Université de Limoges

IREM Institut de Recherche
sur l'Enseignement des Mathématiques

MONTRER ET DÉMONTRER

DIX ACTIVITÉS MATHÉMATIQUES
POUR LE LYCÉE
AVEC
UN LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE DYNAMIQUE

Gérard Armengaud - Jean-Marie Sainsot

INSTITUT DE RECHERCHE SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES DE LIMOGES

123, AVENUE ALBERT THOMAS
87060 LIMOGES CEDEX
TÉL. : 05 55 45 72 49 – FAX : 05 55 45 73 20

INSTITUT DE RECHERCHE SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES

UNIVERSITÉ DE LIMOGES

123, avenue Albert Thomas
87060 Limoges cedex
Tél. : 055 55 45 72 49 – Fax : 05 55 45 73 20
irem @ unilim.fr

MONTRER ET DÉMONTRER

DIX ACTIVITÉS MATHÉMATIQUES

POUR LE LYCÉE

AVEC

UN LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE DYNAMIQUE

Gérard Armengaud – Jean-Marie Sainsot

Remerciements

À tous les collègues de l'IREM pour leurs suggestions et conseils constructifs.

À l'IUFM du Limousin et à la DGESCO pour leur soutien aux travaux des ERR qui nous ont permis de mettre au point certaines de nos activités présentées dans cette brochure.

SOMMAIRE

PRÉSENTATION

Les dix chapitres de cette brochure présentent des activités ayant été expérimentées dans des classes de lycée de première et terminale, S et STI. Elles nécessitent l'usage d'un logiciel de géométrie dynamique. Leur but est de mettre les élèves en situation de recherche avec des outils permettant une approche expérimentale, afin de les amener à formuler par eux-mêmes des conjectures, à les tester, puis à les démontrer.

Il faut remarquer que l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique ne limite pas les activités à la géométrie : l'analyse y a naturellement sa place avec les représentations graphiques de fonctions ou de suites.

Ces activités ont été présentées dans le cadre de l'IREM de Limoges en diverses occasions : journées animateurs, journées IUFM, stages du plan académique de formation .

On ne trouvera pas dans cette brochure de fiches-élève, mais des situations et des développements permettant de construire des activités pour des travaux de groupes ; les enseignants y trouveront aussi matière à illustration du cours.

Les sujets proposés se veulent des sujets de synthèse ; ils balayent une grande partie des notions du programme sans jamais en sortir.

La présentation de ces activités est indépendante du choix d'un logiciel particulier. Elles ont été initialement pratiquées en utilisant Cabri II ou Cabri II plus (on pourra trouver en annexe de certains chapitres des informations détaillées sur l'usage de ces logiciels). Toutefois l'usage de ces logiciels n'est nullement une obligation : tout logiciel de géométrie dynamique doit pouvoir être utilisé, éventuellement au prix d'une adaptation minime.

Enfin il ne faut pas oublier de signaler que la pratique de telles activités supposent réalisées quelques conditions matérielles indispensables : salles adaptées et ordinateurs en nombre suffisant.

Chapitre 1

La benne

Présentation de l'activité

Cette activité a pour origine un problème de bac STI.

Une benne a la forme d'un prisme droit dont les bases sont des trapèzes isocèles.

La longueur MN est variable, les autres dimensions du prisme sont fixes :

$$AM = AB = BN = 2m \; ; \; BC = 8m.$$

Soit H le projeté orthogonal de A sur [MN], on pose $MH = x$

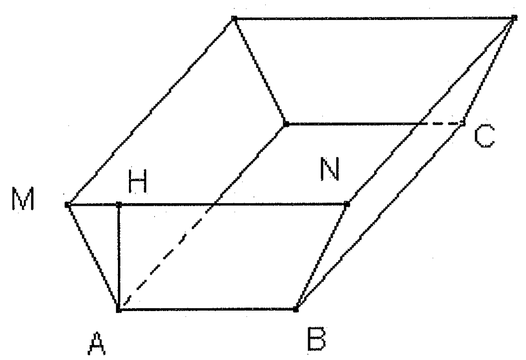


figure 1

On étudiera la variation du volume de la benne en fonction de x.

On précisera la valeur de x pour laquelle le volume est maximal et dans ce cas, on déterminera la mesure de l'angle $\widehat{MAN}$.

Niveau et notions utiles

L'activité s'adresse aux premières et terminales S et STI.

On utilise des constructions géométriques élémentaires, la notion de représentation graphique, le théorème liant le signe de la dérivée et le sens de variation, le théorème de Pythagore et sa réciproque.

1. Étude graphique et conjectures

Soit V(x) le volume de la benne et S(x) l'aire du trapèze ABNM.

On a donc V(x) = 8 S(x).

On représente donc le trapèze isocèle ABNM ; on mesure l'aire S(x).

Dans un repère choisi on reporte la longueur x sur l'axe des abscisses et la mesure de S(x) sur l'axe des ordonnées.

On détermine ainsi un point P de coordonnées (x, S(x)). Le lieu du point P, quand x varie entre 0 et 2 (c'est à dire quand M décrit un quart de cercle de centre A), est la représentation graphique de la fonction S.

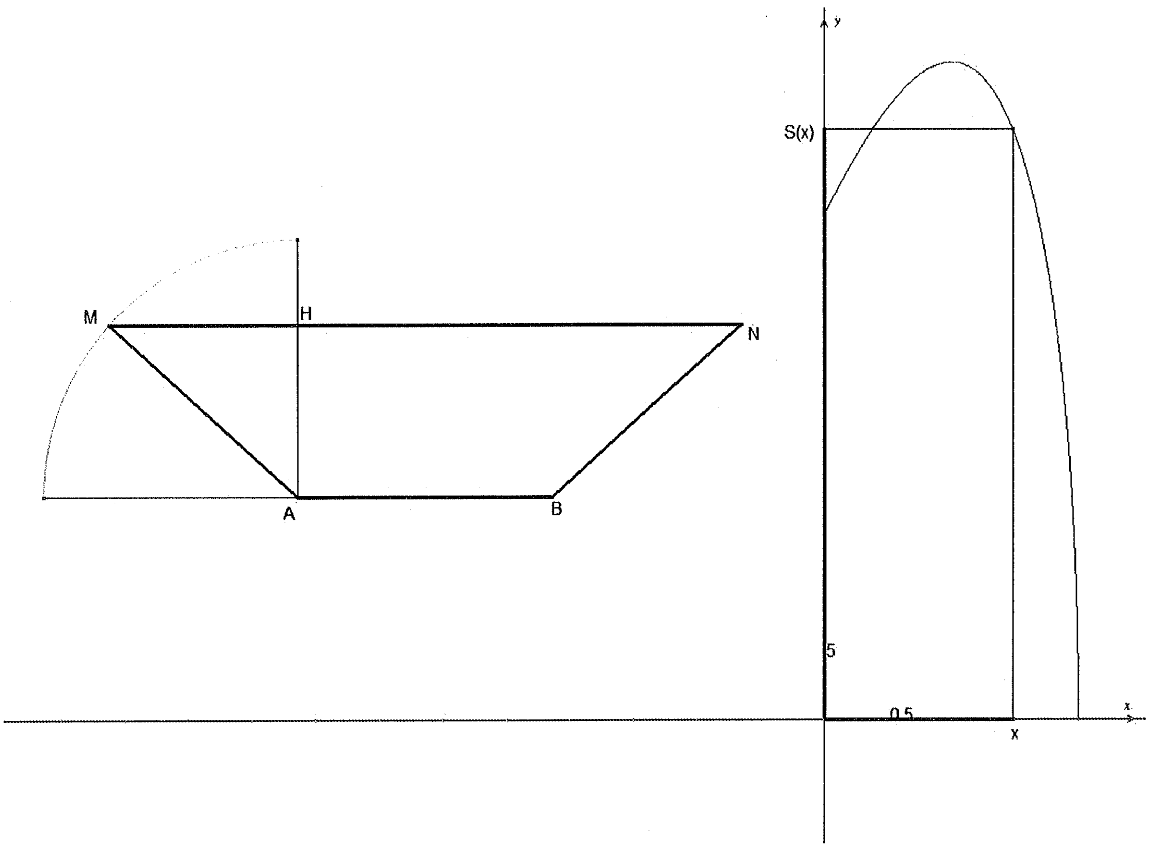


figure 2

On peut donc conjecturer que S est continue sur [0,2] et qu'il existe un réel x_0 de l'intervalle[0,2] tel que la fonction S est croissante $[0,x_0]$, puis décroissante sur $[x_0,2]$ S admet donc un maximum en x_0.

Plaçons le point M de façon que le maximum soit atteint. Il semble alors que (MA) et (AN) soient perpendiculaires.

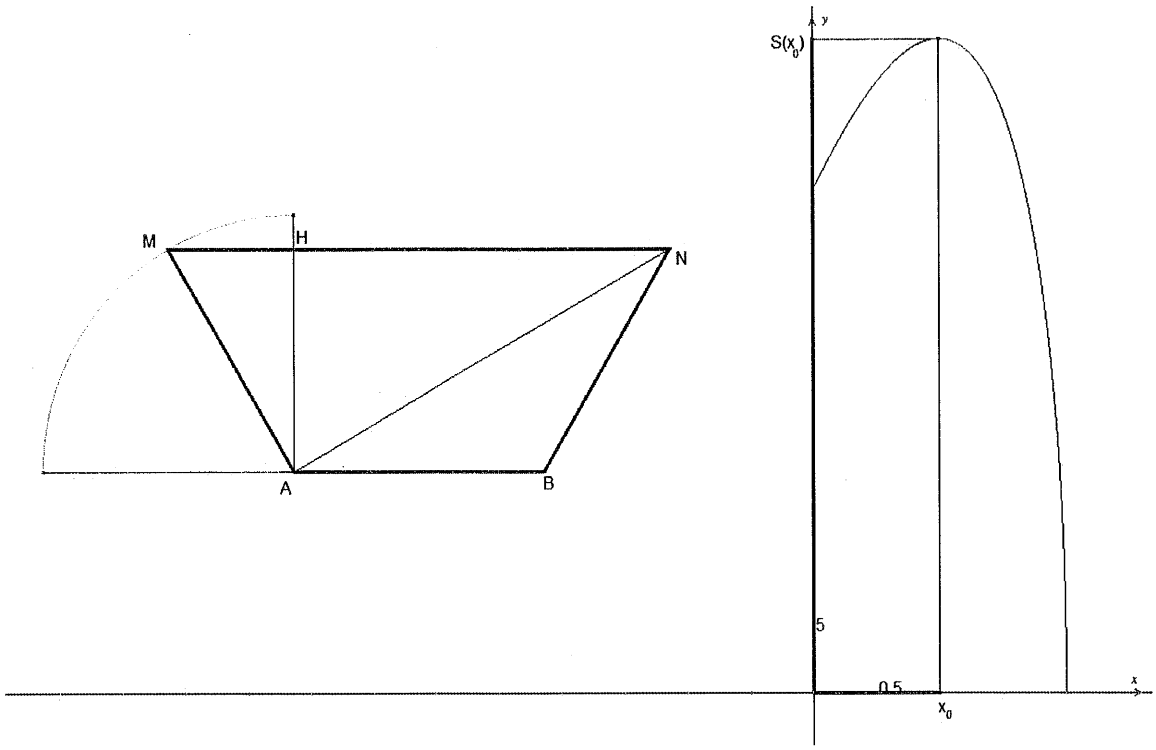


figure 3

2. Justifications

2.1 Maximum de S.

Dans le trapèze ABNM on a :

AB = 2, MN = 2 + 2x et AH = $\sqrt{4-x^2}$.

La surface du trapèze a donc pour expression :

$S(x) = (2+x)\sqrt{4-x^2}$

En dérivant on obtient :

$$S'(x) = \sqrt{4-x^2} + (2+x)\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} = 2\times\frac{-x^2-x+2}{\sqrt{4-x^2}}$$

Le signe de S'(x) est celui de $-x^2-x+2$

L'aire est donc croissante entre 0 et 1 et décroissante entre 1 et 2.

Le volume de la benne est donc maximal si x = 1.

2.2 Angle droit

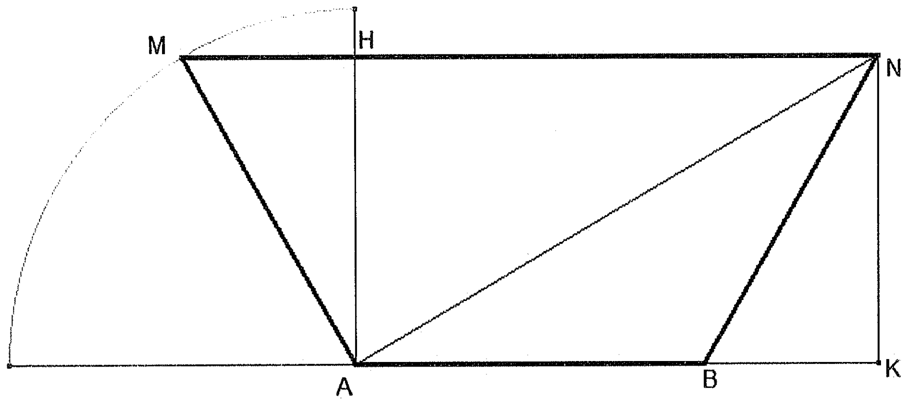


figure 4

On est dans le cas $x = x_0 = 1$.

On a donc AM = 2 et MN = 4 . On en déduit AH = NK = $\sqrt{3}$

De plus AK = AB + BK = 3.

Dans le triangle rectangle ANK on a alors AN = $2\sqrt{3}$

On a donc $AM^2 + AN^2 = MN^2$, le triangle AMN est rectangle en A.

On peut obtenir une « confirmation » par le logiciel du résultat démontré, ce qui est certes mathématiquement parfaitement inutile, mais qui peut éventuellement convaincre certains élèves de l'efficacité de la démonstration.

Pour cela on construit la figure en définissant M comme l'intersection de la médiatrice de [AB'] et du quart de cercle, car $x_0 = 1 = \dfrac{AB'}{2}$.

On vérifie alors que les segments [AM] et [AN] sont perpendiculaires.

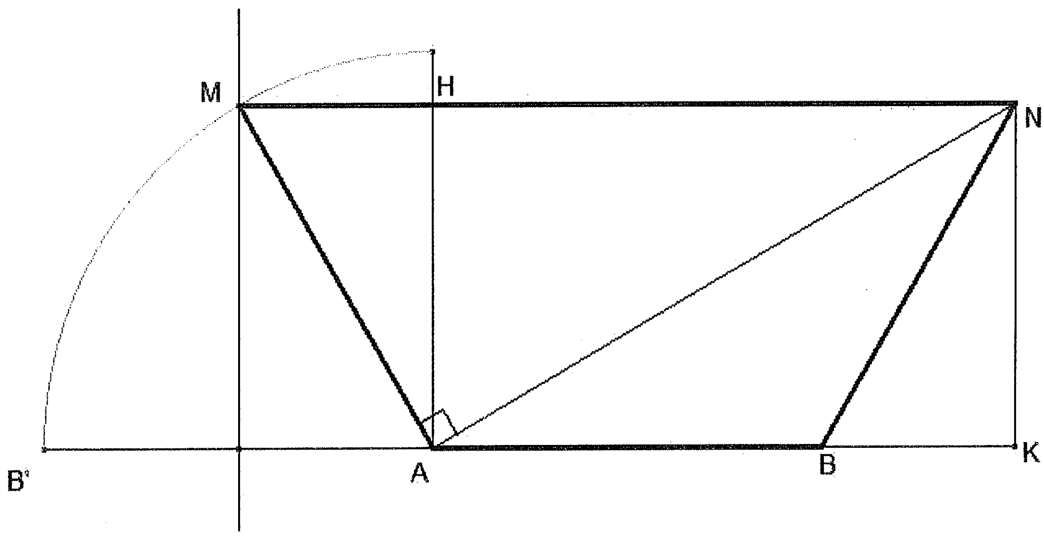


figure 5

ANNEXE : CONSTRUCTIONS AVEC CABRI

A. CONSTRUCTION DE LA FIGURE (TRAPÈZE)

1. Tracé d'un segment [AB] tel que AB = 2cm.

On a le choix entre 2 méthode (la seconde est plus précise).

1ère méthode

- Tracer un segment (qui ensuite va s'appeler [AB]) à l'aide de l'outil **Segment**, en cliquant successivement en deux endroits quelconques de l'écran.

- Nommer A et B une fois l'outil **Nommer** activé, on clique sur le point considéré, puis on tape A au clavier. De même pour B.

- Mesurer AB pour ajuster AB à 2cm.
  On active l'outil **Distance ou longueur** puis on clique en A puis en B.
  A l'aide du **Pointer** on clique en A, on laisse appuyé le bouton de la souris, on ajuste la longueur AB en déplaçant B en faisant bouger la souris.

2ème méthode

- Détermination du point A.
  Activer l'outil **Point** et cliquer où on désire placer le point sur l'écran, puis taper A au clavier, la lettre A se place à l'écran à côté du point tracé.

- Indication de la longueur souhaitée (pour le segment).
  Activer l'outil **Nombre** puis cliquer dans le coin en haut à droite de l'écran. Un rectangle apparaît à l'écran ; on tape 2 (longueur souhaitée pour AB) : le nombre 2 apparaît à l'écran dans le cadre rectangulaire.

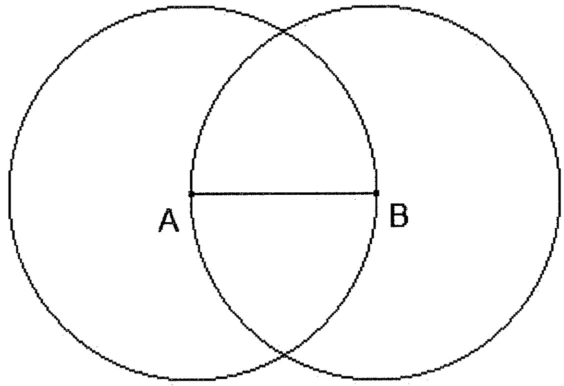
- Détermination du point B.
  Activer l'outil **Report de mesure** cliquer sur le nombre 2 puis sur le point A, un point que l'on appellera B apparaît au bout d'un segment pointillé mobile, on déplace ce

point B jusqu'à ce que [AB] soit « horizontal ». On clique alors sur ce segment encore en pointillé et B devient fixe. Nommer alors B, le point ainsi tracé.

- Tracer [AB]. Activer l'outil **Segment** et cliquer en A, puis en B.

2. Tracé des cercles C(A,AB) et C'(B,BA).

Activer l'outil **Cercle** cliquer sur A (centre du cercle), puis cliquer sur B (point du cercle). Recommencer en cliquant sur B, puis sur A.



Remarque : La trajectoire de M peut être limitée à un quart de cercle, choisir pour cela le quart supérieur gauche.

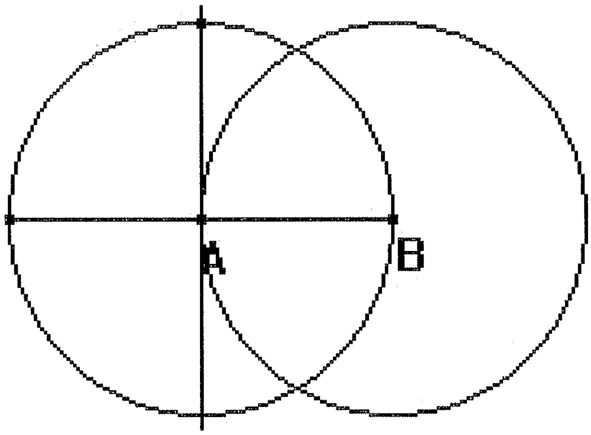
3. Tracé du quart de cercle, trajectoire de M.

- Détermination des extrémités de cet arc de cercle.
  Tracer la perpendiculaire à (AB) en A en activant l'outil **Droite perpendiculaire** , puis en cliquant sur la droite (AB), puis sur le point A.
  L'intersection de cette perpendiculaire et du cercle C est obtenue en activant l'outil **Point(s) d'intersection** . De même pour l'intersection de (AB) et de C'
- Détermination du quart de cercle :
  Activer l'outil **Arc** ; cliquer sur une extrémité du quart de cercle puis sur un point intermédiaire de cet arc puis sur l'autre extrémité.
  (Le quart de cercle ainsi dessiné apparaît alors à l'écran en rouge).

4. Tracé de (MN).

- Placer M :

Activer l'outil $\boxed{\textbf{Point sur un objet}}$, puis cliquer sur un point (que l'on nomme en tapant M sur le clavier) choisi sur l'arc rouge.



Remarque : Le logiciel demande : quel objet ? choisir arc.

- Tracer (MN) :

  Activer l'outil $\boxed{\textbf{Droite parallèle}}$, puis cliquer sur la droite (AB), puis sur M. Pour placer le point N, on active l'outil $\boxed{\textbf{Point(s) d'intersection}}$, puis on clique sur C', puis sur la droite (MN). Choisir le « bon » point N qui forme un trapèze isocèle avec MN ≠ AB. Nommer le point N en tapant « N » au clavier dès que le point apparaît à l'écran ou bien en activant l'outil $\boxed{\textbf{Nommer}}$, puis en cliquant sur le point, puis en tapant N au clavier.

5. Définition, tracé du trapèze (ABNM), aire du trapèze.

Remarque : pour que le logiciel reconnaisse ce trapèze, il faut le définir c'est-à-dire « le clôturer ».

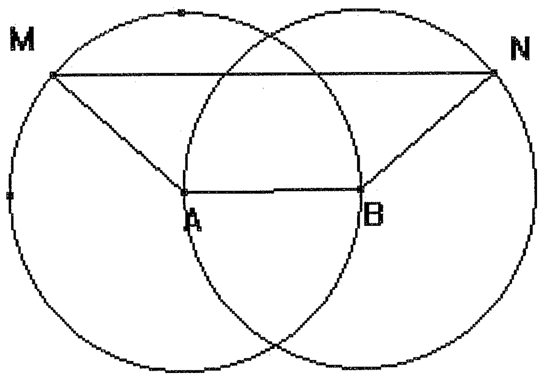
- Tracer le trapèze :

  Activer l'outil $\boxed{\textbf{Polygone}}$ pour « clôturer » le trapèze en cliquant sur M, puis sur N, puis sur B puis sur A puis sur M.

  Le logiciel reconnaîtra à partir de maintenant ce trapèze.

- Mesurer l'aire du trapèze :

  Activer l'outil **Aire** puis cliquer sur le trapèze ; quand on rapproche le curseur du trapèze et que s'affiche à l'écran « ce polygone », l'aire du trapèze se met sur l'écran à côté du polygone.



6. Amélioration l'aspect du dessin.

- Après avoir activé l'outil **Cacher/Montrer** cliquer sur la droite (MN), elle apparaît alors en pointillé à l'écran. On cache aussi les cercles C et C' et la droite « verticale ».

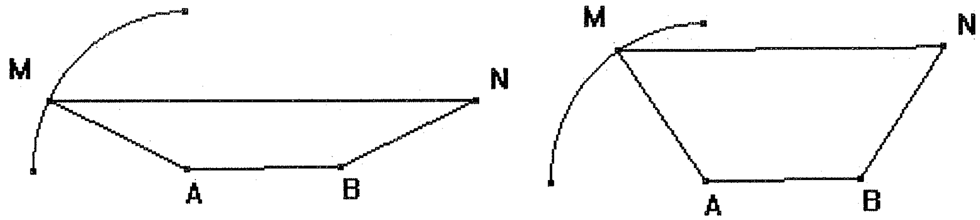
7. Animation.

On a le choix entre deux manières pour animer la figure.

- **Pas à pas** : Activer l'outil **Pointer** . Cliquer ensuite sur le point M « chef » (c'est-à-dire le point que l'on peut bouger avec la souris, et qui va commander le mouvement de la figure) : c'est le premier point variable qui a été placé sur la figure. Garder le bouton gauche de la souris appuyé et déplacer le point M en continu.

  Le trapèze se déforme alors à l'écran tout en gardant ses propriétés intrinsèques.
- **En continu** : Activer l'outil **Animation** . Cliquer ensuite sur M en gardant le bouton gauche de la souris appuyé. Déplacer un peu M sur l'arc de cercle.

  « Un ressort » apparaît alors à l'écran ; lâcher alors le bouton de la souris, le trapèze s'anime. Pour arrêter l'animation, cliquer n'importe où.



B. CONSTRUCTION DU GRAPHIQUE QUI REPRESENTE LES VARIATIONS DE L'AIRE DU TRAPÈZE

1. Mise en évidence de x.

Rappel du texte : H est le projeté orthogonal de A sur [MN].
On pose x = HM

Tracé de la hauteur du trapèze issue de A : Activer l'outil **Droite perpendiculaire**, puis cliquer sur la droite (AB), puis sur A.

Définition du pied H de cette hauteur : Activer l'outil **Point(s) d'intersection** , puis cliquer sur la hauteur, puis sur [MN]. Nommer H le point obtenu en tapant « H » au clavier.

Définition de x : Activer l'outil **Distance ou longueur** . Cliquer sur H, puis cliquer sur M. La mesure HM apparaît à côté du segment [HM], cette valeur mesurée est x.

2. Courbe.

- **Choix de l'origine du repère et tracé des axes du repère.**

  - Activer l'outil **Point** , cliquer en un point de l'écran et nommer ce point O en tapant la lettre O au clavier.
  - Tracer une droite D « horizontale » passant par O .
  - Tracer une droite D' « verticale » passant par O.

- **Détermination du point P de coordonnées (x ;y).**

  Y est le nombre qui mesure l'aire du trapèze.

- Placer P' sur la droite D horizontale, à droite de O, tel que OP' = HM = x.

a) D'abord, activer l'outil **Report de mesure** . Cliquer sur la valeur affichée de HM, puis sur O : On trace ainsi un cercle de centre O et de rayon HM (on désignera ce cercle par Γ).

b) Déterminer les points d'intersection de la droite D et du cercle Γ en activant l'outil **Point(s) d'intersection** et en cliquant sur D puis sur Γ.

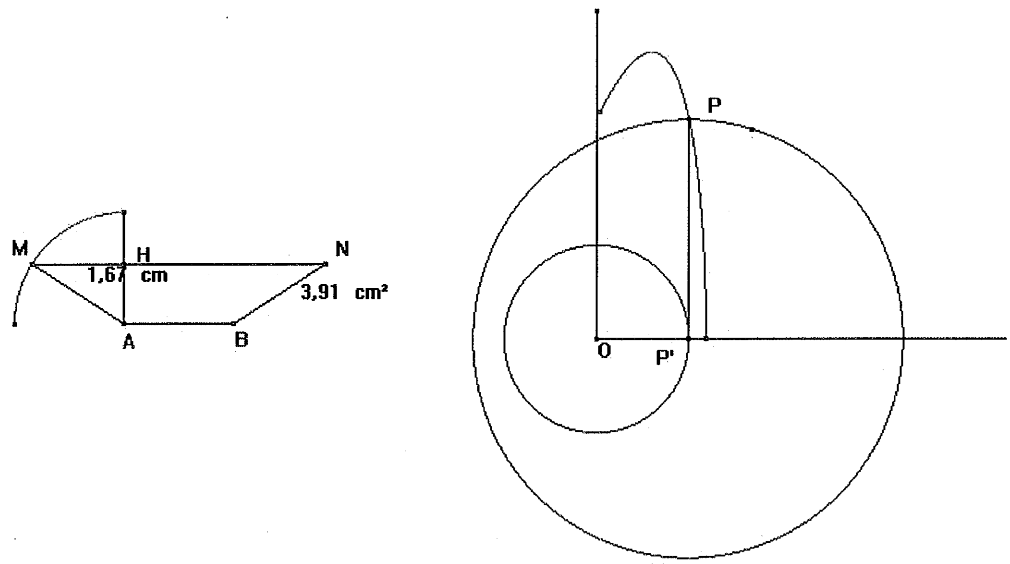
c) Cachez le cercle Γ ensuite cacher le point à gauche de O commun à D et à Γ. Nommer P' le point à droite de O commun à D et à Γ.

- Tracer la perpendiculaire S à D passant par P'. Sur D placer P tel que PP' soit égal au nombre qui mesure l'aire du trapèze, (placer P au dessus de P').

- **Tracé de la courbe :**

  Pour cela activer l'outil **Lieu** , puis cliquer sur P puis sur M, (chef).

  Remarque : Le lien de P se dessine à l'écran, c'est la courbe qui représente les variations du volume du trapèze en fonction de x.



- **Détermination du volume maximal du trapèze.**

  Pour cette détermination, il suffit d'animer la figure soit « pas à pas » soit « en continu » (voir A7). On arrête l'animation quand le point P est au sommet de la courbe on lit alors la valeur de x qui est la longueur M affichée à l'écran.

Chapitre 2

PUISSANCE D'UN POINT PAR RAPPORT A UN CERCLE

Niveau : seconde avec un prolongement pour la première S

Notions utilisées :

- Cas de similitude des triangles,
- angles inscrits,
- propriétés des fonctions et de leurs graphiques,
- sens de variation d'une fonction.
- cercle circonscrit à un triangle rectangle,
- homothétie (pour le prolongement de première S)

On trouvera en annexe en fin de chapitre des précisions sur l'utilisation de Cabri.

1. Présentation de l'activité

Soit un cercle (C) de centre I et de rayon R. Une droite pivote autour d'un point fixe P extérieur au cercle situé à une distance d de I. Quand cette droite coupe le cercle on appelle A et B les points d'intersection .

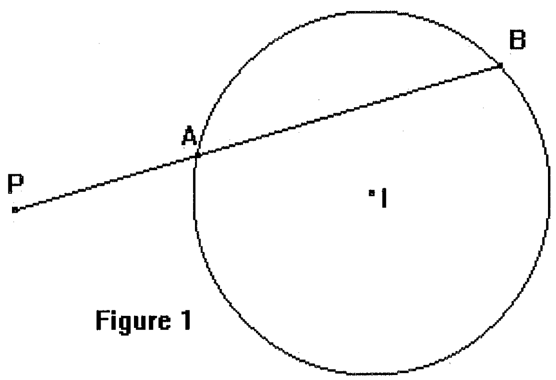


Figure 1

Le but de l'activité est d'amener les élèves à conjecturer que le produit PA × PB est constant, puis à le démontrer.

L'utilisation de Cabri permet de représenter les variations de PB en fonction de PA sans connaître d'expression analytique .

On pourra alors conjecturer cette expression et en déduire la constance du produit.

2. Conjectures

On construit la figure suivante avec PI = 5 et le rayon du cercle R = 3.

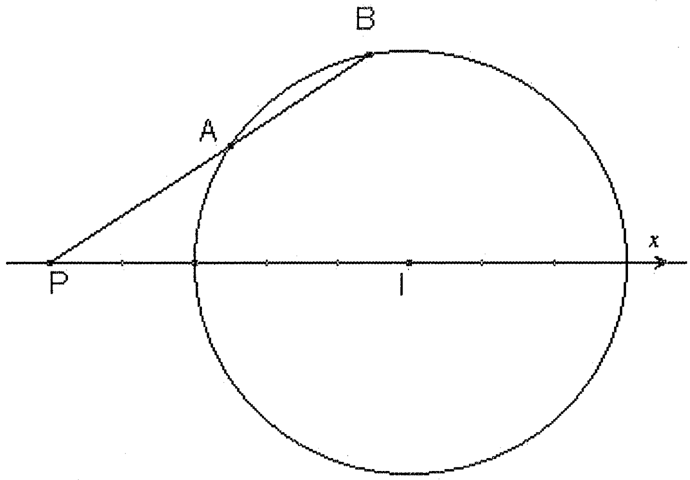


figure 2

Dans un repère orthonormal on reporte en abscisses PA et en ordonnées PB.

On place les points de coordonnées (PA,PB) pour les valeurs entières de PA.

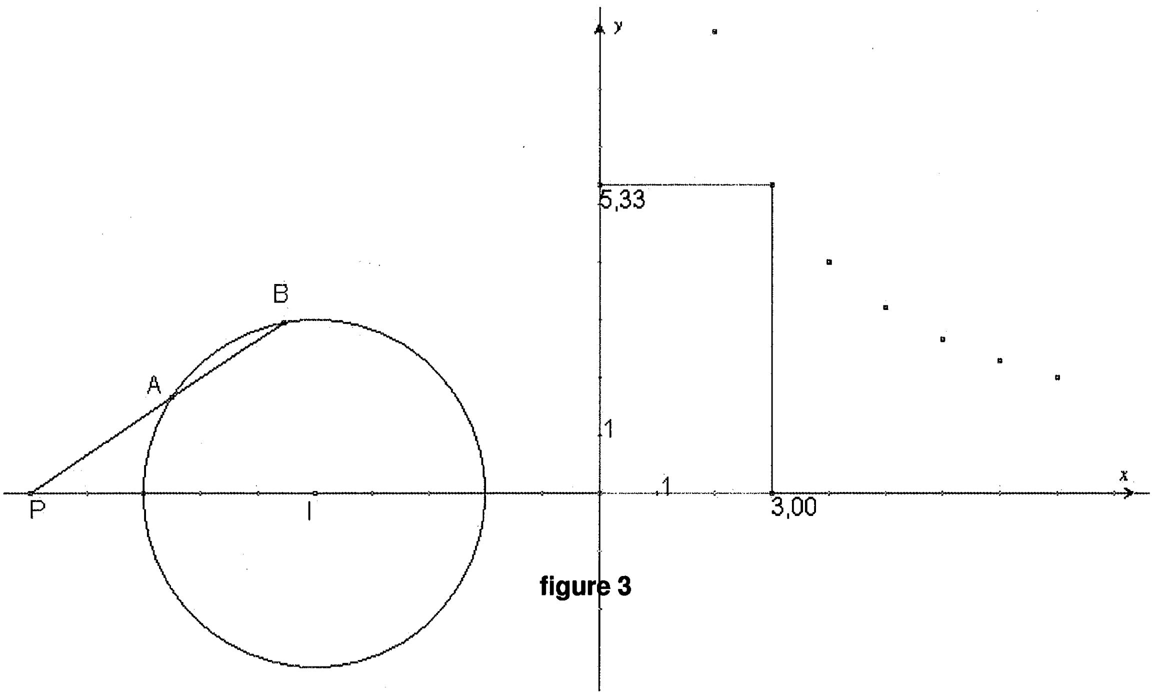


figure 3

On peut faire préciser :

- entre quelles valeurs varie PA,
- PA et PB ne varient pas dans le même sens.

On peut faire comparer les aires des différents rectangles de dimensions PA et PB pour aboutir à la conjecture :

$\boxed{\textbf{le produit PA} \times \textbf{PB est constant}}$.

On peut maintenant préciser la conjecture en faisant tracer la courbe représentant les variations de PB en fonction de PA.

La construction de la courbe ne nécessite pas la connaissance d'une expression analytique !

Il suffit de construire le point M en reportant les longueurs PA et PB sur les axes. On obtient alors la courbe comme trace du point M quand A décrit le cercle ou, encore mieux, comme lieu du point M, ce qui permet d'obtenir une équation de la dite courbe.

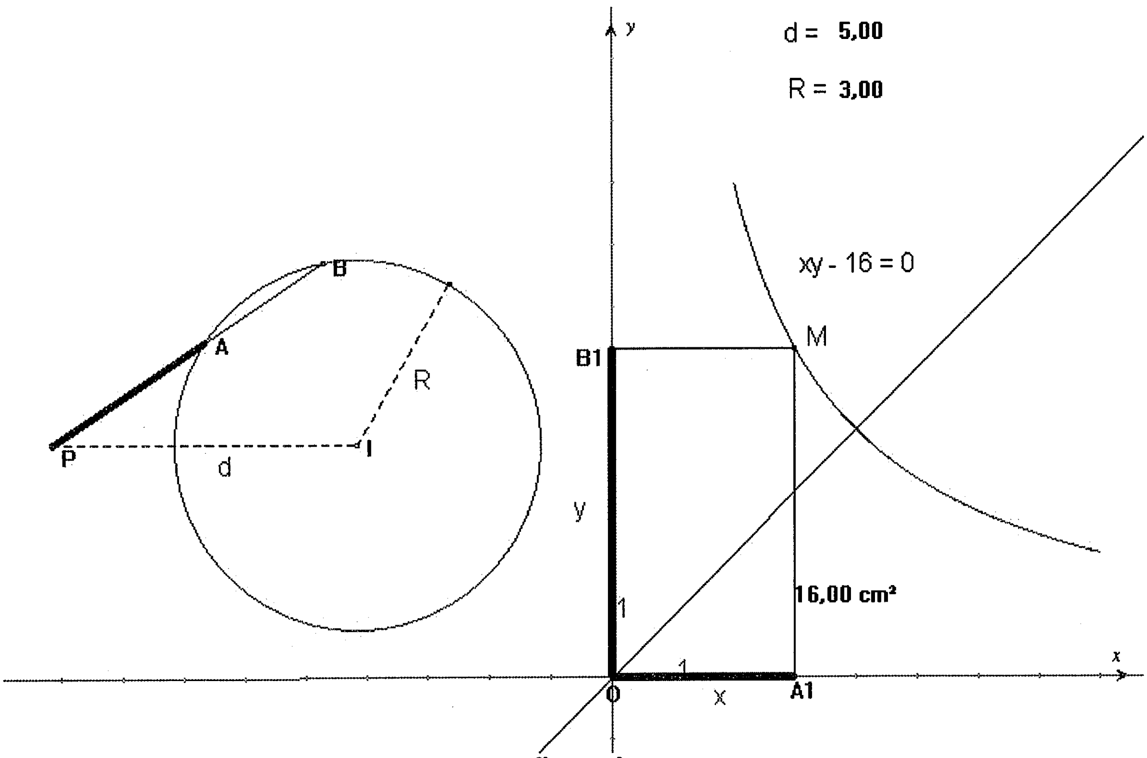


figure 4

On peut remarquer la symétrie de la courbe, la symétrie de son expression et en faire l'interprétation à partir de la figure de base.

En utilisant le cas où A et B sont confondus, on peut conjecturer la valeur de la constante en fonction du rayon R du cercle et de la distance d entre les points P et I.

Les constructions étant dynamiques, on peut faire varier les paramètres d et R et voir immédiatement l'effet de leurs variations sur la courbe obtenue et son équation.

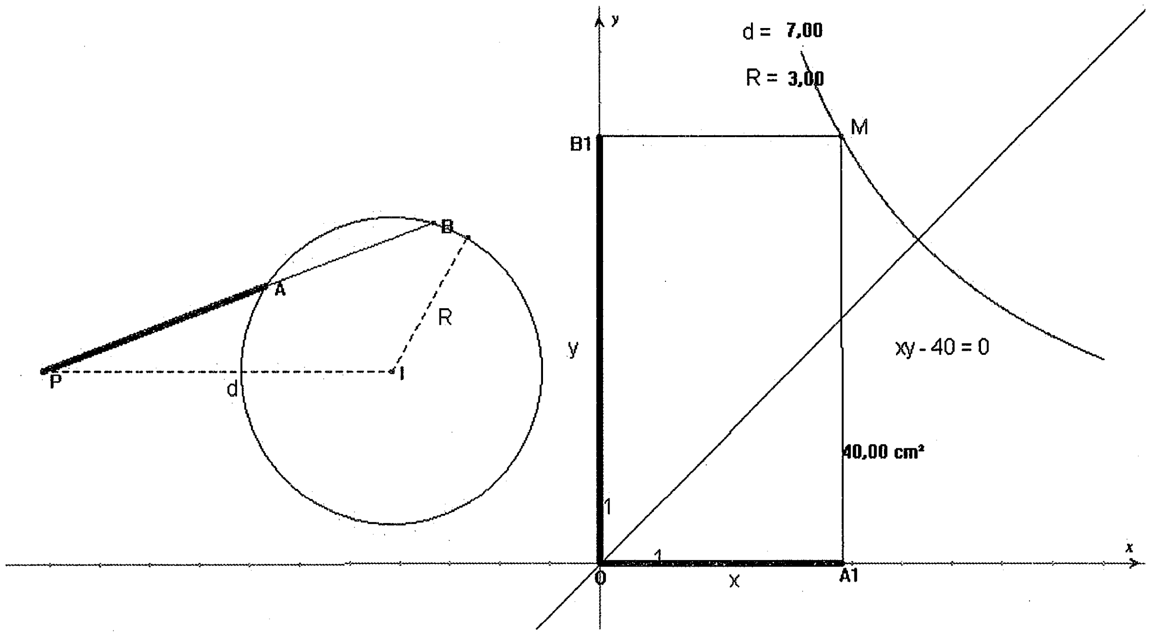


figure 5

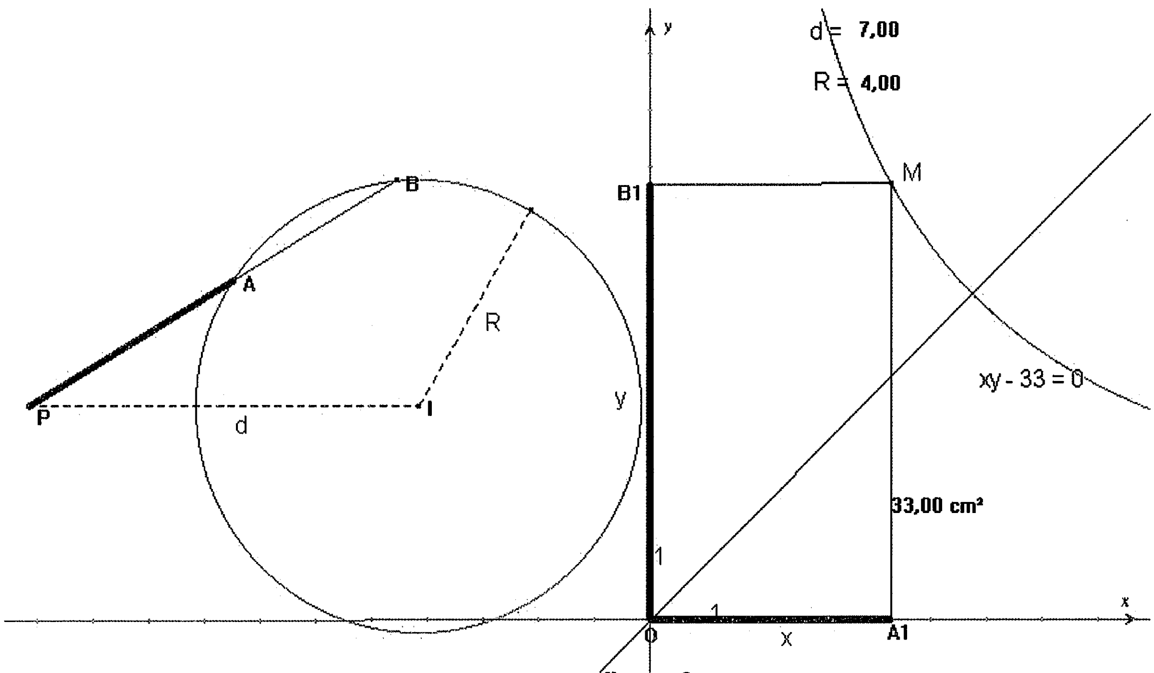


figure 6

3. Démonstrations

a) Démonstration (avec utilisation des triangles semblables).

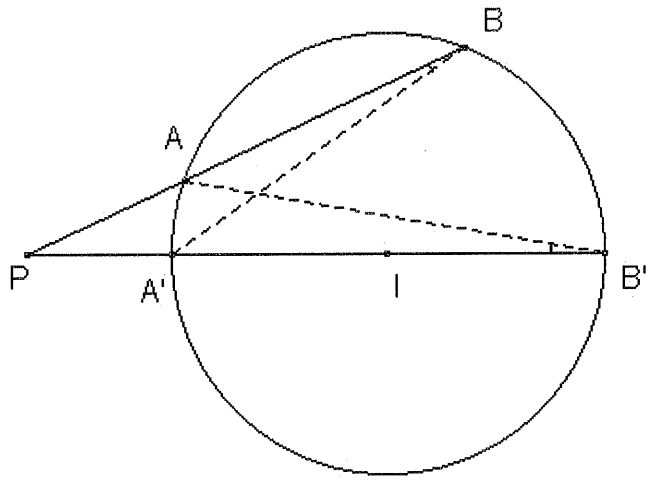


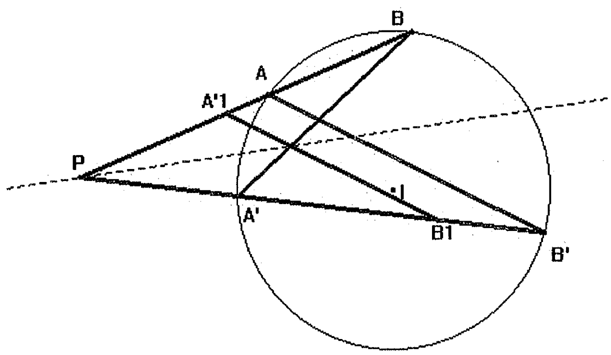
figure 7

Les triangles PAB' et PA'B ont 2 angles égaux : un angle est commun, les autres sont inscrits et interceptent le même arc. Les triangles sont donc semblables d'où

$$\frac{PA}{PA'} = \frac{PB'}{PB}.$$

On a donc PA × PB = PA' × PB' = k (constante)

b) Démonstration (sans triangles semblables).



Par la symétrie d'axe (AI) le triangle PBA' se transforme en PB_1A_1' , avec conservation des angles et des distances. L'application du théorème de Thalès et de la propriété de l'angle inscrit permettent de conclure.

Détermination de la constante k.

Cas particulier : La droite PA' passe par le centre I du cercle

$K = PA \times PB = PA' \times PB' = [PI - IA'] \times [PI + IB'] = [d - R] \times [d + R] = d^2 - R^2$

Autre méthode pour déterminer la constante :

La droite PA' est tangente au cercle (A' = B' = T)

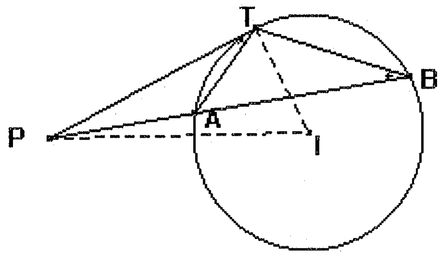


figure 8

Les triangles PTA et PBT sont semblables donc $\frac{PT}{PB} = \frac{PA}{PT}$.

On a donc $PT^2 = PA \times PB$.

Or, d'après le théorème de Pythagore dans PTI,

$PT^2 = d^2 - R^2 = PA \times PB = k$.

Conclusion :la variation de PB en fonction de PA est déterminée par $PB = \frac{(d^2 - R^2)}{PA}$.

c) Démonstration niveau 1ère S

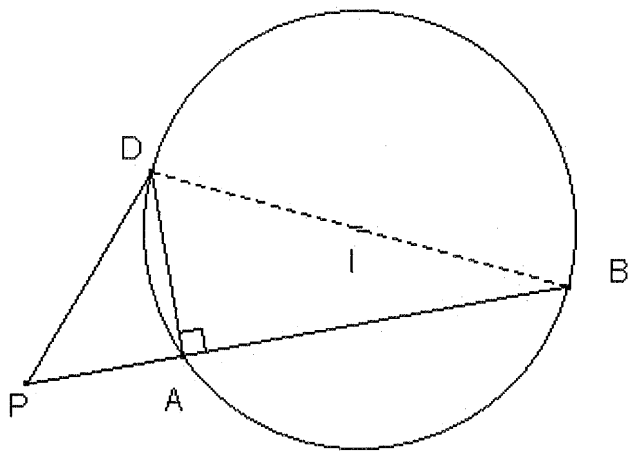


figure 9

D est le symétrique de B par rapport à I.

$\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PD} = PB \times PA$, car $\overrightarrow{PA}$ et $\overrightarrow{PB}$ sont de même sens.

$(\overrightarrow{PI} + \overrightarrow{IB}) \cdot (\overrightarrow{PI} + \overrightarrow{ID}) = PB \times PA$.

$(\overrightarrow{PI} + \overrightarrow{IB}) \cdot (\overrightarrow{PI} - \overrightarrow{IB}) = PB \times PA$.

$PI^2 - IB^2 = PB \times PA$.

4. Étude d'ensembles de points

a) Sur quel ensemble E1 se déplace J, milieu de [AB] ?

Conjecture

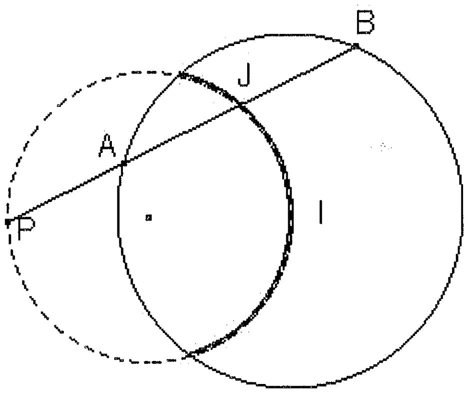


figure 10

Cabri a tracé en rouge le lieu du point J, quand A décrit le cercle de centre I.
Ce lieu semble être un arc du cercle de diamètre [PI].

Démonstration

La médiatrice de [AB] passe par le centre I équidistant de A et de B et par le milieu J de [AB]. Le triangle PIJ est donc rectangle en J , il en résulte que le point J se déplace sur le cercle de diamètre [PI]

b) Quel est le lieu du milieu M1 de [PA] et du milieu M2 de[PB] ?

(*Première S uniquement*)

Conjecture

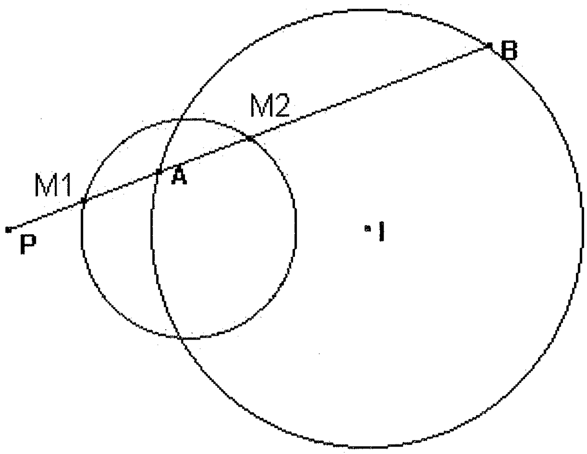


figure 11

Les points M1 et M2 semblent décrire un même cercle.

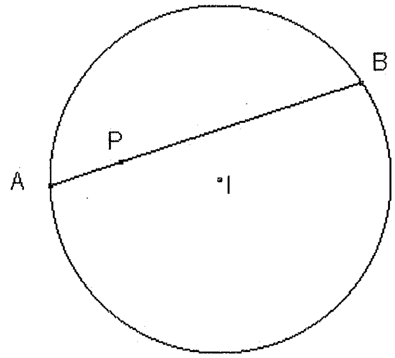
Démonstration

Le lieu E2 des milieux M1 et M2 est le cercle déduit du cercle C par l'homothétie de centre P et de rapport 0,5.

5. Généralisation

a) Point P à l'intérieur du cercle

Toute l'étude précédente peut être reprise avec le point P à l'intérieur du cercle de centre I.



On est amené à faire la même conjecture : le produit PA × PB est constant.

Sa démonstration utilise la même méthode (triangles semblables).

On peut montrer enfin que $PA \times PB = R^2 - d^2$.

b) Puissance

Pour les élèves disposant de la notion de produit scalaire on pourra préciser la notion de « puissance du point P par rapport au cercle (C), de centre I ».

Soit un cercle (C) de centre I et de rayon R. P est un point quelconque du plan. La distance IP est égale à d.

Une droite Δ passant par P coupe (C) en A et B (certains points peuvent être confondus).

On a dans tous les cas :

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = d^2 - R^2 \ ;$$

c'est la puissance du point P par rapport au cercle (C), de centre I .

ANNEXE

Construction et animation de la figure avec Cabri

1- **Mise en évidence de la notion de puissance, visualisation du produit** $PA \cdot PB$

Attribution d'une valeur à d et à R.

Activer l'outil $\boxed{\textbf{Nombre}}$, puis cliquer en un point de l'écran, par exemple en haut à droite.
Taper 5,00,.
Cliquer à côté du 5 apparu à l'écran et taper 4,00.

Activer l'outil $\boxed{\textbf{Couleur}}$. La palette couleur apparaît. Cliquer sur le vert de la palette, puis sur 5,00. Cliquer sur le bleu puis sur 4,00.

Positionnement du point P et du cercle C(I,R).

Activer l'outil $\boxed{\textbf{Point}}$. Cliquer en un point, par exemple dans le milieu de la moitié gauche de l'écran, puis taper I.

Activer l'outil $\boxed{\textbf{Compas}}$. Cliquer sur le 5,00 puis sur le point I. Un cercle de centre I et de rayon 5cm apparaît alors. Sur ce cercle placer un point avec l'outil $\boxed{\textbf{Point}}$ et taper P. Avec l'outil $\boxed{\textbf{Cacher/Montrer}}$ on fait disparaître le cercle.
Activer l'outil $\boxed{\textbf{Compas}}$ Cliquer sur 4,00 puis sur I. Le cercle de centre I et de rayon 4cm est ainsi créé.

Tracé d'une droite qui passe par P et qui coupe le cercle de centre I et de rayon 4cm.

Activer l'outil $\boxed{\textbf{Point sur un objet}}$. Cliquer sur un point du cercle **C**(I ;4) puis taper A.

Activer l'outil $\boxed{\textbf{Droite}}$. Cliquer sur P puis sur le point A. La droite (PA) est alors tracée à l'écran.

Activer l'outil $\boxed{\textbf{Point}}$ puis placer le pointeur sur le 2ème point d'intersection de la droite (PA) et du cercle **C**(I ;4). « Point à cette intersection » apparaît à l'écran. Cliquer puis taper B.

Mise en évidence de l'invariance du produit PA × PB

a) Activer l'outil $\boxed{\textbf{Distance}}$. Cliquer sur le point P puis sur le point A (la distance PA s'affiche alors).
Cliquer sur le point P puis sur le point B (la distance PB s'affiche alors).
Colorier A en bleu ainsi que la distance PA.
Colorier B en vert ainsi que la distance PB.

b) Activer l'outil $\boxed{\textbf{Montrer les axes}}$. Cliquer sur l'origine des axes en laissant le bouton de la souris appuyé et déplacer les axes.

Activer l'outil $\boxed{\textbf{Nommer}}$. Cliquer sur l'origine des axes et taper O.

Activer l'outil $\boxed{\textbf{Report de mesure}}$. Cliquer sur la mesure de PA puis sur O puis placer sur l'axe x'x.
Par le point ainsi créé tracer la perpendiculaire à l'axe (x'x).
De même sur l'axe (y'y) on reporte la distance PB à partir de O ; on place ainsi sur la demi-droite (Oy) un point, par ce point on trace la perpendiculaire à (Oy).

Activer l'outil $\boxed{\textbf{Point}}$. Cliquer sur l'intersection des 2 perpendiculaires tracées précédemment. Taper M.

Activer l'outil $\boxed{\textbf{Polygone}}$. Cliquer sur chaque sommet du rectangle bordé par les axes et les perpendiculaires précédentes. (Revenir au point de départ et recliquer à la fin sur ce point). Colorier en jaune l'intérieur de ce rectangle en activant l'outil $\boxed{\textbf{Remplir}}$.

Activer l'outil $\boxed{\textbf{Aire}}$. Cliquer en rapprochant le curseur de ce rectangle quand l'information « ce rectangle » apparaît à l'écran.

c) Cliquer sur le point A, maintenir le bouton de la souris appuyé et déplacer le point A.
On constate que le rectangle jaune se déforme mais que son aire reste constante.
On conjecture que le produit PA × PB reste constant quand la sécante pivote autour de P.

d) Autre méthode :
Activer l'outil $\boxed{\textbf{Animation}}$. Cliquer sur le point A, maintenir le bouton de la souris appuyé et déplacer le point A légèrement.
Un petit dessin de ressort apparaît à côté de A. Lâcher alors le bouton de la souris, la sécante pivote autour de P et l'aire PA × PB du rectangle jaune reste constante.

2 - Tracé de la courbe qui représente les variations de PB en fonction de PA.

Activer l'outil $\boxed{\textbf{Lieu}}$. Cliquer sur le sommet du rectangle jaune formé par l'intersection des 2 perpendiculaires aux axes. (Ce point se met alors à clignoter).
Cliquer ensuite sur le point A (qui est le chef de l'animation). La courbe apparaît à l'écran, elle semble être une portion d'hyperbole.

Activer l'outil $\boxed{\textbf{Equation}}$. Approcher le curseur du lieu jusqu'à ce que la mention « équation de ce lieu » apparaisse à l'écran, cliquer alors et enfin cliquer sur un des axes, l'équation $xy - 9 = 0$ s'affiche.

3 - Confirmation des conjectures quand le paramètre R (rayon du cercle) ou le paramètre d (distance qui sépare le point fixe du centre de cercle) varie.

Modification du rayon du cercle R.

Cliquer deux fois sur la valeur 4,00 puis cliquer sur le 2ème zéro et déplacer le curseur sur ce zéro pour le griser en gardant alors le bouton de la souris appuyé.

Ensuite faire croitre le 2ème chiffre après la virgule à partir de 0 en cliquant sur la flèche en forme de triangle à côté de 4,00.

Quand on fixe R, puis que l'on fait pivoter la sécante en déplaçant A sur le cercle, on conjecture que le produit xy reste toujours égal à une nouvelle constante k que l'on retrouve dans l'équation de la courbe bleue affichée à l'écran $xy-k = 0$.

Modification de la valeur de d.

On procède d'une manière analogue à celle utilisée pour modifier R.

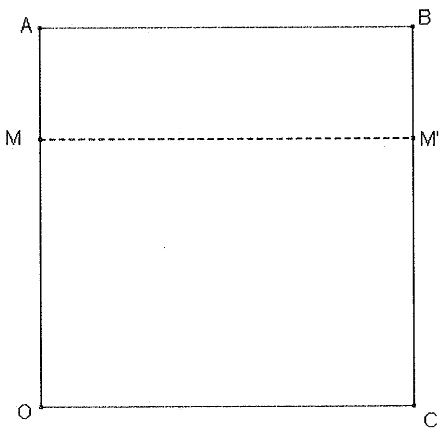
<u>Remarque</u> : On peut choisir d pour que I soit intérieur au cercle C(I,R).

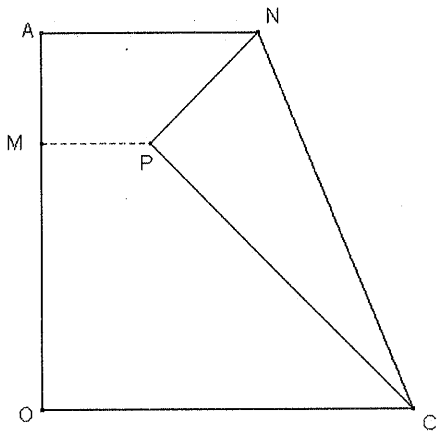
Chapitre 3

Carré plié

Présentation de l'activité

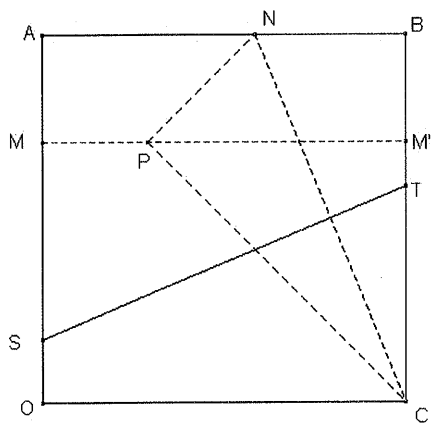
Tout part d'un pliage. Soit une feuille carrée OABC et M un point quelconque sur [OA]. Un premier pli nous donne [MM'] parallèle à [OC].





Un deuxième pli [CN] amène le point B sur [MM'] en P, le point C restant fixe.

Un dernier pliage permet d'obtenir [ST] en amenant C sur N.



L'activité consiste à obtenir dans un premier temps une figure dynamique représentant le pliage, avec le point M mobile sur le côté [OA].

On se propose ensuite d'exprimer CT en fonction de OM.

L'observation de la figure dynamique amènera à faire des conjectures qui seront démontrées.

Niveau et notions utiles

L'activité s'adresse aux premières et terminales S et STI.

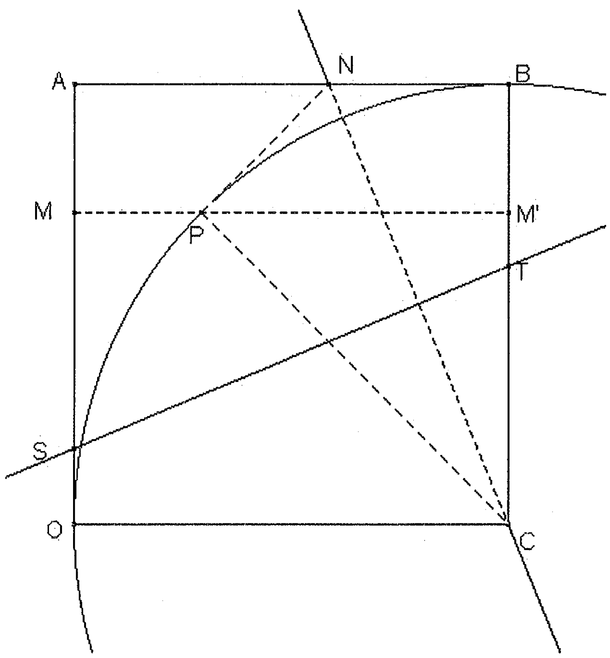
On utilise des constructions géométriques élémentaires, la notion de représentation graphique, des notions de trigonométrie (triangle rectangle, formules de duplication), le théorème de l'angle inscrit, la propriété de Thalès, l'équation d'une parabole, la notion de tangente à une courbe représentative.

1. Représenter le pliage

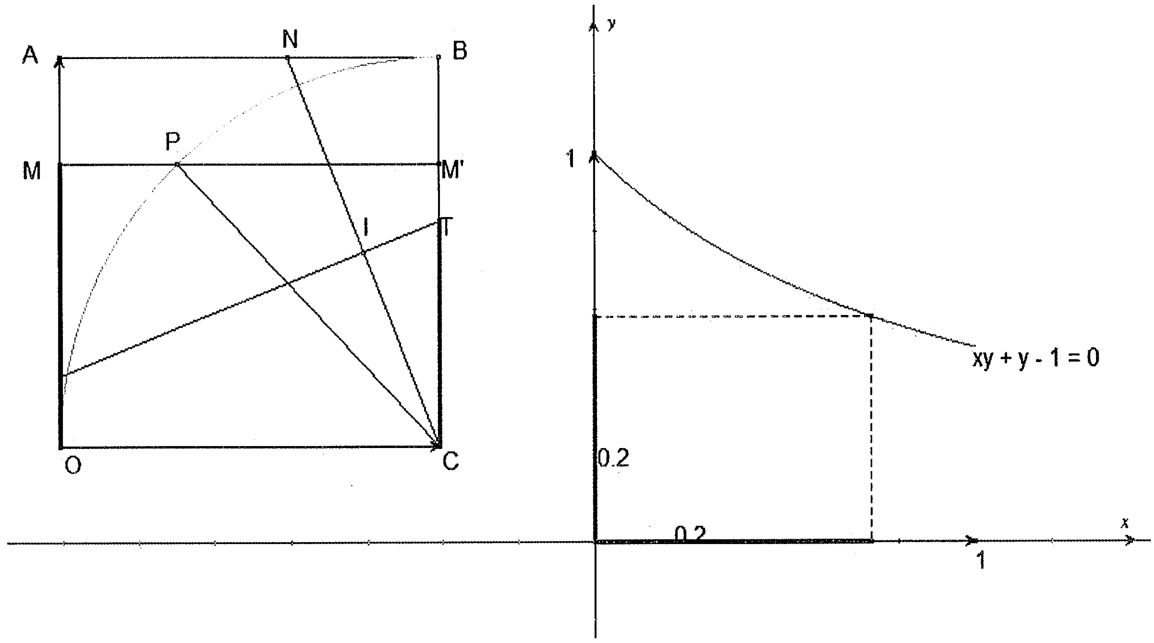
On construit le carré et le segment [MM'].

En traçant le cercle de centre C passant par B on obtient P par intersection du cercle avec [MM'] et la droite (CN) comme médiatrice de [PB] ou comme bissectrice de $\widehat{PCB}$.

(ST) est la médiatrice de [CN].



La construction est bien évidemment dynamique et permet de représenter les variations de CT en fonction de OM par une construction classique.



2. Étude graphique

2.1 Construction et conjecture

Ayant réalisé la construction précédente on pose OM = x et CT = y.

On construit dans un repère orthonormal le point de coordonnées (x,y), avec OA pour unité. Le lieu de ce point quand M décrit [OA] est la représentation graphique des variations de y en fonction de x.

Le logiciel donne une équation de la courbe obtenue : $xy + y - 1 = 0$.

On peut donc exprimer y en fonction de x : $\boxed{y = \dfrac{1}{1+x}}$

2.2 Justification

On pose $c = \widehat{PCB}$.

Dans le triangle rectangle PM'C : $\cos c = \dfrac{CM'}{CP} = \dfrac{x}{1} = x$

Dans le triangle rectangle TIC : $\cos \dfrac{c}{2} = \dfrac{CI}{CT} = \dfrac{CN}{2y}$ d'où $y = \dfrac{CN}{2\cos\frac{c}{2}}$

Dans le triangle rectangle CNB : $\cos\frac{c}{2} = \frac{BC}{CN} = \frac{1}{CN}$ d'où $CN = \frac{1}{\cos\frac{c}{2}}$

En remplaçant CN par sa valeur dans l'expression de y : $y = \frac{1}{2\cos^2\frac{c}{2}}$

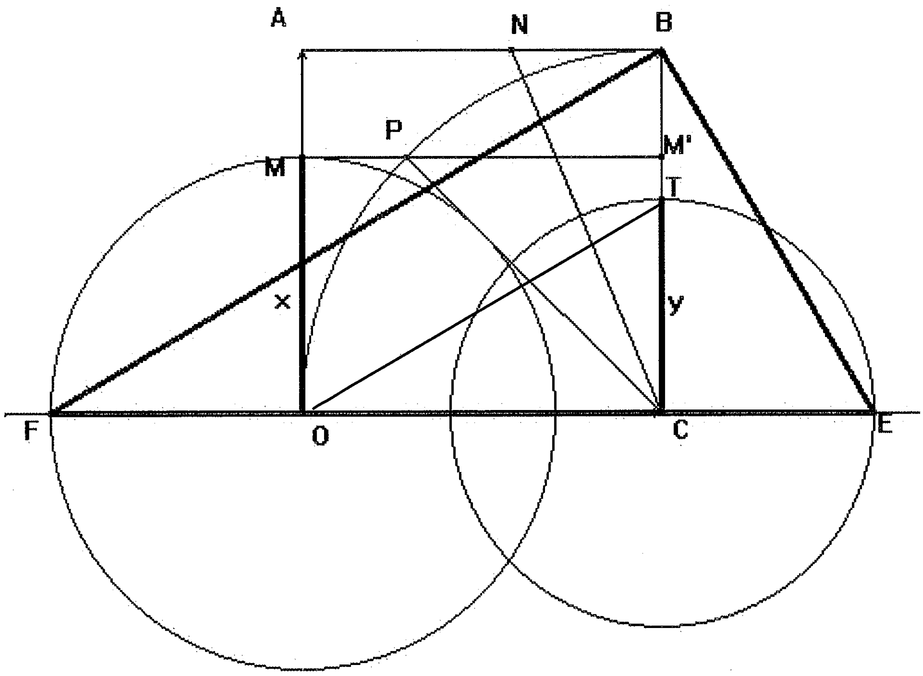
En linéarisant $\cos^2\frac{c}{2}$ on obtient $y = \frac{1}{1+\cos c}$,

d'où $y = \frac{1}{1+x}$.

3. Deuxième problème

3.1 Construction et conjecture

Le cercle C_x de centre O et passant par M coupe la droite (OC) en 2 points. Soit F le point d'intersection extérieur au segment [OC]. Le cercle C_y de centre C et passant par T coupe la droite (OC) en 2 points. Soit E le point d'intersection extérieur au segment [OC].



On peut conjecturer que le triangle BEF est rectangle et que (BF) est parallèle à (OT).

3.2 Justification

Le triangle BEF a pour hauteur (BC).

Dans ce triangle BC = 1, CE = y et CF = 1 + x.

On a donc $CE \times CF = BC^2$, car y(1 +x) =1.

Le point C appartient au segment [EF].

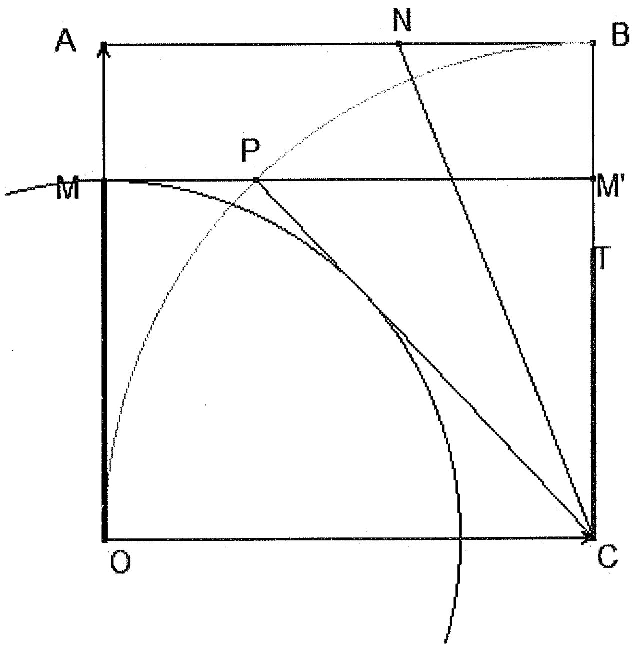
On a donc le triangle BEF rectangle en B.

(BF) est parallèle à (OT) d'après la réciproque du théorème de Thalès.

4. Troisième problème

4.1 Une conjecture

En considérant la figure dynamique (déplacement de M sur [OA]) il semble que la droite (CP) soit tangente au cercle C_x, de centre O et de rayon x.



4.2 Justification

Soit T' le projeté orthogonal de O sur (PC).

Le triangle OT'C est rectangle par construction O et C sont fixes donc T' appartient au cercle de diamètre [OC]

L'angle $\widehat{PCO}$ est angle au centre du cercle C_1, de centre C et de rayon1.

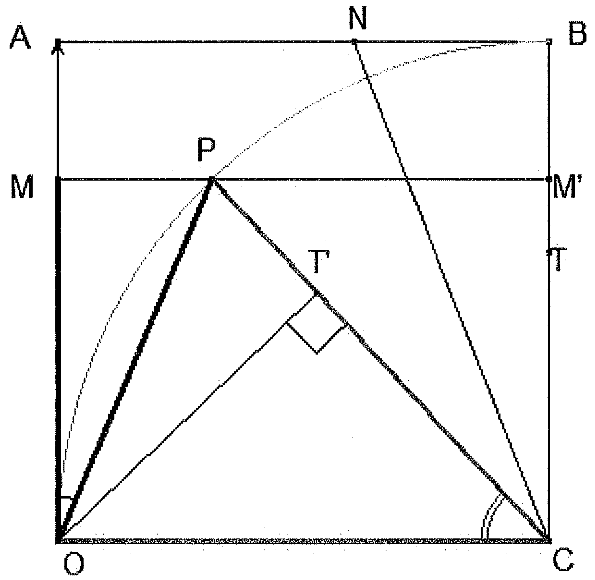
L'angle $\widehat{MOP}$ est angle inscrit de C_1 qui intercepte le même arc $\overset{\frown}{OP}$ donc mes ($\widehat{PCO}$) = 2 mes($\widehat{MOP}$). De plus $\widehat{MOT'} = \widehat{PCO}$ car ce sont deux angles à côtés perpendiculaires.

(OP) est donc bissectrice de l'angle $\widehat{T'OM}$

Donc OM = OT'

Donc T' est sur le cercle C_x

De plus l'angle $\widehat{OT'C}$ est droit, donc la droite (PC) est tangente à C_x .



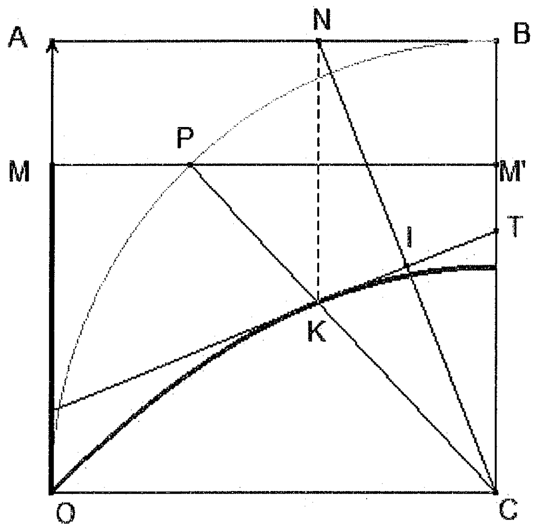
5. Un lieu géométrique (partie directe)

5.1 Observation de la figure

Soit K le symétrique de T par rapport à (CN).

On peut faire tracer par le logiciel le lieu géométrique de K quand M parcourt [OA].

Il semble que la courbe obtenue soit un arc de parabole.



5.2 Démonstration

Montrons tout d'abord que K est équidistant de C et de (AB).

Le quadrilatère KNTC a ses diagonales qui ont le même milieu et qui sont perpendiculaires, c'est donc un losange. On a donc KN = CK et (KN) est perpendiculaire à (AB).

Cette propriété suffit à prouver que la courbe décrite par K est un arc de parabole, mais ... la définition de la parabole par foyer et directrice ne figure plus dans aucun programme de lycée !

On considère donc les coordonnées (X,Y) de K dans le repère $(O;\vec{OC},\vec{OA})$.

N a pour coordonnées (X,1) et C a pour coordonnées (1,0).

En remarquant que $KN^2 = KC^2$ on obtient $\boxed{Y = -\frac{X^2}{2} + X}$, donc K se déplace sur une parabole.

On peut de plus montrer que la tangente en K à cette parabole est la médiatrice de [CN].

Le vecteur $\vec{V}$ de coordonnées (1,-X + 1) est un vecteur directeur de la tangente.

Les coordonnées du vecteur $\vec{CN}$ sont (X – 1,1).

Donc $\vec{V}\cdot\vec{CN} = 0$. La tangente en K et (CN) sont perpendiculaires. Or K est un point de la médiatrice de [CN], donc la tangente en K à la parabole est la médiatrice de [CN].

Chapitre 4

Point mobile sur une diagonale d'un carré

Cette activité propose tout d'abord à partir d'une figure simple des études de variations de longueurs et d'aire. Dans un deuxième temps on est amené à faire des conjectures puis des démonstrations sur la partie directe de l'étude d'un lieu et sur l'existence d'un point fixe.
Cette activité s'adresse à des élèves en fin de seconde ou en classe de première.

Notions utilisées

- La représentation graphique de la fonction f dans un repère donné est l'ensemble des points de coordonnées (x,f(x)).
- Équation d'une courbe
- Propriété de Thalès.
- Droite des milieux.
- Propriétés de la médiatrice.
- Configurations : cercle, triangle rectangle-isocèle.
- Angle inscrit dans un demi-cercle.
- Cas d'égalité des triangles.

1. La figure de base

OAB est un triangle rectangle isocèle en O.

M est un point mobile sur le segment [AB].

P et Q sont les projetés orthogonaux de M respectivement sur (OA) et (OB).

Le point I est le milieu de [PQ].

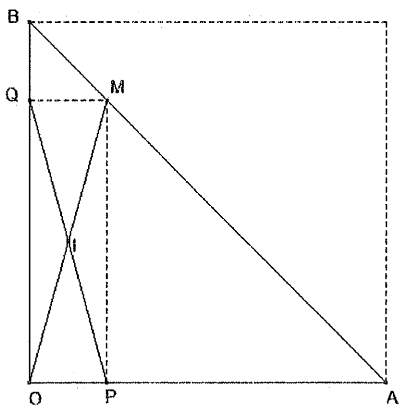


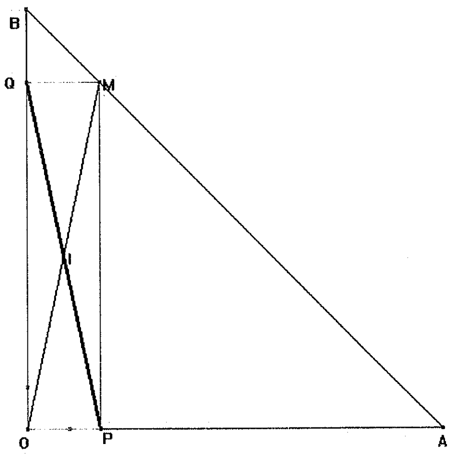
Figure 1

2. Études de variations

Quand M parcourt [AB]

- **comment varie le périmètre du rectangle OPMQ ?**
- **comment varie l'aire du rectangle OPMQ ?**
- **comment varie la longueur PQ ?**

On peut obtenir un tracé des courbes « sans formule », en reportant par exemple sur les axes des mesures de longueurs ou des mesures d'aires.



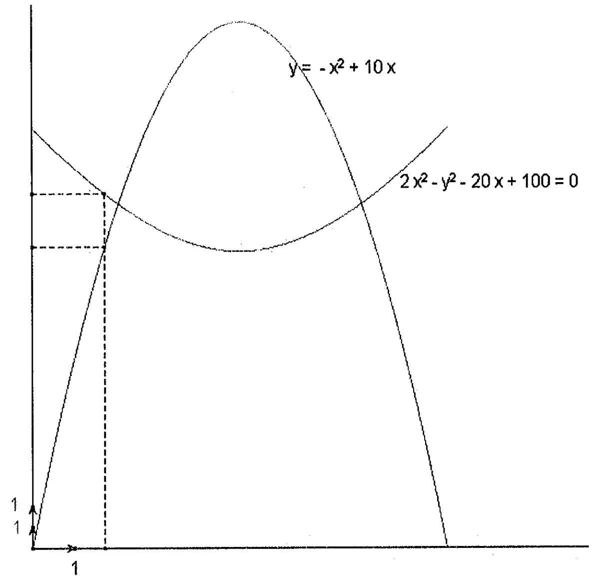


Figure 2

Sur la figure 2 sont représentées les variations de l'aire de OPMQ et de la longueur PQ en fonction de OP.

La figure a été construite avec OA = 10 cm.

Les longueurs sont mesurées en cm et les aires en cm^2.

Pour les représentations graphiques les unités graphiques sont de 1 cm en abscisses, 1 cm en ordonnées pour les variations de PQ et 0,5 cm en ordonnées pour les variations de l'aire de OPMQ.

Cabri Plus permet de faire afficher des équations des courbes tracées.

Remarque :

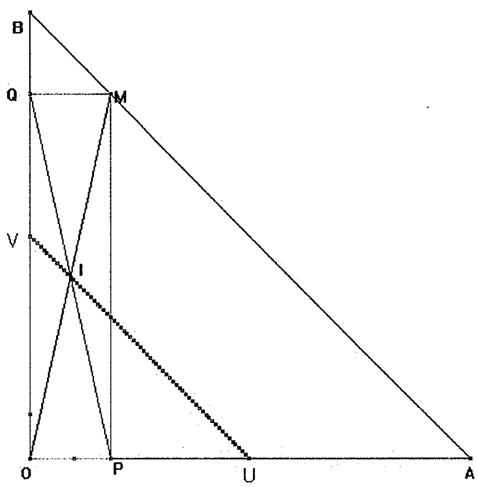
Si on change la longueur OA, les équations des courbes données par le logiciels se modifient automatiquement, ce qui permet de conjecturer les équations cartésiennes paramétrées.

3. Recherches d'ensembles de points

3.1 Un lieu simple

Quel est le lieu du point I, quand M parcourt [AB] ?

Cabri permet de conjecturer que I parcourt le segment [UV] (U milieu de [OA] et V milieu de [OB]), par utilisation de l'outil **trace** ou de l'outil **lieu**.



3.2 Un problème plus difficile

Soit M' le symétrique de M par rapport à (PQ). Cabri permet de conjecturer que M' est un point du cercle de diamètre [AB].

La justification demande plusieurs étapes.

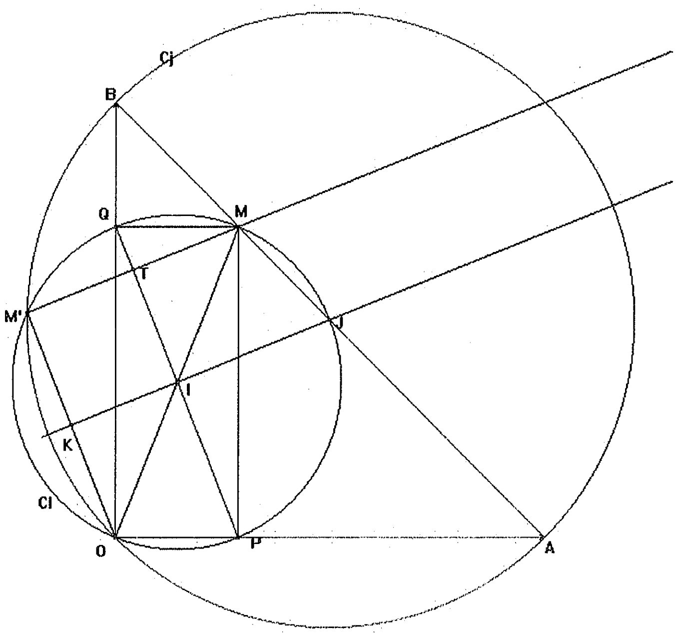


Figure 3

3.2.1

On remarque tout d'abord que le point M' appartient au cercle CI, circonscrit au rectangle OPMQ.

En effet [PQ] est un diamètre de CI et M appartient à CI, donc son symétrique M' est aussi sur CI.

3.2.2

Soit J le milieu de [AB].

On montre que l'angle $\widehat{QIJ}$ est droit. Cela résulte de l'égalité des triangles OPJ et BQJ (QB = OP, OJ = BJ et $\widehat{QBJ} = \widehat{JOA} = 45°$).

On a alors PJ = JQ et I milieu de [PQ], donc (IJ) est la médiatrice de [PQ].

3.2.3

Montrons que (IJ) est aussi la médiatrice de [OM'].

Soit K l'intersection de (OM') et (IJ) et T l'intersection de [MM'] et [QP].

L'angle $\widehat{OM'M}$ est droit car [OM] est un diamètre de CI.

L'angle $\widehat{M'TP}$ est droit car M' est le symétrique de M par rapport à (PQ).

L'angle $\widehat{TIK}$ est droit car on a montré que (IJ) et (PQ) sont perpendiculaires.

Le quadrilatère M'TIK est donc un rectangle et (IJ) est perpendiculaire à (OM').

I est le milieu de [OM] et (IK) est parallèle à (MM'), donc K est le milieu de [OM'].

(IJ) est donc la médiatrice de [OM'].

3.2.4

En conclusion, M' est le symétrique de O par rapport à (IJ).

Considérons le cercle CJ, circonscrit au triangle OAB ; son centre est J.

Le point O est commun à CI et CJ, donc son symétrique M' par rapport à la droite des centres (IJ) est aussi commun à CI et CJ.

4. Un complément

On remarque que le cercle CI passe par le point fixe J, milieu de [AB].

En effet l'angle $\widehat{OJM}$ est droit.

Soit T' le point d'intersection des tangentes à CI en J et en O. On peut conjecturer avec Cabri que T' appartient à une droite fixe.

La justification est simple : T' est sur la médiatrice de [OJ]. On peut montrer de plus que cette médiatrice est la droite (UV).

5. Un point fixe

Si on utilise l'outil **trace** avec la droite (MM') on peut conjecturer que cette droite passe par un point fixe O', diamétralement opposé à O sur le cercle CJ.

La justification est immédiate : l'angle $\widehat{OM'M}$ est droit, donc (MM') passe par O'.

Chapitre 5

Lentilles minces

Présentation de l'activité

Au départ un petit problème pratique que tout le monde a résolu ou tenté de résoudre (avant la généralisation des objectifs zoom) : où le photographe doit-il se placer pour que son sujet tienne tout entier sur sa photo ?

Procédons par étapes :

- tout d'abord mise en place d'un modèle physique,
- puis sa simulation avec un logiciel de géométrie dynamique,
- enfin, pour en savoir plus, l'étude d'un modèle mathématique.

Niveau

Cette démarche peut être proposée aux élèves de $1^{\text{ère}}$ S ; elle est adaptable à des secondes, en supprimant la référence à la dérivée ou à la limite.

Notions mises en œuvre

Constructions géométriques élémentaires

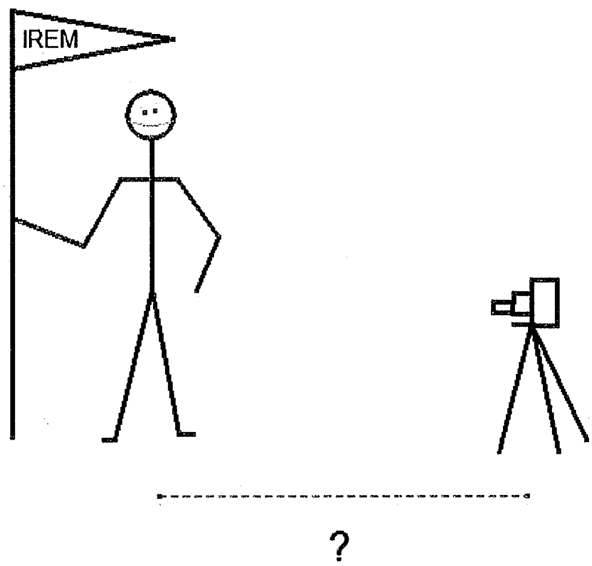
.Propriété de Thalès

Représentation graphique d'une fonction.

Notion d'asymptote.

I - Un problème (...c'était beau la photographie)

Quelle distance minimum doit séparer un personnage, tenant un drapeau de 2,4 m de haut, d'un appareil de photo 24×36, dont l'objectif a une focale fixe de 50 mm, pour que l'image « entre » sur la pellicule ?



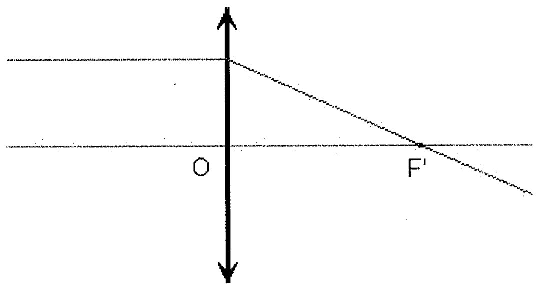
Tout photographe amateur sait bien évidemment résoudre pratiquement le problème en se déplaçant.
L'étude suivante n'est donc pas la recherche d'une solution, mais sa motivation est de l'ordre du « comment ça marche ? ».

II - Un modèle physique

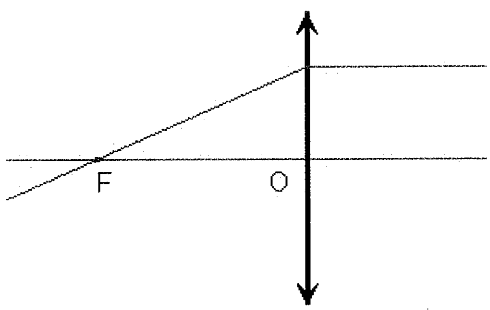
Il est obtenu en assimilant l'objectif de l'appareil photo à une **lentille mince convergente**.

On rappelle que pour une telle lentille :

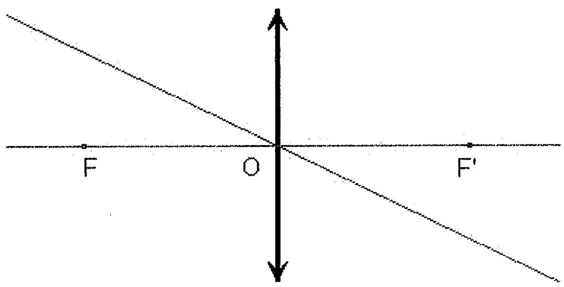
- tout rayon entrant, parallèle à l'axe optique, passe par le foyer image F' ;



- tout rayon entrant, passant par le foyer objet F, ressort parallèle à l'axe optique ;



- tout rayon passant par le centre O n'est pas dévié.



Ces trois propriétés physiques de ces rayons lumineux seront choisies comme axiomes dans l'étude mathématique .

III - Une simulation du modèle physique

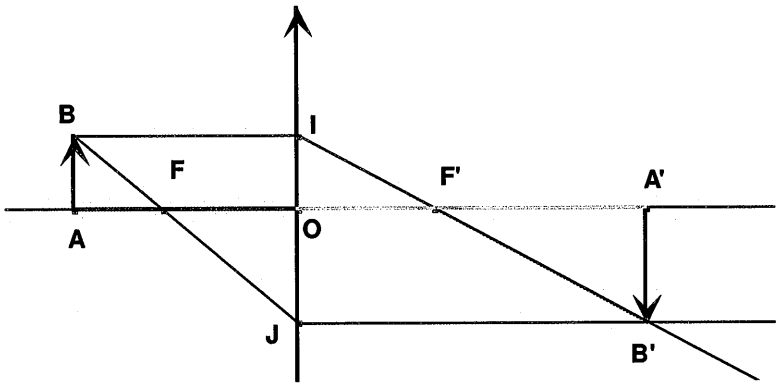
A - MISE EN PLACE DE LA SIMULATION DU MODELE PHYSIQUE

1) Dans le cadre de l'enseignement de Sciences Physiques, on peut bien sûr étudier expérimentalement le modèle physique.

2) On peut aussi en faire une simulation avec un logiciel de géométrie dynamique (nous avons utilisé Cabri II).
Pour définir l'image M' d'un point M, on choisit deux rayons issus de M, l'un parallèle à l'axe, l'autre passant par le foyer objet. Après la lentille ces deux rayons déviés se coupent en un point M' image de M ;
Avec Cabri ,on conjecture que l'image d'un segment perpendiculaire à l'axe est un segment perpendiculaire à l'axe.

3) Une démonstration mathématique, utilisant les triangles semblables prouve cette conjecture à partir de la définition de l'image d'un point et deux des trois propriétés des rayons particuliers choisies comme axiomes.
Cette démonstration à l'aide des triangles semblables est détaillée au sixième paragraphe ; ainsi repoussée, elle vient simplement enrichir les similitudes déjà étudiées et rend la démarche plus naturelle .

B - UTILISATION DE LA SIMULATION DU MODELE PHYSIQUE



[AB] est l'objet, [A'B'] est son image.

Le point A est mobile sur l'axe de la lentille.

Il est évident que les longueurs AO et A'B' varient en sens inverse.

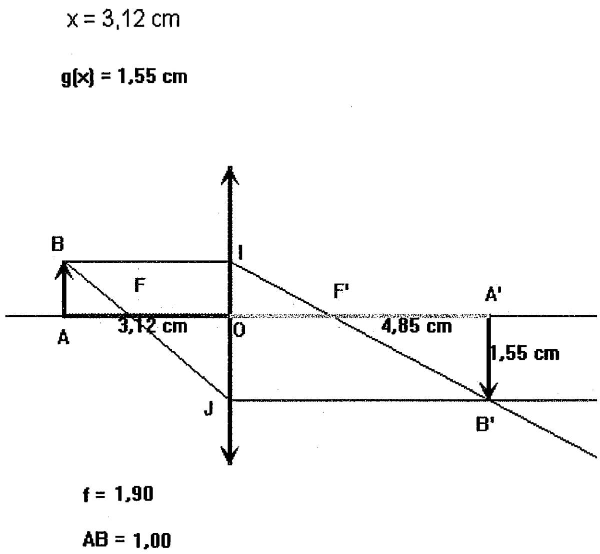
On s'aperçoit que si la simulation permet de bien appréhender le fonctionnement du modèle, elle ne permet pas de résoudre « graphiquement » le problème posé.

Ceci pour une question d'échelle : les distances « côté objet » sont de l'ordre du mètre et de l'ordre du centimètre « côté image ».

On peut donc justifier ainsi la nécessité de l'étude d'un modèle mathématique.

IV - Un modèle mathématique

1. Expression du grandissement en fonction de la distance objet-lentille



x désigne la distance OA entre la lentille et l'objet..

y = g(x) désigne le grandissement arithmétique $\frac{A'B'}{AB}$.

Les triangles FOJ et FAB sont homothétiques, donc $\frac{A'B'}{AB} = \frac{f}{x-f}$, donc

$y = g(x) = \frac{f}{x-f}$; d'où y(x - f) = f, ou encore xy – fy – f = 0.

Remarque : pour f = 3 on a xy – 3y – 3 = 0.

2. Retour à l'exemple

Le grandissement ne doit pas dépasser $\frac{24}{2400}$ (en « format paysage »).

Il faut donc résoudre l'inéquation $g(x) < \frac{1}{100}$, qui donne x > 5050.

Le personnage avec le drapeau doit se tenir à au moins 5,05 mètres de l'appareil photo.

3. Sens de variation de la fonction g sur [f ; + ∞ [

Si $0 < f < x_1 < x_2$ alors $x_1 - f < x_2 - f$, donc $\dfrac{1}{x_2 - f} < \dfrac{1}{x_1 - f}$, donc $g(x_1) < g(x_2)$.

La fonction g est décroissante sur [f ; + ∞ [.

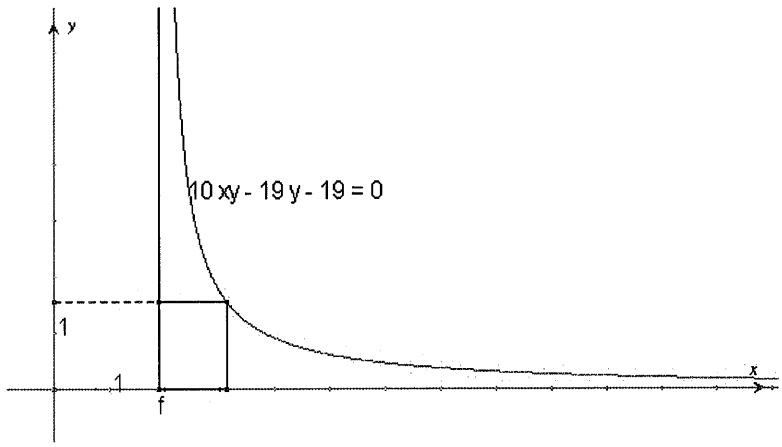
Ce résultat est concordant avec l'observation faite à l'aide de la figure « Cabri ». Remarquons que Cabri nous permet d'obtenir une représentation graphique des variations de g en fonction de x, sans qu'il soit nécessaire de connaître une expression de g en fonction de x.

4. Limites de g

$g(x) = \dfrac{f}{x - f}$.

Quand x tend vers + ∞, g(x) tend vers 0^+.

Quand x tend vers f, g(x) tend vers + ∞.



5. Influence du changement de focale

Ici x est fixé et la variable est f : $g(f) = \dfrac{f}{x - f}$.

Remarque : La fonction mathématique définie ici n'est en fait pas celle du paragraphe précédent , on devrait en toute rigueur en changer le nom.

a) $g'(f) = \dfrac{x}{(x - f)^2}$. On a donc g'(f) positif, la fonction g est croissante.

Quand la focale augmente le grandissement arithmétique augmente aussi, ce qui est confirmé par l'expérience et par l'animation faisant varier f sur la figure « cabri ».

b) Soient f_1 et f_2 deux focales différentes : $g_1 = \frac{f_1}{x - f_1}$ et $g_2 = \frac{f_2}{x - f_2}$.

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{g_1}{g_2} = \frac{f_1}{f_2}$.

Pour un objet éloigné, le grandissement est donc pratiquement proportionnel à la focale.

V - Et pourquoi pas un autre problème ?

1. Le problème de la mise au point

Quelle distance doit séparer un objectif de focale 50 mm de la pellicule, pour que la photo d'un personnage situé à 3 m, puis à 1 m de l'appareil soit nette ?

Pour résoudre ce problème il est intéressant d'établir l'expression de la distance d, lentille-image, en fonction de la distance x, lentille-objet.

2. Expression de d en fonction de x

Les triangles F'OI et F'A'B' sont homothétiques, donc $\frac{A'B'}{AB} = \frac{d - f}{f}$.

Or $\frac{A'B'}{AB} = \frac{f}{x - f}$, d'où $\frac{d - f}{f} = \frac{f}{x - f}$ et $f^2 = (d - f)(x - f)$.

On a donc $dx - fd - fx = 0$, d'où $d = \frac{fx}{x - f}$.

3. Loi de conjugaison de Descartes

En divisant chaque membre de l'égalité dx = fd + fx par xfd on obtient

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{x}+\frac{1}{d}$$

4. Retour à l'exemple

Si x = 3 m, on a $d=\dfrac{50\times3000}{3000-50}=50{,}85\text{ mm}$.

Si x = 1 m, on a $d=\dfrac{50\times1000}{1000-50}=52{,}63\text{ mm}$.

Dans la pratique de la prise de vue photographique, pour passer de la mise au point sur un sujet à 3 m, à la mise au point sur un sujet à 1m, il suffit de déplacer l'objectif de 52,63 – 50,85 = 1,8 mm environ vers la pellicule.

5. Lien entre grandissement et distance objet-lentille

En comparant les expressions de g(x) et de d(x) on trouve : $g=\dfrac{d}{x}=\dfrac{A'B'}{AB}$.

Remarque : Les triangles OAB et OA'B' sont homothétiques. Les points B, O et B' sont donc alignés. Le troisième « axiome » des lentilles minces (tout rayon passant par le centre optique n'est pas dévié) est redondant.

6. Mais où commence donc l'infini ?

Quelle est la distance minimale qui doit séparer l'objet de la lentille de focale 50 mm pour que l'image soit pratiquement dans le plan frontal ?
Cette distance doit pratiquement être égale à la distance focale de la lentille. S'il est exigé, par exemple que d soit égale à f à 0,2 mm près, il faut résoudre l'inéquation $d - f < 0{,}2$.

Ce qui donne $\frac{fx}{x-f} - f < 0{,}2$ d'où $\frac{x-f}{f^2} > 5$ et $x > 12550$.

Quand l'objet est à au moins 12,55 m de la lentille l'image est pratiquement dans le plan focal (à moins de 0,2 mm).

En photographie, on dit parfois qu'avec un objectif de focale 50 mm, « l'infini commence à 12 m ».

Pour une focale de 30 mm on obtient une distance de 4,53 m.

On peut remarquer que les appareils de photo bon marché ont des objectifs dont les focales sont de l'ordre de 30 mm, ce qui évite pratiquement d'avoir à effectuer la mise au point.

VI - Retour à l image d'un segment perpendiculaire à l'axe optique.(en l'une de ses extrémités)

Grâce à Cabri, dans le chapitre III A , il a été conjecturé la propriété suivante :

L'IMAGE D'UN SEGMENT PERPENDICULAIRE A L'AXE OPTIQUE EST UN SEGMENT PERPENDICULAIRE A CET AXE.

Plan de la démonstration de cette propriété .

Soit un segment [AB], perpendiculaire en A à l'axe .Soit B' l'image de B.

Soit A' le projeté orthogonal de B' sur l'axe.

La démonstration est décomposée ainsi :

démonstration 1, pour prouver que tout point de [AB] a une image sur [A'B'],

démonstration 2 pour prouver que tout point de [A'B'] est image d'un point de [AB].

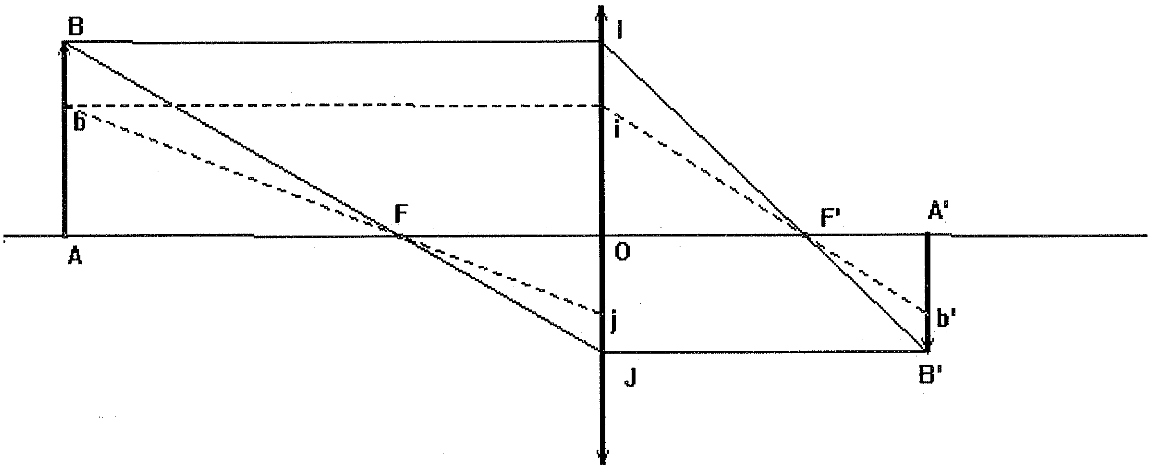
DEMONSTRATION 1

Par un point b quelconque du segment]AB],on trace la parallèle à l'axe ; elle coupe la lentille en i.

La demi-droite issue de i , qui passe par F', coupe [A'B'] en b'.

La demi-droite issue de b , qui passe par F, coupe la lentille en j.

Pour démontrer que b' est l'image de b, il suffit de prouver que la droite (j b') est



parallèle à l'axe.

1) Les triangles FAB et FOJ sont semblables et les triangles FAb et FOj sont semblables donc

FO / FA = OJ / AB = Oj / Ab, or OJ =A'B' , donc A'B' / AB = Oj / A b (1)

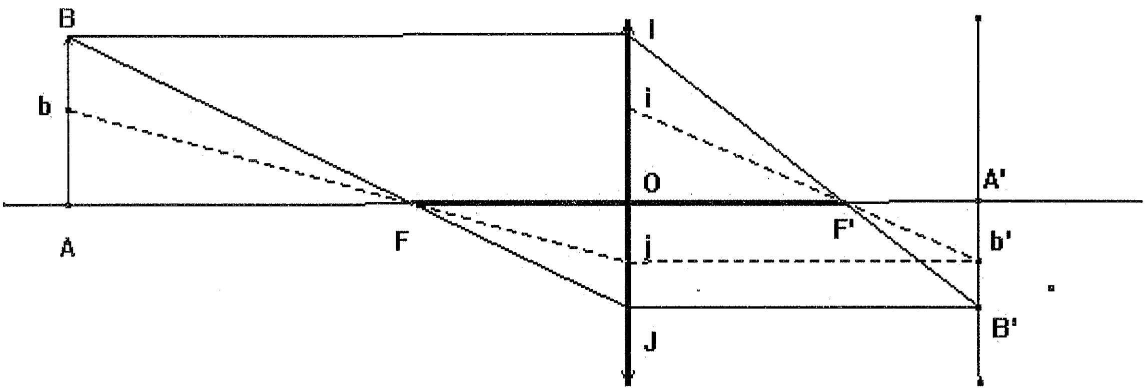
2) Les triangles F'A'B' et F'OI sont semblables et aussi les triangles F'A'b' et F'Oi donc
F'A' / F'O = A'B' / OI = A'b' / Oi, or OI = AB et Oi = Ab,
donc A'B' / AB = A'b' / Ab (2)

3) D'après 1) et 2) Oj =A' b' et comme de plus (A'b') est parallèle à (Oj), OA'b'j est un parallélogramme donc (jb') est parallèle à l'axe .

DEMONSTRATION 2

Par un point b' quelconque de [A'B'], on trace la demi-droite qui passe par F' ;elle coupe la lentille en i.
La demi-droite issue de b', parallèle à l'axe, coupe la lentille en j. A partir de j, on trace la demi-droite passant par F. Cette demi-droite coupe [AB] en b.
Pour démontrer que b' est l'image de b, il suffit de prouver que (bi) est parallèle à l'axe.

Une démonstration analogue à la précédente, dans laquelle les rôles des points b et b' sont permutés, permet de prouver ce parallélisme.

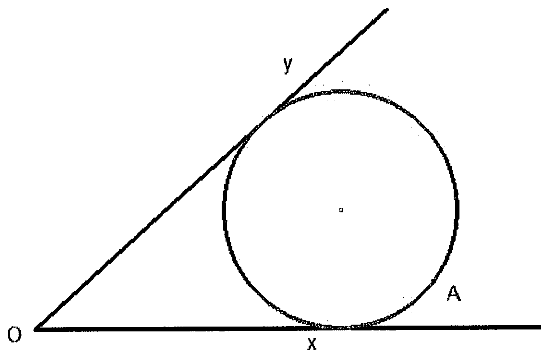


Chapitre 6

La « pince » à ronds

Présentation de l'activité

Soient un angle géométrique de sommet O et un point A peut-on tracer un cercle tangent aux cotés de cet angle et qui passe par ce point ?



On peut se poser les questions suivantes (et certainement d'autres) :
Le problème a-t-il toujours des solutions ?
Combien le problème a-t-il de solutions, dans les cas où il en a ?
Comment construit-on ces solutions ?
Les points O et A étant fixes et la mesure de l'angle constante, comment « bougent » les solutions quand l'angle pivote autour de O ?
Que se passe-t-il si la mesure de l'angle varie ?

Niveau et notions utiles

L'activité s'adresse aux premières et terminales S et STI.

On y utilise les notions suivantes :

- géométrie analytique (première S ou STI),
- homothétie (facultatif),
- définition du sens de variation d'une fonction,
- majoration,
- théorème d'Al-Kashi,
- équation du second degré.

1. Premier problème

1.1 Énoncé

Soient deux points fixes O et A.

La demi-droite [Ox) pivote autour du point O. La demi-droite [Oy) est l'image de [Ox) dans la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Quel est le lieu E des centres des cercles tangents aux demi-droites [Ox) et [Oy) et passant par le point A ?

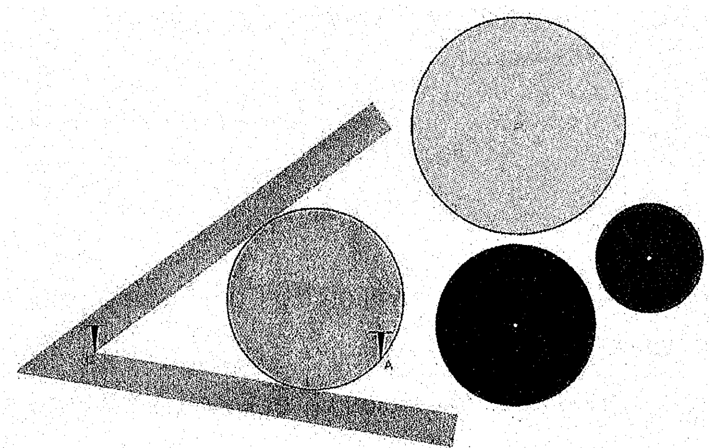
1.2 Des conjectures

1.2.1 Une histoire ancienne

Cette activité a commencé à être pratiquée avant l'apparition des logiciels de géométrie dynamique. On pouvait alors procéder au « bricolage » suivant pour conjecturer le lieu cherché :

On disposait d'une « pince » en carton de sommet fixé et de disques de carton de différents diamètres, le tout posé sur une feuille de papier.

Pour chaque disque on cherchait si une position de la pince permettait de réaliser une solution



Si une position de la pince convenait on marquait alors le centre du disque sur la feuille de papier. Une dizaine de points ainsi obtenus permettait d'énoncer une conjecture pour le lieu.

1.2.2 Un bricolage moderne

Avec un logiciel de géométrie dynamique, on peut, dans un premier temps, réaliser un tracé approximatif de cercles tangents aux côtés et passant par A, pour diverses positions de la « pince ». Ce bricolage sera suffisant pour émettre une conjecture sur le lieu géométrique cherché.

On place un point O fixe et une demi-droite [Ox) pouvant pivoter autour de O. La demi-droite [O,y) est l'image de [O,x) dans la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

On place un point T sur la demi-droite [Ox) puis par T on trace la perpendiculaire à [Ox) ; cette perpendiculaire coupe la bissectrice [Ot) de l'angle en un point I. Tracer alors le cercle de centre I passant par T, ce cercle est tangent à [0x) et à [Oy) mais, en général, il ne passe pas par A.

Pour le faire passer par A, il suffit de déplacer le point T sur [Ox) jusqu'à ce que l'on voit A sur ce cercle que l'on appelle alors C_1.

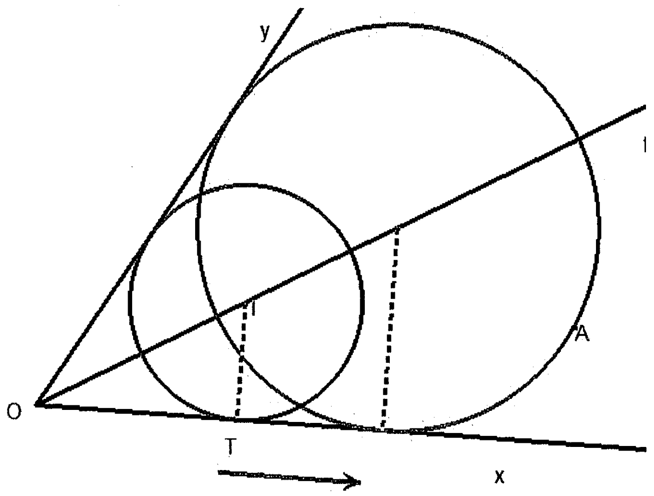


figure 1

On peut en général trouver une deuxième position de T qui fasse passer le cercle par A ; on appelle alors le nouveau cercle C_2.

On marque alors les centres I_1 et I_2 des cercles C_1 et C_2 en superposant des points fixes sur le centre du cercle mobile.

Il suffit ensuite de faire tourner la pince et de répéter la suite d'actions précédente pour obtenir deux nouveaux centres.

En ayant visualisé une dizaine de points on doit pouvoir énoncer la conjecture :

Les centres des cercles tangents aux côtés de l'angle et passant par A sont sur un cercle fixe.

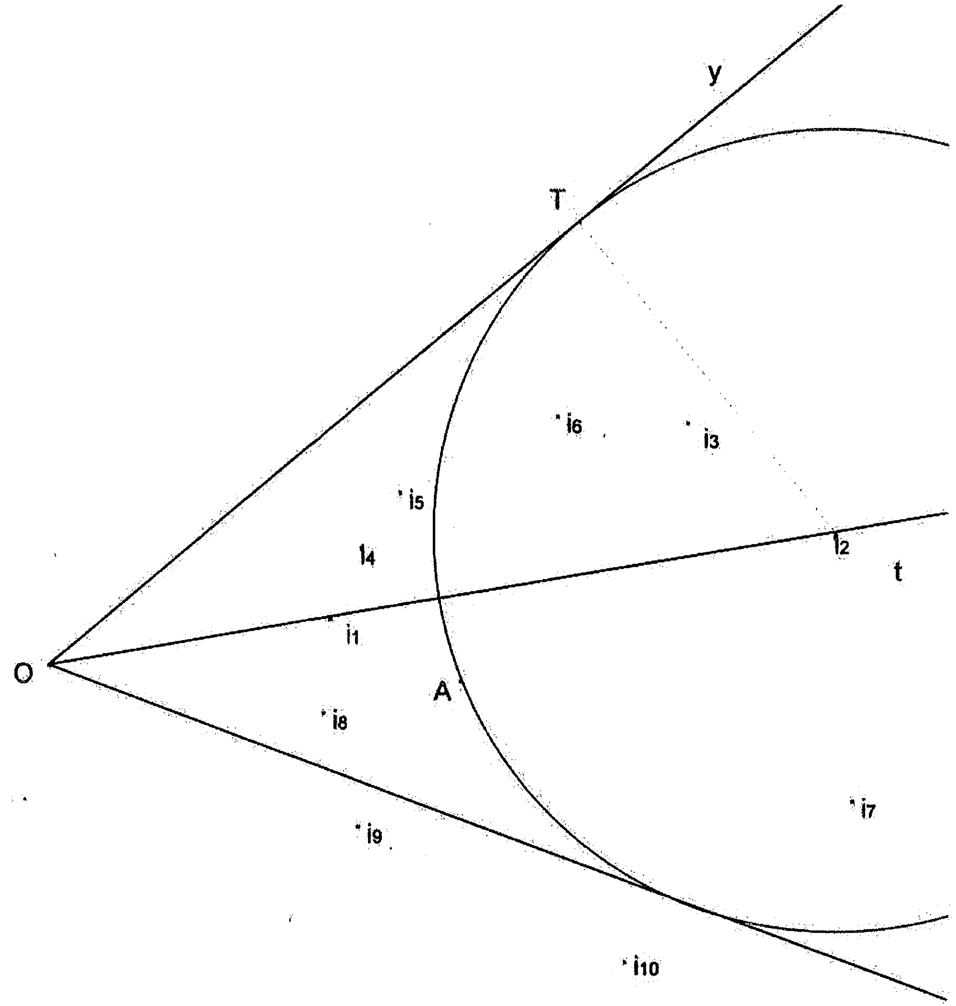


figure 2

Une **remarque** permet de préciser la conjecture :

Il est facile de voir que le triangle OTI est un demi-triangle équilatéral donc OI = 2 IT.

Or A et T étant sur un cercle de centre I, on a IA = IT, donc $\frac{IA}{IO} = \frac{1}{2}$.

Considérons le cas où A est sur la bissectrice [Ot). Sur la bissectrice, il existe 2 points I_1 et I_2 tels que $\frac{I_1A}{I_1O} = \frac{I_2A}{I_2O} = \frac{1}{2}$.

I_1 est situé entre O et A au tiers de [OA] (plus près de A que de O). I_2 est le symétrique de O par rapport à A.

Il semble de plus évident que le lieu cherché doive être symétrique par rapport à la droite [OA].

On peut donc conjecturer que le lieu cherché est **le cercle de diamètre** $[I_1I_2]$.

On constate que ce cercle semble passer par les centres i_1, i_2... placés précédemment sur la figure, ce qui conforte la conjecture.

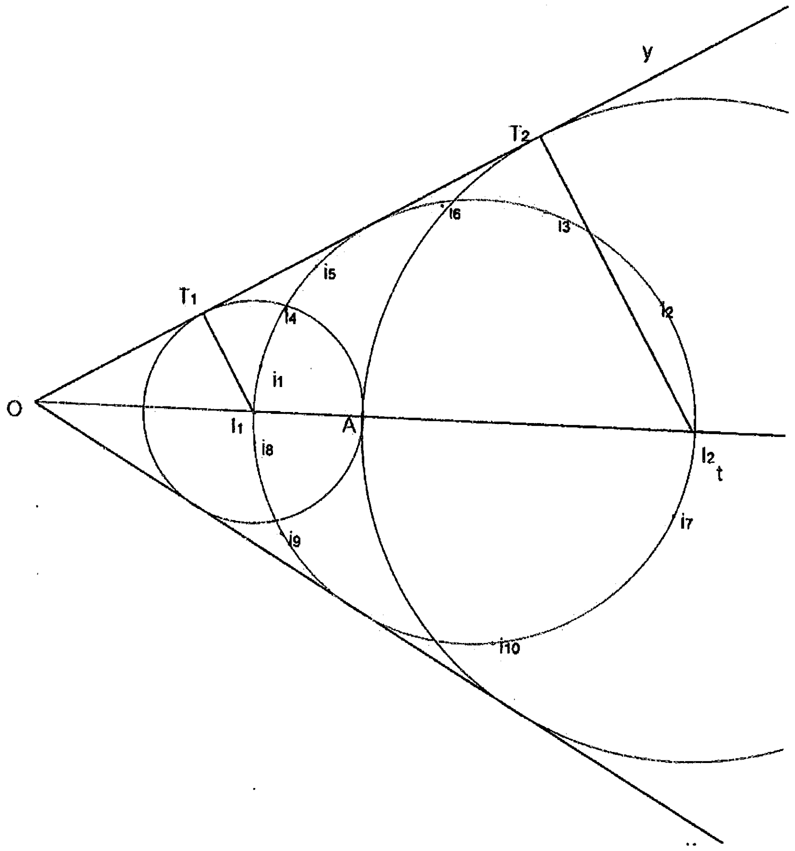


figure 3

1.2.3 Une construction (enfin !)

Une construction correcte des cercles qui, pour une position donnée de l'angle, passent par A et sont tangents aux côtés de la « pince » est possible en utilisant l'homothétie.

On commence par tracer un cercle Γ, de centre ω situé sur la bissectrice de l'angle, tangent aux côtés de l'angle.

On remarque que si A est « à l'extérieur » de l'angle il est impossible de tracer un cercle passant par A et tangent aux deux côtés de l'angle.

Si A est situé sur un des côtés on a une solution unique dont la construction est immédiate.

Dans le cas où le point A est « à l'intérieur » de l'angle il existe deux cercles Γ_1 et Γ_2 passant par A et tangents aux côtés. Ils sont tous les deux homothétiques de Γ.

On désigne par M et N les intersections de Γ avec la droite (OA). On obtient les centres ω_1 et ω_2 des cercles Γ_1 et Γ_2 comme intersections avec la bissectrice [Ot) des parallèles à (ωM) et (ωN) passant par A.

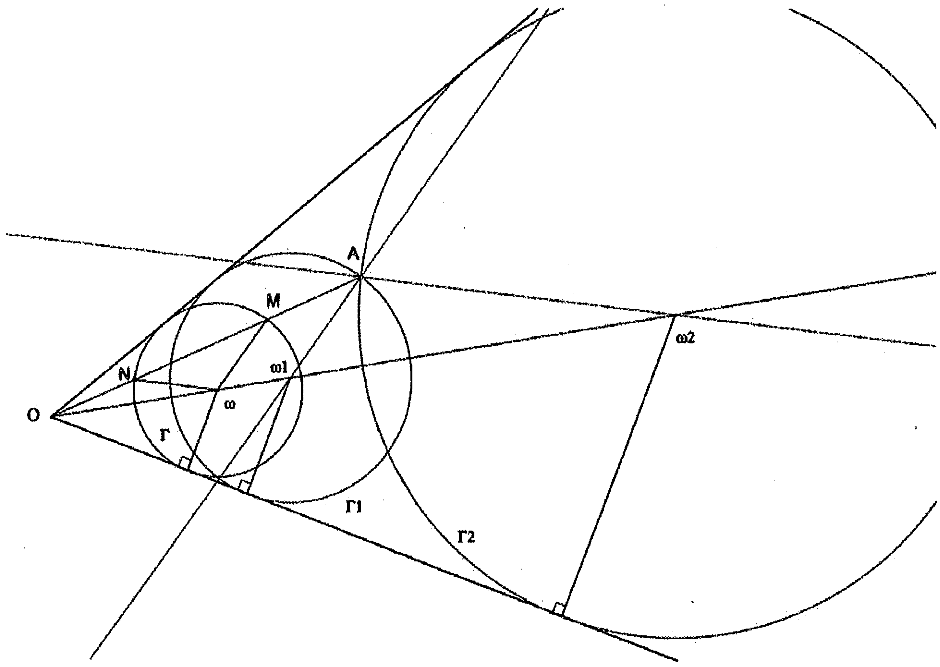


figure 4

Un logiciel de géométrie dynamique permet d'obtenir la trace des points ω_1 et ω_2 quand l'angle pivote autour de O, ou encore mieux le lieu des points ω_1 et ω_2.

<u>Remarque</u> : Avec Cabri il faudra définir le côté [Ox) en plaçant un point P sur un cercle de centre O. On aura alors [Ox) = [OP), ce qui permettra de faire pivoter l'angle en déplaçant P sur le cercle et d'obtenir les lieux de ω_1 et ω_2 quand P varie.

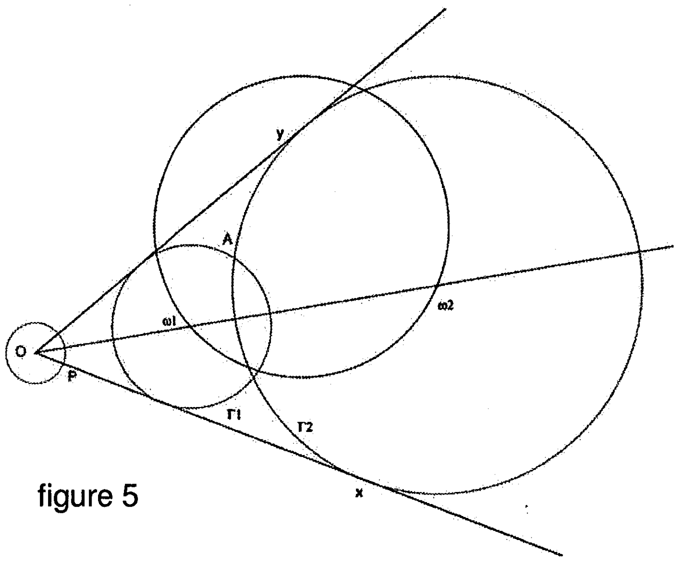


figure 5

Les mêmes considérations de cas particuliers que celles faites au paragraphe précédent (1.2.2) permettent d'énoncer la même conjecture :

L'ensemble des points I centres des cercles tangents aux côtés de la pince et passant par A est le cercle de diamètre $[I_1I_2]$, I_1 et I_2 étant les point de la droite (OA) tels que $\frac{I_1A}{I_1O} = \frac{I_2A}{I_2O} = \frac{1}{2}$.

1.3 Démonstration de la conjecture

1.3.1 Nouvelle observation de la figure dynamique

Tout d'abord deux cas particuliers :

- Le point A est sur un des côtés

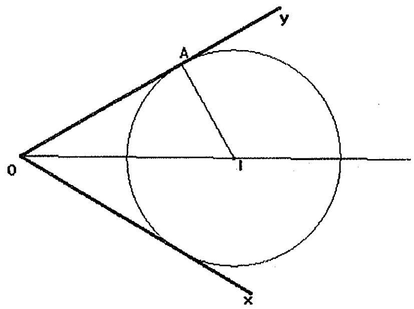


figure 6

Le triangle rectangle OIA est un demi-triangle équilatéral et on a $\frac{IA}{IO} = \frac{1}{2}$.

- le point A est sur la bissectrice [Ot)

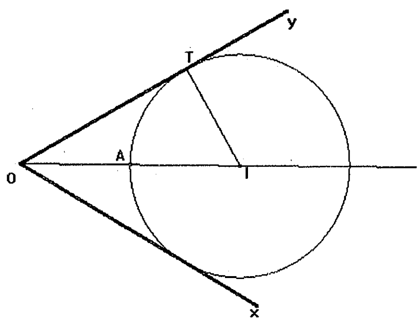


figure 7

Le triangle rectangle OIT est un demi-triangle équilatéral et on a $\frac{IT}{IO} = \frac{1}{2}$ et IT = IA, donc $\frac{IA}{IO} = \frac{1}{2}$.

Cette égalité est-elle encore vraie dans le cas où A est un point quelconque « à l'intérieur de la pince » ?

On fait mesurer les longueurs IA et IO : il semble que quelle que soit la position de l'angle le rapport $\frac{IA}{IO}$ est constant et égal à $\frac{1}{2}$.

La justification est simple : le triangle rectangle OIT est un demi-triangle équilatéral et on a $\frac{IT}{IO}=\frac{1}{2}$ et IT = IA, donc $\frac{IA}{IO}=\frac{1}{2}$.

Conclusion : **Dans tous les cas, si I est centre d'un cercle tangent aux demi-droites [O,x) et [O,y) qui passe par le point A alors I vérifie l'égalité :** $\frac{IA}{IO}=\frac{1}{2}$.

1.3.2 Détermination analytique du lieu E des points I tels que $\frac{IA}{IO}=\frac{1}{2}$

Soient un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ et un point A (a,0) (a >0).

I est un point de coordonnées (x,y)

Déterminons une équation cartésienne de l'ensemble E des points I tels que $\frac{IA}{IO}=\frac{1}{2}$.

$$
\begin{aligned}
\frac{IA}{IO}=\frac{1}{2} &\Leftrightarrow \frac{IA^2}{IO^2}=\frac{1}{4}\\
&\Leftrightarrow 4IA^2-IO^2=0 \text{ car } I\neq O\\
&\Leftrightarrow 4(x-a)^2+4y^2-(x^2+y^2)=0\\
&\Leftrightarrow 4x^2-8ax+4a^2+4y^2-x^2-y^2=0\\
&\Leftrightarrow 3x^2+3y^2-8ax+4a^2=0\\
&\Leftrightarrow x^2+y^2-\frac{8}{3}ax+\frac{4}{3}a^2=0\\
&\Leftrightarrow \left(x-\frac{4}{3}a\right)^2+y^2-\frac{16}{9}a^2+\frac{4}{3}a^2=0\\
&\Leftrightarrow \left(x-\frac{4}{3}a\right)^2+y^2=\frac{4}{9}a^2
\end{aligned}
$$

E est donc le cercle de centre O' $\left(\frac{4a}{3},0\right)$ et de rayon $\frac{2a}{3}$.

Les points du cercle sur l'axe des abscisses sont les points $I_1\left(\frac{2a}{3},0\right)$ et $I_2(2a,0)$.

$[I_1I_2]$ est un diamètre de E.

1.3.3 Réciproque

Soit I un point quelconque du cercle E, ensemble des points M vérifiants $\frac{MA}{MO} = \frac{1}{2}$.

Soit *C* le cercle de centre I passant par A.

Le point O est extérieur à *C* car OI = 2 IA. On peut donc tracer deux tangentes à *C* issues de O, de points de contact T et T'.

IT = IA , donc 2 IT = OI et le triangle OTI est donc un demi-triangle équilatéral.

L'angle de tangentes est donc de mesure $\frac{\pi}{3}$.

Tout point I de E convient.

1.3.4 Conclusion

Le cercle lieu des points M tels que $\frac{MA}{MO} = \frac{1}{2}$ est aussi le lieu des centres des cercles passants par A et tangents aux deux cotés de la « pince » quand elle pivote autour du point O.

2. Deuxième problème

2.1 Énoncé

Soient deux points fixes O et A.

La demi-droite [Ox) pivote autour du point O . La demi-droite [Oy) est l'image de [Ox) dans la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Étudier la variation des rayons des cercles qui sont tangents aux demi-droites [Ox) et [Oy) et qui passent par le point A.

2.2 Étude graphique

Soit [Oz) la bissectrice intérieure de l'angle des demi-droites [Ox) et [Oy).

Un logiciel de géométrie dynamique permet de représenter la variation du rayon en fonction de la mesure θ de l'angle orienté des demi-droites ([OA),[Oz)).

Il suffit de reporter sur l'axe des abscisses la mesure de l'angle et sur l'axe des ordonnées le rayon :

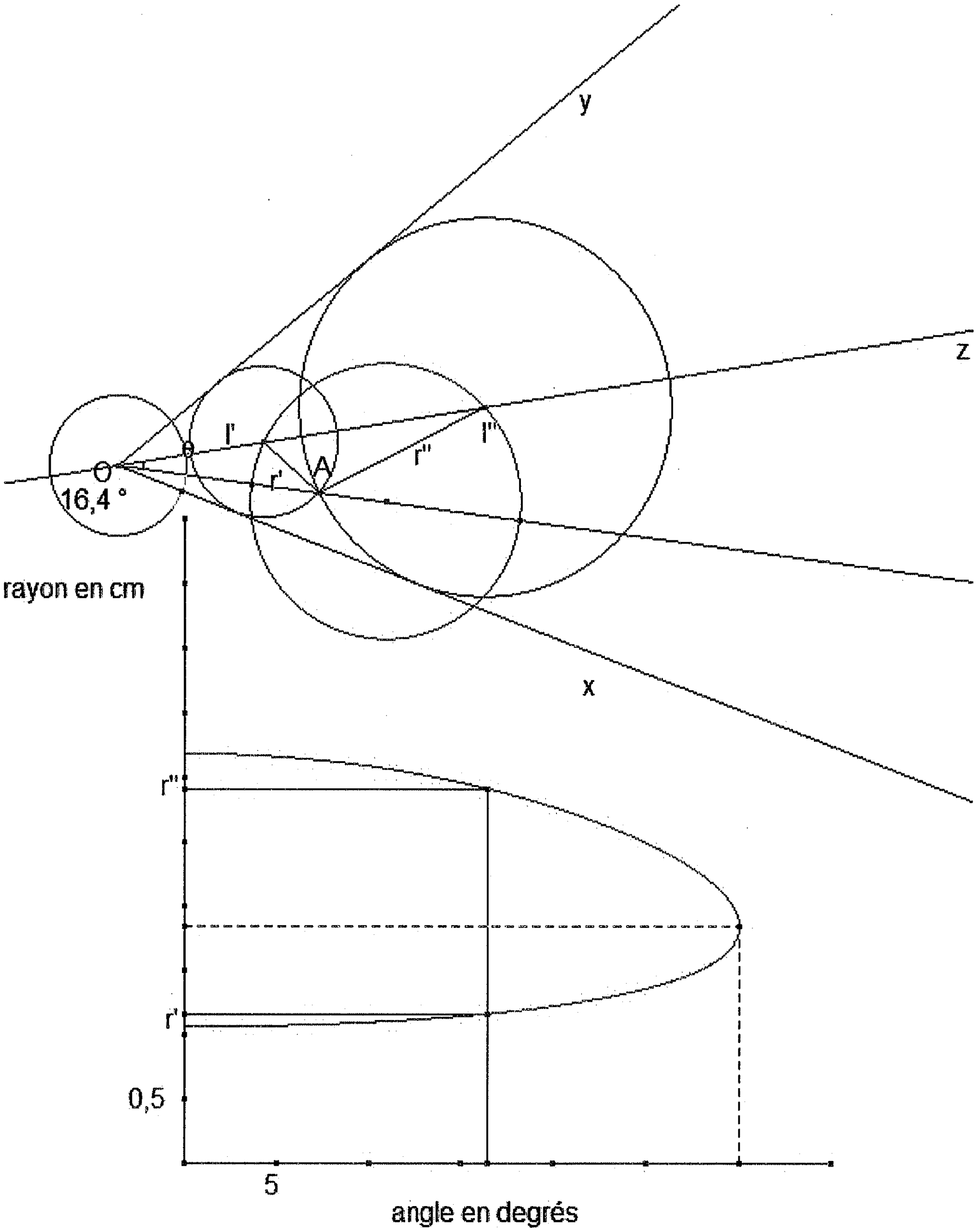


figure 8

Remarques

- Pour qu'il existe un cercle passant par A et tangent aux demi-doites [Ox) et [Oy) il faut et il suffit que le point A soit à l'intérieur de l'angle aigu $\widehat{xOy}$ ou sur une des demi-droite [Ox) et [Oy). On a donc $-\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}$.

La représentation graphique a été tracée pour $\theta > 0$. Les fonctions sont paires à cause de la symétrie par rapport à (Oz).

2.3 Détermination des rayons

On pose OA = a.

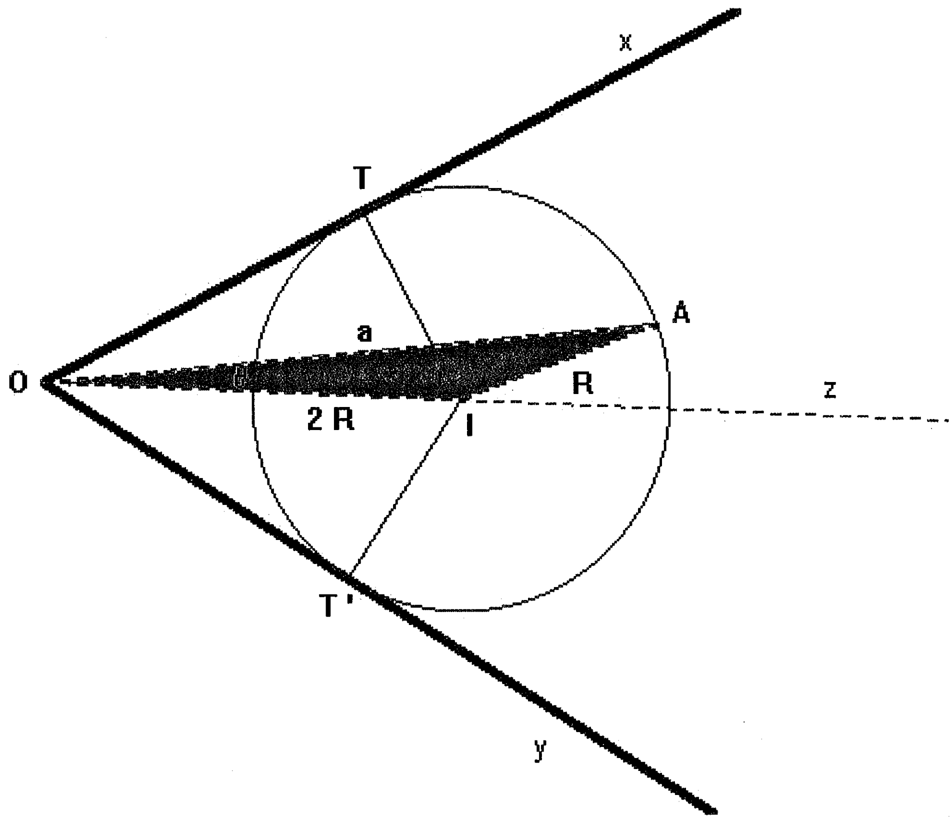


figure 9

Dans le triangle OIA on : $R^2 = (2R)^2 + a^2 - 2\times(2R)\times a\times\cos\theta$.

R est donc solution de l'équation : $3R^2 - 4Ra\cos\theta + a^2 = 0$ (E).

$$\Delta = 4a^2(4\cos^2\theta - 3)$$

$$\begin{cases} \theta = \pm\dfrac{\pi}{6} \Rightarrow \cos\theta = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \Delta = 0 \text{ donc } R = \dfrac{a\sqrt{3}}{3} \\ -\dfrac{\pi}{6} < \theta < \dfrac{\pi}{6} \Rightarrow -\dfrac{\sqrt{3}}{2} < \cos\theta < \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \Delta > 0 \text{ donc } R = \dfrac{2a\cos\theta \pm a\sqrt{4\cos^2\theta - 3}}{3} \end{cases}$$

On remarque que si R_1 et R_2 sont les deux solutions pour $\Delta > 0$ on a $R_1R_2 = \dfrac{a^2}{3}$.

2.4 Sens de variation des rayons

2.4.1 Cas du grand cercle

Montrons que la fonction définie par $R_g(\theta) = \dfrac{2a\cos\theta + a\sqrt{4\cos^2\theta - 3}}{3}$ est décroissante sur l'intervalle $\left[0,\dfrac{\pi}{6}\right]$.

Soient θ_1 et θ_2 deux réel de l'intervalle $\left[0,\dfrac{\pi}{6}\right]$.

(1) $\theta_1 \leq \theta_2 \Rightarrow \cos\theta_1 \geq \cos\theta_2$

$$\Rightarrow 2a\cos\theta_1 \geq 2a\cos\theta_2$$

(2) $\theta_1 \leq \theta_2 \Rightarrow \cos^2\theta_1 \geq \cos^2\theta_2$ (carré d' un réel positif)

$$\Rightarrow a\sqrt{4\cos^2\theta_1 - 3} \geq a\sqrt{4\cos^2\theta_2 - 3}$$

d' où d'après (1) et (2) :

$$\theta_1 \leq \theta_2 \Rightarrow R_g(\theta_1) \geq R_g(\theta_2)$$

Donc la fonction est décroissante sur $\left[0;\dfrac{\pi}{6}\right]$

2.4.2 Cas du petit cercle

On considère la fonction définie par $R_p(\theta) = \dfrac{2a\cos\theta - a\sqrt{4\cos^2\theta - 3}}{3}$

$R_g(\theta)\,R_P(\theta) = \dfrac{a^2}{3}$, donc le produit $R_g(\theta)\,R_P(\theta)$ est positif et constant.
Or R_g et R_P sont tous les deux positifs donc quand l'un augmente l'autre diminue .

La fonction R_P est donc croissante sur $\left[0;\dfrac{\pi}{6}\right]$.

3. Variation de l'angle de la « pince »

3.1 Toujours une ouverture constante ... mais variable

3.1.1 Étude graphique

On construit la figure de façon à pouvoir faire varier l'angle de la « pince ».La construction des cercles tangents aux côtés et passant par A se fait de la même façon que dans les paragraphes précédents.

Quel que soit l'angle le lieu des centres des cercles tangents aux côtés et passant par A semble être toujours un cercle.

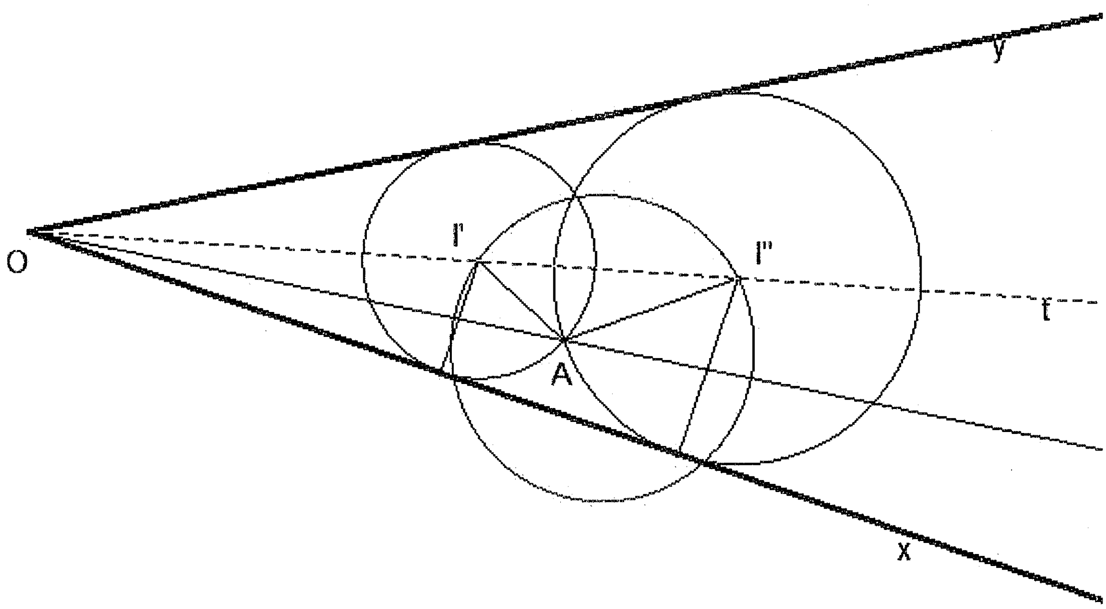


figure 10

3.1.2 Justification

La demi-droite [Oy) est l'image de la demi-droite [Ox) par la rotation de centre O et d'angle θ, avec $0 < \theta < \pi$.

Considérons un cercle de centre I passant par A et tangent aux deux côtés de la « pince ».

Dans le triangle rectangle OIT on a : $\frac{IT}{IO} = \sin\frac{\theta}{2}$. Or IT = IA, donc $\frac{IA}{IO} = \sin\frac{\theta}{2}$.

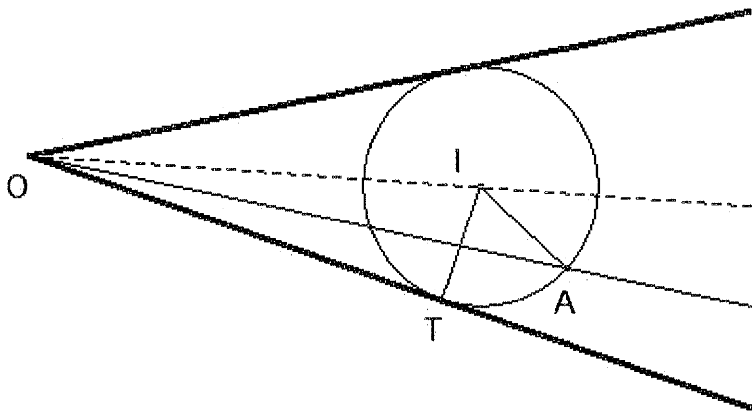


figure 11

Les points A et O sont fixes ; I appartient à l'ensemble des points tels que $\frac{IA}{IO} = k$, avec $k = \sin\frac{\theta}{2}$. On justifie de même la réciproque : tout point du cercle ensemble des points M tels que $\frac{MA}{MO} = k$, avec $0<k<1$, est centre d'un cercle tangent aux côtés et passant par A.

3.2 Ouverture variable

La demi-droite [Ox) est cette fois **fixe et l'angle θ varie entre 0 et π.**

Le logiciel permet d'obtenir les lieux des points I' et I", centres des cercles passant par A et tangents aux demi-droites [Ox) et [Oy).

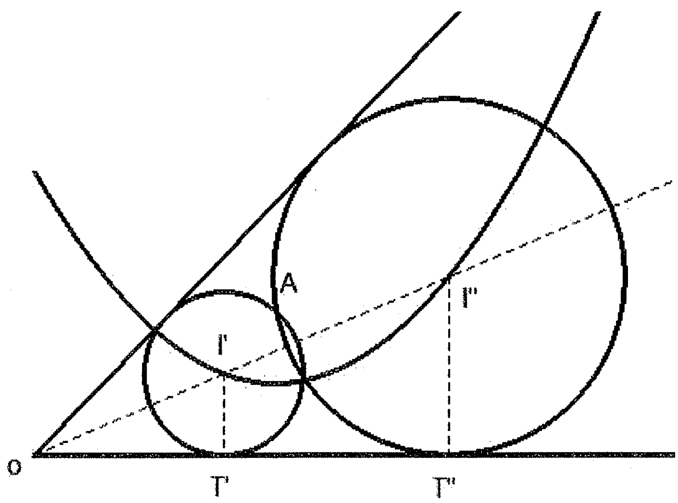


figure 12

On peut **conjecturer** que les points I' et I" se déplacent sur une parabole.

On remarque que si I est centre d'un cercle passant par A et tangent aux demi-droites [Ox) et [Oy) alors IA = IT, où T est le point de contact du cercle avec [Ox). On peut alors caractériser analytiquement l'ensemble des points M tels que MA = MH, H étant le projeté orthogonal de M sur [Ox).

Pour cela considérons le plan rapporté au repère orthonormal $(\Omega;\overrightarrow{\Omega B},\overrightarrow{\Omega A})$, avec Ω le projeté orthogonal de A sur [Ox).

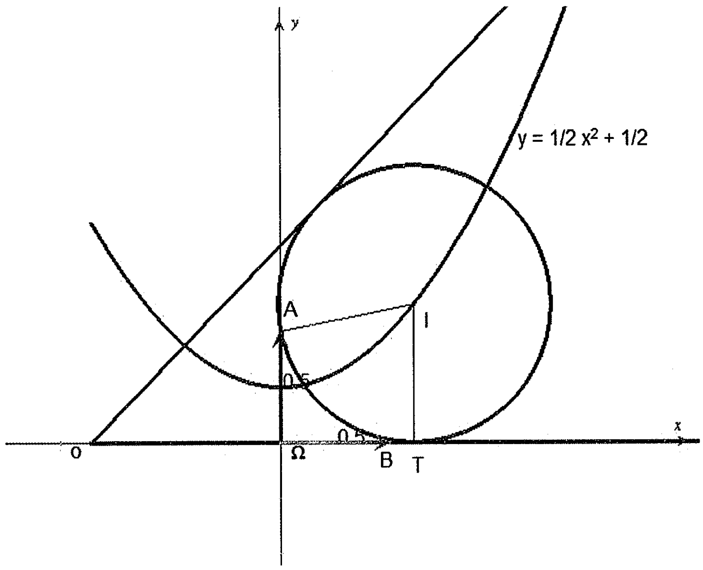


figure 13

M a pour coordonnées (x,y) et A (0,1).

Le logiciel donne une équation du lieu dans le repère considéré.

On justifie par $IA = IT \Leftrightarrow IA^2 = IT^2$

$$\Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 = y^2$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$$

Ce qui justifie que les points I' et I'' sont sur une parabole.

On peut faire remarquer la définition géométrique de la parabole et étudier la réciproque.

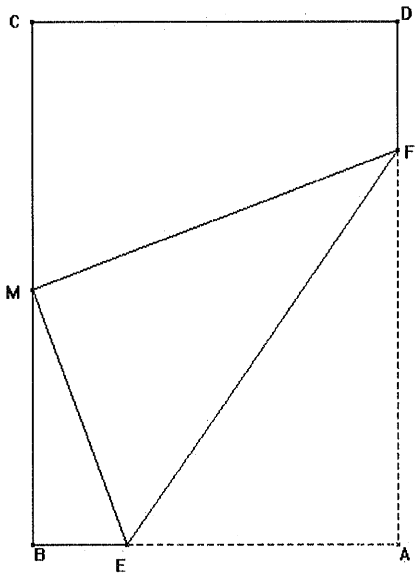
Chapitre 7

UN PLIAGE D'UNE FEUILLE A4

I - Présentation de l'activité

– Le problème.

On plie une feuille ABCD, de format A4, de façon à amener le sommet A en M sur le côté [BC], de façon que le pli coupe [AB] en E et [AD] en F.



Comment plier pour que la longueur EF du pli soit minimale ?

– Méthode

On va réaliser une figure dynamique et représenter graphiquement les variations de la longueur EF en fonction de la longueur AE. On pourra alors faire une conjecture sur l'existence d'un minimum et sur la position du point M sur [BC] pour laquelle ce minimum est atteint.

II - Niveau et notions utiles

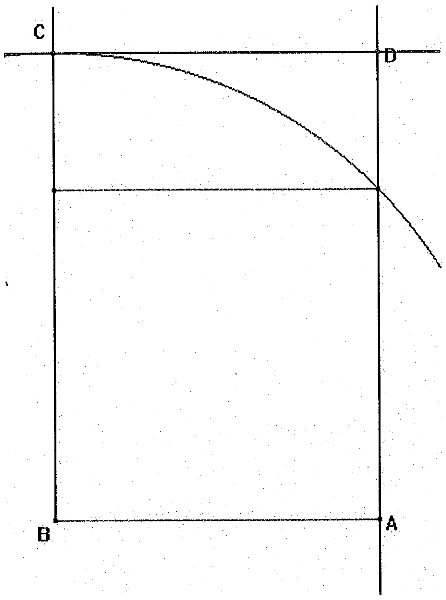
Cette activité peut être pratiquée en première S ou STI.

Notions :

- Constructions élémentaires ;
- représentation graphique ;
- sens de variation ;
- recherche d'un extremum.

III – Réalisation de la figure

a) La feuille

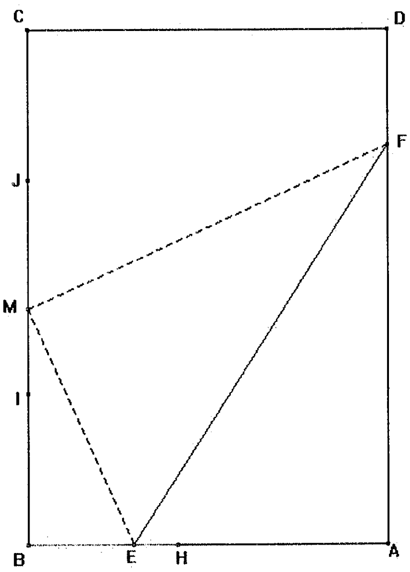


Pour une feuille de format A4 le rapport de la longueur à la largeur est égal à $\sqrt{2}$.

On se donne deux points A et B et on construit un carré de côté [AB].

On construit ensuite le point C, puis le point D.

b) Le pliage



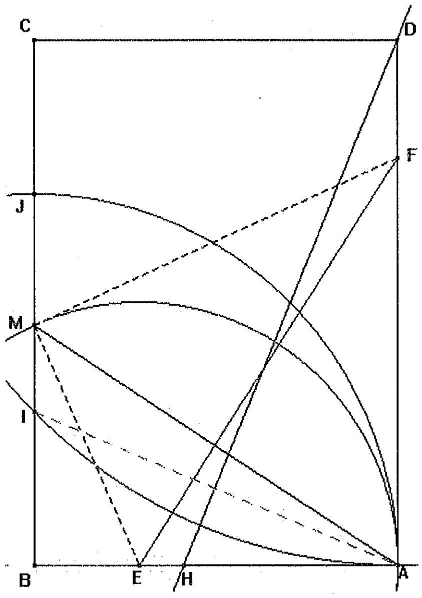
L'ensemble des points E pour lesquels le pliage est possible est un segment [HB] inclus dans [AB].

Quand E décrit [HB] le point M décrit un segment [IJ], Inclus dans [BC].

Quand M est en J, E est en B, donc BJ = BA.

Quand M est en I, F est en D, donc DI = DA.

H est l'intersection de [AB] et de la médiatrice de [AI].



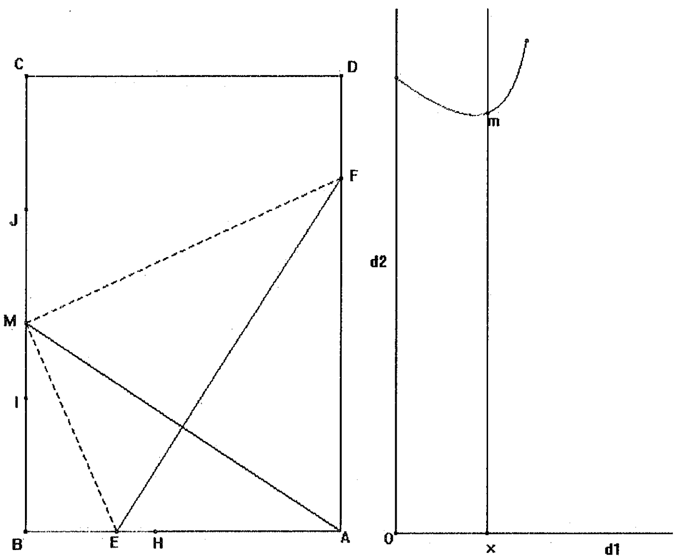
On construit donc les points H, I et J.
E est un point quelconque du segment [HB].
M est le point de [IJ] tel que EA = EM.
F est l'intersection de [AD] avec la médiatrice de [AM].

IV – Représentation des variations de EF

Sur la même page que la figure dynamique du pliage on trace deux demi-droites perpendiculaires, d_1 et d_2, de même origine O.

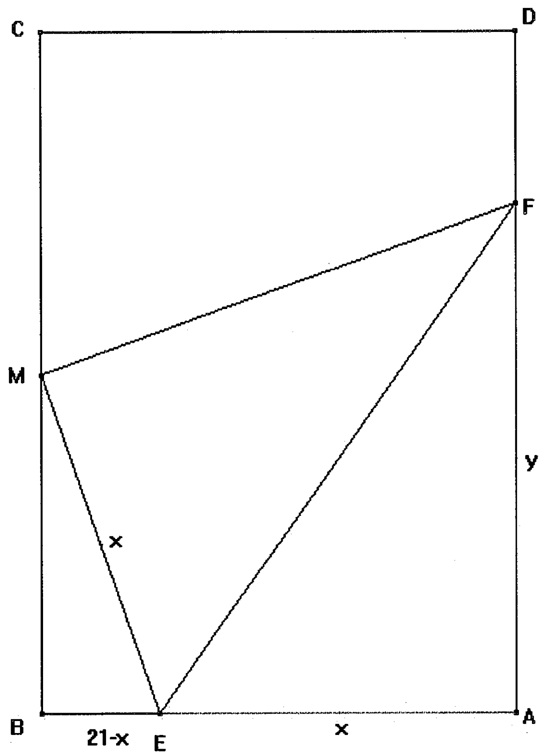
Avec l'outil $\boxed{\textbf{Compas}}$ on reporte sur d_1 la longueur EA = Ox., puis sur une demi-droite d'origine x et perpendiculaire à d_1 on reporte EF = xm.

Il reste à tracer le lieu du point m, quand E varie sur [HB] (on sélectionne l'outil $\boxed{\textbf{Lieu}}$ et on désigne successivement les points m et E).



Il semble donc que la longueur EF a une valeur minimum pour une certaine position de E.
Où se situe alors le point M ?

V – Démonstration



Dans le triangle rectangle BME on a :

BM = $\sqrt{21(2x-21)}$.

On en déduit l'aire du trapèze ABMF
:

Aire(ABMF) = $21\times\dfrac{y+\sqrt{21(2x-21)}}{2}$.

L'aire de ABMF est la somme des aires des triangles BME, AEF et EMF. Ces deux derniers triangles sont symétriques par rapport à (EF).
On a donc :

Aire(ABMF) = $xy+\dfrac{(21-x)\sqrt{21(2x-21)}}{2}$.

De l'égalité des deux expressions on tire : $y = x\sqrt{\dfrac{21}{2x-21}}$.

Dans le triangle rectangle AEF on a $EF^2 = x^2 + y^2$,

soit : $EF^2 = \dfrac{2x^3}{2x-21}$.

Considérons la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{2x^3}{2x-21}$.

Sa dérivée est la fonction f' , avec $f'(x) = \dfrac{2x^2(4x-63)}{(2x-21)^2}$.

Cette dérivée s'annule pour $x = \dfrac{63}{4}$. Elle est négative pour $x < \dfrac{63}{4}$ et positive pour $x > \dfrac{63}{4}$.

La longueur EF passe par un minimum pour $x = \dfrac{63}{4}$. Ce minimum est $EF_{min} = \dfrac{63}{4}\sqrt{3}$.

La valeur correspondante de BM est alors $21\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Or $BC = 21\sqrt{2}$, M est donc alors le milieu de [BC].

Remarque

On pourrait aussi s'intéresser aux variations de l'aire du polygone CDFEB.

Chapitre 8

L'horizon vu du satellite

Niveau Première S et aussi première et terminale STI

Notions utilisées :

Théorème de Pythagore,
tangente à un cercle,
longueur d'un arc de cercle,
asymptote .

On trouvera ,en annexe en fin de chapitre, des précisions sur l'emploi du logiciel Cabri

1 . Présentation de l'activité

Sur terre on sait par expérience que « plus on est haut, plus on voit loin »
Précisons cette idée.
a) Un observateur en bord de mer voit un bateau, qui s'éloigne, disparaître vite. Si l'observateur monte sur une colline, il verra le bateau plus longtemps. On dit que l'horizon d'un observateur s'éloigne quand son altitude augmente.
b) L'observateur est maintenant placé très haut, dans un engin spatial ; il constate que plus son altitude est grande, plus grande est la portion du globe qu'il voit .

L'activité proposée cherche à étudier d'une part comment varie la distance qui sépare un observateur de l'horizon en fonction de son altitude et d'autre part comment cette altitude influe sur la portion de terre observable

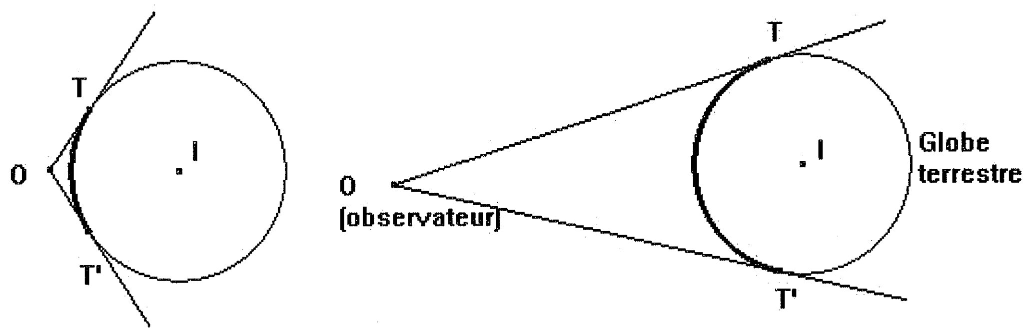


fig 1

Le rayon moyen terrestre est ici désigné par R ; à titre indicatif il vaut environ 6378 km

La longueur de l'arc TT' est nommée y. L'altitude de l'observateur est notée x.

La distance qui sépare un observateur de l'horizon s'appelle d.

Le but de l'activité est d'abord d'amener les élèves à conjecturer :

a) Les variations de la distance qui sépare un observateur de l'horizon en fonction de son altitude. Conjecturer aussi l'existence d'une asymptote au graphique représentatif de ces variations.
b) Les variations de l'arc terrestre vu par un observateur en fonction de son altitude. Conjecturer aussi l'existence d'une asymptote au graphique représentatif de ces variations.
c) L'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique permet de représenter ces variations <u>sans connaître d'expression analytique</u>.

Le but de l'activité est ensuite d'amener les élèves à démontrer ce qu'ils ont conjecturé.

2 . Étude graphique

2.1 Réalisation de la figure

Pour cela commencer par dessiner un cercle C (de centre quelconque I et de rayon 3.18 cm) qui représente la terre. On pourra faire varier le rayon de ce cercle si nécessaire.

Placer ensuite un point O à l'extérieur du cercle ; ce point O représente l'observateur. Tracer maintenant les tangentes au cercle C issues de O. Pour cela on trace le cercle C' de diamètre d'extrémité O et I ;il coupe le cercle C aux points de tangences T et T' Cette construction précise résulte de la propriété fondamentale de la tangente perpendiculaire au rayon au point de tangence.

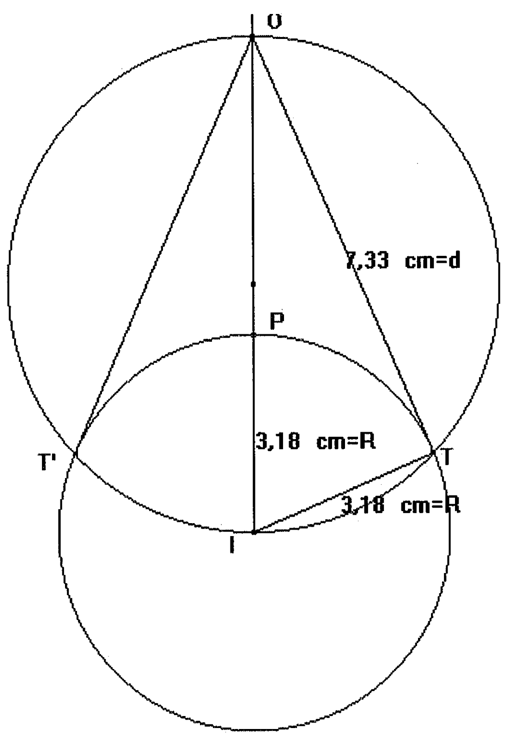


fig 2

2.2 Construction de la courbe

C_1 est la courbe représentative des variations de la distance d qui sépare un observateur de l'horizon, en fonction de son altitude x.

C_2 représentative est la courbe représentative des variations de la mesure de l'arc terrestre vu par un observateur en fonction de son altitude.

Dans un repère orthonormal on reporte en abscisse l'altitude OP de l'observateur et en ordonnée d'une part OT et d'autre part la longueur λ de l'arc d 'extrémités T et T'. Le lieu du point d'abscisse l'altitude OP et d'ordonnée la distance OT observateur – horizon est la courbe C_1 Le lieu du point d'abscisse l'altitude OP et d'ordonnée la longueur l de l'arc d'extrémités T et T' est la courbe C_2.

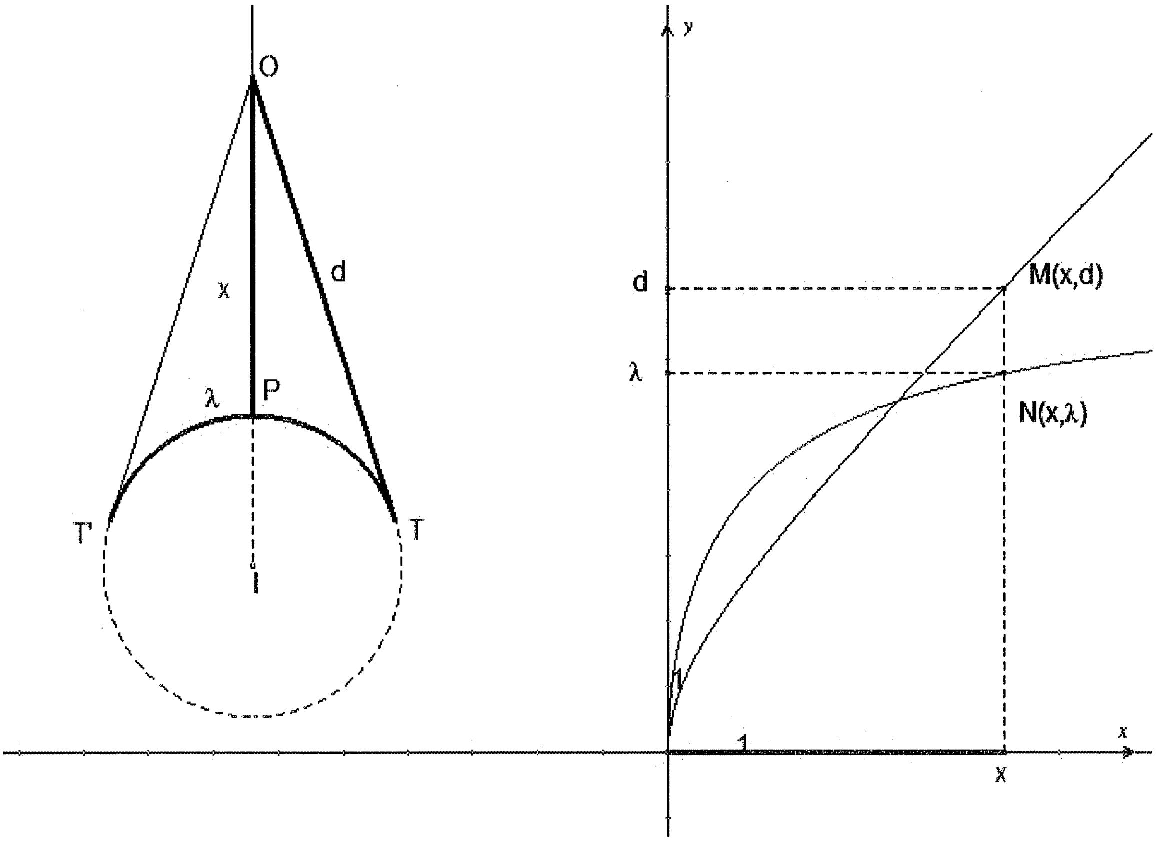


fig 3

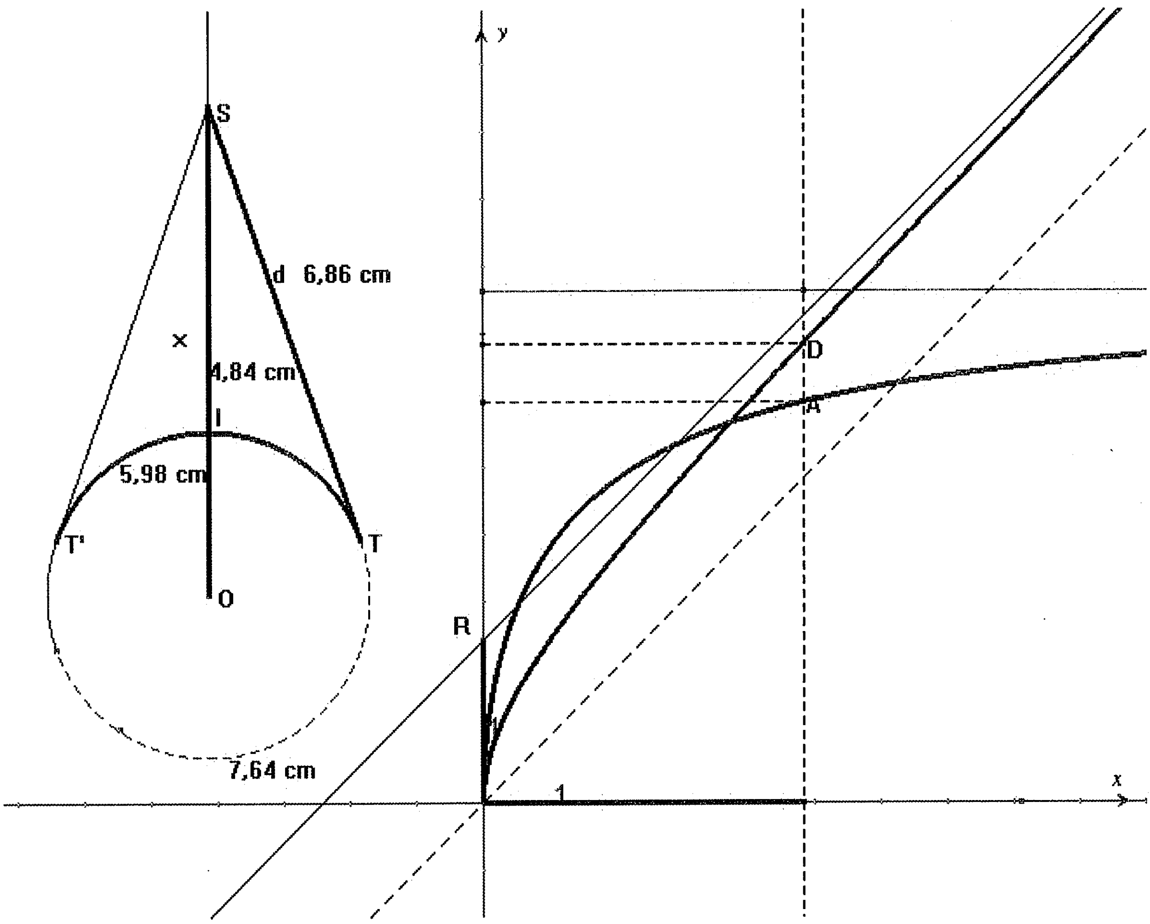
2.3 Asymptotes

Si on réduit fortement le rayon du cercle qui représente le globe terrestre, on conjecture ,d'après leurs formes que :

- La courbe C_1 a une asymptote oblique parallèle à la première bissectrice du repère et qui a comme ordonnée à l'origine le rayon terrestre.
- La courbe C_2 a une asymptote parallèle à l'axe des abscisses et une ordonnée à l'origine voisine du triple du rayon terrestre.

On peut aussi remarquer que pour un observateur placé suffisamment haut, la distance d qui le sépare de l'horizon et la distance qui le sépare du centre de la terre, sont très voisines. On peut donc penser que la courbe C_1 a pour asymptote oblique la droite D_1, d'équation $y = x + R$.

De plus un observateur placé infiniment haut voit pratiquement un demi grand cercle . On peut donc penser que la courbe C_2 a pour asymptote la droite D_2 d'équation $y = \pi R$.



3 . Démonstrations

3.1 Distance d observateur - horizon

D'après le théorème de Pythagore,

$$d = \sqrt{x^2 + 2Rx},$$

où x désigne l'altitude de l'observateur et R le rayon terrestre,

3.2 Approximation de d quand l'altitude est très grande

Démontrons que la droite D_1 d'équation $d = x + R$ est asymptote à la courbe C_1 d'équation $d = \sqrt{x^2 + 2Rx}$.

On a x>0, donc $d = x \sqrt{1 + \frac{2R}{x}}$.

Quand x tend vers l'infini , d tend vers l'infini.

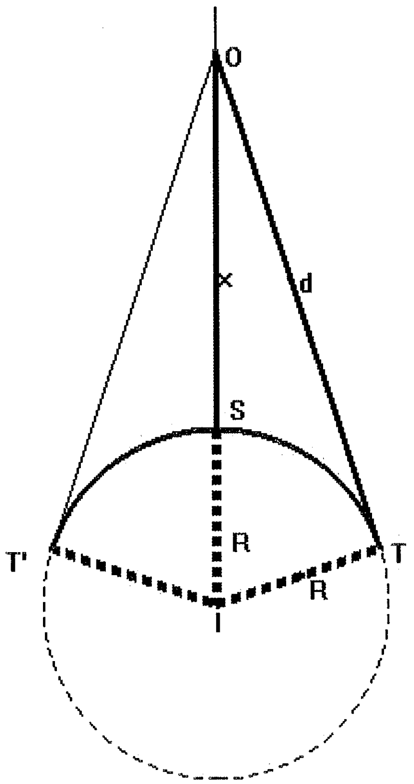
De plus

$$d - (x + R) = \frac{(\sqrt{x^2 + 2Rx} - (x + R))(\sqrt{x^2 + 2Rx} + (x + R))}{(\sqrt{x^2 + 2Rx} + (x + R))} = \frac{-R^2}{(\sqrt{x^2 + 2Rx} + (x + R))}$$

Quand x tend vers l'infini, $d - (x + R)$ tend donc vers 0. D_1 est asymptote à C.

3.3 Longueur λ de l'arc terrestre vu par un observateur situé à une altitude x

Il est plus aisé d'exprimer x en fonction de λ plutôt que λ en fonction de x



Soit α la mesure en radians de l'angle OIT

$$\cos\alpha = \frac{R}{R+x}$$

or $\alpha = \frac{\lambda}{2R}$ d'où $\cos\frac{\lambda}{2R} = \frac{R}{R+x}$

$$x = \frac{R(1-\cos\frac{\lambda}{2R})}{\cos\frac{\lambda}{2R}}$$

3.4 Approximation quand l'altitude devient très grande

Conjecture :

Quand l'observateur est infiniment haut il voit pratiquement la moitié du tour de la terre.

L'arc vu vaut alors πR

Démonstration

Quand λ tend vers πR, $\frac{\lambda}{2R}$ tend vers $\frac{\pi}{2}$ et $\cos\frac{\lambda}{2R}$ tend vers 0.

Donc x tend vers l'infini quand λ tend vers πR.

La courbe C2 a donc comme asymptote la droite d'équation $\lambda = \pi R$

Quand l'altitude devient très grande la longueur de l'arc terrestre vu est très voisine de πR.

Annexe : Détail des constructions avec Cabri

Présentation

On se propose d'étudier :

- 1) Les variations de la distance d qui sépare un observateur de l'horizon en fonction de son altitude x.
- 2) Les variations de l'arc terrestre vu par un observateur en fonction de son altitude.
- 3) Visualiser ces 2 variations en fonction de l'altitude de l'observateur à proximité de planètes plus petites que la terre pour rendre plus tangible la notion d'asymptote à une courbe.

1. **Observation directe** des variations de la distance d qui sépare un observateur de l'horizon et de l'arc terrestre visible , en fonction de son altitude x

1.1 **Dessiner un cercle qui représente la terre.**

Cercle

Activer l'outil **Point** puis cliquer en un point de l'écran.

Nommer ce point I aussitôt en tapant seulement cette lettre.

Activer l'outil **Cercle** puis cliquer en I quand apparaît à l'écran l'information « ce point ».

Faire glisser sans y appuyer la souris. Un cercle de centre I apparaît à l'écran en grandissant puis cliquer pour fixer le cercle.

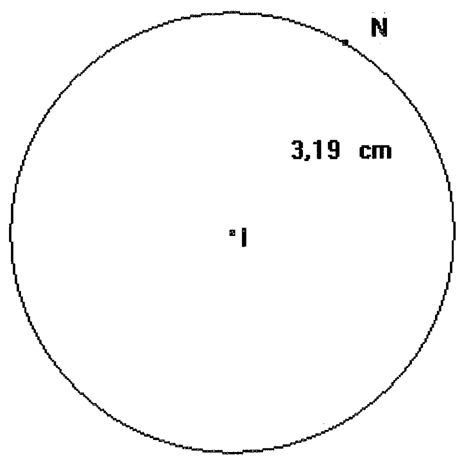
Ajustement du rayon

On décide que 1000 kilomètres sur la terre sont représentés par 1 cm sur l'écran. Le rayon terrestre sera représenté par environ 3.18 cm .

Pour mesurer le rayon du cercle placer un point quelconque N sur ce cercle . Activer l'outil **Point sur un objet** ; cliquer en un point quelconque du cercle ; nommer ce point N .

Activer l'outil **Distance** ; cliquer en I, puis en N . Activer l'outil **Pointeur** ; rapprocher le curseur du cercle , quand à l'écran apparaît « ce cercle » cliquer et laisser le bouton de la souris appuyé en la déplaçant jusqu'à ce que le rayon mesure 3.19 cm (environ).

Activer l'outil **Cacher** ; cliquer sur le point N, puis sur le bandeau gris des outils pour masquer ce point .



1.2 **Tracer des tangentes au cercle C de centre I et de rayon R issues d'un point extérieur O**

Activer l'outil **Demi – droite** . Tracer une demi-droite (verticale) en cliquant en I, puis en un point P du cercle.

Détermination des tangentes

Les points d'intersection du cercle C et du cercle de diamètre OI sont les points de tangences

Activer l'outil **Milieu** puis cliquer en O et en I.

Activer l'outil $\boxed{\textbf{Cercle}}$ et tracer le cercle qui est centré au milieu précédent et qui passe par I.

Pour définir le point d'intersection activer l'outil point sur 2 objets cliquer sur le premier cercle, puis sur le deuxième.

Activer l'outil $\boxed{\textbf{Nommer}}$, approcher le curseur du premier point d'intersection , quand l'information « ce point » apparaît à l'écran tapez au clavier T , de même pour T'

Pour tracer [OT] activer l'outil $\boxed{\textbf{Segment}}$ puis CLIQUER en O puis en T.

Mesurer ensuite OT grâce à l'outil $\boxed{\textbf{Distance}}$, de même pour OT' .

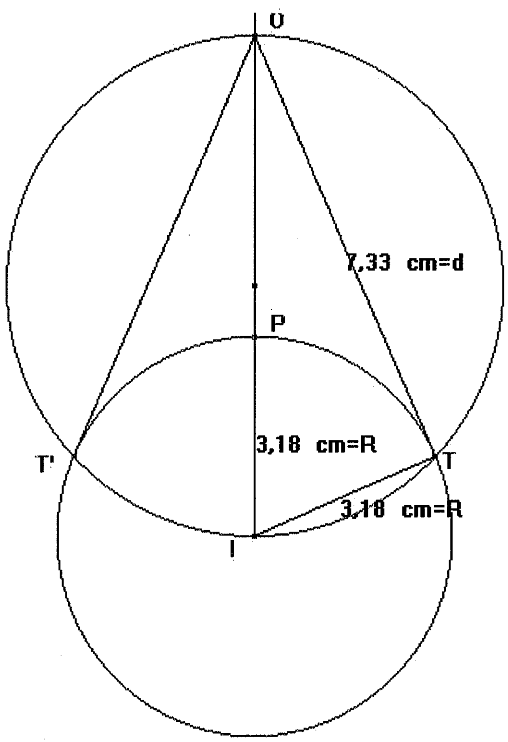


fig 2

1.3 Mise en évidence des variables sur la figure.

Distance observateur horizon : d

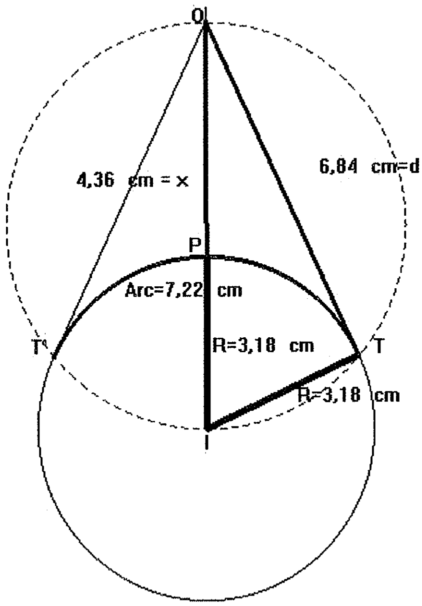
Cliquer 2 fois sur la mesure de OT autour de laquelle se dessine alors à l'écran un cadre, puis taper au clavier d.

Pour colorer en rouge [OT], activer l'outil $\boxed{\textbf{Couleur}}$. Sur la palette qui apparaît à l'écran choisir le rouge, cliquer sur cette couleur puis sur le segment .
Colorier de même d en rouge.

Altitude de l'observateur x
Mesurer OP.
En activant l'outil $\boxed{\textbf{Couleur}}$, colorier en vert [OP] et sa mesure que l'on appellera x.

Arc terrestre vu par un observateur placé à une altitude x
Définir l'arc TT' ; pour cela activer l'outil $\boxed{\textbf{Arc}}$, puis cliquer tout d'abord en T, puis en un point intermédiaire de cet arc, puis en T' .
Activer l'outil $\boxed{\textbf{Mesure}}$. Approcher le curseur de l'arc TT' : la mention « quel objet ? » apparaît à l'écran. Choisir l'objet arc .
Activer l'outil $\boxed{\textbf{Couleur}}$ et colorier l'arc TT' et sa mesure en violet.

Rayon terrestre R
Tracer le segment IT, puis le mesurer. Appeler R cette mesure.



Cliquer sur O ; garder le bouton de la souris appuyé : la figure s'anime et on peut conjecturer que, quand x est grand, d est voisin x + R et que l'arc TT' tend vers une limite voisine de 3 R .

2. Tracé de la courbe C_1 qui représente la variation de la distance d, en fonction de l'altitude x de l'observateur et de la courbe C_2, variations de l'arc TT'.

2.1 Repère

Activer l'outil $\boxed{\textbf{Montrer les axes}}$: des axes de coordonnées apparaissent. Le repère est orthonormé. L'unité est le centimètre.

2.2 Points D(x,d) et A(x,arc TT')

Activer l'outil $\boxed{\textbf{Report de mesure}}$.Désigner successivement la mesure x et l'axe des abscisses. Nommer H le point obtenu, de coordonnées(x,0).

Activer l'outil $\boxed{\textbf{Report de mesure}}$et placer le point D(x ; d).

Activer l'outil $\boxed{\textbf{Report de mesure}}$ et placer le point A(x ; arc TT').

2.3 Tracé des courbes

Activer l'outil $\boxed{\textbf{Lieu}}$. Cliquer en D, puis en O (point moteur de la construction) : la courbe C_1 est alors tracée . Le lieu peut être amélioré en utilisant l'option préférence et en augmentant le nombre de points qui définissent ce lieu .

Activer l'outil $\boxed{\textbf{Lieu}}$. Cliquer en A puis en O : C_2 est alors tracée.

Pour donner d es couleurs différentes aux courbes tracées, activer l'outil $\boxed{\textbf{Couleur}}$, cliquer sur le rouge (sur la palette qui apparaît à l'écran) , puis sur C_1. Cliquer sur le violet puis sur C_2 .

2.3 Mise en évidence des asymptotes

Pour un observateur placé suffisamment haut, la distance d qui le sépare de l'horizon et la distance qui le sépare du centre de la terre, sont très voisines , On peut donc penser que la courbe C_1 a pour asymptote oblique la droite D_1 : (y = x + R)

Un observateur placé infiniment haut voit un demi grand cercle . On peut donc penser que la courbe C_2 a pour asymptote la droite D_2 : ($y = \pi R$).

Tracé de D_1

Activer l'outil **Bissectrice**. Cliquer en I, puis en O, puis en J .

On trace ainsi la droite D'_1 : ($y = x$).

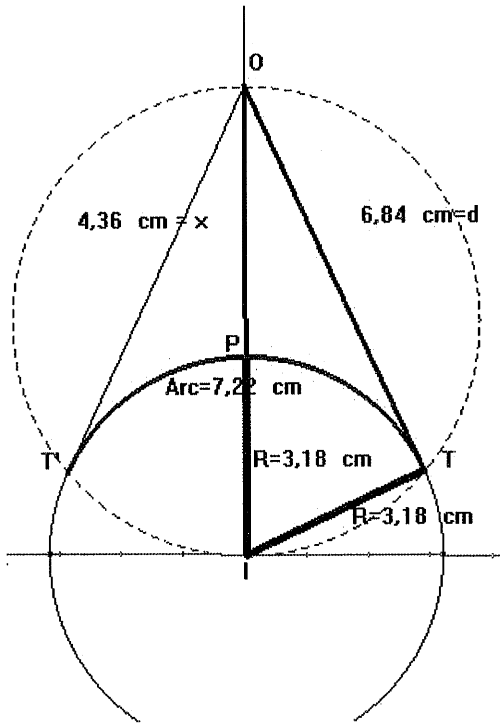
Placer le point K (O ; R), puis par ce point tracer la parallèle D_1 à D'_1 .

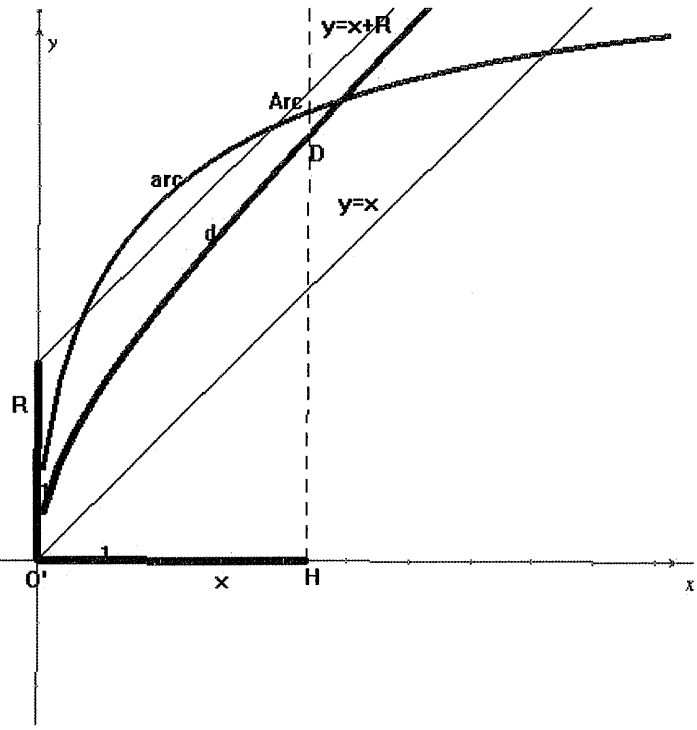
La conjecture D_1 asymptote à C_1 se concrétise alors.

Tracé de D_2

Par le point K' (0 ; π R) tracer la perpendiculaire D_2 à (OJ).

La conjecture D_2 asymptote à C_2 se concrétise assez mal pour la rendre plus évidente il suffit de diminuer R .





Chapitre 9

Lieu des points M tels que MA/MB = k

Présentation de l'activité

Le but est d'étudier d'abord l'ensemble des points du plan dont le rapport des distances à deux points fixes est constant. Puis d'envisager l'évolution de cet ensemble quand le rapport varie.
Un logiciel de géométrie dynamique permet de visualiser l'ensemble cherché ainsi que son évolution et de tracer une courbe sans connaître son équation. Il permet aussi de vérifier des calculs par la superposition de deux graphiques. Ce logiciel permet ici de bien souligner la cohérence des conjectures géométriques et graphiques qui guident l'étude théorique.

Niveau et notions utiles

L'activité s'adresse aux classes de première et terminale S. On peut l'adapter pour les premières et terminales STI.

Notions utilisées :

- Géométrie analytique : distance de deux points, équations de cercles .
- Analyse : Définition du sens de variation d'une fonction (interprétation graphique, signe de la dérivée).
- Géométrie vectorielle (facultatif). Barycentre de deux points pondérés, calcul vectoriel.
- Produit scalaire.

1. Premier problème

1.1 Énoncé

Soient deux points distincts A et B séparés par une distance a.

Soient un réel k strictement positif et différent de 1.

Déterminer les points N de la droite (AB) tels que $\frac{NA}{NB} = k$

1.2 Une construction pour résoudre le problème

On construit les points E, F et G tels que :

- E appartient à la perpendiculaire en A à (AB),
- F appartient à perpendiculaire en B à (AB),
- F et G sont symétriques par rapport à B,
- AE = k,
- BF = BG = 1,
- E et F sont dans le même demi-plan limité par (AB).

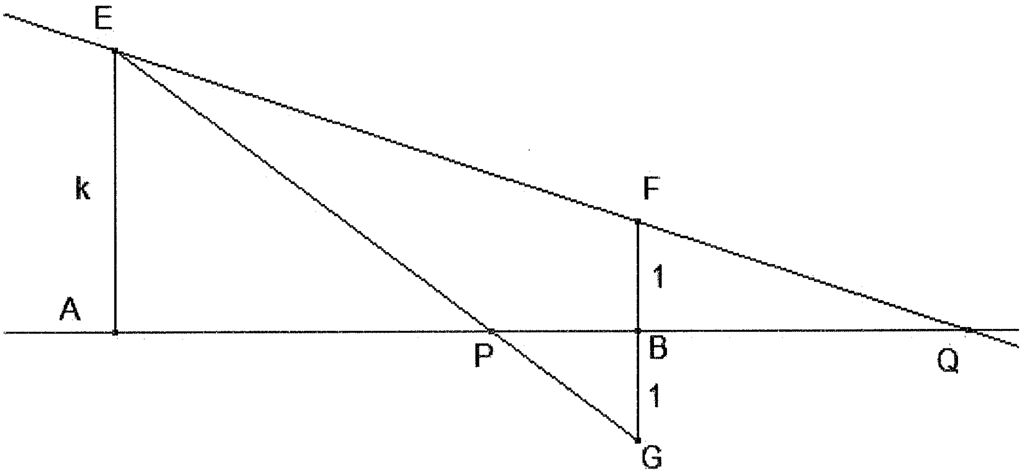


figure 1

Le segment [EG] coupe le segment [AB] en P et la droite (EF) coupe la droite (AB), à l'extérieur du segment [AB], en Q.

Par application du théorème de Thalès on a : $\frac{PA}{PB} = \frac{QA}{QB} = k$.

On pourra avec un logiciel de géométrie dynamique faire des remarques sur l'évolution des positions des points P et Q quand k varie.

2. Deuxième problème

2.1 Énoncé

Soient deux points distincts A et B séparés par une distance a.

Soient un réel k strictement positif et différent de 1.

Déterminer les points N du plan tels que $\frac{NA}{NB} = k$

2.2 Étude expérimentale

2.2.1 Construction du lieu pour une valeur de k

Soit M un point quelconque de la droite (AB).

On trace le cercle C_2, de centre B, passant par M, puis le cercle C_1 de centre A et de rayon k BM.

On déplace éventuellement M sur (AB) de façon que les cercles se coupent en deux points N_1 et N_2. On a donc $\frac{N_1A}{N_1B} = \frac{N_2A}{N_2B} = k$.

Le logiciel permet de tracer les lieux des points N_1 et N_2 quand M décrit la droite (AB).

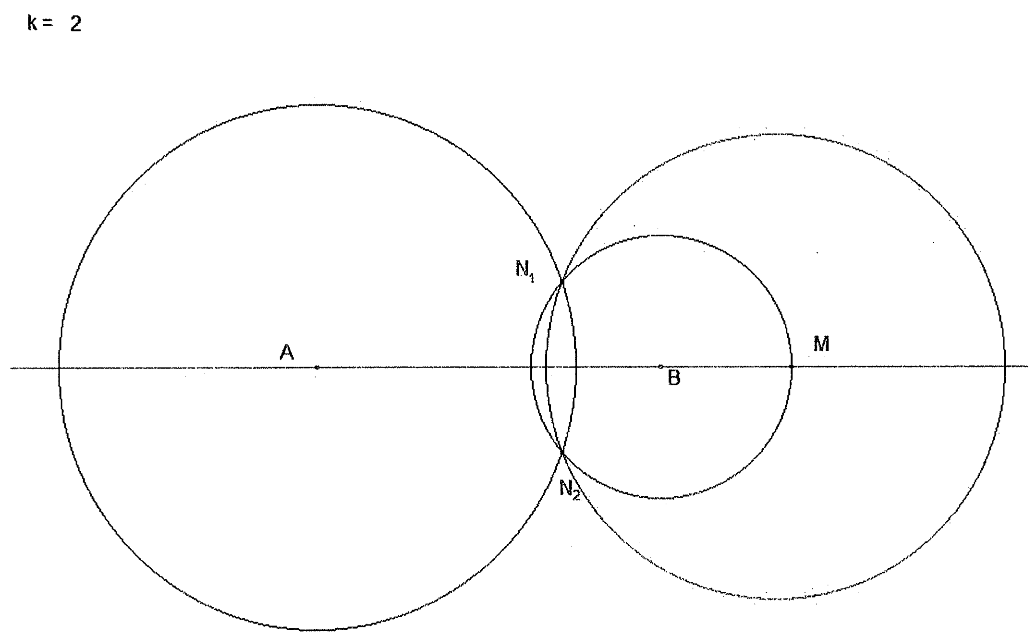


figure 2

Tous les points N_1 et N_2 semblent appartenir à un même cercle.

2.2.2 Variations de k

On constate en refaisant la construction précédentes pour diverses valeurs de k que l'ensemble des points N_1 et N_2 semble toujours être un cercle.

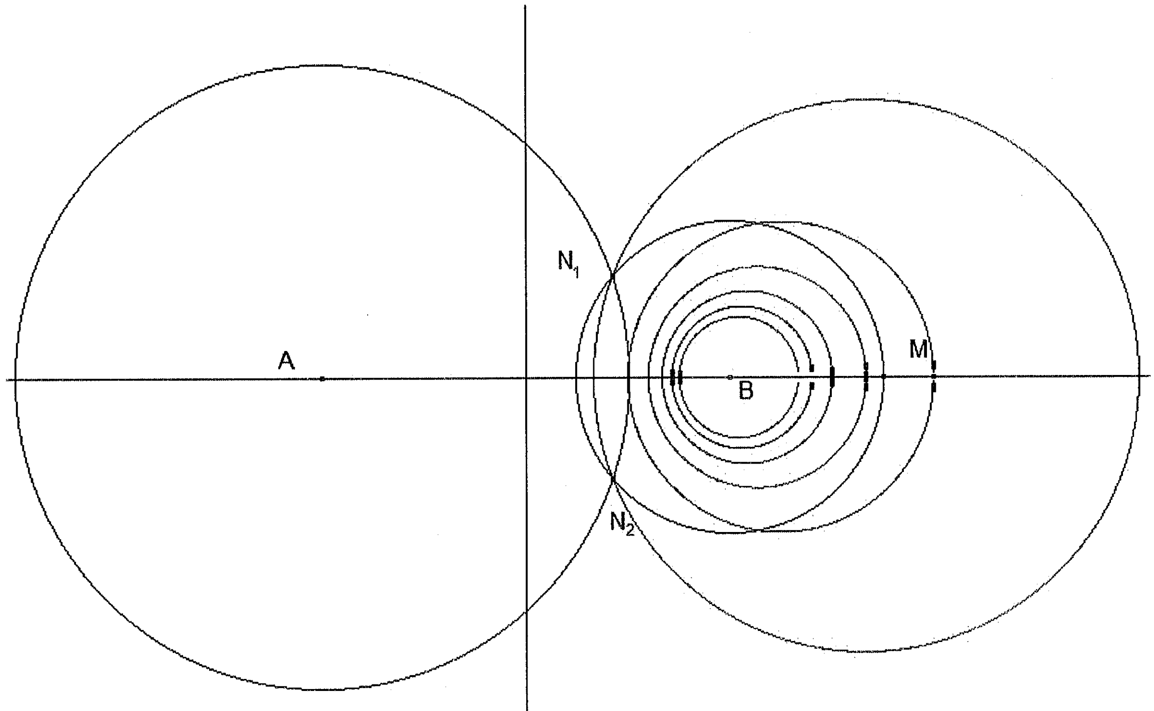


figure 3

On remarque que pour k = 1 on obtient la médiatrice de [AB].

On peut donc énoncer la conjecture :
Étant donné un réel k, strictement positif et différent de 1, l'ensemble E_k des points N du plan dont le rapport à deux point fixes A et B est égal à k, est un cercle. Ce cercle à pour diamètre [PQ], P et Q étant les points de la droite (AB) tels que : $\frac{PA}{PB} = \frac{QA}{QB} = k$.

3. Étude théorique

On rappelle deux démonstrations classique de la conjecture énoncée ci-dessus.

3.1 Méthode vectorielle

Soit k un réel positif différent de 1 et deux points distincts A et B .
On désigne par P le barycentre de (A,k) et (B,1) et par Q celui de (A,k) et (B,-1).

Montrons que l'ensemble des points N tels que $\frac{NA}{NB} = k$ est le cercle de diamètre [PQ].

$$\frac{NA}{NB} = k \quad \Leftrightarrow \quad \frac{NA^2}{NB^2} = k^2$$

$$\Leftrightarrow \quad k^2NB^2 - NA^2 = 0 \quad \text{car } A \neq B$$

$$\Leftrightarrow \quad (k\,\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NA}).(k\,\overrightarrow{NB} - \overrightarrow{NA}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (k\,\overrightarrow{NP} + k\,\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PA}).(k\,\overrightarrow{NQ} + k\,\overrightarrow{QB} - \overrightarrow{NQ} - \overrightarrow{QA}) = 0\,.$$

$$\Leftrightarrow \quad ((k+1)\,\overrightarrow{NP}).((k-1)\,\overrightarrow{NQ}) = 0\,.$$

On a donc $\frac{NA}{NB} = k \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{NP}.\overrightarrow{NQ} = 0$

L'ensemble cherché est donc le cercle de diamètre [PQ].

3.2 Méthode analytique

Soit un repère orthonormal d'origine O. Soient k un réel positif différent de 1, a un réel strictement positif et les points A (a,0) et B (-a,0).

$$\frac{NA}{NB} = k \quad \Leftrightarrow \quad \frac{NA^2}{NB^2} = k^2 \quad \Leftrightarrow \quad k^2NB^2 - NA^2 = 0$$

Donc

$$\frac{NA}{NB} = k \quad \Leftrightarrow \quad k^2\left[(x+a)^2 + y^2\right] - \left[(x-a)^2 + y^2\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - k^2x^2 - k^2a^2 - 2k^2xa - k^2y^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = x^2(1-k^2) - 2ax(k^2+1) + y^2(1-k^2) + a^2(1-k^2)$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = x^2 + y^2 + \frac{2ax(k^2+1)}{k^2-1} + a^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = \left[x - \frac{a(k^2+1)}{k^2-1}\right]^2 + y^2 + a^2 - \left[\frac{a(k^2+1)}{(k^2-1)}\right]$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = \left[x - \frac{a(k^2+1)}{k^2-1}\right]^2 + y^2 + a^2 - \frac{a^2(k^2+1)^2}{(k^2-1)^2}$$

Donc l'ensemble cherché est le cercle de centre $I_K\left(\frac{a(k^2+1)}{k^2-1}\ ;0\right)$ et de rayon R,

avec $R^2 = \frac{a^2(k^2+1)^2}{(k^2-1)^2} - a^2 = \frac{4a^2k^2}{(k^2-1)^2}$.

Donc $R = \frac{2ak}{|k^2-1|}$.

4. Variations du rayon du cercle

4.1 Étude expérimentale

On peut représenter les variations du rayon du cercle en fonction de k à partir de la construction du paragraphe 1.2.

Soit I le milieu du segment [PQ].

On considère un repère orthonormal, avec pour unité BF = 1.

Dans ce repère on place un point M(x,y) tel que x = AE = k et y = IP.

Le point E se déplace sur une demi-droite perpendiculaire à (AB) passant A.

Il suffit de faire tracer le lieu du point M quand E parcourt la demi-droite.

On obtient ainsi une représentation graphique des variations du rayon du lieu géométrique étudié aux paragraphes précédents sans connaître d'expression analytique du rayon en fonction de k.

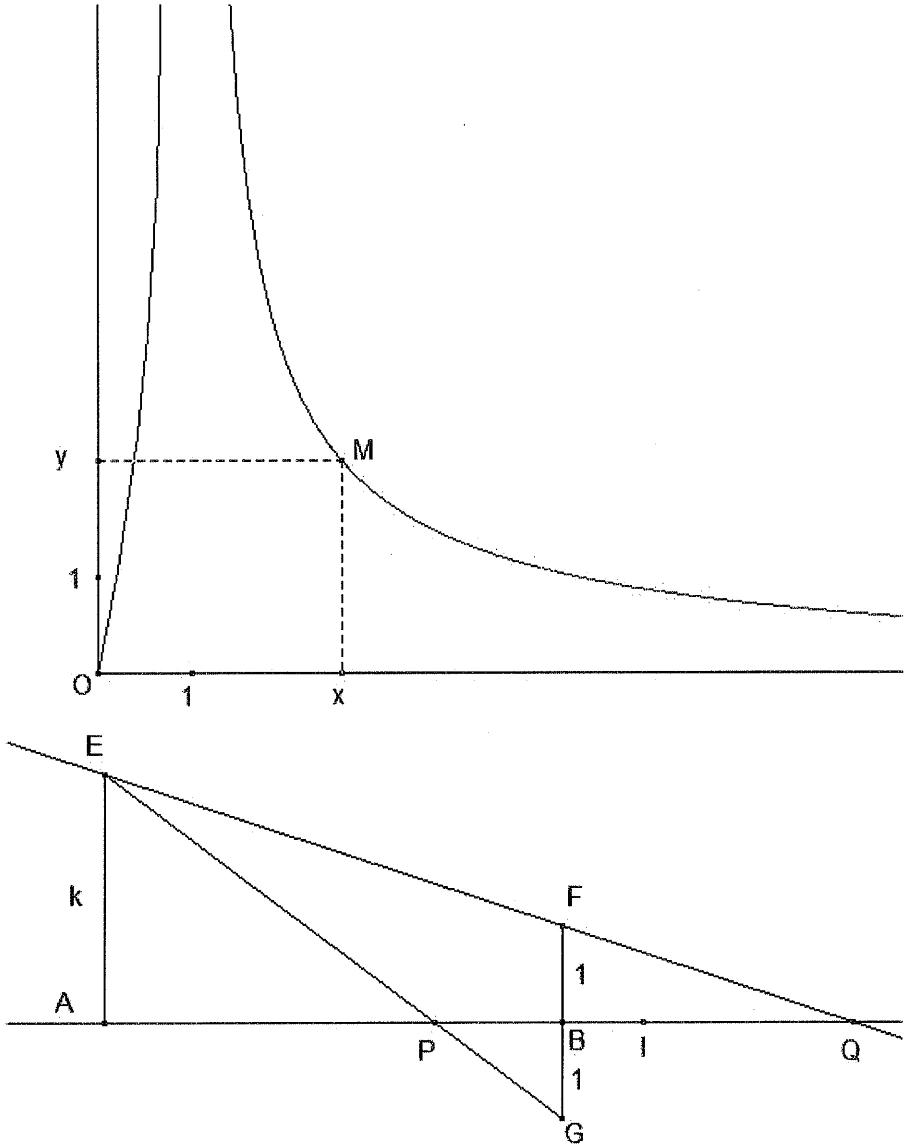


figure 4

La représentation graphique et la figure dynamique permettront de faire des conjectures sur le sens de variation de la fonction et l'existence de deux asymptotes, une verticale et une horizontale.

4.2 Étude théorique

On a trouvé au paragraphe 3.2 une expression analytique du rayon en fonction de k.
On pourra donc vérifier les conjectures faites en étudiant les variations de la fonction R définie par $R(k) = \dfrac{2ak}{|k^2 - 1|}$.

Chapitre 10

Suite récurrente

Présentation de l'activité

La détermination d'une relation donnant le terme de rang n d'une suite définie par une relation de récurrence est une activité classique qui a fait l'objet de sujets proposés à l'expérimentation de l'épreuve pratique de terminale S.
La calculatrice ou le tableur sont généralement les outils utilisés dans ces exercices, mais un logiciel de géométrie dynamique peut se révéler tout aussi performant pour aborder une telle étude.

Niveau et notions utiles

Cette activité est donc proposée en terminale S.
Du point de vue de l'usage du logiciel elle nécessite la connaissance de la définition d'une nouvelle commande.

- Constructions élémentaires.
- Représentations graphiques d'une suite et d'une fonction.
- Équation d'une courbe.

1. Enonce

Expérimentation 2007 – sujet 001

On considère la suite récurrente (u_n) de premier terme $u_0 = 0$ et telle que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + 2n - 11$.

1. En utilisant un tableur ou une calculatrice calculer et représenter graphiquement les 20 premiers termes de cette suite. Le nuage de points obtenus a-t-il une particularité ? Si oui laquelle ?

Appeler l'examinateur pour une vérification de la particularité trouvée.

2. n étant donné, on peut calculer la valeur de u_n si on connaît la valeur de u_{n-1}. On voudrait à présent pouvoir calculer, pour n'importe quelle valeur de l'entier naturel non nul n, la valeur de u_n sans pour autant connaître la valeur de u_{n-1} . Pour cela il faudrait disposer d'une formule donnant u_n en fonction de n.

(a) A l'aide des observations faites dans la première question, conjecturer une formule donnant, pour n'importe quelle valeur de l'entier naturel n, u_n en fonction de n. Appeler l'examinateur pour une vérification de la formule trouvée.

(b) Démontrer cette formule.

Production demandée

– Le nuage de points attendu dans la question 1 et la particularité trouvée à ce nuage.

– La stratégie de démonstration retenue à la question 2 ainsi que les étapes de cette démonstration.

1. Construire le nuage de points

1.1 Ajouter une commande au logiciel

Soit dans un repère donné le point P_n de coordonnées (n ; u_n).

Une construction simple permet de construire, à partir du point P_n, le point P_{n+1}, de coordonnées (n +1 ; u_{n+1}).

Cette construction peut se faire à partir d'un point quelconque du plan considéré comme point P_n . On peut ainsi définir une « macro-construction » (Cabri) ou un « outil » (Géogébra) permettant d'obtenir le « point suivant » d'un point donné, dans un repère donné.

1.2 Le nuage de points

Le point P_0 est l'origine du repère. A partir de ce point on construit les points suivants du nuage en utilisant la nouvelle commande.

L'énoncé demande la construction de 20 points, ce qui est assez fastidieux (à moins que l'on définisse une deuxième commande permettant de construire les 5 points suivants d'un point donné), mais, pouvoir utiliser les possibilités du logiciel, il suffit d'avoir 5 points représentant les termes de la suite.

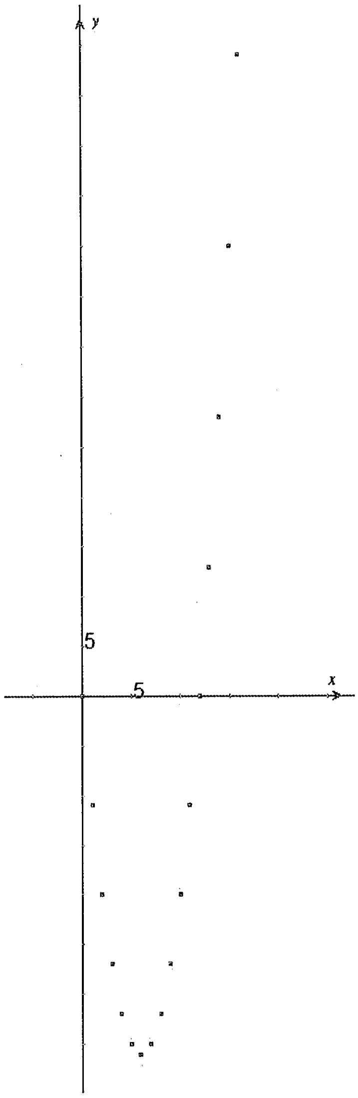
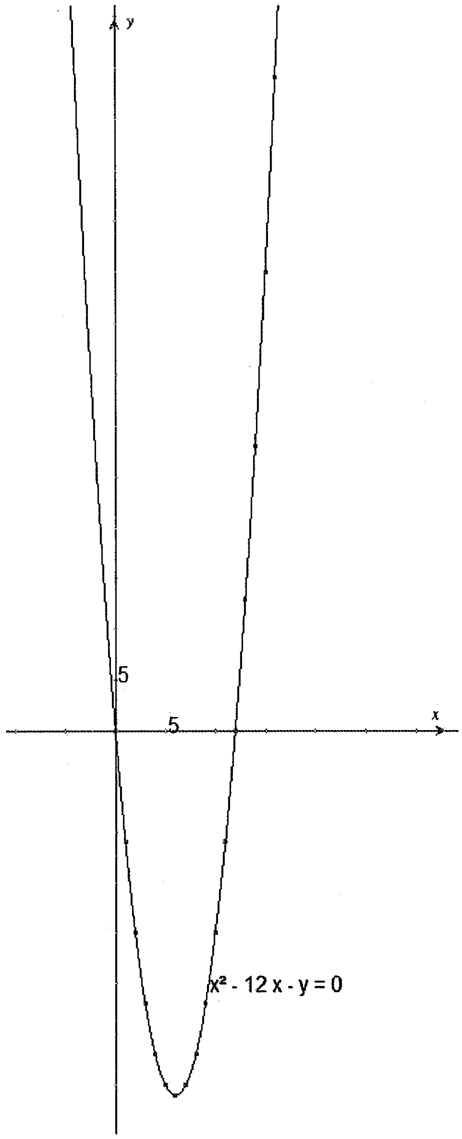


Figure réalisée avec Cabri II plus

2. Conjecturer la formule

Le nuage de point a une « allure parabolique ». On fait tracer par le logiciel la conique passant par cinq points du nuage. On obtient une parabole et on peut vérifier que tout autre point du nuage semble se trouver sur cette parabole.
Il suffit alors de demander une équation de cette parabole : on obtient $y = x^2 - 12x$, ce qui permet de conjecturer que pour tout n, $U_n = n^2 - 12n$.



3. Généralisation

La « macro » ou « l'outil » créé peut être paramétré pour étudier toutes les suites définie par la donnée du premier terme u_0 et une relation de récurrence du type $u_{n+1} = u_n + a \times n - b$.

Notions abordées dans les différents chapitres

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Angle inscrit		*	*							
Asymptote				*	*			*		
Cas d'égalité des triangles				*						
Cercle circonscrit à un triangle rect		*		*						
Constructions élémentaires	*		*		*		*			*
Droite des milieux				*						
Équation du 2° degré						*				
Équation d'une courbe			*	*		*				*
Fonctions de référence			*							
Formules de trigonométrie			*							
Géométrie analytique			*			*		*	*	
Géométrie vectorielle									*	
Homothétie		*				*				
Interprétation géométrique du nb dérivé			*							
Lieu géométrique – ensemble de points		*	*	*		*			*	
Longueur d'un arc de cercle								*		
Majoration						*				
Produit scalaire									*	
Propriété de la médiatrice				*						
Propriété de Thalès			*	*	*					
Recherche d'extremum	*						*			
Représentation graphique	*	*		*	*		*			*
Sens de variation		*				*	*		*	
Signe de la dérivée	*								*	
Tangente à un cercle								*		
Théorème d'Al-Kashi						*				
Théorème de Pythagore ou réciproque	*							*		
Triangles semblables		*								
Trigonométrie dans le triangle rectangle			*							

Titre	Montrer et démontrer
Auteurs	Gérard Armengaud et Jean-Marie Sainsot
Public concerné	Enseignants de mathématiques, niveau lycée
Mots clés	Géométrie dynamique – Cabri – Activités – Expériences géométriques – Approche expérimentale – Conjecturer – Démontrer.
Résumé	Activités mathématiques expérimentées dans des classes de lycée avec un logiciel de géométrie dynamique.
Format	A4
Nombre de pages	93
Éditeur	IREM de Limoges – 123 Avenue Albert Thomas 87060 LIMOGES CEDEX Tél : 05 55 45 72 49 – Fax : 05 55 45 73 20 Courriel irem@unilim.fr
Date	Février 2010
Responsable de la publication	M. Abdelkader NECER, directeur de l'IREM

IREM DE LIMOGES

ISBN : 2-910165-16-7