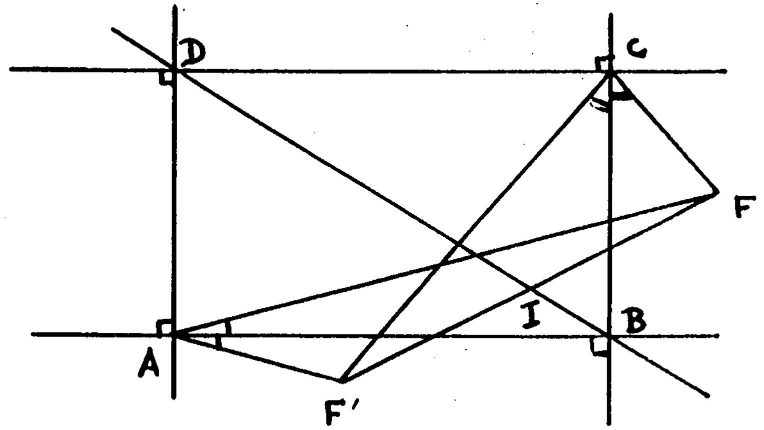


A l'extérieur d'un triangle (OAB) on construit deux losanges : (OAIH) et (OBJL) tels que : $\widehat{OAI} = \widehat{OBJ} = 120°$

On achève le parallélogramme (HOLC).
Montrer que (JA), (IB) et (CO) sont concourantes ou parallèles.

(problème posé par Raymond BARRA IREM de POITIERS).

b)

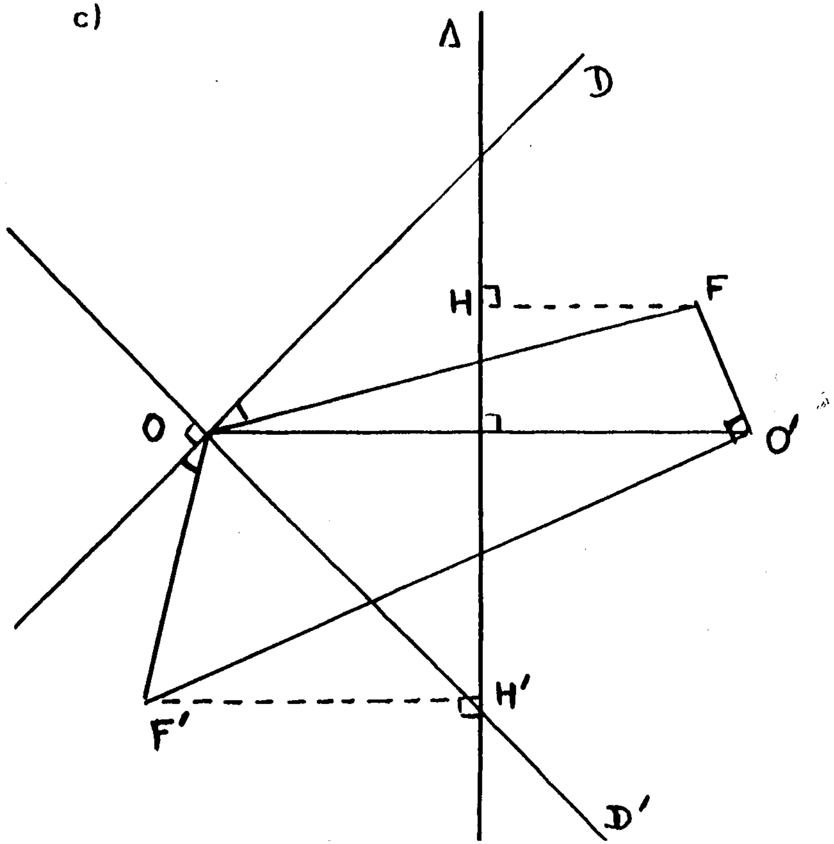


(ABCD) est un rectangle

F étant un point donné, on construit F' le point d'intersection des droites symétriques de (CF) (respectivement (AF)) par rapport à (CB) (respectivement (AB))

Montrer que l'intersection I de (BD) et de (FF') est le milieu de [FF'].

c)



Δ est la médiatrice de [OO']

D et D' deux droites passant par O telles que :

$$\widehat{(D', OO')} = \widehat{(OO', D)} \equiv \frac{\pi}{4} \quad [\pi]$$

F étant un point donné, on construit F' le point d'intersection de la droite symétrique de (OF) par rapport à D' et de la perpendiculaire en O' à (O' F).

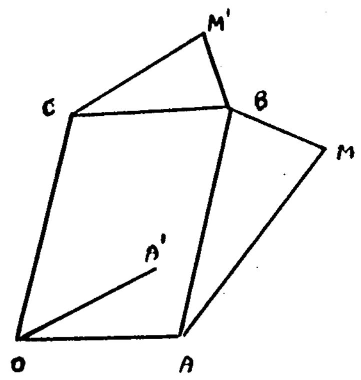
H et H' sont les projetés orthogonaux de F et F' sur Δ

Montrer que : $\overline{HF} \cdot \overline{H'F'} = -\dfrac{OO'^2}{4}$

ETUDE DE CONFIGURATIONS

L'APPAREIL A ROTATION

1) principe



OABC est un parallélogramme articulé, O est fixe

Les triangles AMB et CBM' sont respectivement solidaires de [AB] et [CB] ; AM = AB ; CB = CM'

$(\vec{AM}, \vec{AB}) \equiv (\vec{CB}, \vec{CM'}) \equiv \alpha \quad (2\pi)$

on veut montrer que quand M décrit une courbe $\mathcal{C}$, M' décrit la courbe image par la rotation de centre O et d'angle α.

Soit A' l'image de A par la rotation de centre O et d'angle α

OA = OA' = CB = CM'

$(\vec{OA'}, \vec{CM'}) \equiv 0 \quad (2\pi)$ donc OA' M' C est un parallélogramme.

AM = AB = OC = A' M'

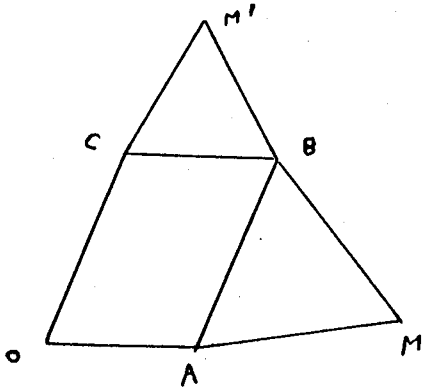
$(\vec{AM}, \vec{A'M'}) \equiv (\vec{AM}, \vec{OC}) \equiv (\vec{AM}, \vec{AB}) \equiv \alpha$

on a donc AM = A'M' et de plus $r(O, \alpha)$

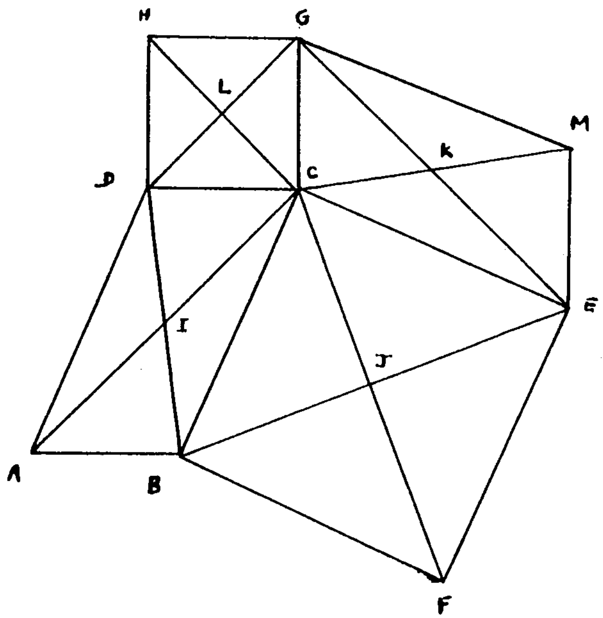
$(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A'M'}) \equiv \alpha$ $\quad A \longmapsto A'$

on en déduit $M \longmapsto M'$

2) quelques exercices se ramenant à cette situation :



OABC est un parallélogramme
AMB et CBM' sont équilatéraux
Montrer que OMN' est équilatéral



A partir d'un parallélogramme ABCD, on construit les carrés BCEF et DCGH puis le parallélogramme CEMG

Montrer que AFMH et IJKL sont des carrés

A partir du parallélogramme ABCD on montre : $R_{(A, \frac{\pi}{2})}$

$$F \longmapsto H$$

A partir du parallélogramme MGCE on montre $R_{(M, \frac{\pi}{2})}$

$$H \longmapsto F$$

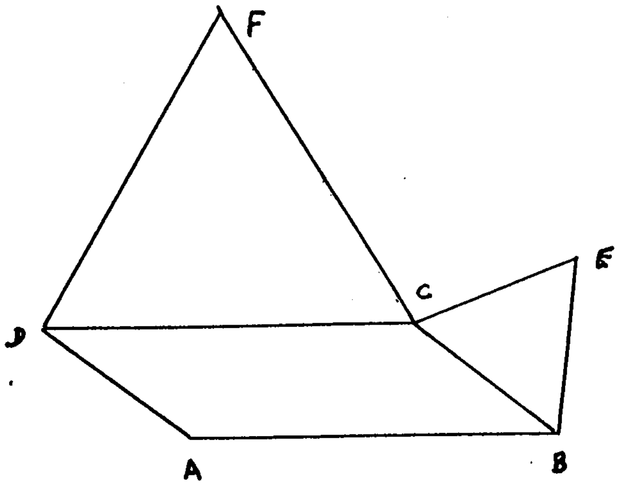
AFMH est donc un carré, IJKL s'en déduit par une homothétie de centre C et de rapport 1/2

PLUSIEURS METHODES POUR UN MEME EXERCICE

On donne un parallélogramme A B C D , on construit les triangles équilatéraux (B E C) et (C F D) (voir figure)

Montrer que (A E F) est équilatéral

Cet exercice a été proposé dans une classe de TC, voici des solutions proposées par les élèves de cette classe.



Solution 1

$r\,(B, \frac{\pi}{3})$ $\quad$ $r\,(D, \frac{\pi}{3})$ $\quad$ Soit ϕ la rotation vectorielle d'angle $\frac{\pi}{3}$.

$B \longmapsto B$ $\quad$ $D \longmapsto D$

$E \longmapsto C$ $\quad$ $C \longmapsto F$ $\quad$ $\phi\,(\vec{BE}) = \vec{BC}$ et $\phi\,(\vec{DC}) = \vec{DF}$

$$\phi\,(\vec{AE}) = \phi\,(\vec{AB} + \vec{BE}) = \phi\,(\vec{AB}) + \phi\,(\vec{BE}) = \phi\,(\vec{DC}) + \phi\,(\vec{BE}) = \vec{DF} + \vec{BC} = \vec{DF} + \vec{AD} = \vec{AF}$$

Donc AEF est équilatéral

Solution 2

$r(F, \frac{\pi}{3})$

$D \longmapsto C$

$A \longmapsto E$ $\quad$ car $DA = CE$

et $(\vec{DA}, \vec{CE}) \equiv \frac{\pi}{3}$

Solution 3

$$\underbrace{C \xmapsto{\;r(C,\,\frac{\pi}{3})\;} C \xmapsto{\;r(F,\,-\frac{\pi}{3})\;} D}_{t_{\vec{CD}}} \qquad \text{or} \qquad B \xmapsto{\;r(C,\,\frac{\pi}{3})\;} E \xrightarrow{\;r(F,\,-\frac{\pi}{3})\;} A \quad \text{car} \quad \vec{BA} = \vec{CD}$$

$$\text{donc} \qquad E \xrightarrow{\;r(F,\,-\frac{\pi}{3})\;} A \qquad AEF \text{ est équilatéral}$$

Solution 4 Les triangles ADF, EBA, ECF sont isométriques en effet :

Si on pose $(\vec{DA}, \vec{DC}) = \alpha$, on montre facilement :

$$(\vec{DA}, \vec{DF}) \equiv (\vec{BE}, \vec{BA}) \equiv (\vec{CE}, \vec{CF}) \equiv \alpha + \frac{\pi}{3}$$

$DA = BE = CE$ et $DF = BA = CF$

Donc $AF = EA = EF$ AEF est équilatéral.

Solution 5 Avec les nombres complexes : Dans un repère orthonormé d'origine C

B, D, E, F, A ont pour affixes b, d, e, f, b + d

$$B \xmapsto{\;r(C,\,\frac{\pi}{3})\;} E \qquad F \longmapsto D \qquad d = e^{i\frac{\pi}{3}} f \qquad e = e^{i\frac{\pi}{3}} b$$

Affixe de $\vec{AE}$: $e - a = e^{i\frac{\pi}{3}} b - (b + d) = b\,(e^{i\frac{\pi}{3}} - 1) - d = e^{2i\frac{\pi}{3}} b - d$

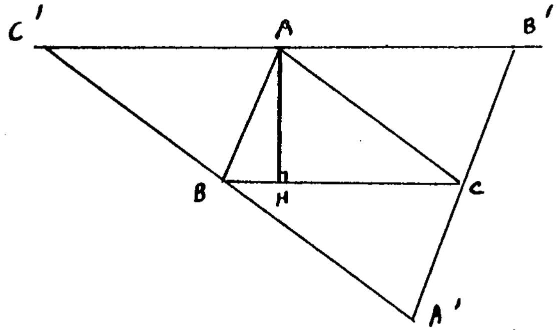
Affixe de $\vec{AF}$: $f - a = e^{-i\frac{\pi}{3}} d - (b + d) = - b + d\,(e^{-i\frac{\pi}{3}} - 1) = - b + e^{-2i\frac{\pi}{3}} d$

$$e^{-i\frac{\pi}{3}}(f - a) = e - a$$

EXERCICES

Une démonstration de : "les hauteurs d'un triangle sont concourantes"	Orthocentre d'un triangle	à partir de la 4ème

<u>Une démonstration de : "les hauteurs d'un triangle sont concourantes"</u> (A, B, C) est un triangle ; les parallèles à (B C) passant par A, à (A C) passant par B, à (A B) passant par C se coupent en A', B', C'. Les hauteurs de (A, B, C) sont les médiatrices de (A', B', C')

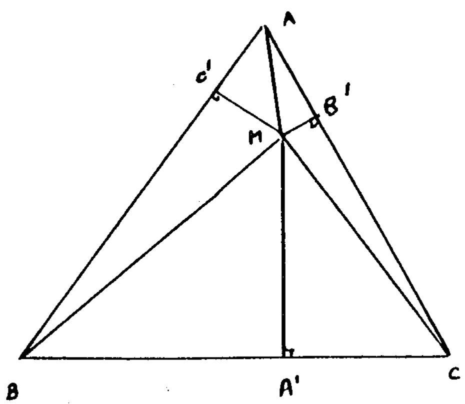


(A, B, C, B') et (A, C, B, C') sont des parallélogrammes.

A est le milieu de [B' C'], (A H) $\perp$ (B' C')

Montrer que ABC est équilatéral si est seulement si la somme des distances aux côtés de tout point M intérieur (au sens large) est constante	Une caractérisation du triangle équilatéral	A partir de la 3ème

Montrer que ABC est équilatéral si est seulement si la somme des distances aux côtés de tout point M intérieur (au sens large) est constante



- si (A, B, C) est équilatéral alors $\frac{1}{2}$ (a MC' + a MB' + a MA') = $\frac{1}{2}$ a x a$\frac{\sqrt{3}}{2}$ (aires)

$$MC' + MB' + MA' = a\frac{\sqrt{3}}{2}$$

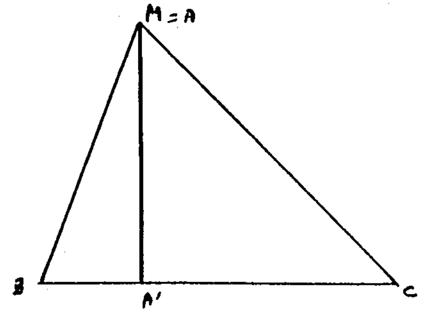
- si pour tout point M intérieur MA' + MB' + MC' = C^{te}

alors en remplaçant M par A, B, C

AA' = BB' = CC'

AA' = CC' donc BC = AB (calcul d'aires)

donc le triangle est équilatéral



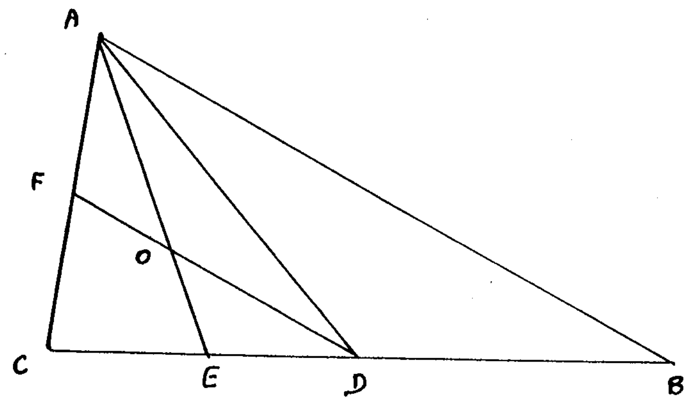
ABC triangle tel que $BC = 2AC$

D milieu de $[BC]$

E milieu de $[CD]$

F milieu de $[AC]$

Montrer que (AD) est bissectrice de $\widehat{EAB}$



$AC = CD$ donc ACD est un triangle isocèle

(CO) est l'autre médiane issue du sommet principal, donc elle est aussi médiatrice de $[AD]$

$O \in (CO)$ donc $AO = OD$ et OAD est isocèle.

Les angles à la base d'un triangle isocèle sont égaux

donc $\widehat{EAD} = \widehat{ADF}$

$(FD) \parallel (AB)$ car F milieu de $[AC]$ et E milieu de $[CD]$

les angles alternes internes sont égaux donc

$\widehat{FDA} = \widehat{DAB}$

donc (AD) bissectrice de $\widehat{EAB}$.

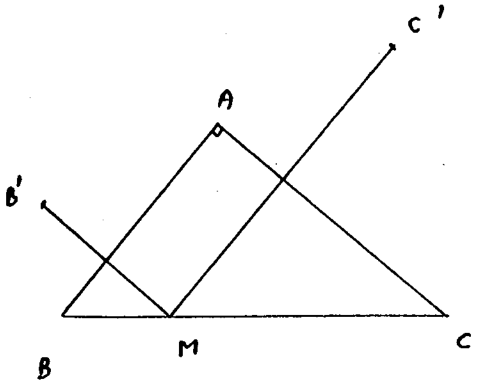
ABC triangle rectangle en A

M ε [BC]

B' est le symétrique de M par rapport à (AB)

C' est le symétrique de M par rapport à (AC)

Montrer que B', A, C' sont alignés



Etude configuration | 4 ème

Symétrie axiale | 2nde

Soit H le milieu de [MB'], K le milieu de [MC']

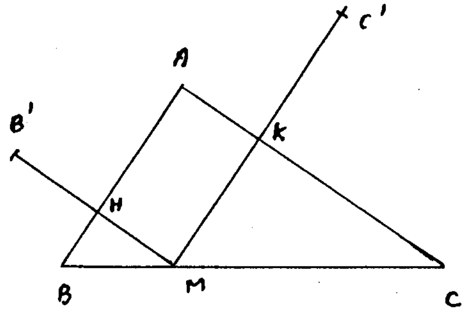
- Démonstration avec vecteurs :

  (A, K, M, H) est un rectangle

  $\vec{AK} = \vec{HM} = \vec{B'H}$ donc $\vec{B'A} = \vec{HK}$

de même $\vec{AC'} = \vec{HK}$

Donc $\vec{B'A} = \vec{AC'}$



- Démonstration avec les angles :

  $\widehat{B'AH} = \widehat{HAM}$ $\widehat{MAK} = \widehat{KAC'}$

  $\widehat{B'AH} + \widehat{HAK} + \widehat{KAC'} = 180°$

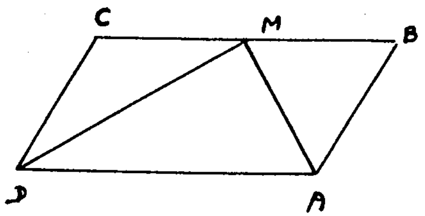
- Composé de deux réflexions (symétries orthogonales) d'axes perpendiculaires.

Etude de configuration
Projection - losange

4 ème - 2 nde

ABCD est un parallélogramme tel que BC = 2 BA
M est le milieu de [CB]

Montrer que (DM) ⊥ (MA)

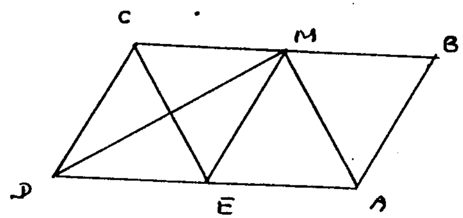


Soit E le projeté de M sur (AD) parallélement à (CD) : E est le milieu de [AD]

DEMC est un losange car DC = CM = ME = ED
Ses diagonales sont donc perpendiculaires (DM) ⊥ (CE)

(CM) // (EA) et CM = EA CMAE est donc un parallélogramme :
donc (MA) // (CE)

(MA) ⊥ (DM)



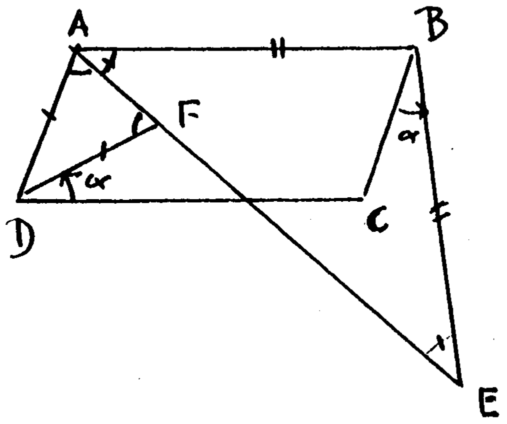
(ABCD) est un parallélogramme

DF = DA

BE = BA

$(\vec{DC}, \vec{DF}) = (\vec{BC}, \vec{BE}) \equiv \alpha\ [2\pi]$

Montrer que A, F et E sont alignés



Etude de configuration

problème d'alignement ; parallélogramme

2 nde

Soit $x = \widehat{ABC} = \widehat{ADC}$ $\widehat{DAB} = \pi - x$ $\alpha = \widehat{CDF} = \widehat{CBE}$

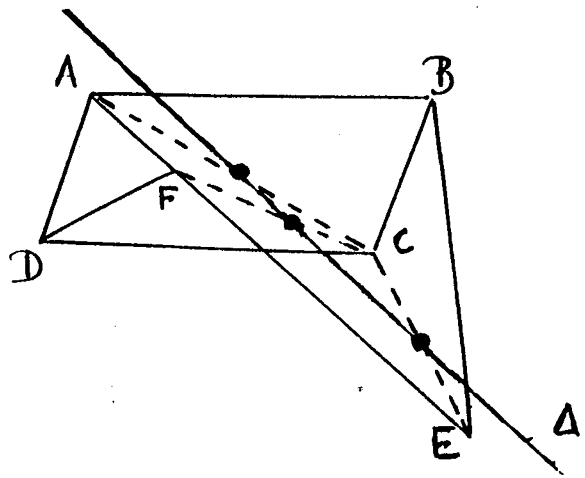
$$\widehat{BAF} = \pi - x - \left[\frac{\pi - (x - \alpha)}{2}\right] = \frac{\pi - x - \alpha}{2}$$

$$\widehat{BAE} = \frac{\pi - (x + \alpha)}{2} = \frac{\pi - x - \alpha}{2}$$

On peut en 1ère S-E utiliser les angles orientés

Remarque les triangles DCF et BEC sont inversement isométriques

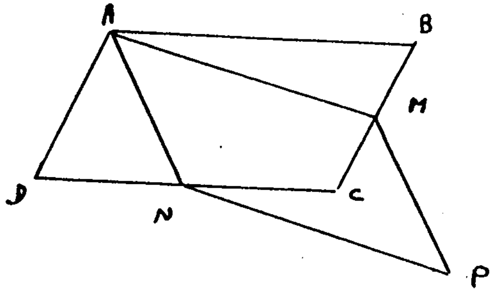
Les milieux de [CE], de [FC] et de [DB] donc de [AC] sont alignés sur l'axe Δ de l'antidéplacement transformant DCF en BEC donc; A, F et E sont alignés



Etude de configuration
Calcul vectoriel

2 nde

ABCD est un parallélogramme, M est le milieu de [B C]
N est le mileu de [D C]
AMPN est un parallélogramme
Montrer que A C P sont alignés



$$\vec{AP} = \vec{AM} + \vec{AN}$$

$$= \frac{1}{2}\,(\vec{AB} + \vec{AC}) + \frac{1}{2}\,(\vec{AC} + \vec{AD})$$

$$= \frac{1}{2}\,(\vec{AB} + \vec{AD}) + \vec{AC}$$

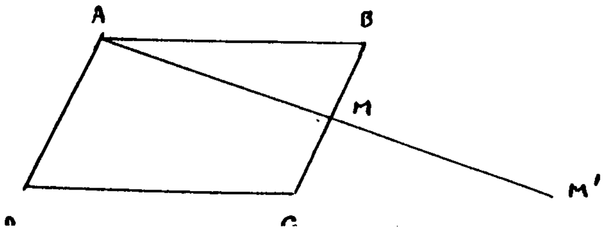
$$= \frac{1}{2}\,\vec{AC} + \vec{AC}$$

$$= \frac{3}{2}\,\vec{AC}$$

Etude configuration
Symétrie centrale ou calcul vectoriel

3ème - 2nde

ABCD est un parallélogramme, M est le milieu de [B C] ; M' est le symétrique de A par rapport à M ; Montrer que C est le milieu de [D M']



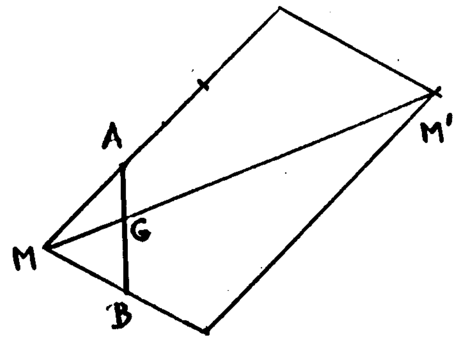
$$\left.\begin{array}{l} S_M\,(B) = C \\ S_M\,(A) = M' \end{array}\right\} \text{ donc } BA = CM' \text{ et } (BA) \parallel (CM')$$

or $AB = DC$ et $(AB) \parallel (DC)$
donc $(DC) \parallel (CM')$ donc D, C, M' sont alignés
et $DC = CM'$ donc C est le milieu de [D M']

autre solution : $\vec{AB} = \vec{CM'}$ et $\vec{AB} = \vec{DC}$

A et B sont 2 points fixes. A tout point M on associe M' tel que $\overrightarrow{MM'} = 3\,\overrightarrow{MA} + 2\,\overrightarrow{MB}$

Montrer que (MM') passe par un point fixe



Barycentre — 1ère S-E

Soit G le barycentre de (A, 3) (B, 2)

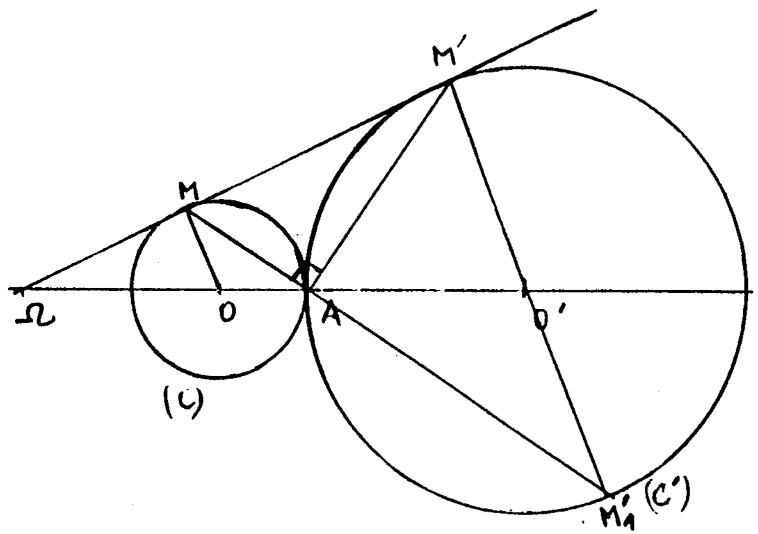
$\overrightarrow{MM'} = 5\,\overrightarrow{MG}$ donc M, M' et G sont alignés

---

2 cercles de rayons R et R' ($R \neq R'$) sont tangents extérieurement en A.

$(MA) \perp (M'A)$ $\quad M \in (C) \setminus \{A\}$ $\quad M' \in (C')$

Montrer que (MM') passe par un point fixe



Homothétie — 1ère S-E

Soit M'_1 le point d'intersection de (MA) et (C') autre que A

M'_1 est diamétralement opposé à M'.

Soit $h_{(A,\, -\frac{R'}{R})}$ homothétie transformant (C) en (C') alors $M \mapsto M'_1$

et $\overrightarrow{O'M'} = \frac{R'}{R}\,\overrightarrow{OM}$

Soit $h_{(\Omega,\, \frac{R'}{R})}$ l'autre homothétie transformant (C) en (C') alors

$M \mapsto M'$ donc (MM') passe par Ω.

Etude de configuration

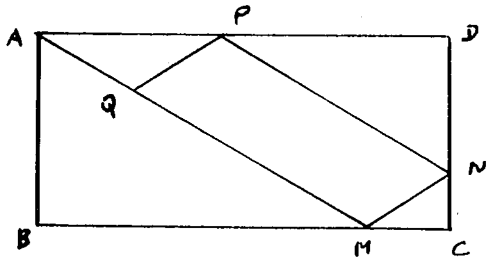
Réflexion

1ère S E

ABCD rectangle ; AD = a, AB = b, a > b

Une bille de billard lancée en A frappe [BC] en M, [CD] en N, [DA] en P.

Montrer que MNPQ est un parallélogramme ; (MN) (NP), (PQ) passent par trois points fixes



Pour M donné, (MN) est l'image de (AM) par une réflexion d'axe (BC)

(PN) est l'image de (MN) par une réflexion d'axe (DC)

La composée de ces deux réflexions d'axes perpendiculaires est une symétrie de centre C. Donc (AM) est parallèle à (PN) de même (PQ) est parallèle à (MN)

(MN) passe par $S_{(BC)}(A)$

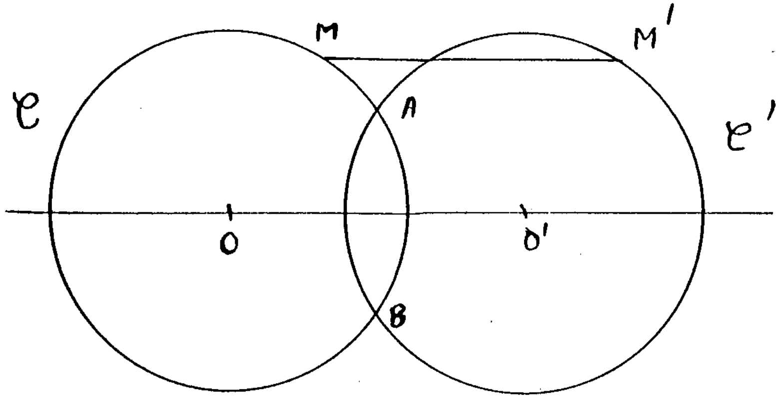
(NP) passe par $S_{(CD)} \circ S_{(BC)}(A)$

(PQ) passe par $S_{(AD)} \circ S_{(CD)} \circ S_{(BC)}(A)$

On donne deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ de même rayon sécants en A et B .

Soit M un point de $\mathcal{C}$ et M' de $\mathcal{C}'$ tel que $\vec{MM'} = \vec{OO'}$

Montrer que B est l'orthocentre de AMM'



Etude de configuration
Translation

A partir de la Seconde

Dans la translation $t_{\vec{OO'}}$ $M \mapsto M'$
$B \mapsto B'$

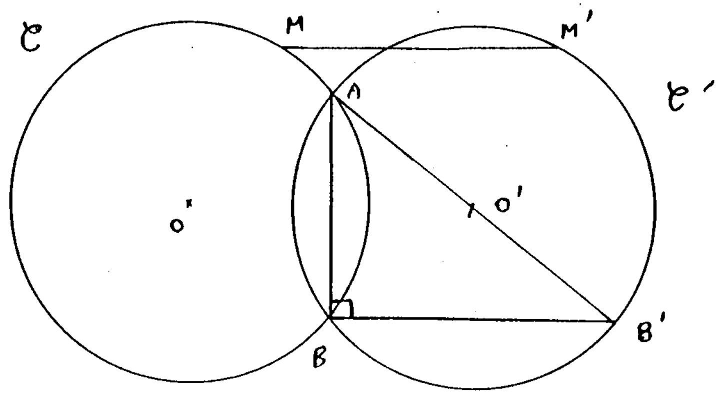
(A B) ⊥ (B B') donc

[A B'] est un diamètre de $\mathcal{C}'$ donc

(B'M') est orthogonale à (AM') et (BM) et aussi orthogonale à (AM')

(A B) est orthogonale à (M M')

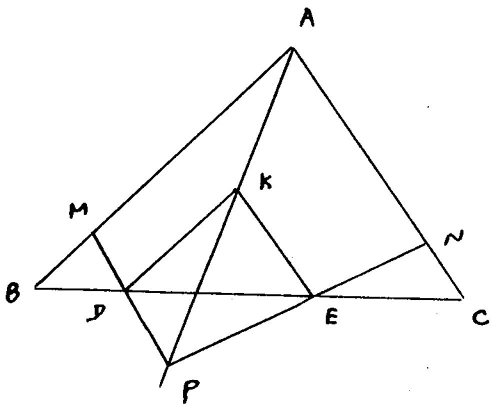
Donc B est l'orthocentre de A M M'.



Etude de configuration
Homothétie

2nde

On donne un triangle ABC
Les points $A\,K\,P$ sont alignés
Soit D et E les intersections respectives de (BC) avec les droites parallèles à (AB) et (AC) passant par K .
La droite (DP) coupe (AB) en M .
La droite (PE) coupe (AC) en N
Montrer que (MN) est parallèle à (BC)



Soit h l'homothétie de centre P telle que $h(k) = A$

$$\begin{array}{ccc} K & \xmapsto{h} & A \\ D & \longmapsto & M \\ E & \longmapsto & N \\ (DE) & \longmapsto & (MN) \end{array}$$

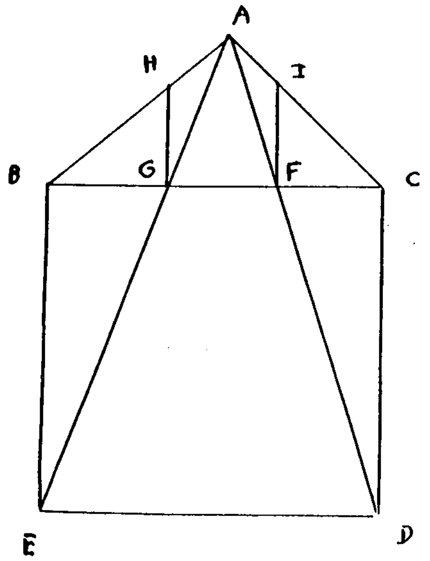
donc $(DE) \parallel (MN)$

On donne un triangle ABC
et un carré BCDE

(AE) coupe (BC) en G

(A D) coupe (B C) en F
la parallèle à (B E) menée par F
coupe (A C) en I
La parallèle à (B E) mené par G
coupe (A B) en H.

Montrer que F G H I est un carré



Application : Construire un carré inscrit dans un triangle.

Etude de configuration
homothétie

2nde

Soit h l'homothétie telle que h (A) = A et h (D) = F

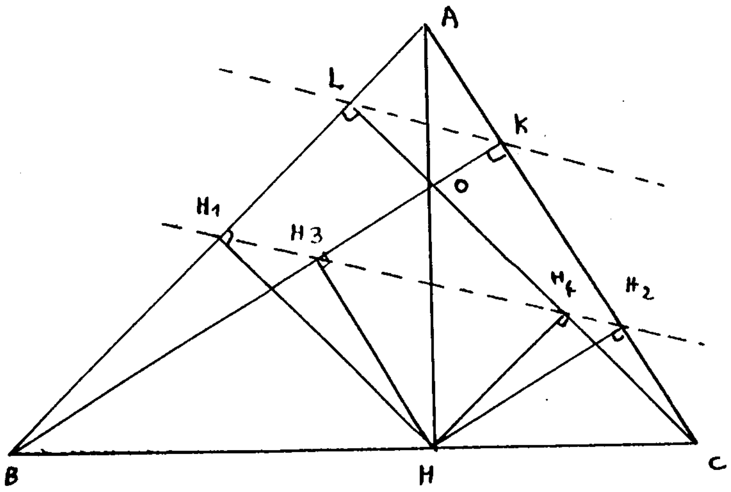
$$\begin{array}{lll} D \overset{h}{\longmapsto} F & & \\ C \longmapsto I & & \text{car } (DC) \,//\, (FI) \\ E \longmapsto G & & \text{car } (DE) \,//\, (FG) \\ B \longmapsto H & & \text{car } (EB) \,//\, (GH) \end{array}$$

or B C D E est un carré donc H I F G est un carré

Etude de configuration
homothétie

à partir de la 2nde
1ère S. E.

O orthocentre du triangle ABC
[AH] ; [LC] ; [BK] les 3 hauteurs
On projette H orthogonalement sur les deux autres côtés et les deux autres hauteurs . Soient H_1, H_2, H_3, les points obtenus.
Montrer que H_1, H_2, H_3, H_4 sont alignés



$h(A, \alpha)$: $O \longmapsto H$
$K \longmapsto H_2$ car $(BK) \parallel (H H_2)$
$L \longmapsto H_1$ car $(CL) \parallel (H_1H)$
donc $(LK) \parallel (H_1H_2)$

$h(B, \beta)$: $C \longmapsto H$
$L \longmapsto H_1$ car $(LC) \parallel (HH_1)$
$K \longmapsto H_3$ car $(KC) \parallel (HH_3)$
donc $(LK) \parallel (H_1H_3)$

$h(C, \gamma)$: $B \longmapsto H$
$L \longmapsto H_4$
$K \longmapsto H_2$
donc $(LK) \parallel (H_2H_4)$

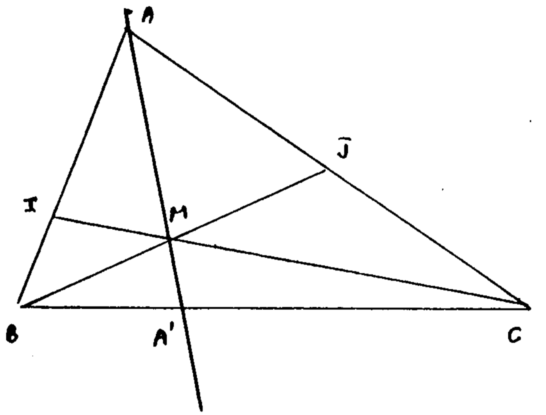
$(H_1 H_2) \parallel (H_2 H_4) \parallel (H_1 H_3)$ donc les 3 droites sont confondues

et H_1, H_2 , H_3 , H_4 sont alignés.

ABC est un triangle, A' n'est pas le milieu de [BC] et A' $\in$ (BC)

M est un point de (AA') tel que (CM) coupe (AB) en I et (BM) coupe (AC) en J

Montrer que (IJ) passe par un point fixe quand M varie



Etude de configuration
composée d'homothéties

Terminale C E

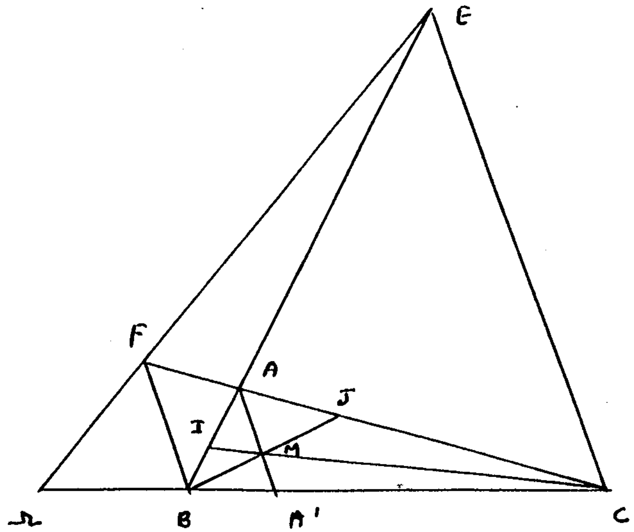
Soit h_I l'homothétie de centre I qui transforme C en M
h_J " " J " M en B

$$C \xrightarrow{h_I} M \xrightarrow{h_J} B$$
$$E \longmapsto A \longmapsto F$$

A' n'est pas le milieu de [BC] donc A n'est pas le milieu de [BE] donc BCEF n'est pas un parallélogramme

$$\vec{CB} \neq \vec{EF}$$

La composée des deux homothéties est donc une homothétie son centre Ω est l'intersection de (CB) et (EF), ce point est indépendant de M et $\Omega \in$ (IJ).



Etude de configuration
composée d'homothéties

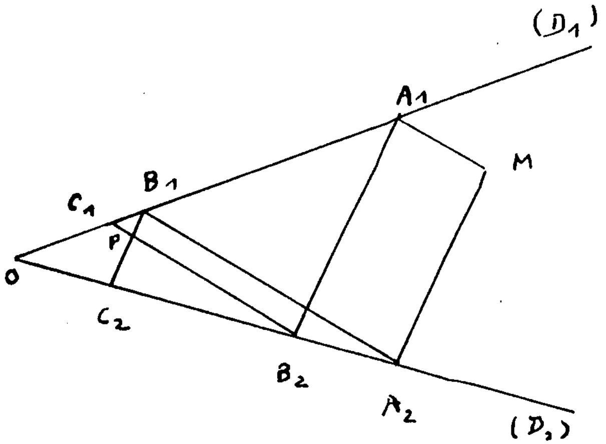
Termin. C E

On donne (D_1) et (D_2)
et M, A_1, A_2 .

On construit B_2, C_1, B_1, C_2, P

avec : $(MA_1) \parallel (A_2 B_1)$
$(MA_2) \parallel (A_1 B_2)$
$(MA_1) \parallel (B_2 C_1)$
$(MA_2) \parallel (B_1 C_2)$

Montrer M, P, O alignés



Il existe une homothétie h_1 de rapport k_1 telle que :

$$C_1 \overset{h_1}{\longmapsto} B_1$$

$$B_2 \longmapsto A_2$$

Il existe une homothétie h_2 de rapport k_2 telle que :

$$B_1 \overset{h_2}{\longmapsto} A_1$$

$$C_2 \longmapsto B_2$$

on a alors $h_1 \circ h_2\ (C_2) = A_2$ et $h_2 \circ h_1\ (C_1) = A_1$

or h_1 et h_2 ont le même centre O donc elles commutent

on a donc :

$$C_2 \overset{h_1 \circ h_2}{\longmapsto} A_2$$

$$C_1 \longmapsto A_1$$

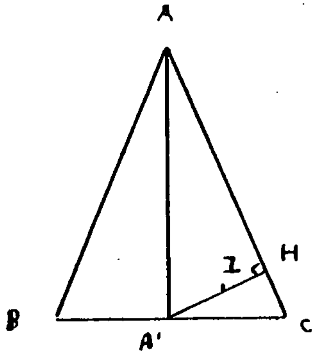
P est l'intersection de deux droites, M est l'intersection des droites images ; M est donc l'image de P par une homothétie de centre O, O, P, M sont donc alignés

ABC isocèle : AB = AC

A' milieu de [BC]

I milieu de [A'H]

Montrer que (BH) est orthogonale à (AI)



Etude configuration

Similitude directe

Terminale

il existe une similitude directe s telle que

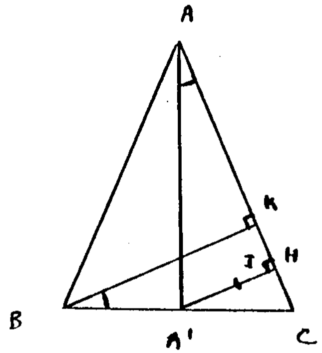
$B \xmapsto{s} A$ H est le milieu de [KC]

$C \longmapsto A'$ I est le milieu de [HA']

$K \longmapsto H$ Donc s (H) = I

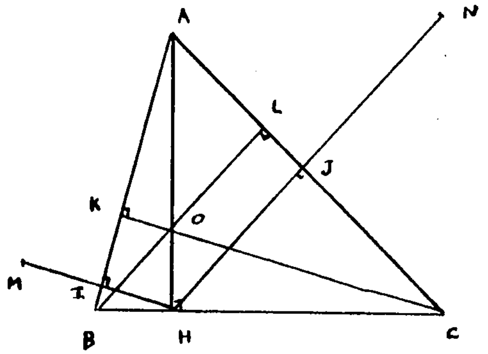
l'angle de s est $-\frac{\pi}{2}$ donc $(BH) \perp (AI)$

(autre solution voir collection Terracher 2nde)



ABC triangle quelconque
H, K, L pieds des hauteurs
I milieu de [MH]
J milieu de [HN]

Montrer MNKL alignés



Etude de configuration
Angles

1ère
Terminale

$(\overrightarrow{LN}, \overrightarrow{LC}) \equiv (\overrightarrow{LC}, \overrightarrow{LH}) \quad (\pi)$ (Symétrie)

$\quad\quad " \quad\quad \equiv (\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OH}) \quad (\pi)$ (points cocycliques)

$(\overrightarrow{LC}, \overrightarrow{LK}) \equiv (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BK}) \quad (\pi)$ (points cocycliques)

$\quad\quad " \quad\quad \equiv (\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OK}) \quad (\pi)$ (points cocycliques)

Donc $(\overrightarrow{LN}, \overrightarrow{LK}) \equiv (\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OK}) \equiv o \quad (\pi)$

LNK alignés, on démontrerait de même MLK alignés

Géométrie dans l'espace

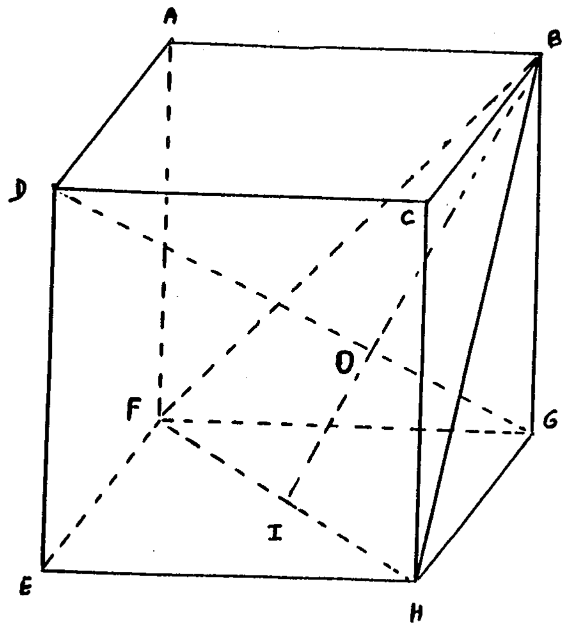
3ème - 2nde - 1ère S E

ABCDEFGH est un cube

1) Nature des tétraèdres DBHF et GBHF

2) Soit I le milieu de [F H]

Montrer que (DG) est perpendiculaire à (BI)



1) DBHF est un tétraèdre régulier

GBHF est une pyramide régulière de base BHF

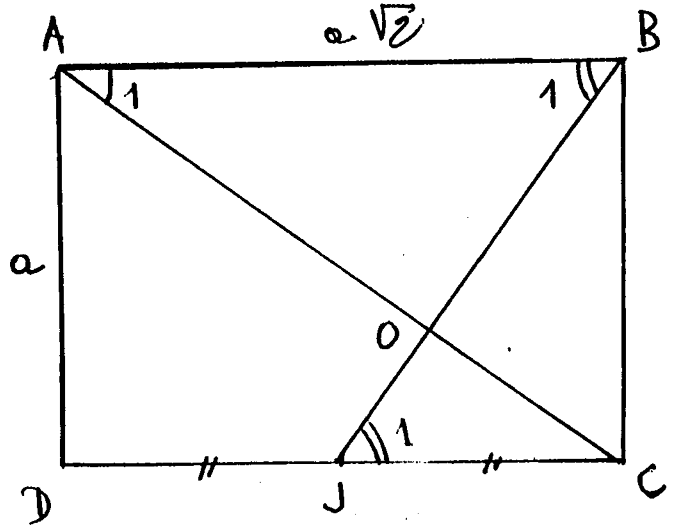
2) D et G se projettent orthogonalement sur le plan BFH au centre du triangle équilatéral BFH en un point O de (BI) car (BI) en est une médiane.

Donc (DG) est perpendiculaire à (BI) en O .

Voir une autre démonstration dans la fiche suivante

(ABCD) est un rectangle de dimension $a\sqrt{2}$ et a
J est le milieu de [CD]

Montrer que $(AC) \perp (BJ)$



Application de la géométrie plane
à l'espace

Une solution "approchée" Pythagore Trigonométrie	3ème

ABC rectangle en B donc $AC^2 = 3a^2$

BCJ rectangle en C donc $BJ^2 = \frac{3}{2}a^2$

$\widehat{B_1} = \widehat{J_1}$ (angles alternes internes)

$\cos \widehat{B_1} = \frac{JC}{JB} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\qquad \cos \widehat{A_1} = \frac{AB}{AC} = \sqrt{\frac{2}{3}}$

$\widehat{B_1} \simeq 0{,}9553166$ rad $\qquad \widehat{A_1} \simeq 0{,}6154797$ rad

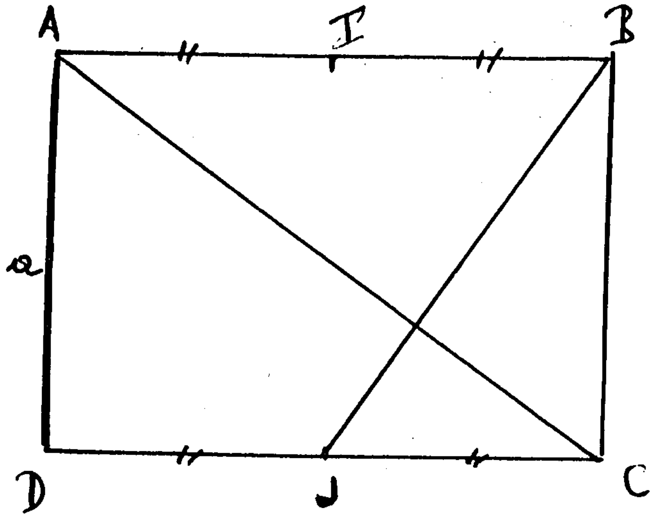
$\widehat{B_1} + \widehat{A_1} \simeq \frac{\pi}{2}$ d'où $\widehat{AOB} \simeq \frac{\pi}{2}$

Il semble que $(AC) \perp (BJ)$

2ème solution Produit scalaire	1ère S - E

$$\vec{AC}.\vec{BJ} = (\vec{AD} + \vec{DC}).\vec{BJ}$$
$$= \vec{AD}.\vec{BJ} + \vec{DC}.\vec{BJ} = AD^2 + \vec{DC}.\vec{CJ}$$
$$= AD^2 - 2\,CJ^2 = a^2 - 2\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 0$$

donc $(AC) \perp (BJ)$



3ème solution	Similitude directe	Tle C.E

Soit s la similitude directe telle que : $s : A \mapsto J$

$D \mapsto C$

rapport : $\dfrac{JC}{AD} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ angle : $(\vec{AD}, \vec{JC}) = \dfrac{\pi}{2}$

alors $s : C \mapsto B$ (propriétés de rapports et d'angles)

$B \mapsto I$

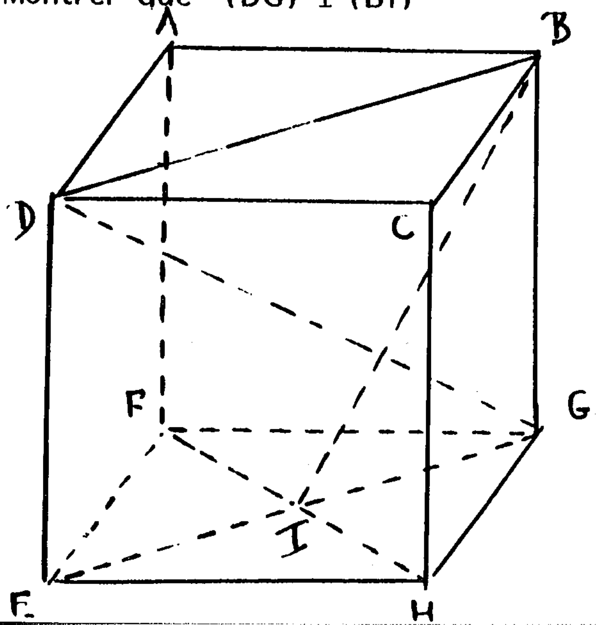
d'où $s : A \mapsto J$

$C \mapsto B$ d'où $(\vec{AC}, \vec{JB}) = \dfrac{\pi}{2}$

donc $(JB) \perp (AC)$

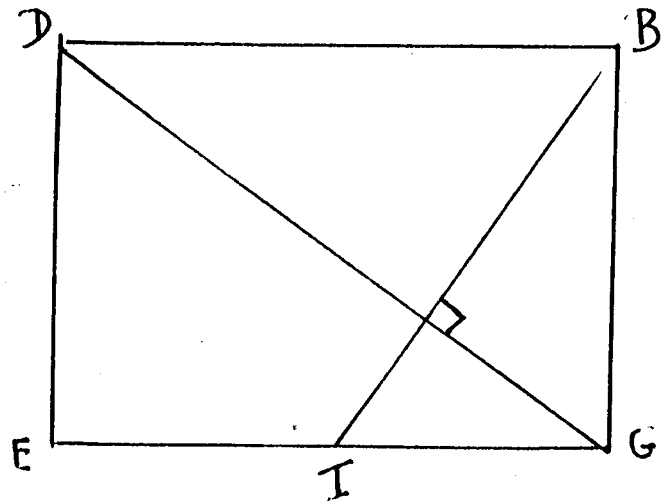
ABCDFGHE est un cube et I est le milieu de [FH]

Montrer que $(DG) \perp (BI)$



application à l'espace	1ère S - E

On reconnaît dans le rectangle DBGE la figure plane précédente car $DB = DE\sqrt{2}$ et I milieu de [EG]

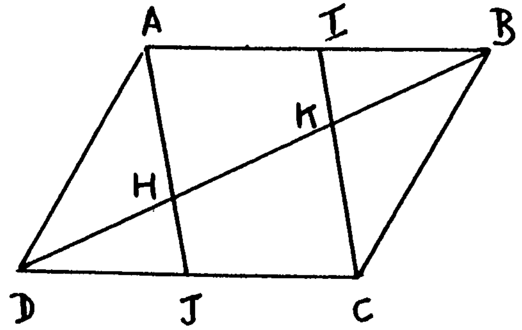


Application de la géométrie plane
à l'espace

1 ère SE

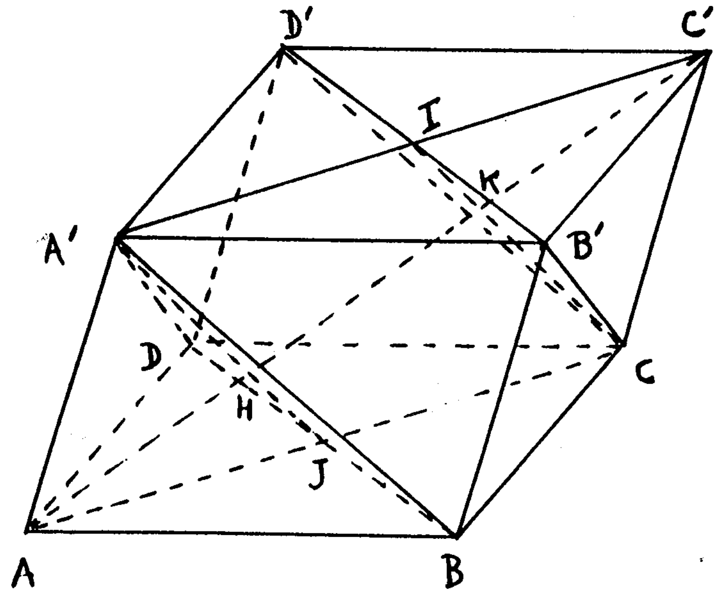
(ABCD) est un parallélogramme
I est le milieu de [AB]
J est le milieu de [DC]
H et K sont les intersections de (DB) et de (AJ) et (IC).

Montrer que DH = HK = KB

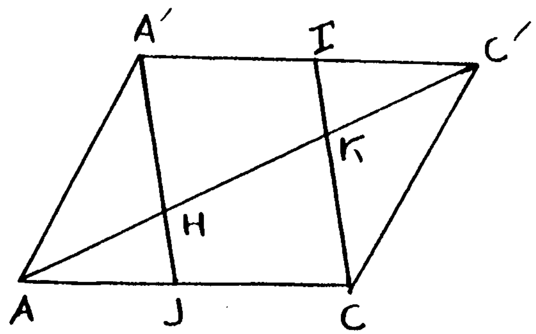


(AJ) // (IC)
donc H est milieu de [DK]
et K est milieu de [HB]

(ABCDA'B'C'D') est un parallélépipède
H et K sont les intersections de (AC') et des plans (A'DB) et (CD'B')
Montrer que AH = HK = KC'



On reconnaît dans le parallélogramme (AA'C'C) la figure plane précédente car H et K sont les intersections de (A'J) et (CI) avec (AC')



LIEUX GEOMETRIQUES

ETUDE D'UN PROBLEME DE LIEU GEOMETRIQUE

PROBLEME

Un point M' se déplace dans le plan ou l'espace :

1er cas : en étant soumis à des conditions données

2ème cas : étant entraîné par un point M décrivant un ensemble (C) donné.

On cherche l'ensemble (C') décrit par le point M' en utilisant des propriétés de configurations ou de transformations.

METHODES

- il faut d'abord faire un dessin
- il faut faire l'inventaire des éléments fixes et des éléments mobiles :
  l'utilisation de 2 couleurs permet de mieux les visualiser sur le schéma .
- dans le 2ème cas il est conseillé de représenter sur le dessin plusieurs positions du point M pour essayer d'avoir une idée de l'ensemble (C').

1ère démarche

L'étude des éléments fixes permet parfois de découvrir une propriété vérifiée par M'

- cette propriété peut être caractéristique de M' et donne l'ensemble (C')
- cette propriété peut être seulement une condition nécessaire et donne un ensemble (Γ') auquel doit appartenir M'.
  Il faut alors trouver réciproquement les points de (Γ') appartenant à (C')

2ème démarche

Dans le 2ème cas, on peut parfois découvrir une transformation géométrique f telle que f(M) = M'. Le point M décrivant l'ensemble (C), le point M' décrit l'ensemble f(C). L'application f étant bijective, il ne faut donc pas étudier de problème réciproque.

L'utilisation de la 2ème démarche, si elle est possible, est plus commode mais la reconnaissance d'une transformation n'est pas tâche facile pour les élèves. La nécessité de la réciproque dans la 1ère démarche est bien sûr délicate à saisir mais elle conduit à une activité très formatrice.

Une progression raisonnable dans l'apprentissage des problèmes de lieux géométriques pourrait être la suivante :

<u>1° problèmes conduisant à la 1ère démarche</u>

a) utilisation de conditions nécessaires et suffisantes

b) utilisation de conditions nécessaires et étude de la réciproque

<u>2° problèmes conduisant à la 2ème démarche</u>

EXEMPLE DE RECHERCHE D'UN LIEU GEOMETRIQUE

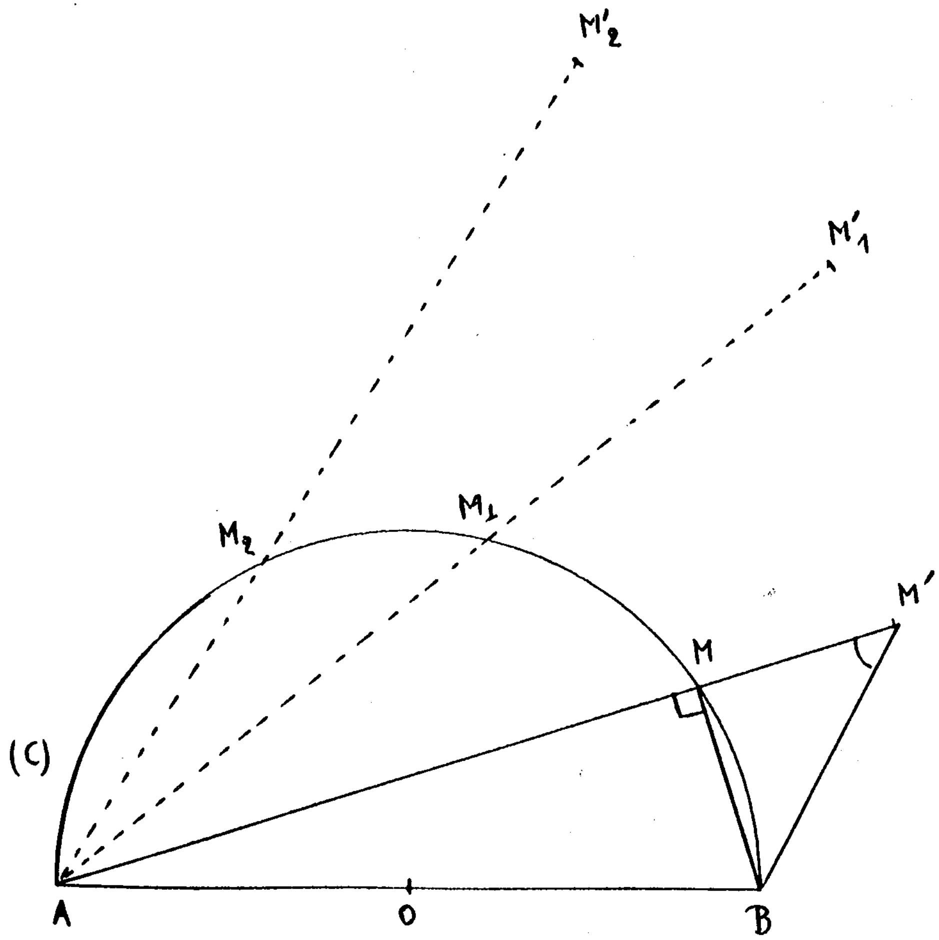
Exercice

1ère S.E. - Tle C.E

On considère un demi-cercle (C) de diamètre [AB]

A tout point M de $(C) \setminus \{A\}$ on associe le point M' de la droite (AM) n'appartenant pas à la demi-droite [AM] et vérifiant MM' = MB.

On demande le lieu géométrique de M' lorsque M décrit $(C) \setminus \{A\}$



éléments fixes	éléments mobiles
- demi cercle (C)	- M
- A, B	- (AM), (BM)
- mesure $\widehat{AMB}$	- M'
- mesure de $\widehat{MM'B}$	- MM', MB

Méthodes proposées

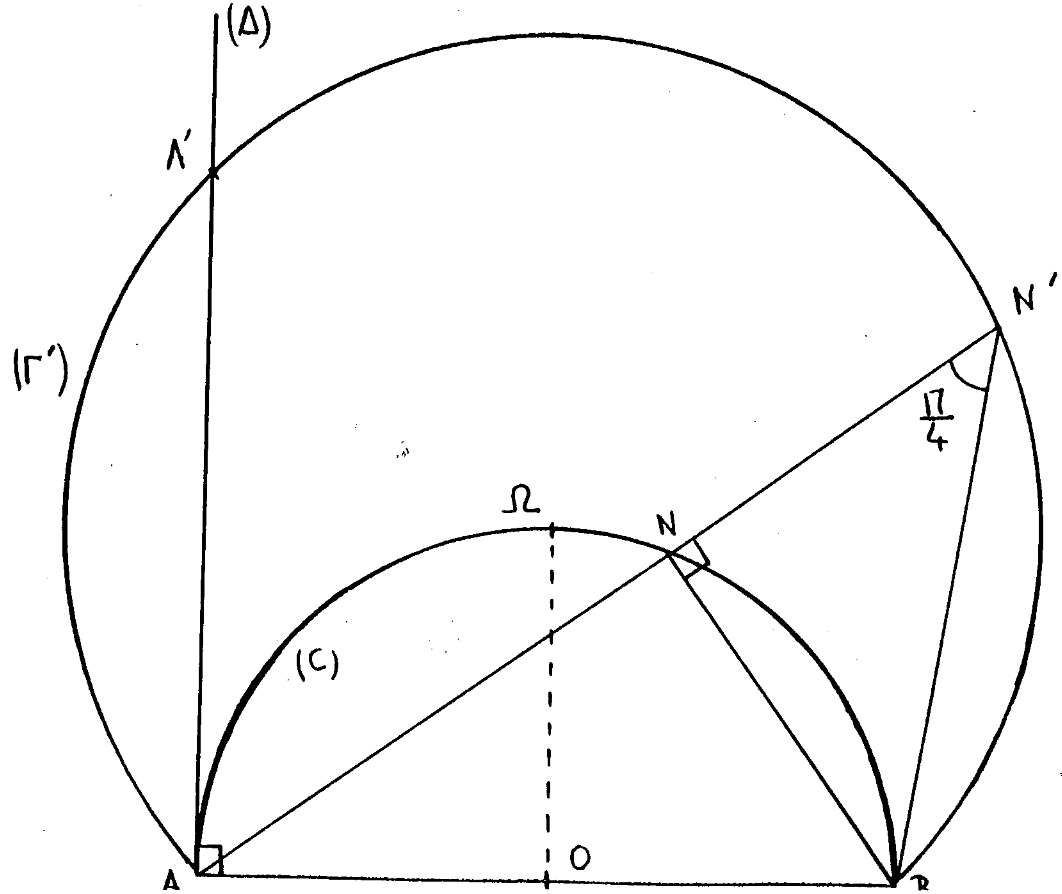
- dans une classe de 1ère S ou E l'exercice est effectué en utilisant la 1ère méthode, la 2ème méthode nécessitant la composée de deux transformations

- dans une classe de TC ou TE l'exercice est résolu en utilisant une transformation.

1ère démarche

M étant un point du demi cercle (C) \ { A } le triangle (BMM') est rectangle isocèle en M.

$\widehat{AM'B}$ est donc constant et est égale à $\frac{\pi}{4}$. Le point M' est donc sur l'arc de cercle (Γ') ensemble des points du demi-plan de frontière (AB) contenant (C) d'où l'on voit le segment sous un angle égal à $\frac{\pi}{4}$



<u>Réciproquement</u> on prend un point N' sur (Γ'). La demi droite $[AN')$ recoupe le demi cercle (C) en un point N si et seulement si N' est sur l'arc $\widehat{BA'}$ de (Γ'), A' étant le point d'intersection de (Γ') et de la tangente (Δ) en A à (C). Le triangle (NBN') est rectangle en N et a un angle égal à $\frac{\pi}{4}$. Il est donc rectangle isocèle en N et le point N' est bien le point de la droite (AN) non situé sur la demi droite $(AN]$ et vérifiant NN' = NB

N' est donc dans le lieu géométrique cherché

<u>Le lieu géométrique du point M' est donc l'arc de cercle $\widehat{BA'}$, A' exclus</u>

On remarque que cette courbe est en fait un demi cercle de diamètre [BA'] centré en Ω milieu de l'arc $\widehat{AB}$.

<u>2ème démarche</u>

On recherche une tranformation f telle que f (M) = M'

Les points A, M et M' étant alignés on pourrait penser à une homothétie de centre A : l'étude du cas particulier M = B prouve le contraire.

On cherche donc à relier M et M' par l'intermédiaire de B. On montre que le triangle (BMM') est rectangle isocèle en M ce qui prouve que dans la similitude directe f de centre B, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$ (après choix d'une orientation convenable) transforme M en M'.

M décrivant le demi cercle $(C) \setminus \{A\}$ alors M' décrit $f((C) \setminus \{A\})$ qui est demi cercle $(C') \setminus \{A\}$ de centre $\Omega = f(O)$

<u>Le lieu géométrique de M' est donc bien le demi cercle $\widehat{BA'}$, A' exclus</u>

<u>*Remarque*</u> : en 1ère S.E on peut bien sûr utiliser cette démarche en composant l'homothétie $h_{(B,\sqrt{2})}$ et la rotation $r_{(B,\frac{\pi}{4})}$.

ETUDE DE LA RECIPROQUE DANS UN PROBLEME DE LIEU GEOMETRIQUE

On recherche le lieu géométrique (C') d'un point M'.
Si l'on ne raisonne pas par équivalences on distingue deux étapes :

1ère étape		2ème étape	
recherche d'une courbe (Γ') à laquelle doit appartenir M'.		recherche des points de (Γ') appartenant à (C')	
Hypothèse	**Conclusion**	**Hypothèse**	**Question**
$M' \in (C')$	$M' \in (\Gamma')$	$N' \in (\Gamma')$	N' est-il élément de (C') ?

Le problème réciproque est donc tout à fait différent de celui de la 1ère étape. Parfois on peut simplifier ce dernier raisonnement en utilisant le résultat de la partie directe : l'exemple suivant illustre cette remarque.

Exercice — 1ère SE ⟶

> On considère un carré (ABCD) de centre O. Un point M décrit la droite (AC) et se projette orthogonalement en P et Q sur les droites (AB) et (BC)
>
> 1°) montrer que les droites (CP) et (DQ) sont orthogonales
>
> 2°) trouver le lieu géométrique du point d'intersection M' des droites (CP) et (DQ).

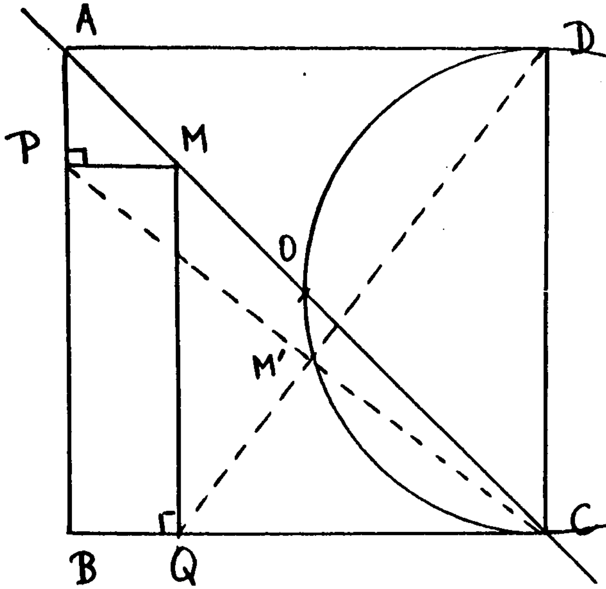
1°) (figure 1) On peut montrer que, le carré (ABCD) étant supposé de sens direct, on a :

$$AP = BQ \quad \text{et} \quad (\vec{AP}, \vec{BQ}) \equiv \frac{\pi}{2} \quad (2\pi)$$

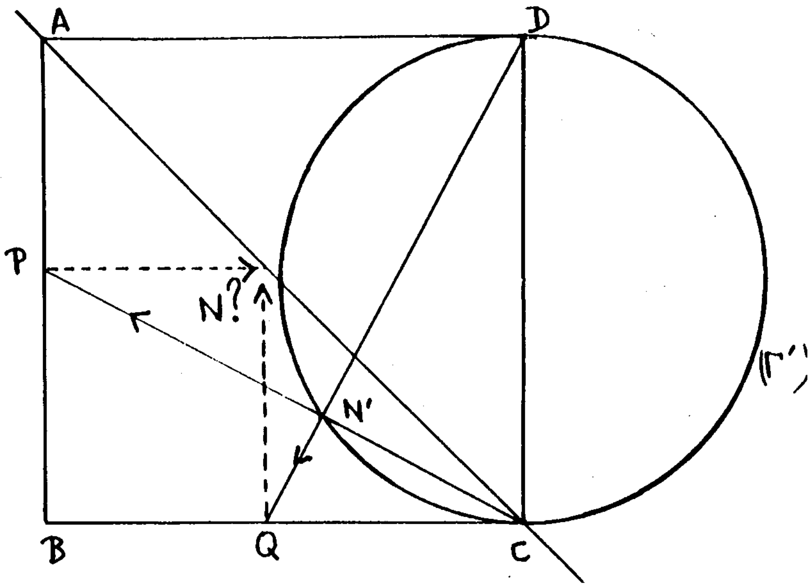
Si r est la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ on a donc : $r(A) = B$
$r(P) = Q$
$r(C) = D$

r transforme donc la droite (CP) en la droite (DQ) telle que $(\overrightarrow{CP}, \overrightarrow{DQ}) \equiv \frac{\pi}{2} \ (2\pi)$

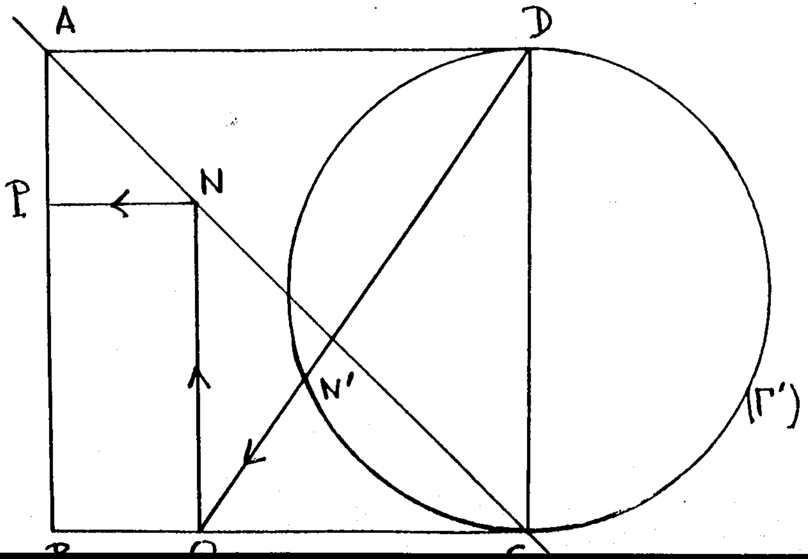
<u>Les droites (CP) et (DQ) sont donc orthogonales</u>.



(figure 1)



(figure 2)



(figure 3)

A tout point M (de (AC) on associe dont le point d'intersection M' de ces droites

2°) a) <u>1ère étape</u>

Le point M' est donc sur le cercle (Γ') de diamètre $[CD]$. Il ne peut être en D .

b) <u>2ème étape</u>

On choisit un point N' de $(\Gamma') \setminus \{D\}$. Existe-t-il un point N de (AC) dont le point associé est N' ?

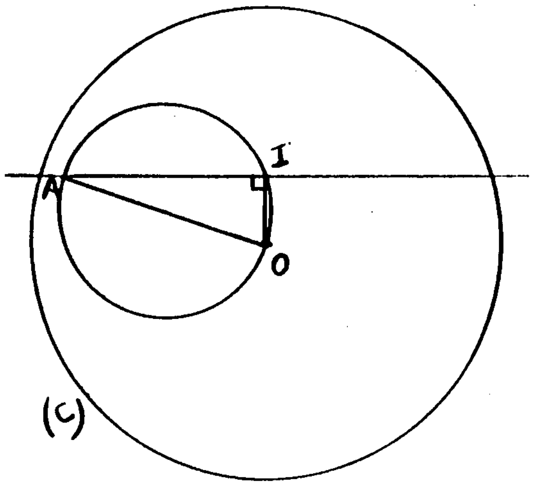
<u>1ère démarche</u> : on construit les intersections P et Q de (DN') et (CN') avec (BC) et (AB).

Il faut prouver que P et Q se projettent sur (AC) parallélement à (BC) et (BA) en un même point N (figure 2)

<u>2ème démarche</u> : il est plus judicieux de construire le point N le plus tôt possible. La droite (DN') coupe (BC) en Q.
On projette Q sur (AC) parallélement à (BA) en N et on appelle P le projeté orthogonal de N sur (AB).
En utilisant la partie directe on peut dire que les droites (DQ) et (CP) se coupent en un point N" de $(\Gamma) \setminus \{D\}$,
intersection de (DQ) et de $(\Gamma) \setminus \{D\}$: on a donc N" = N' et N' est un point du lieu cherché.
(figure 3)

<u>Le lieu géométrique du point d'intersection M' des droites (CP) et (DQ) est donc l'ensemble $(\Gamma) \setminus \{D\}$</u>

A est un point fixé à l'intérieur d'un cercle C (O, R) Trouver le lieu géométrique des milieux des cordes passant par A	Lieu géométrique - propriétés du cercle	2nde



I milieu d'une corde passant par A ssi $\vec{AI} \perp \vec{IO}$

Le lieu cherché est le cercle de diamètre [OA]

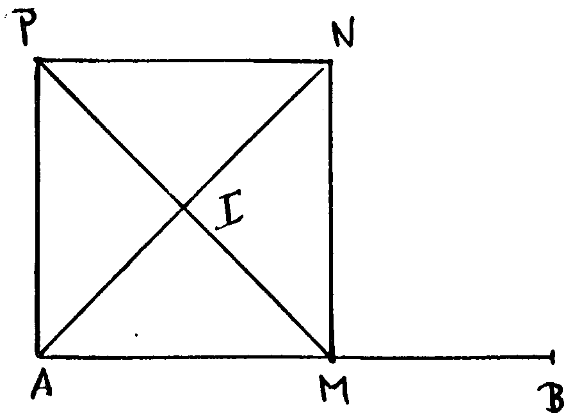
Lieu géométrique - un exemple simple d'introduction	2nde

Un point M décrit un segment [AB]

On construit le carré (AMNP)

1° Trouver le lieu de N

2° Trouver le lieu de I centre du carré

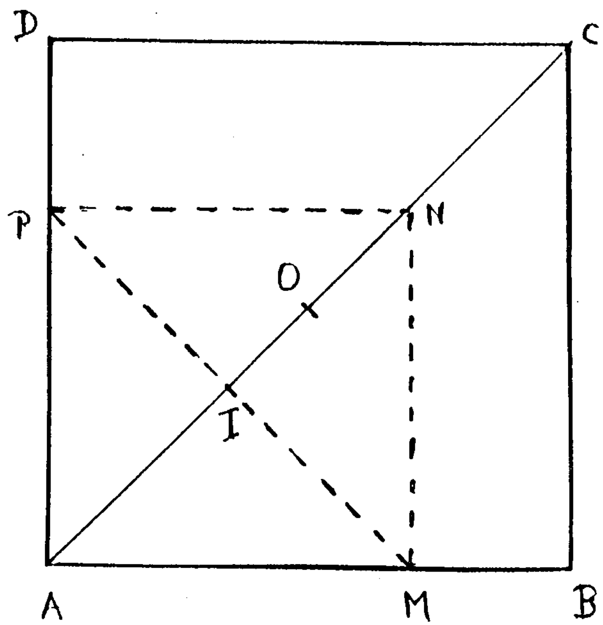


(ABCD) carré de centre O

Le lieu de N est le segment [AC]

Le lieu de I est le segment [AO]

Que se passe-t-il si M décrit [AB) ?



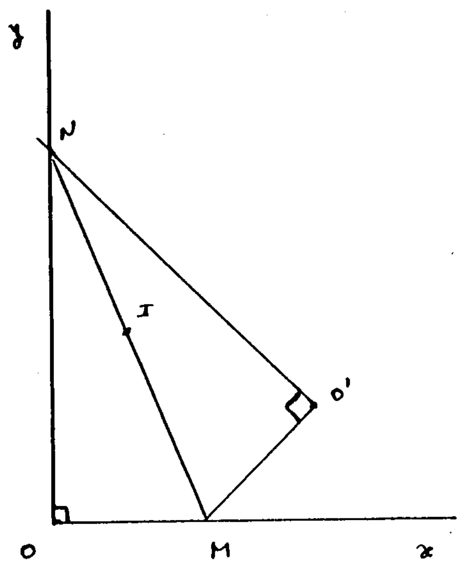
$[Ox)$ et $[Oy)$ sont deux demi-droites perpendiculaires, O' est donné

M décrit $[Ox)$

la perpendiculaire à $(O'M)$ en O'

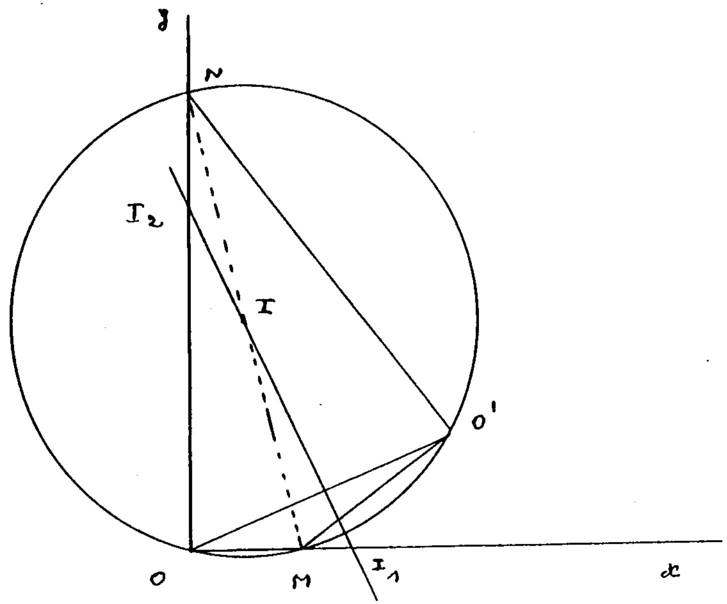
coupe $[Oy)$ en N

lieu du milieu I du $[MN]$



I est centre du cercle de diamètre $[MN]$, ce cercle contient O et O', I appartient donc à la médiatrice de $[OO']$

I est dans le quart de plan de frontières $[Ox)$, $[Oy)$ contenant O' : $I \in [I_1 I_2]$

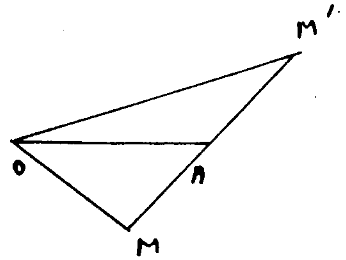


Soit I un point de $[I_1 I_2]$, le cercle de centre I et de rayon IO coupe $[Ox)$ en un point M, $[Oy)$ en un point N ; $(MO) \perp (NO)$ donc $[MN]$ est un diamètre de ce cercle donc $(MO') \perp (NO')$.

Le lieu de I est le segment $[I_1, I_2]$

O et A sont 2 points distincts du plan. A tout point M on associe M' son symétrique par rapport à A. Trouver l'ensemble des points M tels que $\widehat{MOM'} = \alpha$

$\alpha = 0$ $\qquad \alpha = \frac{\pi}{2}$ $\qquad \alpha = \frac{\pi}{3}$



lieu géométrique :
lignes de niveaux de $M \to \widehat{MOM'}$
symétrie centrale

2nde $\quad \alpha = 0$ ou $\frac{\pi}{2}$

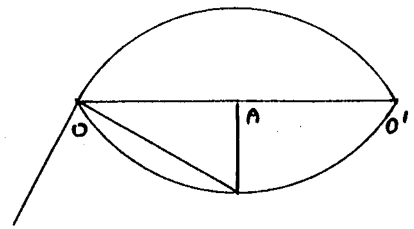
1ère $\quad$ si $\alpha = \frac{\pi}{3}$

$S_A : M \mapsto M'$
$\qquad O \mapsto O'$

$\widehat{MOM'} = \alpha \Rightarrow \widehat{OMO'} = \pi - \alpha$

$\alpha = \frac{\pi}{3}$

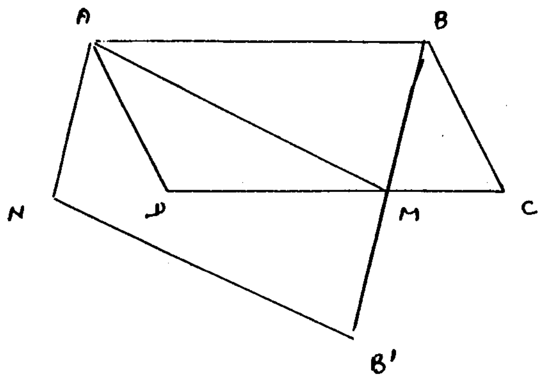
l'ensemble est constitué de 2 arcs symétriques par rapport à (AO)



ABCD est un parallélogramme ; M décrit [DC] ; M est le milieu de [BB'] ; AMB'N est un parallélogramme.

quel est le lieu géométrique de B', de N ?

Montrer que ABCD et AMB'N ont même aire



Lieu Géométrique homothétie - translation	2nde Première SE

$\vec{BB'} = 2\,\vec{BM}$ B' = $h_{(B,2)}$ (M) ; le lieu de B'

est [C'D'] tel que C' = $h_{(B,2)}$ (C), D' = $h_{(B,2)}$ (D)

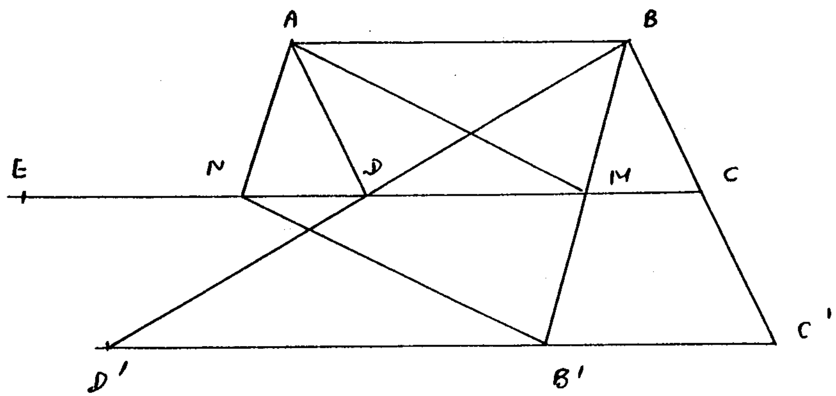
$\vec{AN} = \vec{MB'} = \vec{BM}$ $\vec{MN} = \vec{BA}$ N = $t_{\vec{BA}}$ (M)

le lieu de N est [DE] tel que E = $t_{\vec{BA}}$ (D)

aire de ABCD : AB x d (A, (CD))

aire de AMB'N : 2 x aire AMN = MN x d (A, (CD))

= aire ABCD

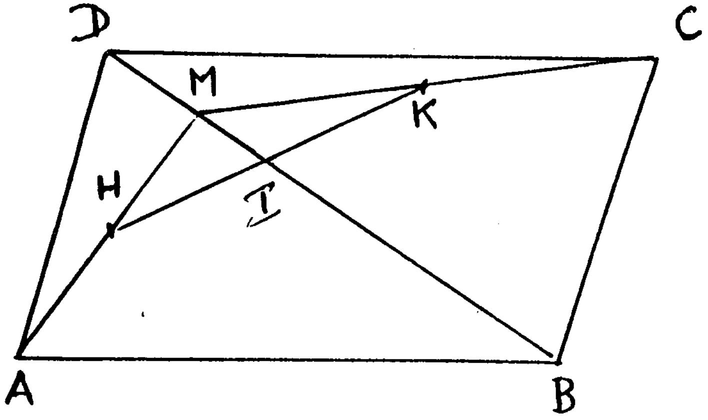


(ABCD) est un parallélogramme

M décrit la diagonale [BD]

H, K et I sont les milieux de [AM], [CM] et [HK]

Trouver les lieux de H, K et I



Lieu géométrique

Homothétie, Translation

2 nde

$h_{(A,\, \frac{1}{2})}$: $M \mapsto H$, $D \mapsto D'$, $B \mapsto B'$ — le lieu de H est [D'B']

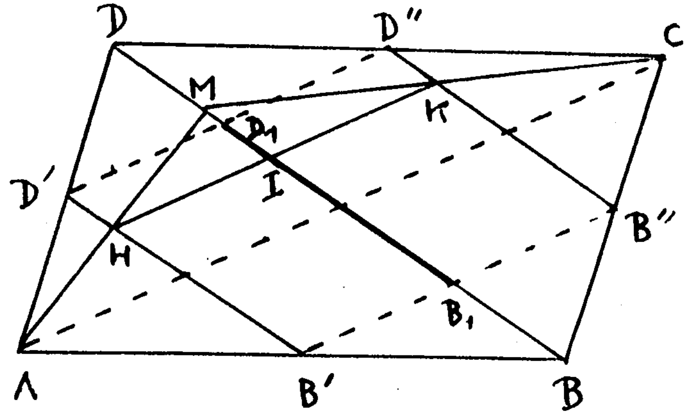
$h_{(C,\, \frac{1}{2})}$: $M \mapsto K$, $D \mapsto D''$, $B \mapsto B''$ — le lieu de K est [D''B'']

$\vec{HK} = \frac{1}{2}\,\vec{AC}$ donc $\vec{HI} = \frac{1}{4}\,\vec{AC}$

$t_{\frac{1}{4}\vec{AC}}$: $H \mapsto I$, $D' \mapsto D_1$, $B' \mapsto B_1$

I, D_1 et B_1 sont sur [DB]

Le lieu de I est $[D_1\, B_1]$

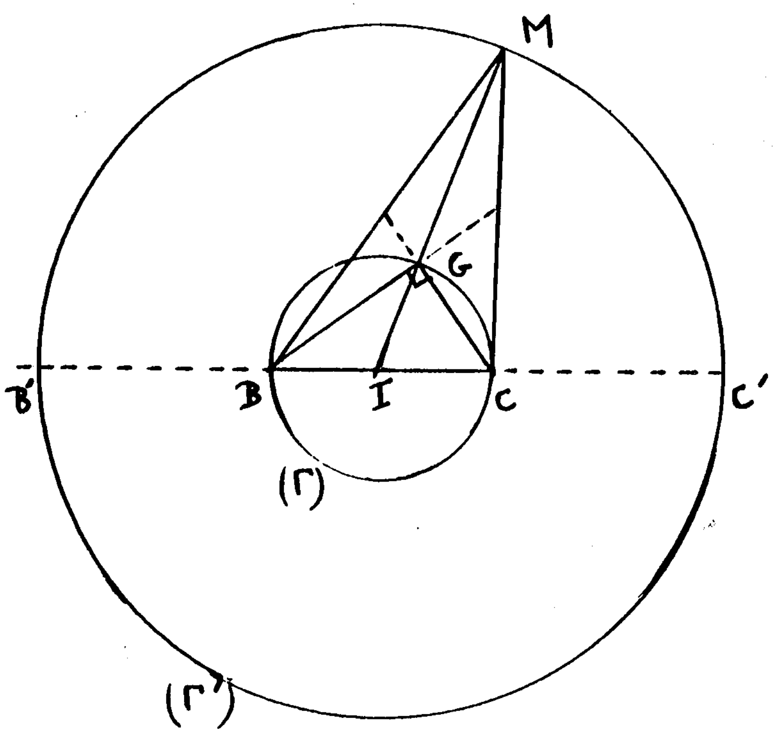


B et C sont 2 points distincts

1° Trouver l'ensemble des points M du plan tels que les médianes du triangle (MBC) issues de B et C soient orthogonales.

2° Le comparer à l'ensemble des points M tels que

$$MB^2 + MC^2 = 5\ BC^2$$



Lieu géometrique

- homothétie
- barycentre

1ère S.E

1° Le centre de gravité G de (MBC) décrit le cercle (Γ) de diamètre [BC] privé de B et C

Si I est le milieu de [BC] on a : $h_{(I,\ 3)} : G \mapsto M$

Le lieu de M est donc le cercle $(\Gamma') = h_{(I,\ 3)}(\Gamma)$ privé de B' et C'.

2° $MB^2 + MC^2 = 2\ IM^2 + \dfrac{BC^2}{2} = 18\ IG^2 + \dfrac{BC^2}{2}$

$$MB^2 + MC^2 = 5\ BC^2 \iff IG^2 = \frac{BC^2}{4}$$

$$\text{"} \iff G \in (\Gamma)$$

Lieu Géométrique
Homothétie - Translation - Réflexion

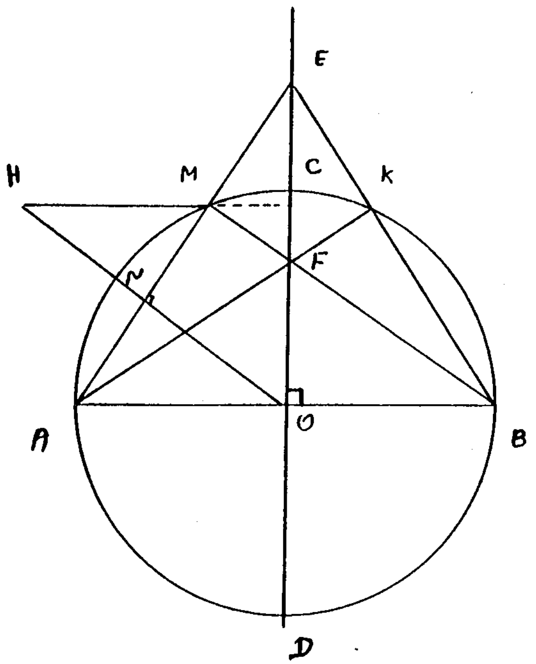
2nde
Première S E

[AB] et [CD] sont deux diamètres orthogonaux de $\mathcal{C}$ cercle de centre O
M est un point de $\mathcal{C} \setminus \{A, B\}$
(MA) coupe (CD) en E

1) Quel est le lieu géométrique de N milieu de [AM] quand M décrit $\mathcal{C} \setminus \{A, B\}$?

2) Quel est le lieu de H orthocentre du triangle EMO ?

3) (MB) coupe (CD) en F ; (BE) coupe (AF) en K, quel est le lieu de K ?



1) Soit h l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$

$B \xmapsto{h} O$
$M \longmapsto N$

N décrit le cercle de diamètre [AO] privé de A et O

2) (HM) $\perp$ (CD) donc (HM) // (BO)
(HO) $\perp$ (ME) et (MB) $\perp$ (ME) donc (MB) // (OH)

OBMH est un parallélogramme $\vec{BO} = \vec{MH}$

$M \xmapsto{t_{\vec{BO}}} H$

H décrit le cercle de centre A, de rayon AO privé de deux points : les images de B et de A

3) Soit s la symétrie orthogonale d'axe (CD)

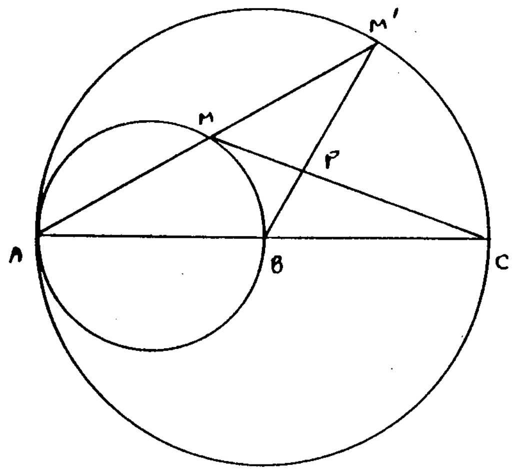
$\mathcal{C} \xmapsto{s} \mathcal{C}$
$B \longmapsto A$
$(AE) \longrightarrow (BE)$
$(BF) \longrightarrow (AF)$
$M \longmapsto K$

K décrit $\mathcal{C} \setminus \{A, B\}$

Lieu géométrique
homothétie

2nde - 1ère S E
Terminale C E

B est le milieu de [AC]
M décrit le cercle de diamètre [AB] ; (AM) coupe en M' le cercle de diamètre [AC]
(MC) et (BM') se coupent en P
Lieu géométrique de P



généralisation possible avec

$\vec{AC} = k\ \vec{AB} \quad k \neq -1$

$\left.\begin{array}{l}(BM) \perp (AM)\\ (CM') \perp (AM)\end{array}\right\}$ donc $(BM) /\!/ (CM')$

$h\ (A,\ 2)$

$B \longmapsto C$

$M \longmapsto M'$

P est le centre de gravité du triangle ACM'

Donc $\vec{BP} = \frac{1}{3}\ \vec{BM'}$

$h\ (B,\ \frac{1}{3})$

$M' \longmapsto P$

P décrit un cercle de centre B, de rayon $\frac{1}{3}$ AB.

<u>généralisation</u>

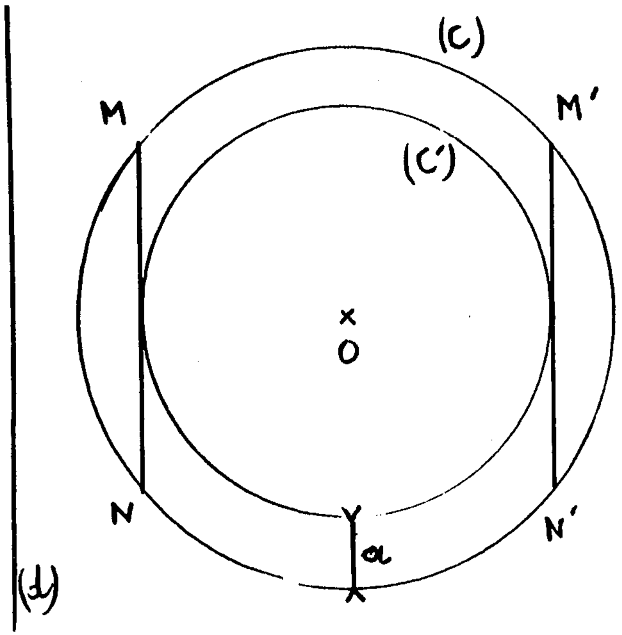
$k = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CM'}}{\overline{BM}} = -\frac{\overline{PM'}}{\overline{PB}}$

$\vec{PM'} = -k\ \vec{PB}$

$\vec{BP} = \frac{1}{1+k}\ \vec{BM'}$

2 cercles variables ont un centre fixe O
La différence de leurs rayons est égale à une constante a > O.

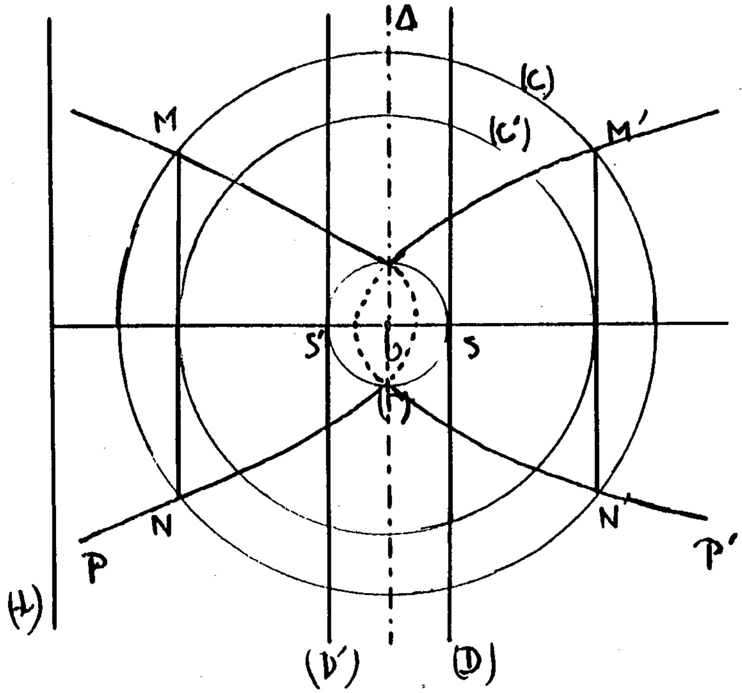
Lieu des extrémités des cordes du grand cercle qui sont tangentes au petit cercle et qui ont une direction donnée (d)



Δ est la droite passant par O de direction (d)
(D) et (D') sont les 2 parallèles à (Δ) situées à une distance a de (Δ).

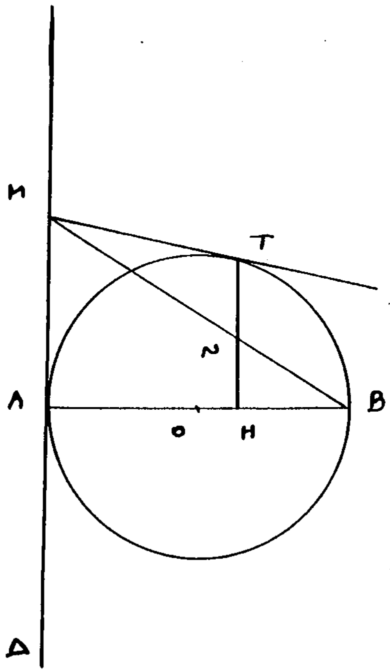
OM = d (M, (D)) donc M est sur la parabole P de foyer O et de directrice (D)

Réciproquement, les points doivent être à l'extérieur du cercle
(Γ) = C (O, a)
L'ensemble cherché est la réunion des arcs en trait plein des 2 paraboles P et P' de foyer O et de directrices (D) et (D').



lieu géométrique
Ellipse image d'un cercle par affinité orthogonale

M décrit la tangente en A au cercle de diamètre [A B] : Δ ; T est le point de contact de la deuxième tangente issue de M ; H est le projeté orthogonal de T sur [A B] ; (M B) coupe (T H) en N
quel est le lieu géométrique de N ?



quel que soit M sur Δ, T ≠ B

(T B) coupe Δ en Q

(M O) ⊥ (A T)

(Q B) ⊥ (A T)

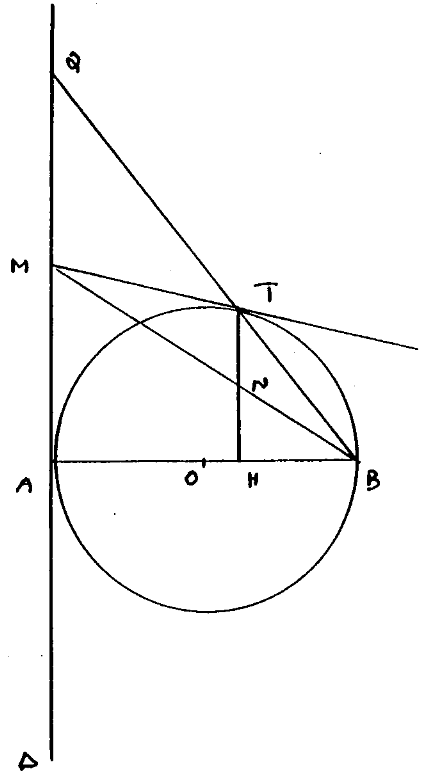
donc (Q B) // (M O)

or O est le mileu de [A B] donc

M est le milieu de [A Q], on en déduit que N est le milieu de [H T].

N est l'image de T par affinité orthogonale d'axe (A B), de rapport $\frac{1}{2}$

N décrit une ellipse privée de B

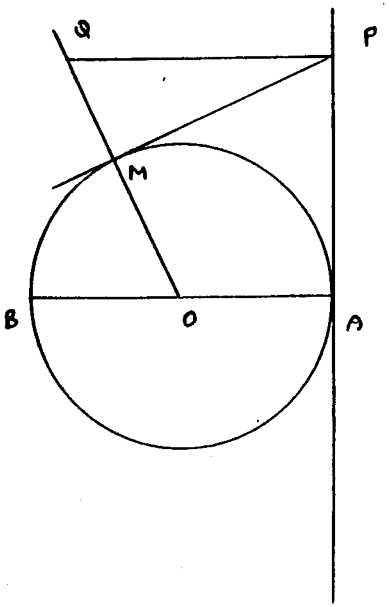


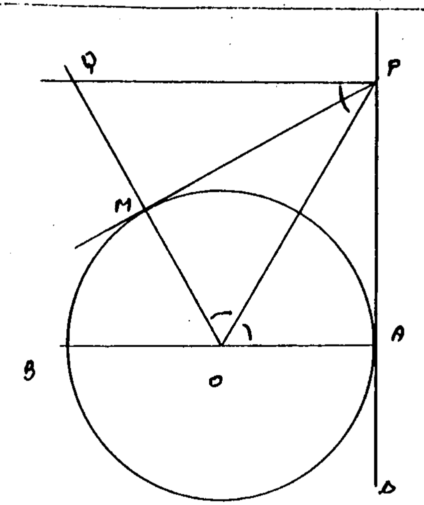
M décrit le cercle de diamètre [AB], privé de B et A

Les tangentes en A et M se coupent en P

La parallèle à (AB) passant par P coupe (OM) en Q

Lieu géométrique de Q





(OP) est bissectrice de (OA, OM)

donc $\widehat{AOP} = \widehat{POQ}$

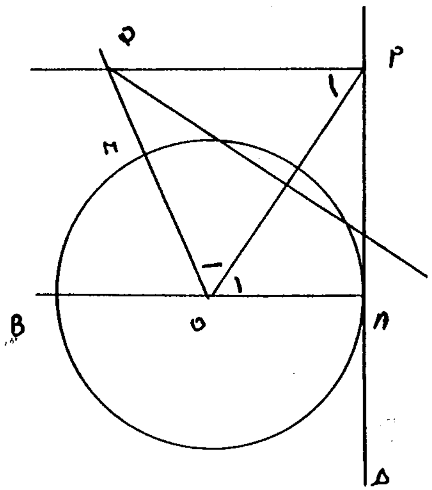
(PQ) // (OA) donc $\widehat{QPO} = \widehat{POQ}$

QPO est isocèle : QP = QO

Q appartient à la parabole de foyer O et de directrice Δ

<u>Réciproque</u> :

Soit Q un point de la parabole se projetant en P sur Δ : Q appartient à la médiatrice de [PO]



[OQ) coupe le cercle en M

(QP) // (OA) donc $\widehat{QPO} = \widehat{POA}$

QP = QO donc $\widehat{QPO} = \widehat{QOP}$

Les triangles OAP et OMP sont donc symétriques par rapport à (OP)

Donc $\widehat{OMP} = 90°$

(MP) est tangente au cercle.

Le lieu de Q est donc la parabole de foyer O et de directrice Δ

On donne un carré ABCD, de côté a.

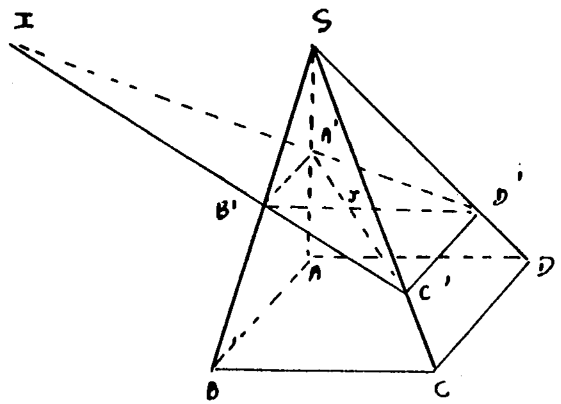
Sur la perpendiculaire en A au plan (ABCD), on prend un point S tel que AS = a

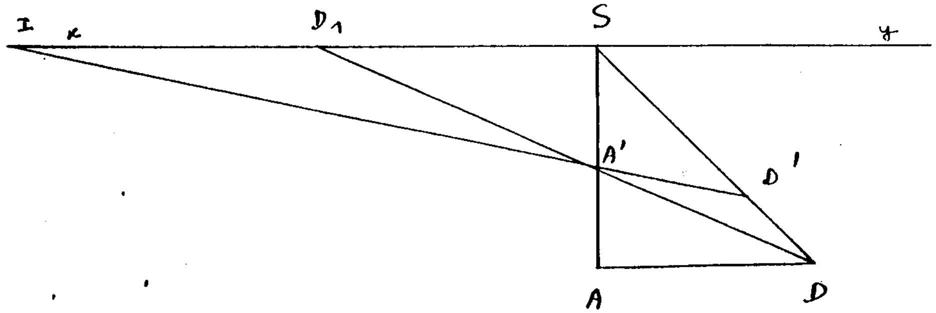
Soient A' et B' les milieux de segments [SA] et [SB]

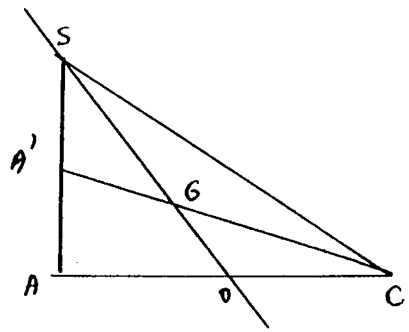
Un plan variable, passe par A', B' et coupe les segments [SC] et [SD] en C', D'

Lieu du point I, commun aux deux droites (A' D') et (B'C') lorsque D' décrit le segment [SD]

Lieu du point J commun au deux droites (A' C') et (B'D') lorsque D' décrit le segment [SD]







I est sur la droite d'intersection (Δ) des plans (S B C), (S A D), droite passant par S parallèle à (A D)

J est sur la droite d'intersection des plans (S A C), (S B D), soit (S O) si O est le centre du carré ABCD.

<u>Réciproquement</u>

Un point de Δ n'est un point I du texte que si I est sur l'une des demi-droites $[D_1 x)$, $[Sy)$

Un point de (SO) n'est un point J du texte que si J est sur le segment [SG]

<u>le lieu de J est le segment [SG]</u>

le lieu de I est l'ensemble $[D_1 x) \cup [S_y)$

Lieu géométrique
Espace - Orthogonalité

1ère S- E

(P) est un plan

A $\in$ (P) B $\notin$ (P)

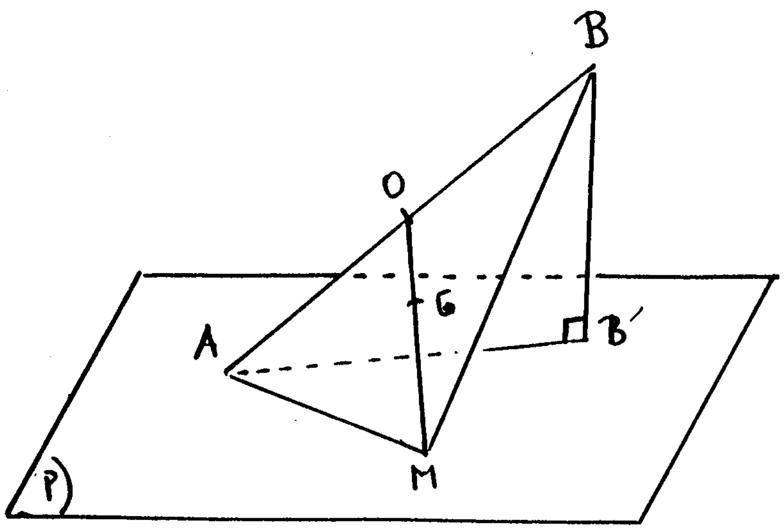
(AB) non orthogonale à (P)

M variable dans (P)

1° lieu du centre de gravité G du triangle AMB quand M décrit (P) \ { A }

2° lieu de M quand le triangle AMB est rectangle :

a) en A ?
b) en B ?
c) en M ?



1° $h_{(O, \frac{1}{3})}$: $M \mapsto G$ où O est le milieu de [A B]

$A \mapsto A'$

$(P) \mapsto (P')$

Le lieu de G est le plan (P') parallèle à (P) privé de A'.

2° a) le lieu de M est $\Delta \setminus \{ A \}$ où Δ est la perpendiculaire menée dans (P) à la droite (AB) au point A.

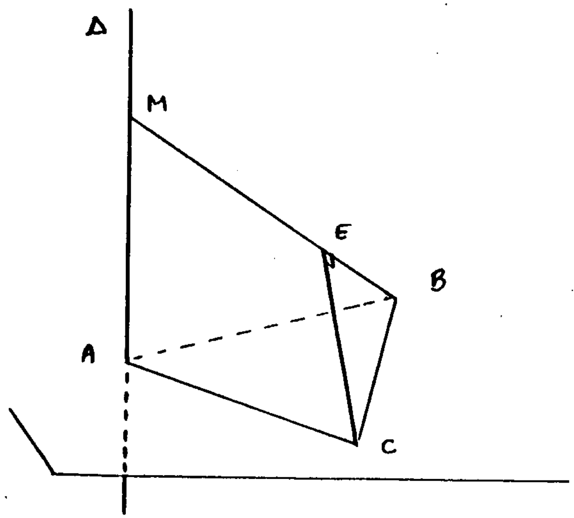
b) le lieu de M est Δ' intersection de (P) et du plan orthogonal en B à (AB)

c) le lieu de M est (C) \ { A } où (C) est le cercle de diamètre [AB'] inclus dans (P), B' étant la projection orthogonale de B sur (P)

Lieu géométrique
Espace - orthogonalité

1ère S. E .

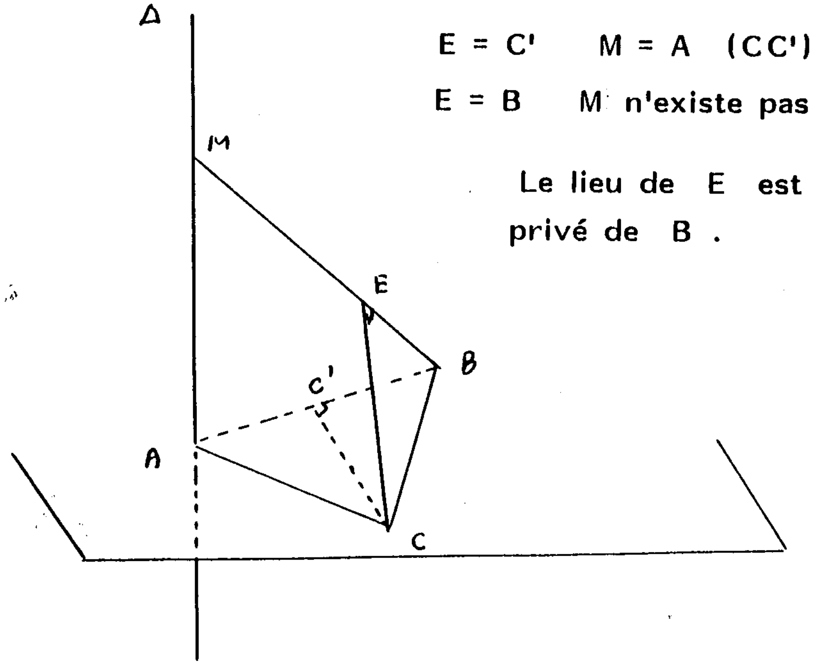
ABC est un triangle équilatéral ;
Δ est perpendiculaire au plan (ABC)
M décrit Δ ; E est le projeté orthogonal de C sur $[MB]$
quel est le lieu géométrique de E ?



Soit P le plan déterminé par (AB) et Δ , $E \in P$
Soit C' milieu de $[AB]$: $(CC') \perp (AB)$; $(CC') \perp \Delta$
donc $(CC') \perp P$. $(MB) \perp (CE)$, $(MB) \perp (CC')$ donc
$(MB) \perp (C'E)$. E appartient au cercle $\mathcal{C}$ du plan P
de diamètre $[BC']$

<u>Réciproque</u> : $E \in \mathcal{C}$ $E \neq B$ (BE) coupe Δ en M
$E \neq C'$ $(BE) \perp (C'E)$, $(BE) \perp (CC')$
donc $(BE) \perp (CE)$
$E = C'$ $M = A$ $(CC') \perp (BA)$
$E = B$ M n'existe pas

Le lieu de E est le cercle $\mathcal{C}$ privé de B .

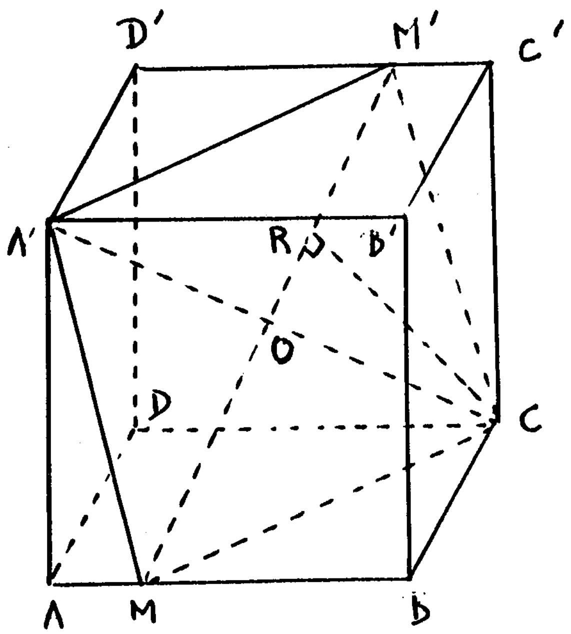


cube ABCDA'B'C'D'

M décrit [AB]

1° montrer que le plan (A'MC) coupe le cube selon un parallélogramme dont une diagonale est fixe

2° trouver le lieu géométrique du projeté orthogonal R de C sur la diagonale variable



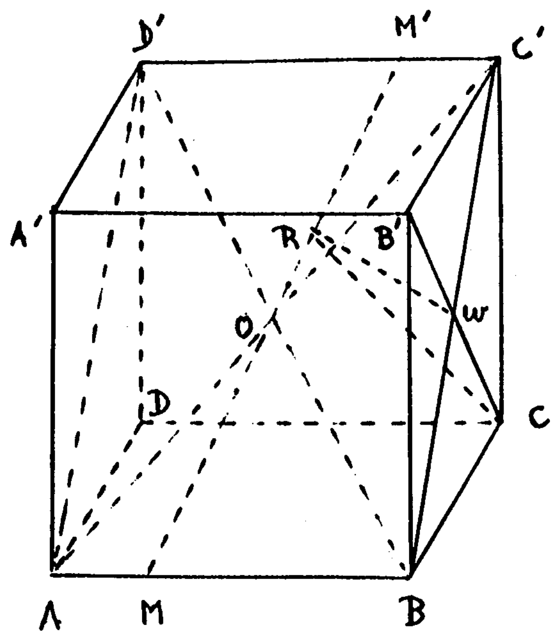
(MM') est dans le plan fixe (ABC'D')

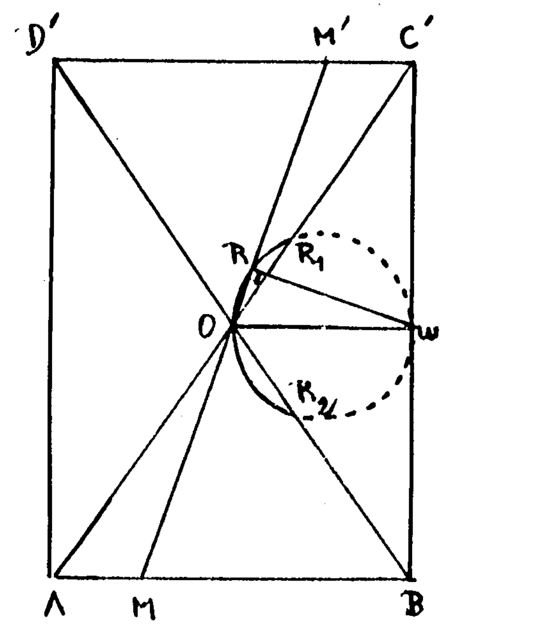
C se projette orthogonalement sur ce plan en w milieu de [BC']

$\widehat{MRC} = \frac{\pi}{2}$ donc par projection $\widehat{MRw} = \frac{\pi}{2}$ soit $\widehat{ORw} = \frac{\pi}{2}$

donc R est sur le cercle de diamètre [O w]

Réciproquement seuls les points de l'arc $\overset{\frown}{R_1 O R_2}$ de ce cercle conviennent car il faut que (OR) coupe le segment [AB]





CONSTRUCTIONS GEOMETRIQUES

LES PROBLEMES DE CONSTRUCTIONS GEOMETRIQUES

I - L'intérêt des problèmes de construction

Les problèmes de construction ont une place intéressante dans la formation scientifique du jeune collégien et lycéen.

1° ils mettent l'élève en situation de recherche

- ils sont motivants car il faut réaliser un tracé final "concret"
- ils privilégient l'activité de l'élève.

2° leur recherche fait appel à diverses phases de l'activité mathématique

- activités pratiques : utilisation d'instruments, dessin ...
- activités théoriques :
  - . étude d'un problème par analyse et synthèse
  - . mise en oeuvre d'outils théoriques et justification de la nécessité d'en construire de nouveaux pour la réalisation d'un travail demandé.

3° leur résolution peut se faire à divers stades que l'élève doit essayer d'acquérir progressivement selon son âge et ses capacités :

- trouver et décrire une construction
- justifier le tracé trouvé
- discuter l'existence et le nombre de solutions.

Cela nécessite que le professeur indique clairement le contrat :

- quels instruments a-t-on le droit d'utiliser ? (règle et équerre ; règle et compas ; compas seul ...)
- à quel stade faut-il traiter le problème ?

4° ils nécessitent des qualités variées

- soin et habileté dans les tracés
- esprit d'analyse

- imagination dans la recherche d'une solution
- esprit de synthèse
- capacité d'appliquer des résultats théoriques à la réalisation d'un problème précis.

Ces problèmes de construction constituent une activité difficile, qui demande du temps mais représentent un terrain idéal pour "faire réellement des mathématiques".

II - Des méthodes de recherche

Ce qui importe dans ce paragraphe, ce n'est pas le choix des exercices traités, tous très classiques, mais la démarche proposée qui peut servir de progression dans l'apprentissage de la résolution des problèmes de construction :

1. utilisation de la méthode des 2 lieux

- reconnaissance, dans l'énoncé d'une contrainte, de la caractérisation d'un ensemble connu.
- présence ou non d'une discussion sur l'existence et le nombre des solutions
- démarche par analyse et synthèse
- utilisation d'une transformation du plan pour trouver un des deux lieux.

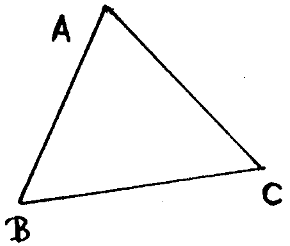
2. utilisation de la méthode d'oubli d'une contrainte

Il est intéressant de lire à propos de ces méthodes le livre de POLYA : "La découverte des Mathématiques" chez Dunod.

1° Exemple 1

énoncé : construire le cercle circonscrit au triangle (ABC)

analyse de l'énoncé :

je connais	je veux construire	contraintes
le triangle (ABC)  	un cercle C (O,R) ↓ il suffit de construire son centre O	le cercle passe par A, B et C c'est-à-dire : OA = OB = OC

recherche

$$OA = OB = OC \Leftrightarrow \begin{cases} OA = OB \\ OA = OC \end{cases}$$

$$\text{"} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} O \text{ est sur la médiatrice de } (A, B) \\ O \text{ est sur la médiatrice de } (A, C) \end{cases}$$

discussion

Cette construction admet une et une seule solution.

METHODE des 2 LIEUX

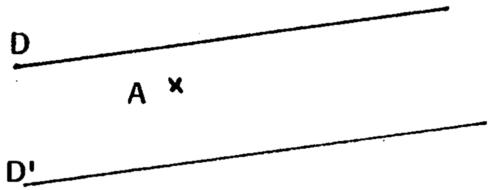
- *on divise les contraintes en deux conditions*

- *on trouve le point cherché comme intersection de deux lignes, courbes de niveau connues et que l'on sait caractériser et construire.*

2° Exemple 2

<u>énoncé</u> : A est un point intérieur à la bande définie par deux droites parallèles D et D'.
construire un cercle passant par A et tangent à D et D'.
Trouver toutes les solutions.

<u>analyse de l'énoncé</u> :

je connais	je veux construire	contraintes (γ)
- D et D' parallèles - A est intérieur à la bande (D, D')  	un cercle C (O, R) ↓ il suffit de construire son centre O	- le cercle passe par A - il est tangent à D - il est tangent à D' c'est-à-dire : OA = d (O,D) = d (O, D')

<u>recherche</u> :

1er découpage des contraintes (figure 1)

$$(\gamma) \Leftrightarrow \begin{cases} d\,(O, D) = d\,(O, D') \\ OA = d\,(O, D) \end{cases}$$

$$\text{"} \Leftrightarrow \begin{cases} d\,(O, D) = d\,(O, D') \\ OA = \frac{1}{2}\,d\,(D, D') \end{cases}$$

$$\text{"} \Leftrightarrow \begin{cases} O \in \Delta \\ O \in C\,(A, R) \end{cases}$$

Il est intéressant de faire remarquer aux élèves qu'un découpage différent des contraintes peut mener :

- à un problème que l'on ne sait pas résoudre (en 2nde et en 1ère on ne connaît pas ici la définition géométrique de la parabole)

Δ étant l'axe de symétrie de (D, D') parallèle à D et D'

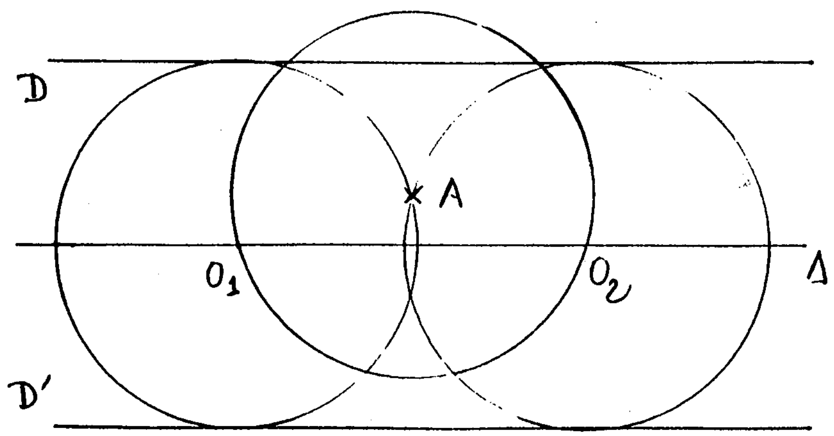
et $R = \frac{1}{2}\, d\ (D, D')$

2ème découpage des contraintes (figure 2)

$$(\gamma) \Leftrightarrow \begin{cases} OA = d\ (O, D) \\ OA = d\ (O, D') \end{cases}$$

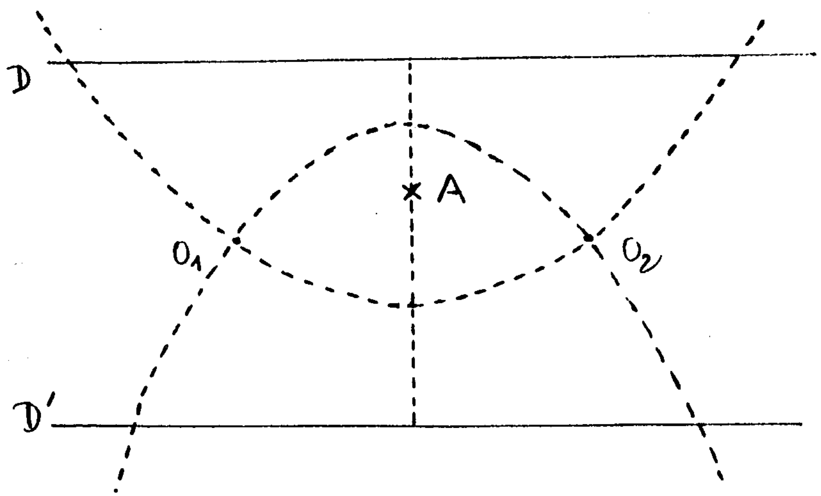
" $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \text{O est sur la parabole de foyer A et de directrice D} \\ \text{O est sur la parabole de foyer A et de directrice D'} \end{cases}$

discussion le problème a toujours 2 solutions



(figure 1)

- *à la découverte de 2 lieux géométriques connus (ici en Terminale) mais qui ne peuvent se construire à la règle et au compas.*

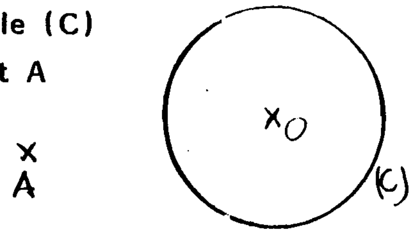


(figure 2)

3° Exemple 3

énoncé : Construire les tangentes à un cercle (C) passant par un point A.

analyse de l'énoncé :

<table>
<tr><th>je connais</th><th>je veux construire</th><th>contraintes (γ)</th></tr>
<tr><td>- un cercle (C)
- un point A
</td><td>une droite D
↓
il suffit de construire
le point de contact I</td><td>- A $\in$ D
- D est tangente à (C)</td></tr>
</table>

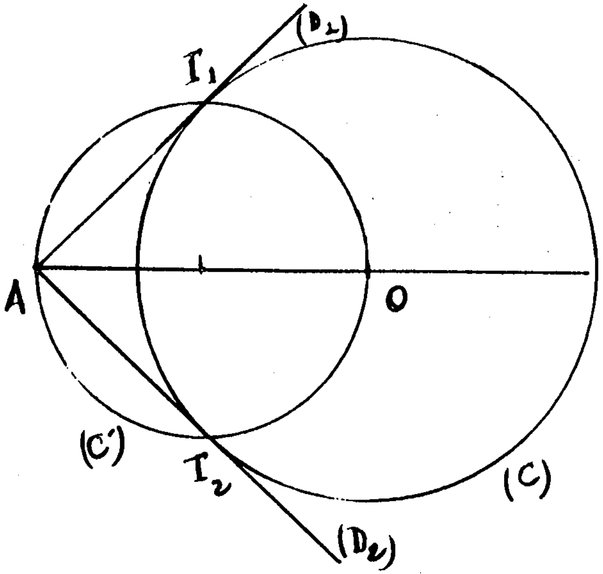
recherche :

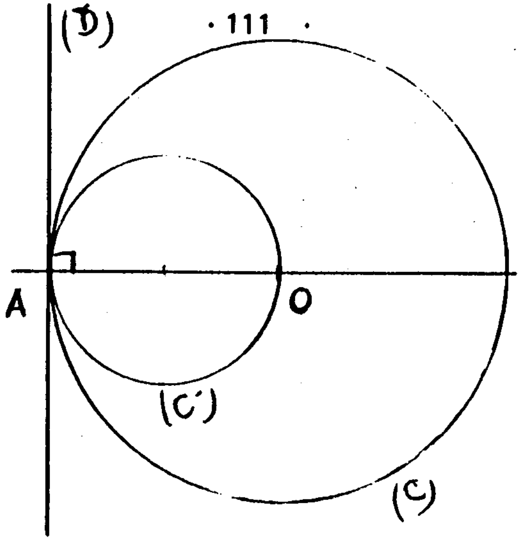
$$(\gamma) \Longleftrightarrow \begin{cases} I \in (C) \\ \vec{IO} \perp \vec{IA} \end{cases}$$

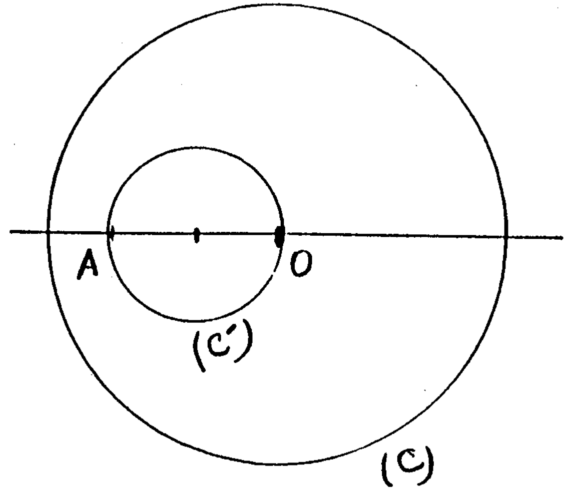
$$(\gamma) \Longleftrightarrow \begin{cases} I \in (C) \\ I \text{ est sur le cercle } (C') \text{ de diamètre } [OA] \end{cases}$$

discussion suivant la position de A par rapport à (C) il y a 0, 1 ou 2 solutions

nécessité d'une discussion en ce qui concerne l'existence et le nombre de solutions



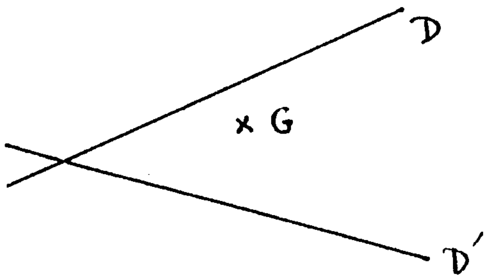




<u>4° Exemple 4</u>

<u>énoncé</u> : D et D' sont 2 droites sécantes et G un point non situé sur D et D'
Construire un triangle (ABC) de centre de gravité G tel que A soit sur D et B et C sur D'.

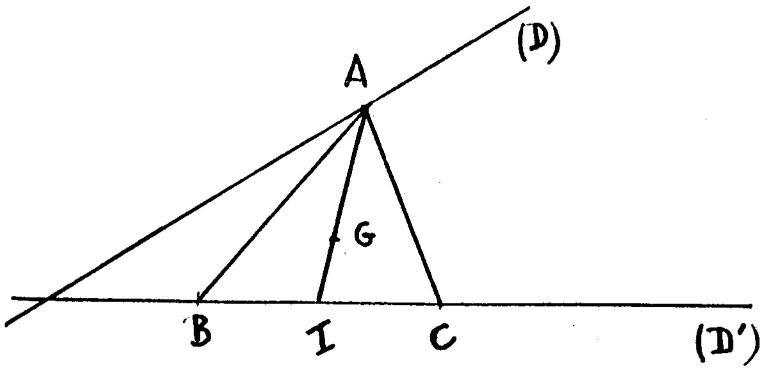
<u>analyse de l'énoncé</u> :

je connais	je veux construire	contraintes (γ)
- 2 droites D et D' sécantes - G non situé sur D et D'  	un triangle (ABC) ↓ il suffit de construire le sommet A ou le milieu I de [BC], B et C pouvant être choisis arbitrairement sur D' symétriques par rapport à I	- G centre de gravité de (ABC) - $A \in D$ - $B \in D'$ et $C \in D'$

recherche :

1) analyse

Soit (ABC) un triangle répondant à la question



alors $h_{(G,\,-2)} : I \mapsto A$

comme $I \in D'$ alors $A \in h(D')$

d'où $\underline{A \in h(D') \cap D}$

2) synthèse ; construction ; discussion

On construit $h(D')$ qui est une droite parallèle à D' et donc sécante à D en un point A

- *le problème ici se traite par analyse et synthèse*
- *pour trouver les deux lignes définissant A on n'utilise plus des caractérisations d'ensembles connus mais on a recours à une transformation du plan.*

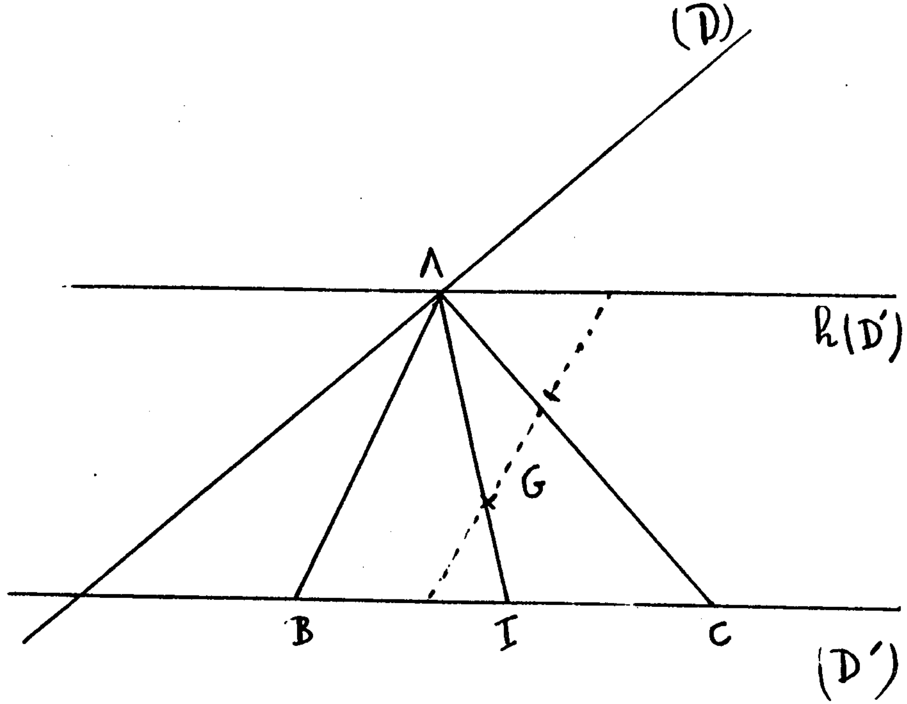
Cette méthode ne doit pas être mise en oeuvre dans les premiers problèmes de construction.

Soit $I = h^{-1}(A)$

alors $I \in D'$ et $\vec{GI} = -\frac{1}{2}\vec{GA}$.

On choisit B et C symétriques par rapport à I sur D'

Il y a une infinité de solutions



5° Exemple 5

énoncé : celui de l'exemple 2

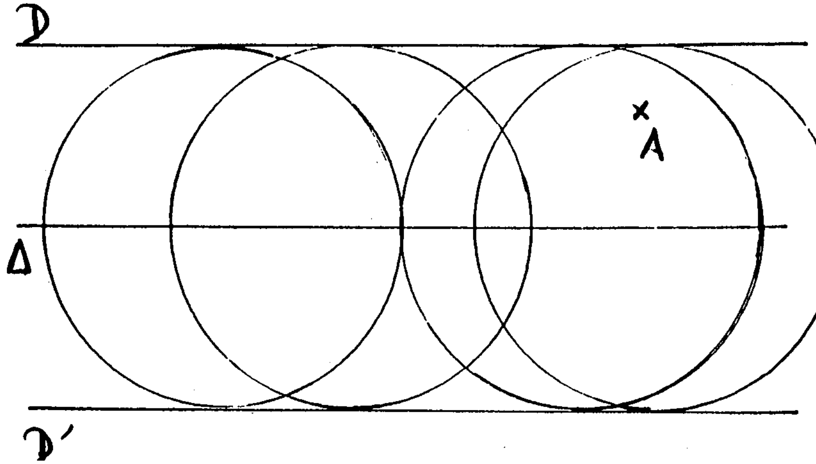
recherche :

contraintes (γ) du problème
- le cercle passe par A
- il est tangent à D
- il est tangent à D'

nouveau problème

contraintes (γ')
- le cercle est tangent à D
- le cercle est tangent à D'

Il existe une infinité de cercles tangents à D et D'
Leur ensemble (S) est l'ensemble des cercles dont le centre est sur Δ et de rayon $\frac{1}{2}$ d (D, D')



Il faut rechercher les éléments de (S) qui vérifient la 3ème contrainte : "il passe par A".

Le dessin précédent nous conduit à translater l'un des cercles de l'ensemble (S) pour le faire passer par A.

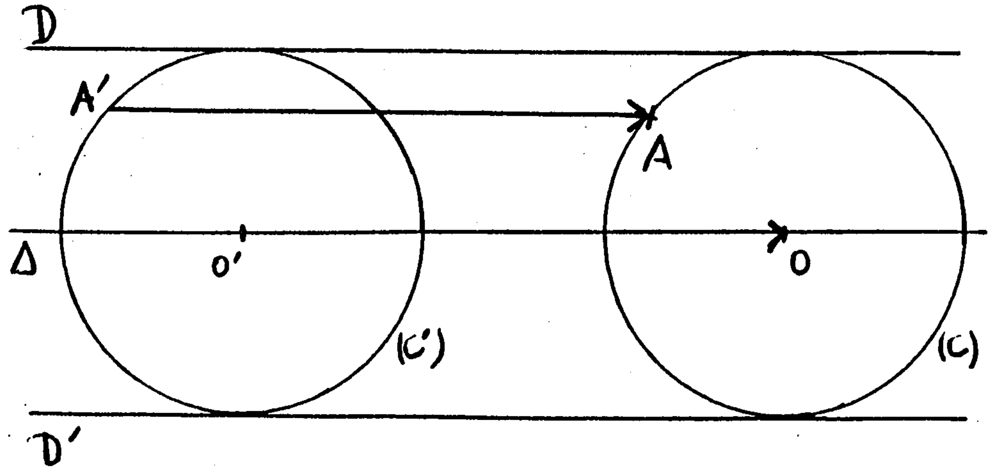
analyse :
Soit (C) un cercle répondant à la question et soit (C') un cercle de l'ensemble (S)

OUBLI d'une CONTRAINTE

- *l'oubli d'une contrainte transforme le problème en un problème plus simple*

- *parmi les solutions (S) de ce dernier problème on recherche celles qui obéissent à la contrainte oubliée.*

On peut alors transformer un des éléments de (S) en la figure cherchée.

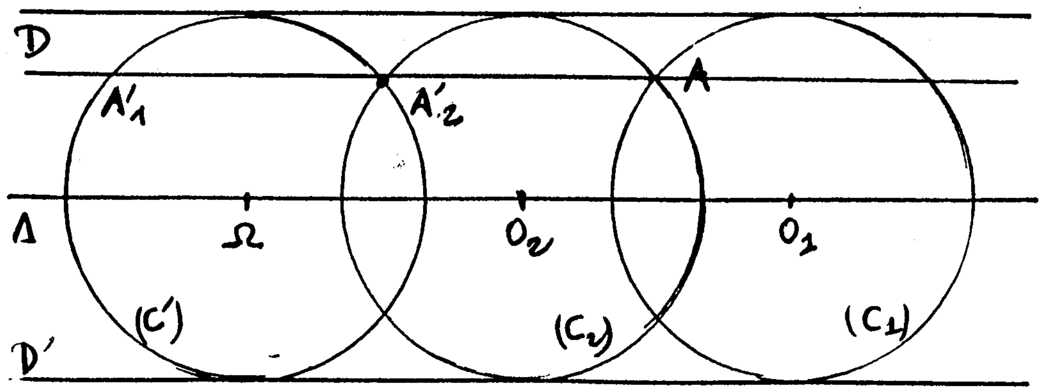


Alors $t_{\overrightarrow{O'O}} : (C') \longmapsto (C)$

$A' \longmapsto A$

<u>synthèse ; construction</u>

On construit un cercle (C') de l'ensemble (S). La parallèle en A à D coupe (C') en A'_1 et A'_2



$t_{\overrightarrow{A'_1 A}} : \Omega \mapsto O_1$
$(C') \mapsto (C_1)$

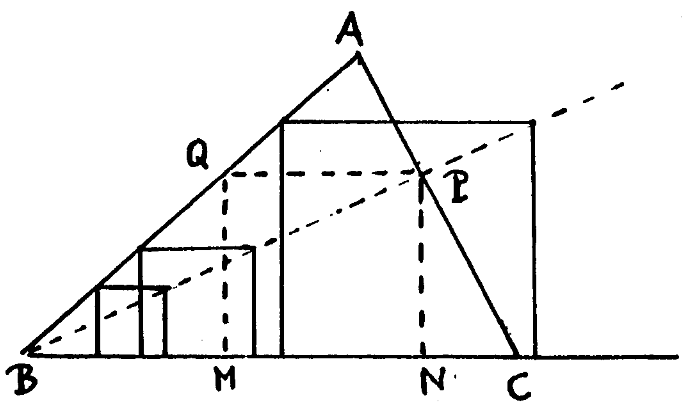
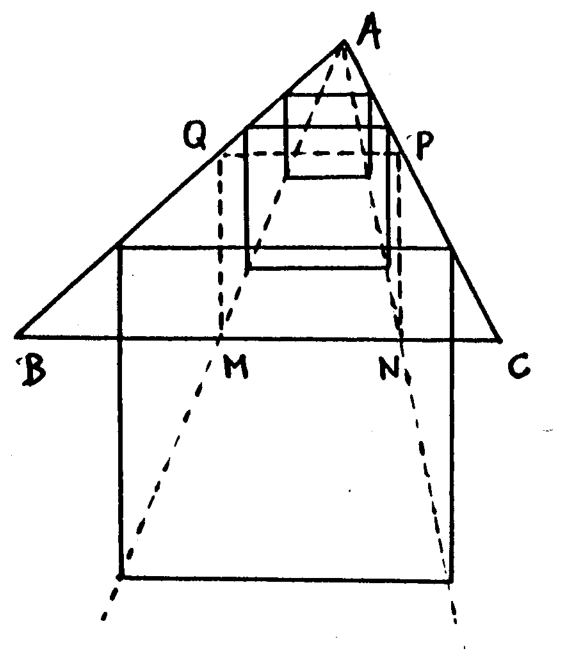
$t_{\overrightarrow{A'_2 A}} : \Omega \mapsto O_2$
$(C') \mapsto (C_2)$

(C_1) et (C_2) sont les deux solutions du problème.

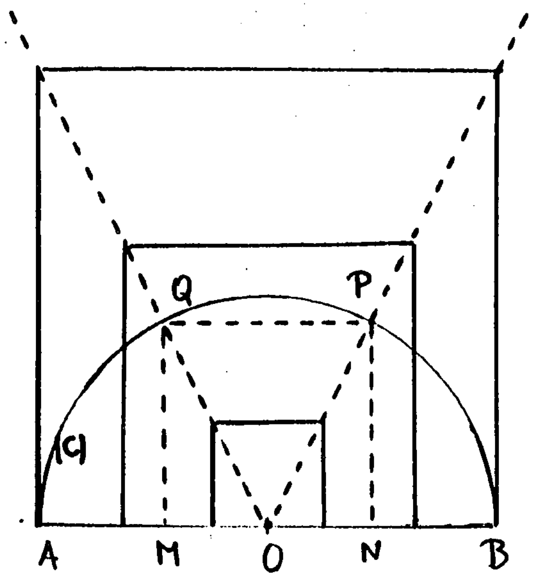
Cette méthode "d'oubli de la contrainte" est assez délicate. Elle ne peut être proposée que si les élèves ont assez d'aisance dans l'étude des problèmes de construction et dans l'utilisation des transformations.

Exemples de problèmes pouvant conduire à l'utiliser :

1. (ABC) est un triangle. Construire un carré MNPQ avec M et N sur (BC), P sur (AC) et Q sur (AB).

	contrainte oubliée	transformation utilisée
	P ∈ (AC)	homothétie de centre B
	M et N sur (BC)	homothétie de centre A

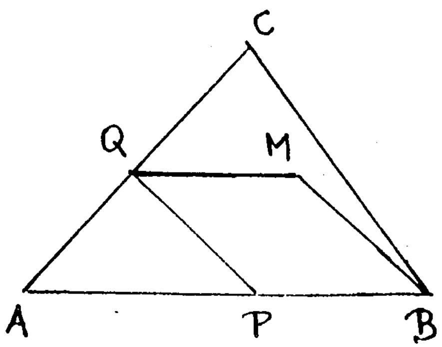
2. Soit un demi cercle (C) de diamètre [A B] . Construire un carré MNPQ avec M et N sur [A B], P et Q sur (C)

	contrainte oubliée	transformation utilisée
	P et Q sur (C)	homothétie de centre O

(voir la résolution complète de cet exercice dans le paragraphe <u>III</u>)

3. Soit un triangle (ABC). Trouver un point P sur [A B] et un point Q sur [A C] tel que BP = PQ = QC. (Voir POLYA)

<u>recherche</u> :



On ne connaît ni la direction de (PQ) ni la longueur PQ.

Si on considère le parallélogramme (PQMB) il suffit de construire le point M tel que

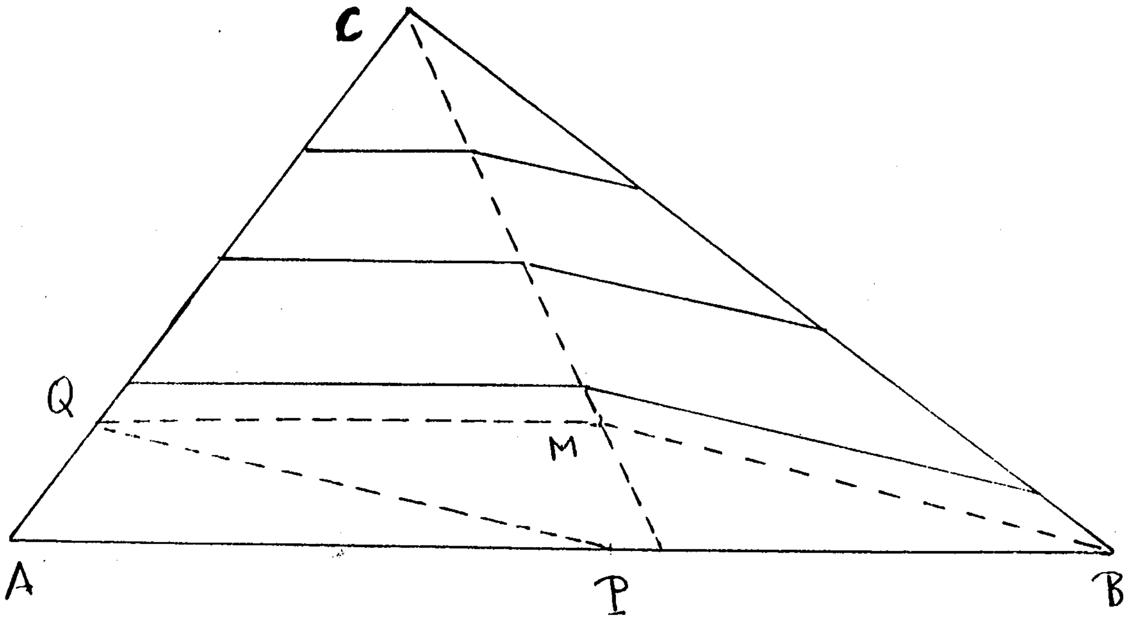
$$CQ = QM = MB \qquad \text{et} \qquad \vec{QM} = \vec{PB}$$

Les 2 premiers segments de la ligne brisée CQMB ont alors leurs directions connues.

Le problème est donc de construire une ligne brisée CQMB' obéissant aux contraintes

$$(\gamma)\quad \begin{cases} Q \in [AC] \\ \vec{QM} \text{ a la direction et le sens de } \vec{AB} \\ CQ = QM = MB' \\ B' = B \end{cases}$$

On affaiblit la contrainte B' = B par B' $\in$ [BC]



La figure fait penser à utiliser une homothétie de centre C.

III - Rédaction d'un problème de construction

Méthode

On peut suivre la démarche suivante

1 - Analyse

On suppose réalisée une figure correspondant aux contraintes demandées ; on étudie des propriétés de cette figure, ces propriétés sont des conditions nécessaires, on cherche celles qui peuvent conduire à une construction.

2 - Construction

On utilise les conditions nécessaires de l'analyse pour effectuer la construction ; on s'assure que la figure réalisée est conforme c'est à dire que les conditions utilisées sont suffisantes.

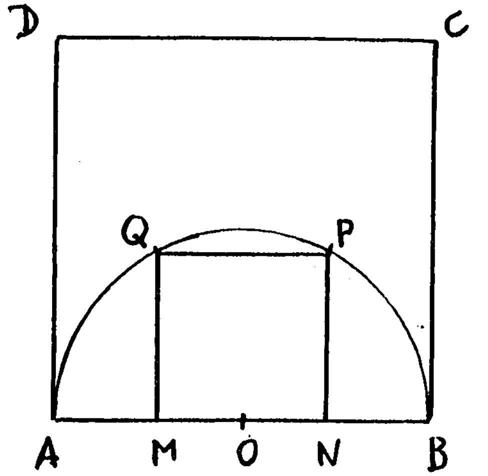
3 - Discussion

On examine les cas où la construction n'est pas réalisable, et quand elle est possible, on donne le nombre de solutions.

Exemple 1

Construire un carré inscrit dans un demi-cercle :
On donne un demi-cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AB]$, de centre O
Construire un carré MNPQ avec M et N sur $[AB]$, P et Q sur $\mathcal{C}$

1) Analyse



Soit MNPQ un carré répondant à la question et soit ABCD le carré dont $[AB]$ est un côté et situé dans le demi plan de frontière (AB) contenant $\mathcal{C}$.

MQ = NP , OQ = OP donc OM = ON

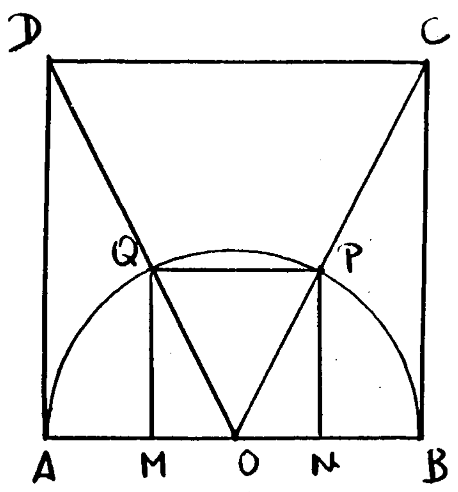
$$\frac{OM}{OA} = \frac{\frac{1}{2}MQ}{\frac{1}{2}AD} = \frac{MQ}{AD} \qquad \frac{\overline{OM}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{MQ}}{\overline{AD}}$$

Soit $k = \dfrac{\overline{OM}}{\overline{OA}}$ alors $\vec{OM} = k\,\vec{OA}$ et $\vec{MQ} = k\,\vec{AD}$

et donc $\vec{OQ} = k\,\vec{OD}$

O, Q, D sont alignés, on montrerait de même O, P, C, alignés.

2) Construction



On construit le carré ABCD ; (OD) coupe $\mathcal{C}$ en Q (OC) coupe $\mathcal{C}$ en P ; Q et P se projettent orthogonalement sur (AB) respectivement en M et N

MNPQ est il un carré ?

Soit h l'homothétie de centre O qui transforme A en M

$$
\begin{aligned}
&O \overset{h}{\longmapsto} O \\
&A \longmapsto M \\
&D \longmapsto Q \quad \text{car } O, Q, D \text{ alignés et } (AD) \parallel (MQ) \\
&C \longmapsto P \quad \text{car } O, P, C \text{ alignés et } \frac{\overline{OP}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OD}} \\
&B \longmapsto N \quad \text{car } O, N, B \text{ alignés et } (CB) \parallel (PN)
\end{aligned}
$$

MNPQ est l'image du carré ABCD par une homothétie c'est donc un carré

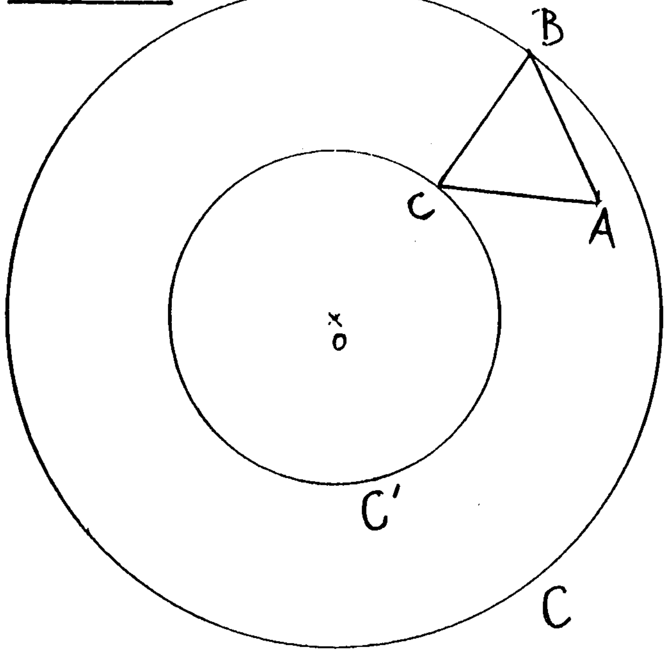
3) Discussion

Dans cet exemple la construction est toujours réalisable et conduit à une solution unique

Exemple 2

On donne deux cercles concentriques $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ de centre O, de rayons respectifs R et R' ; $R \neq R'$ et un point A . Construire un triangle équilatéral direct A B C tel que $B \in \mathcal{C}$, $C \in \mathcal{C}'$

1) Analyse



C est l'image de B par $r\,(A, \frac{\pi}{3})$

or $B \in \mathcal{C}$ donc $C \in r\,(\mathcal{C})$

C est commun à $\mathcal{C}'$ et $r\,(\mathcal{C})$

2) Construction

On construit $r\,(\mathcal{C})$ de centre $O' = r\,(O)$ de rayon R

Soit C un point commun à $r\,(\mathcal{C})$ et $\mathcal{C}'$

soit $B = r^{-1}\,(C)$;

$B \in \mathcal{C}$ et A B C est équilatéral direct

3) Discussion $r(C)$ et C' sont sécants si et seulement si

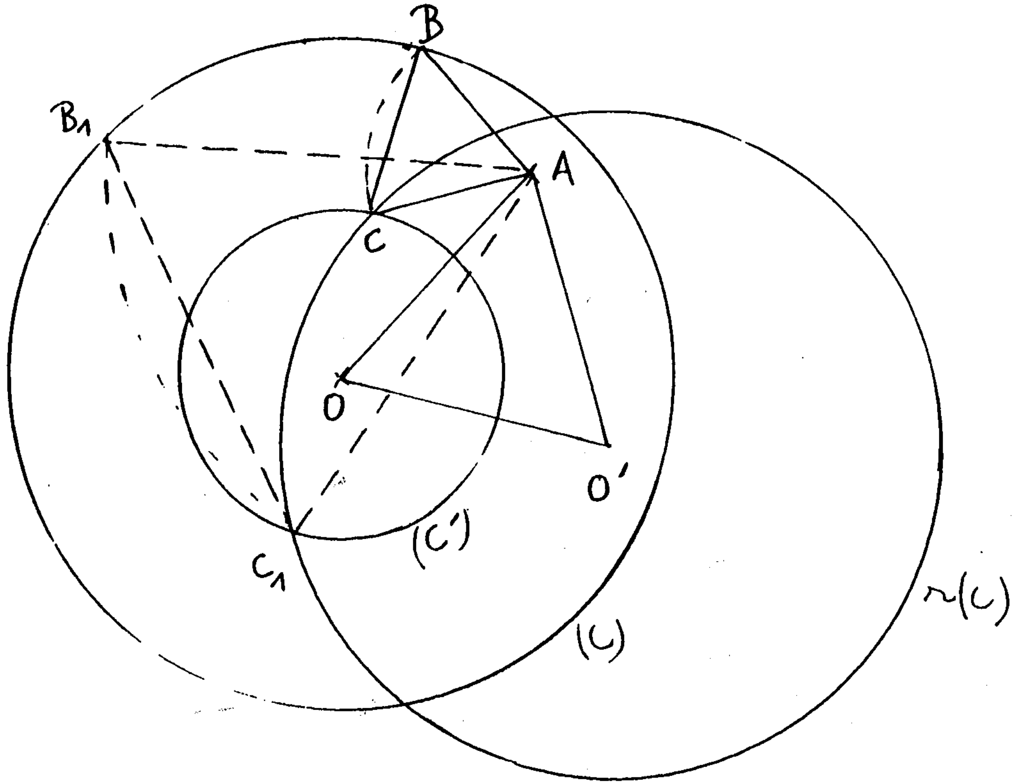
$$|R - R'| \leqq OO' \leqq R + R'$$

c'est à dire $|R - R'| \leqq OA \leqq R + R'$

si $OA < |R - R'|$ ou $OA > R + R'$ pas de solution

si $OA = |R - R'|$ ou $OA = R + R'$ une solution unique

si $|R - R'| < OA < R + R'$ deux solutions

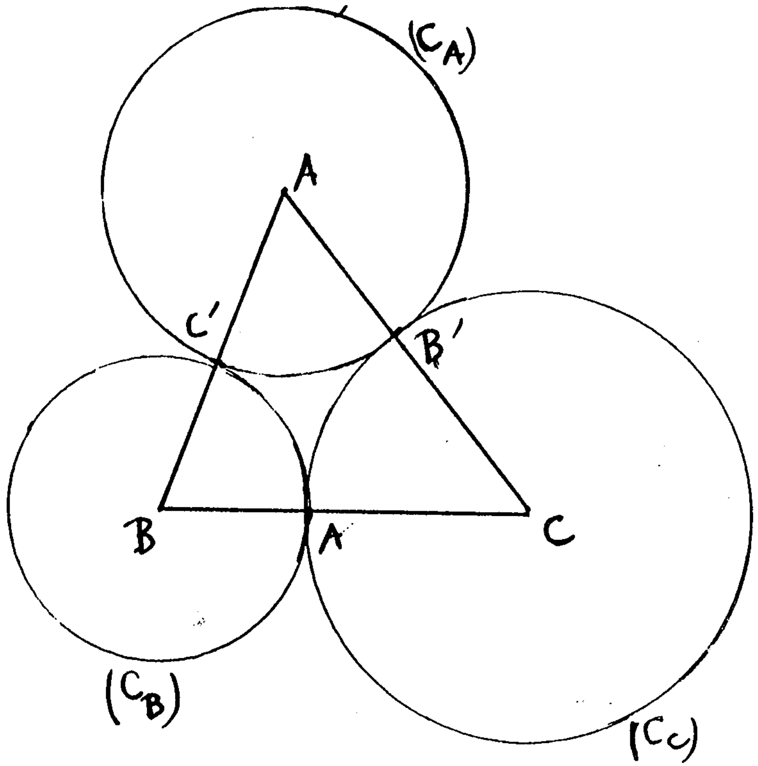


PLUSIEURS METHODES POUR UNE MEME CONSTRUCTION

Cet exercice a été donné dans une classe de TC. Les élèves ont proposé plusieurs pistes de recherche ce qui a conduit à des solutions mettant en jeu des outils différents.

Texte proposé

(ABC) est un triangle. Est-il possible de construire 3 cercles centrés en A, B et C et tangents deux à deux ? Combien y-a-t-il de solutions ?



1ère démarche : méthode calculant les rayons des cercles

On pose : $a = BC$ $b = CA$ $c = AB$

On cherche $x = AC' = AB'$ $y = BC' = BA'$ $z = CA' = CB'$

(x, y, z) sont les solutions du système :

$$(S) \begin{cases} x + y = c \\ y + z = a \\ z + x = b \\ x \geqq 0 \\ y \geqq 0 \\ z \geqq 0 \end{cases}$$

On a $(S) \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-a + b + c}{2} & \text{et} \quad x \geqq 0 \\ y = \dfrac{a - b + c}{2} & \text{et} \quad y \geqq 0 \\ z = \dfrac{a + b - c}{2} & \text{et} \quad z \geqq 0 \end{cases}$

Les valeurs trouvées pour x, y et z conviennent bien car on a :

$a \leqq b + c \qquad b \leqq a + c \qquad c \leqq a + b$

d'après les inégalités triangulaires vérifiées dans (ABC)

Cette méthode intéressante pour l'utilisation de l'inégalité triangulaire, permet alors une construction à la règle et au compas de l'unique solution.

<u>2ème démarche</u> : utilisation du centre I du cercle inscrit à (ABC)

Des élèves remarquent qu'il existe une solution évidente en prenant pour A', B' et C' les projections orthogonales de I sur $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$.

Y-a-t-il d'autres solutions ? Les élèves comprennent que la réciproque est loin d'être aussi évidente qu'elle n'en paraît.

Les tangentes intérieures communes à (C_A) et (C_B) et à (C_A) et (C_C) se coupent en un point I. Il suffit de prouver que l'on a : $\vec{IA'} \perp \vec{CB}$

r_A, r_B, r_C désignant les rayons des cercles (C_A), (C_B) et (C_C) on a :

$IC'^2 = IB^2 - r_B^2 = IA^2 - r_A^2$

$IB'^2 = IC^2 - r_C^2 = IA^2 - r_A^2$

d'où $IB' = IC'$ et $IB^2 - IC^2 = r_B{}^2 - r_C{}^2$

Mais $IB^2 - IC^2 = (\overrightarrow{IA'} + \overrightarrow{A'B})^2 - (\overrightarrow{IA'} + \overrightarrow{A'C})^2$

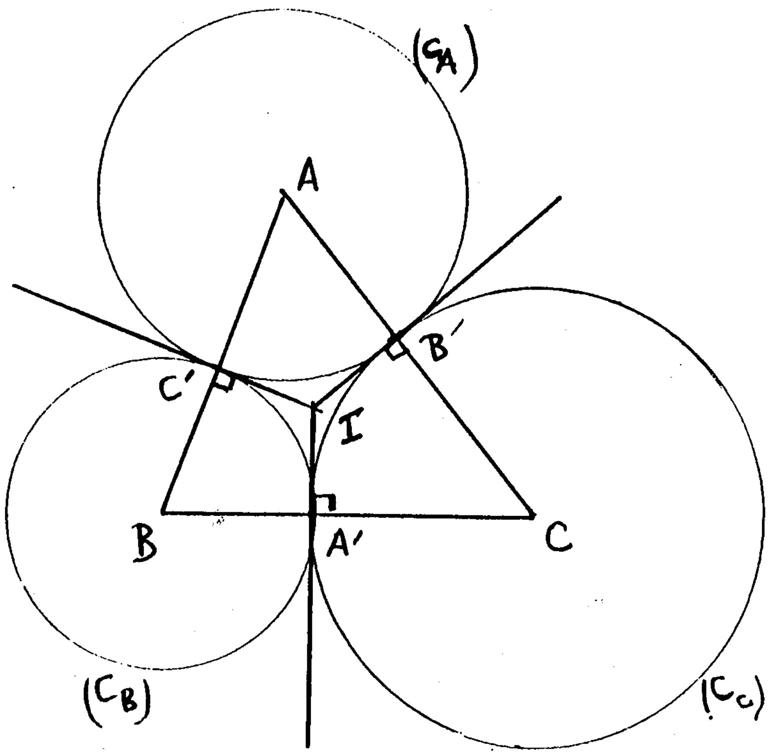
$$= (2\,\overrightarrow{IA'} + \overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{A'C}) \,.\, (\overrightarrow{A'B} - \overrightarrow{A'C})$$

$$= 2\,\overrightarrow{IA'} \,.\, \overrightarrow{CB} + A'B^2 - A'C^2$$

$$= 2\,\overrightarrow{IA'} \,.\, \overrightarrow{CB} + r_B{}^2 - r_C{}^2$$

On a donc $\overrightarrow{IA'} \perp \overrightarrow{CB}$ et (IA') est donc la tangente commune intérieure à (C_B) et (C_C).

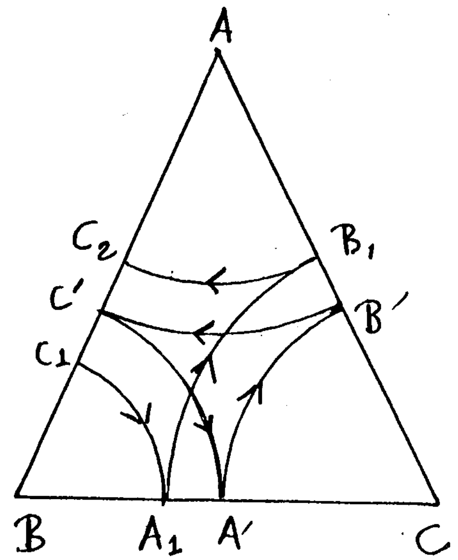
Comme $IA' = IB' = IC'$, I est bien le centre du cercle inscrit à (ABC)



Cette démarche traduit en fait que I est le centre radical des trois cercles (il a même puissance par rapport aux trois cercles (C_A), (C_B) et (C_C)).

<u>3ème démarche</u> ; utilisation des transformations

Un élève propose une "construction approchée" : il choisit un point C_1 sur $[AB]$ puis il place successivement :



A_1 sur $[BC)$ tel que $BC_1 = BA_1$

B_1 sur $[CA)$ tel que $CA_1 = CB_1$

C_2 sur $[AB)$ tel que $AB_1 = AC_2$

En général il a $C_1 \neq C_2$.

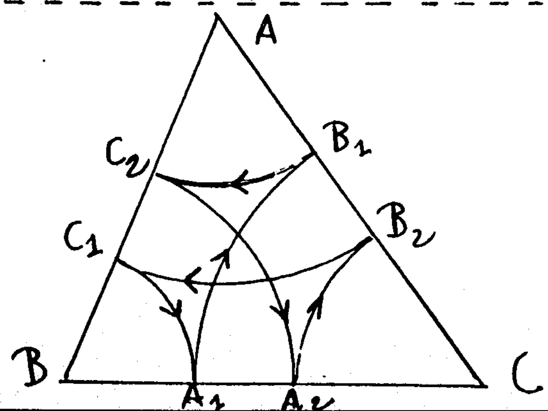
Mais il remarque, sans pouvoir le justifier, que s'il réalise la même construction à partir du milieu C' de $[C_1 C_2]$ il revient sur C'. Il aurait donc trouvé une solution au problème.

En fait il compose 3 rotations et obtient l'application

$r = r_{(A, (\vec{AC}, \vec{AB}))} \circ r_{(C, (\vec{CB}, \vec{CA}))} \circ r_{(B, (\vec{BA}, \vec{BC}))}$

r est donc un déplacement d'angle π . C'est alors une symétrie centrale de centre C' milieu de $[C_1 C_2]$ qui se trouve ainsi un point fixe.

<u>Application de la propriété $r \circ r = id_{\mathcal{P}}$</u>



a partir de $C_1 \neq C'$ au bout de "2 tours" on revient à C_1

<u>Appendice</u> : Une autre façon de "tourner"

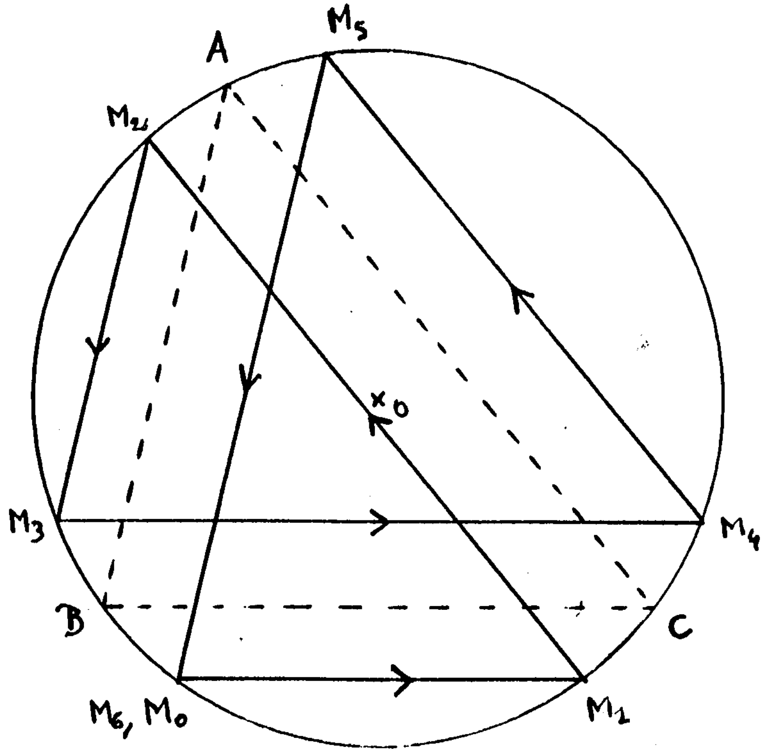
ABC est un triangle inscrit dans un cercle de centre O

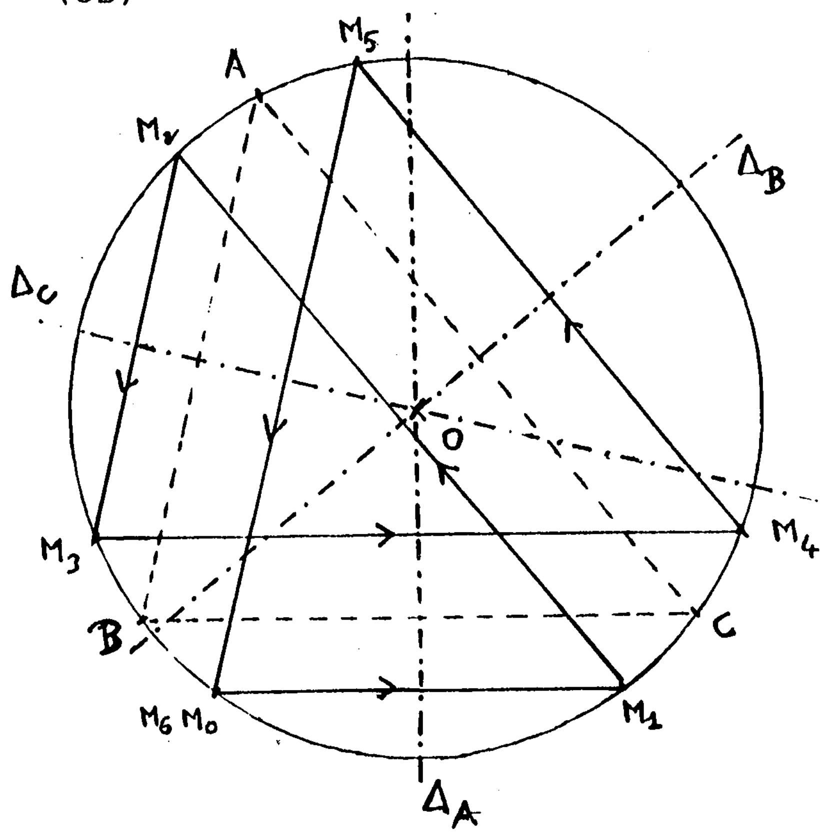
M_o étant un point du cercle distinct de B on trace la parallèle passant par M_o à (BC), puis la parallèle passant par M_1 à (CA), puis la parallèle passant par M_2 à (AB), puis on recommence la même construction à partir de M_3. On a alors $M_6 = M_o$

En effet : Δ_A, Δ_B, Δ_C étant les médiatrices de [BC], [CA] et [AB] on compose trois réflexions et on obtient l'application $s = s_{\Delta_C} \circ s_{\Delta_B} \circ s_{\Delta_A}$

s est un antidéplacement laissant O et B invariants donc $s = s_{(OB)}$

Comme $s \circ s = id_{\mathcal{P}}$ on a bien $M_6 = M_o$



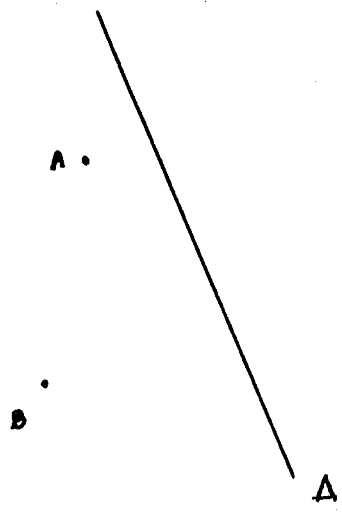


Construction à la règle et (ou) au compas

Réflexions

Tous niveaux

Δ est une droite donnée du plan ;
A et B deux points donnés ;
(A B) $\not\parallel$ Δ ; construire au compas seul
le symétrique de A , puis à la règle
le symétrique de B

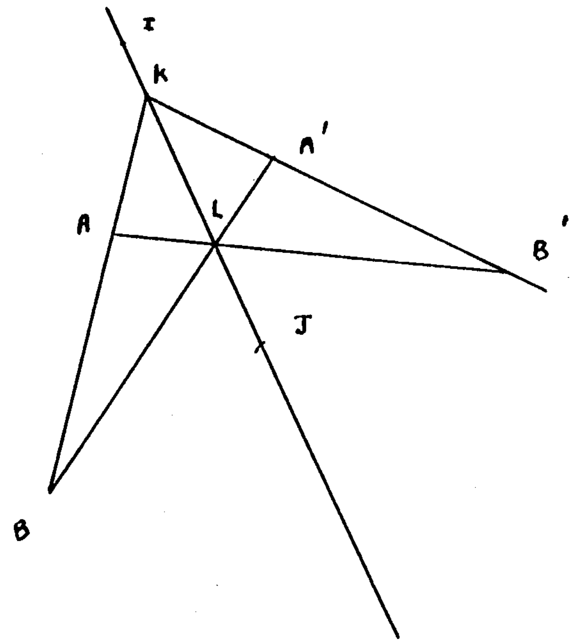


1) on prend deux points I et J sur Δ.

A' $\in$ $\mathcal{C}$ (I, I A) $\cap$ $\mathcal{C}$ (J, J A)

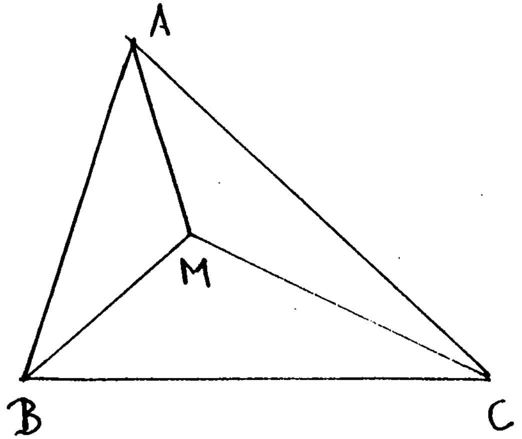
2) (AB) et (A' B') se coupent sur Δ en K
(A' B) et (A B') se coupent sur Δ en L

{B'} = (A'K) $\cap$ (AL)



Construire tous les points M intérieurs au triangle (ABC) vérifiant :

aire (MAB) = aire (MBC) = aire (MCA)

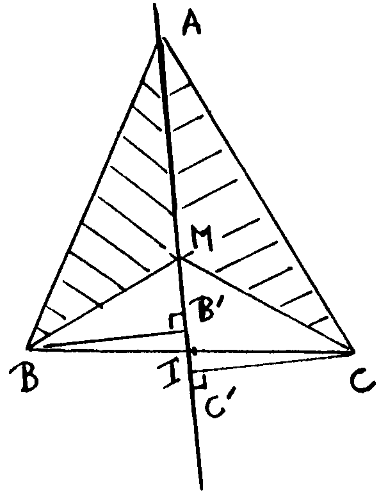


Problème de construction

Recherche d'un ensemble de points

2nde →

1er découpage des contraintes



$(\gamma) \begin{cases} \text{Aire (MAB)} = \text{Aire (MAC)} \\ \text{Aire (MAB)} = \text{Aire (MBC)} \end{cases}$

Aire (MAB) = Aire (MAC) $\Longleftrightarrow$ BB' = CC'

" $\Longleftrightarrow$ Aire (MBI) = Aire (MCI)

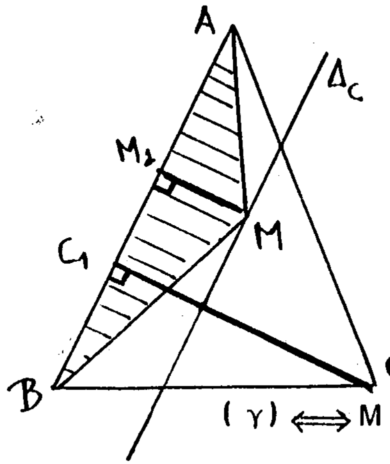
" $\Longleftrightarrow$ Aire (ABI) = Aire (ACI)

" $\Longleftrightarrow$ I milieu de [BC].

" $\Longleftrightarrow$ M est sur la médiane issue de A

$(\gamma) \Longleftrightarrow M = G$ où G est le centre de gravité de (ABC)

2ème découpage des contraintes



$(\gamma) \begin{cases} \text{Aire (MAB)} = \frac{1}{3} \text{ Aire (ABC)} \\ \text{Aire (MAC)} = \frac{1}{3} \text{ Aire (ABC)} \end{cases}$

Aire (MAB) = $\frac{1}{3}$ Aire (ABC) $\Longleftrightarrow MM_1 = \frac{1}{3} CC_1$

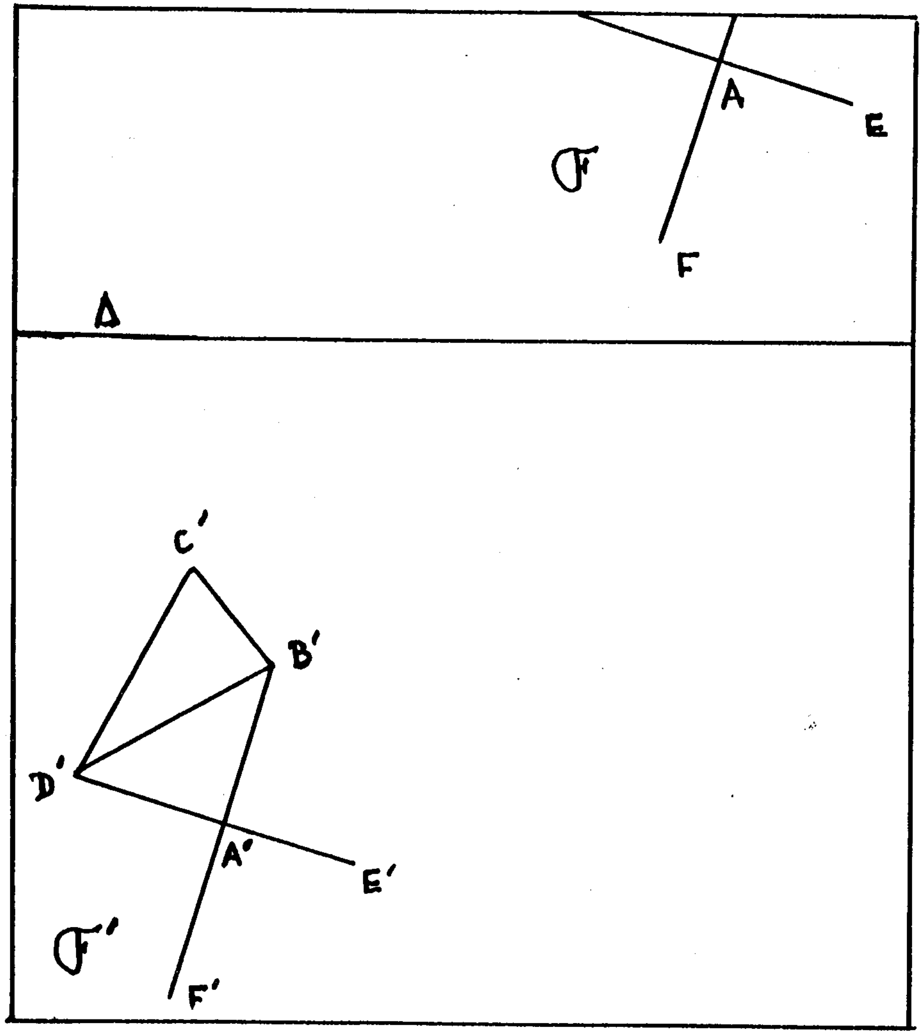
" $M \in \Delta_C$

Δ_C étant une droite parallèle à (AB)

$(\gamma) \Longleftrightarrow M \in \Delta_C \cap \Delta_B$

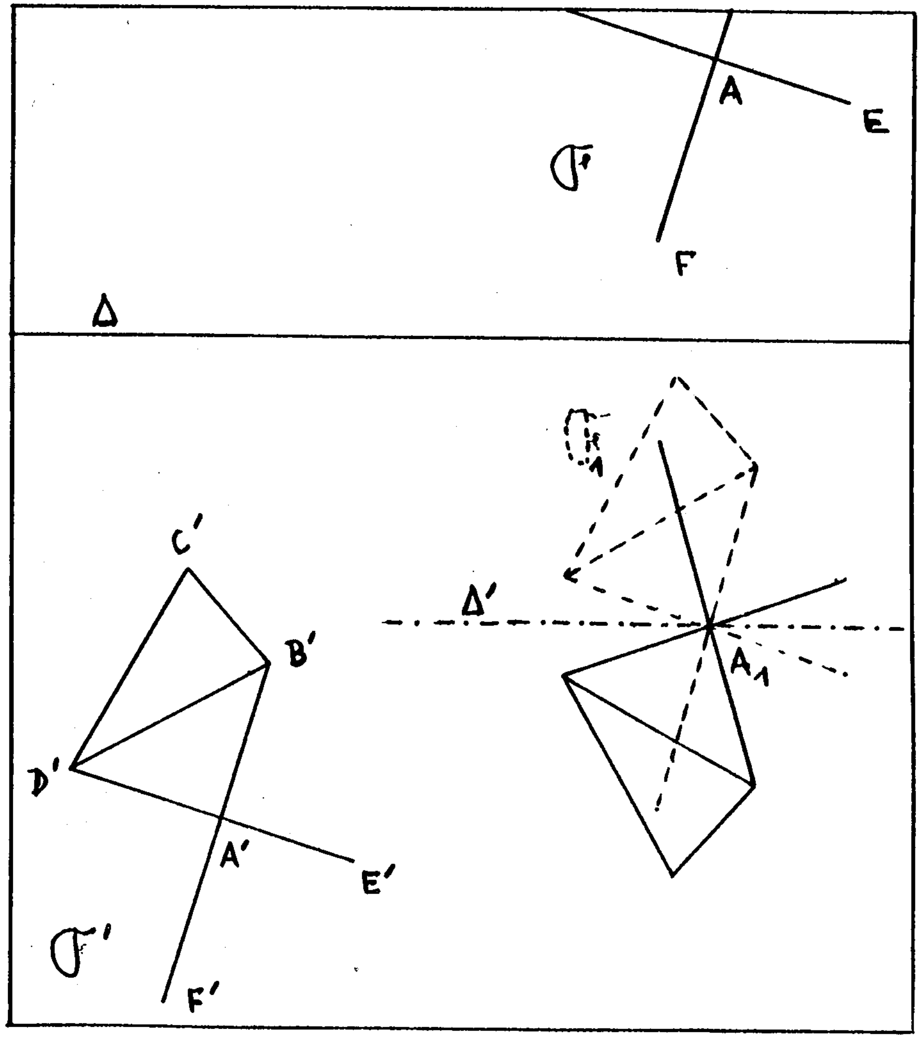
Il reste à prouver que ce point d'intersection est G

Une figure $\mathcal{F}$ incomplète a pour image $\mathcal{F}'$ par translation
Construire l'image de $\mathcal{F}$ par la réflexion d'axe Δ



Problème de construction translation réflexion	2nde

Soit A_1 le symétrique de A par rapport à Δ
Construire $\mathcal{F}_1$ image de $\mathcal{F}'$ par la translation $t_{\overrightarrow{A'A_1}}$
puis l'image de $\mathcal{F}_1$ par la réflexion d'axe Δ' parallèle à Δ passant par A_1

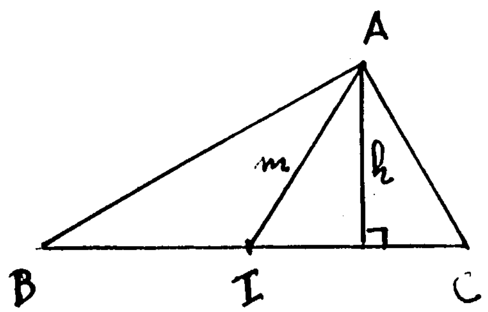


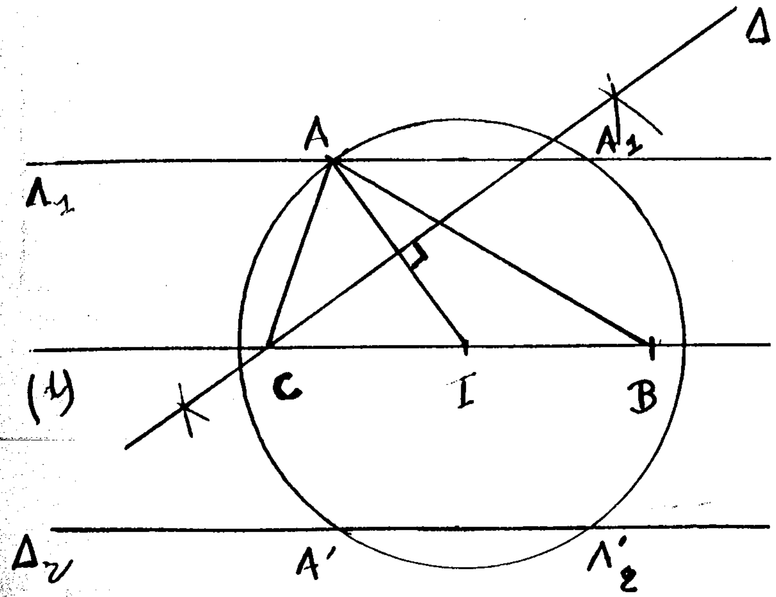
Problème de construction

2 nde
1ère S-E

Construire un triangle connaissant

- la longueur h de la hauteur issue de A
- la longueur m de la médiane issue de A et tel que BC = 2 AC





On fixe I milieu de [BC] et (d) le support de [BC]

construction de A

$$\begin{cases} d\,(A, (BC)) = h \\ AI = m \end{cases} \iff \begin{cases} A \in \Delta_1 \cup \Delta_2 \\ A \in \mathcal{C}\,(I, m) \end{cases}$$

Δ_1 et Δ_2 étant les droites parallèles à (d) et situées à la distance h de (d)

construction de C

AC = CI $\iff$ C est sur la médiatrice Δ de [AI]

construction de B B est le symétrique de C par rapport à I

discussion

1er cas $m < h$ pas de solution car A n'existe pas

2ème cas $m = h$ pas de solution car la médiatrice de [AI] ne coupe pas (d).

3ème cas $h < m$ il y a 4 solutions

EXEMPLE D'UNE ACTIVITE EN GEOMETRIE DE L'ESPACE

GEOMETRIE DANS L'ESPACE

Classe de Seconde ou Première

Martine CLEMENT, Animatrice I.R.E.M.

L'activité qui suit permet, à partir d'un objet que les élèves peuvent observer, soit de dégager quelques théorèmes de géométrie dans l'espace (classe de seconde) soit d'utiliser ces théorèmes (classe de première).

J'ai repris une idée que j'avais déjà développée dans un article de l'IREMOIS (n° 10 Septembre 1982) ; l'objet a été simplifié mais la situation est plus riche.

Avant d'aborder cette activité les élèves ont déjà fait quelques dessins en perspective cavalière et les positions relatives de droites et plans ont été étudiées.

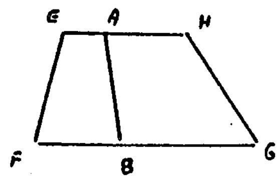
Pour la classe de seconde, les démonstrations utilisent les résultats suivants

D strictement parallèle à $D' \Leftrightarrow D, D'$ coplanaires et $D \cap D' = \emptyset$
D - - $P \Leftrightarrow D \cap P = \emptyset$
P - - $P' \Leftrightarrow P \cap P' = \emptyset$
D incluse dans $P \Leftrightarrow D \cap P = D$

On découpe dans un carton un trapèze et on plie de manière à obtenir deux plans sécants.

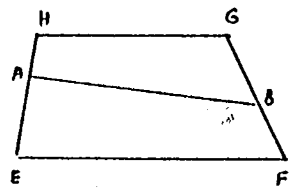
Pliage n° 1

Le pli (AB) coupe les deux côtés parallèles



Pliage n° 2

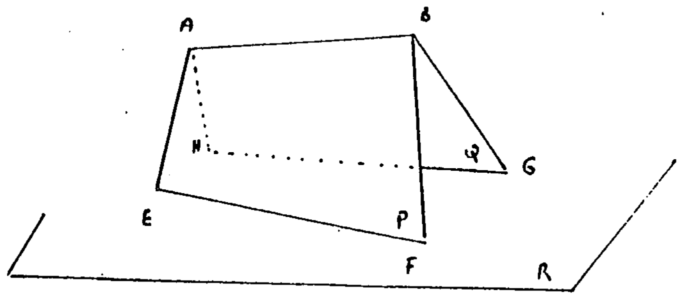
Le pli (AB) coupe les deux côtés non parallèles



On obtient deux plans sécants P et Q : P = (ABEF) Q = (ABGH) $P \cap Q = (AB)$
On définit de plus le plan R : R = (EFG) $P \cap R = (EF)$

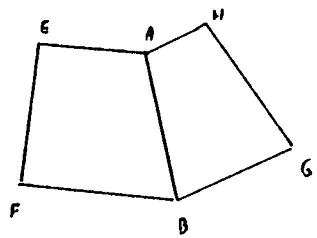
Pour chacun des deux pliages on étudie les problèmes suivants :

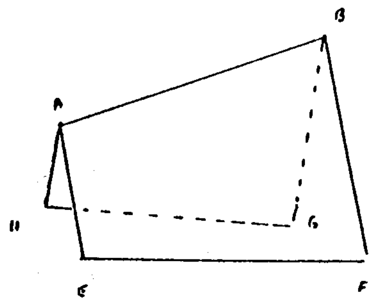
1 - Dessins en perspective cavalière
2 - (EF) et (GH) peuvent-elles être sécantes ?
3 - (EF) et (GH) peuvent-elles être parallèles ?
4 - Positions relatives de (AB) et R
5 - Positions relatives des plans (AEH) et (BFG)



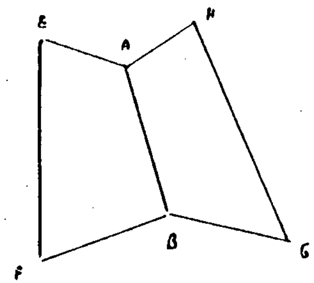
Problème 1 DESSINS

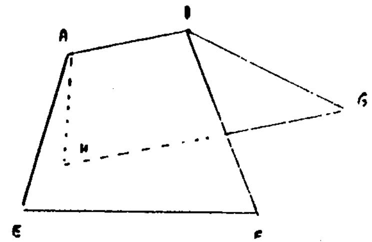
Pliage n°1





Pliage n° 2





Remarques : 1 - En général $H \notin R$; les droites (EF) et (GH) ne sont pas coplanaires.

2 - Dans le pliage n° 2, le parallélisme "à plat" de (EF) et (GH) n'est pas conservé dans l'espace.
3 - Respecter les conventions de la perspective cavalière pour le pliage n° 1 : (EA) // (FB) et (HA) // (GB)

Problème 2 Les droites (EF) et (GH) peuvent-elles être sécantes ?

Examiner les deux pliages ; si la réponse est oui faire un dessin faisant apparaître le point d'intersection de ces droites.

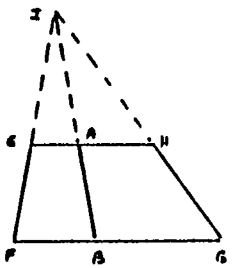
Dans l'espace, si (EF) et (GH) sont sécantes en I, I appartient à P et Q donc à (AB). EFI sont donc alignés de même que HGI, de même que ABI.

Quand on déplie ces alignements sont conservés. On choisit donc le pli (AB) de sorte que "à plat" il passe par l'intersection de (EF) et (GH).

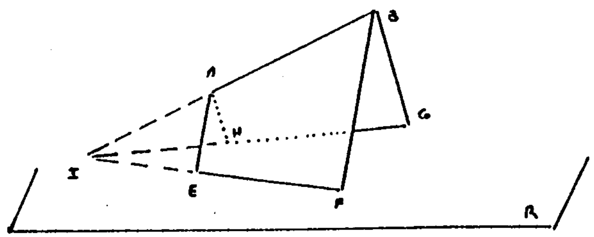
Pliage n° 1 C'est possible puisque "à plat" (EF)et (GH) sont sécantes.
Pliage n° 2 Ce n'est pas réalisable.

Des propositions d'élèves : prendre A milieu de EH et B milieu de FG ou plier en mettant en contact (EF) et (GH)

Dessin à plat



Dessin dans l'espace



Problème 3 Les droites (EF) et (GH) peuvent-elles être parallèles ?

Si (EF) et (GH) sont parallèles alors elles sont coplanaires dans R et elles n'ont pas de point commun. On a alors :

$$(EF) \cap (AB) = (P \cap R) \cap (P \cap Q) = (P \cap R) \cap (Q \cap R) = (EF) \cap (GH) = \emptyset$$

(AB) et (EF) sont donc parallèles puisque coplanaires. De même (AB) et (GH)

Théorème Si deux plans sécants contiennent respectivement deux droites parallèles, leur intersection est parallèle à ces droites

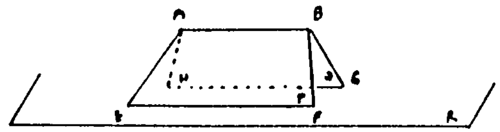
Pliage n° 1 Si dans l'espace (AB) et (EF) sont parallèles de même que (AB) et (GH) cela reste vrai quand on déplie ; or à plat on ne peut pas dessiner (AB) simultanément parallèle à (EF) et (GH)

Pliage n° 2 La condition nécessaire précédente est réalisable mais est-elle suffisante ?

Par transitivité du parallélisme en géométrie plane, à plat (EF) et (GH) sont parallèles, est-ce conservé quand on déplie ?

R et Q contiennent respectivement les droites parallèles (EF) et (AB), leur intersection est une droite qui leur est parallèle. C'est une droite de Q passant par G et parallèle à (AB) c'est donc (GH) et on a (GH) parallèle à (EF).

Théorème Dans l'espace, le parallélisme des droites est transitif.



Problème 4 Positions relatives de (AB) et R

$(AB) \cap R = [(AB) \cap P] \cap R = (AB) \cap (EF)$

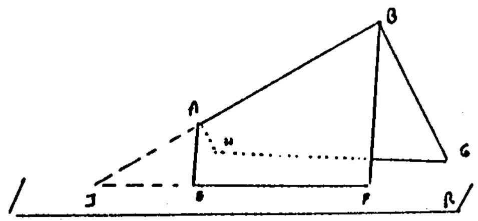
$(AB) \cap R = \emptyset \leftrightarrow (AB) \cap (EF) = \emptyset$

Théorème Soit une droite (EF) parallèle à un plan R, tout plan P contenant la droite et sécant avec R coupe R suivant une parallèle à (EF)

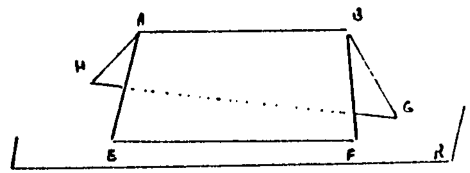
Théorème Une droite est parallèle à un plan si et seulement si elle est parallèle à une droite de ce plan.

Pliages n° 1 et n° 2

(AB) et R sont sécants lorsque (AB) coupe (EF)
(AB) et R sont parallèles lorsque (AB) et (EF) sont parallèles



(AB) coupe R en I



(AB) est parallèle à R

Problème 5 Positions relatives des plans (AEH) et (BFG)

Pliage n° 2 (AE) et (BF) sont sécantes en M
(AH) et (BG) sont sécantes en N

Les plans sont donc sécants et leur intersection est (MN)

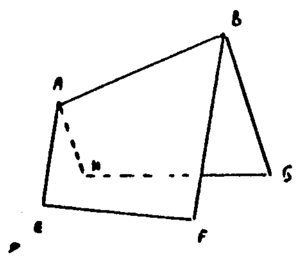
Pliage n° 1 Réaction d'élèves : M et N n'existent pas donc les plans sont parallèles. C'est l'occasion de faire un peu de logique.

(AEH) et (BFG) contiennent respectivement les droites parallèles (AE) et (BF) d'une part, (AH) et (BG) d'autre part s'ils étaient sécants leur intersection serait parallèle à ces droites, (AE) et (AH) seraient parallèles.

Théorème

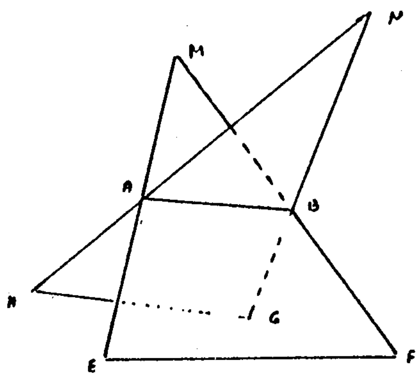
Si deux droites sécantes d'un plan sont respectivement parallèles à deux droites sécantes d'un autre plan, les deux plans sont parallèles.

Pliage n° 1



(AEH) et (BFG) sont parallèles

Pliage n° 2



(AEH) et (BFG) sont sécants

IMPRIME PAR NOS SOINS

ACHEVE D'IMPRIMER : Mars 1994 (réédition)

DEPOT LEGAL : 1er Trimestre 1994

PRIX : 40,00 F

TITRE : **Remise à l'honneur des méthodes géométriques en Second Cycle**

AUTEURS : Groupe Géométrie Second Cycle - IREM de LIMOGES

FORMAT : A4 Nombre de pages : 137

PUBLIC CONCERNE :

Professeurs de mathématiques de lycées et collèges

RESUME :
Cette brochure commence par analyser la performance des méthodes géométriques. Puis sur les thèmes des configurations, des lieux et des constructions géométriques, elle présente, après quelques conseils méthodologiques, une série d'exercices utilisables en classe, en donnant à chaque fois le niveau d'enseignement, les outils employés et des éléments de correction.
Une activité en géométrie de l'espace termine le document.

OBSERVATIONS :

Cette brochure est une réédition : **il convient de lire série S au lieu de série S - E**

MOTS CLES :

Géométrie
Géométrie plane
Géométrie espace
Configurations
Lieux géométriques
Constructions géométriques
Méthodes

EDITEUR : IREM de LIMOGES, 123, av. Albert Thomas, 87060 LIMOGES CEDEX

DIRECTEUR / responsable de publication : Gérard LELOUP, Directeur de l'IREM

DEPOT LEGAL : 1er Trimestre 1994.

ISBN : 2-910165-01-9