



AIRES ET INTÉGRALES

Georges LION

123, Avenue Albert Thomas - 87060 LIMOGES CEDEX
Tél. : 05 55 45 72 49 - Fax : 05 55 45 73 20
Mél : irem@unilim.fr - <http://www.unilim.fr/irem>

Préface

Le texte de Georges Lion passera certainement inaperçu au lecteur inattentif. En effet le sujet, « aires et intégrales », n'est pas celui qui pose le plus de problèmes dans le nouveau programme du lycée, lequel est infiniment supérieur sur ce point à ce que l'on a pu connaître, au temps de l'existence admise de primitives pour les fonctions ... dérivables par exemple.

Aussi pourrait-on penser que le texte s'attache à des détails. C'est un peu vrai, mais derrière ces détails se cache toute la philosophie de notre enseignement, de l'école élémentaire à l'université. C'est ainsi que le programme parle de courbe de la fonction f là où l'auteur corrige par courbe représentative, tant il est vrai qu'une courbe n'est pas directement constitutive de la définition d'une fonction. C'est surtout ainsi que ce même programme introduit la « notation $\int_a^b$ comme aire », de la même façon qu'il introduit la notation $\lim_a f$ pour formaliser la notion intuitive de limite, comme si les notations s'autodéfinissaient et rendaient naturellement correct un discours qui ne l'est pas.

Le mérite de la présentation de George Lion est de se placer dans la limite d'interprétation du nouveau programme tout en reprenant le support intuitif de ceux qui étaient en vigueur il y a quelques décennies. Cependant il renouvelle ces derniers en leur conférant rigueur et clarté. Pour cela il s'appuie sur quelques propriétés simples de l'intégrale : celle d'une constante, la positivité, la relation de Chasles. D'un côté ces propriétés se voient aussitôt sur les aires. De l'autre ce sont des propriétés qu'il faut impérativement dégager pour l'application courante de l'intégrale.

On noterait que les propriétés citées ne caractérisent pas l'intégrale dans le cas général d'une fonction bornée sur un segment. L'auteur remarque que c'est le cas pour une classe assez large de fonctions, celles qui se laissent approcher par des fonctions en escalier. Cela ouvre la voie à une vraie définition, celle de Riemann, pour les fonctions d'une telle classe. Soucieux du niveau auquel le texte s'adresse, l'auteur ne s'y engage évidemment pas. D'ailleurs on sait bien que l'intégrale d'une fonction générale ne peut être caractérisée sans propriété de passage à la limite. Mais cela ferait l'objet d'un cours ultérieur.

Une analyse sommaire pourrait trouver un point faible dans cette présentation, non pas sur le plan épistémologique mais au vu du contenu réel du programme. L'auteur s'appuie ainsi sur la notion de continuité, notamment pour établir « le théorème fondamental de l'Analyse ». Or la continuité ne reçoit pas de traitement digne dans le programme et c'est plus grave encore que pour la notion d'aire. Cependant cela n'enlève rien à la pertinence du texte. Les exemples de calcul de limites, dans la dernière partie sur « ce que l'intégrale permet de faire », sont infiniment plus naturels et formateurs que la vaine prétention de faire découvrir le formalisme que les commentaires officiels nous servent.

Ainsi, banal à première vue mais finalement si profond, d'une rigoureuse honnêteté et d'une lumineuse concision, ce petit texte est aux antipodes des productions pédantes d'aujourd'hui. J'envie l'IREM de Limoges de disposer bientôt de ce petit bijou parmi ses publications.

J.-P. Ferrier
Professeur à l'Université de Nancy
Directeur de l'IREM de Lorraine

I Introduction

Concernant une fonction f continue positive sur $[a, b]$, le programme actuel de Terminale S. (cf. annexe) préconise "l'introduction de la notation $\int_a^b f(x)dx$ comme aire sous la courbe" (j'ajoute ... représentative de f). On pourrait plutôt parler de "mesure d'aire" puisque l'intégrale est un nombre réel et expliquer quelle est l'unité d'aire envisagée, en rapport avec les unités choisies sur les axes, ce rapport assurant le caractère intrinsèque de l'intégrale.

A cette lecture, et nonobstant ces précisions (indispensables si l'on prétend définir une notion mathématique), on demeure toutefois en proie à une certaine perplexité. En effet s'agit-il :

- a) de définir l'intégrale comme étant égale à l'aire supposée déjà mathématiquement connue des élèves, auquel cas il faudrait dire notion au lieu de notation ;
ou
- b) de donner seulement une représentation concrète de l'intégrale de f , auquel cas cette dernière resterait à définir mathématiquement ?

On ne peut nier que la rédaction du programme soit assez concise pour que deux lectures en soient permises.

La lecture des commentaires du programme vient alors à point nommé pour nous éclairer. Selon ces derniers : "les élèves ont une notion intuitive d'aire". On peut noter l'emploi de "ont" et non pas de "doivent avoir" ou "devraient avoir" ; il s'agit donc de nous placer au plan du réalisme et les acquis supposés ne concernent que l'intuition.

Sans malice on ne peut s'empêcher de rapprocher de telles constatations d'une déclaration officielle datant de 1996, jamais démentie depuis lors, et selon laquelle la priorité de l'Enseignement des Mathématiques serait désormais l'Analyse (avec un A majuscule). Une telle référence à une discipline nettement identifiée comme moderne est indéniablement favorable à l'image de marque. Mais elle interdit, me semble-t-il, de s'en remettre à un savoir nébuleux ou à la magie d'un mot pour définir une notion fondamentale telle que l'intégrale. Cette première information milite en faveur du choix du b) ci-dessus.

En effet, si nous examinons ce que les élèves connaissent réellement de l'aire nous devons convenir que cette connaissance se limite à une comparaison des aires et non à leur mesure. C'est d'ailleurs un problème général que connaissent bien les professeurs : les élèves savent que la fusée Ariane va plus vite que Maurice Greene¹, mais cela ne les gêne nullement pour affirmer que le champion olympique court à plus de 36.000 km à l'heure. Et même si ce dernier constat paraît pessimiste, n'oublions

¹triple champion du monde du 100 m

pas que le programme évoque une connaissance intuitive seulement. Or chacun sait que l'intuition, pour indispensable qu'elle soit en vue d'obtenir des convictions, n'a jamais suffi pour accéder à la certitude scientifique.

Au contraire du choix de certains manuels, il me semble donc qu'on doit se détourner du point de vue a) en raison de son manque de réalisme : qui pourrait prétendre que les élèves de Terminale connaissent mathématiquement d'autres aires que celle du triangle, celles de certains quadrilatères et peut-être celle du disque ?

Par ailleurs la question de "l'extension aux fonctions (continues) de signe quelconque" est embarrassante car une telle fonction peut changer de signe une infinité de fois ; se restreindre aux fonctions continues et monotones par morceaux serait également illusoire : ces fonctions ne forment pas un espace vectoriel et la linéarité de l'intégrale y serait bizarrement partielle.

Enfin, cet obstacle étant surmonté, comment démontrer la dite linéarité sinon en faisant appel aux primitives ? La lecture du programme dissuade pourtant de procéder ainsi puisque les deux chapitres "Intégration" puis "Intégration et dérivation" sont clairement séparés. Aussi, je voudrais dans les lignes qui suivent proposer conformément à b), une définition de l'intégrale, bien assurée mathématiquement, et dont l'élaboration trouve précisément dans le recours à l'aire un guide accessible et efficace (§III). Au préalable il faudra consulter l'histoire de l'Analyse afin d'y puiser certaines des idées qui ont marqué l'évolution de la notion d'aire et de celle de primitive (§II).

En dernier lieu, emportés par cet élan, nous espérons montrer ce que le recours à l'aire peut apporter à l'enseignement de l'Analyse, tant il est vrai qu'une telle démarche ne saurait être gratuite et réduire l'aire au seul rôle d'illustratrice (§IV). Mais, avant toutes choses, le lecteur doit être persuadé qu'en matière d'enseignement des Mathématiques, il n'existe aucune "voie royale" ; ceci est particulièrement vrai en Analyse, plus encore par exemple qu'en Géométrie dont les fondements sont faciles à expliciter comme l'ont montré des ouvrages récemment parus.

Il paraît également inévitable d'établir des recours "hors de l'Analyse" sans rompre pour autant la cohérence mathématique et pédagogique. Il faut aussi admettre en distinguant ce qui est trop difficile à démontrer de ce qui constitue un postulat.

Enfin, quelle que soit la méthode d'exposition choisie, l'honnêteté intellectuelle doit présider d'une part à l'argumentation visant à valoriser cette méthode et d'autre part à la mise au point des compensations apportées aux faiblesses inhérentes à la dite méthode. Ce sont les règles que je voudrais respecter dans ce qui suit et sur lesquelles j'espère au moins l'accord du lecteur.

II Le poids de l'histoire

Pour résoudre le problème du mouvement uniformément accéléré ($v = kt + v_0$), Galilée introduit l'aire sous la "courbe" représentative de v ; notons qu'ici cette courbe est un segment de droite et qu'ainsi l'aire en question est parfaitement connue.

Le travail de Galilée, au delà de son objectif direct, constitue un fait historique incontournable et cela est d'autant plus instructif que ce travail ne pouvait faire aucune référence à la notion de dérivée due à Newton un siècle plus tard.

On peut y voir l'une des raisons qui font évoquer par Marc Rogalski (Carrefours, éditions Ellipses 2001) le risque d'une "redoutable confusion épistémologique" à propos de la définition de l'intégrale de f comme différence des valeurs prises par une primitive de f .

D'ailleurs, l'invention du calcul différentiel n'a pas fait disparaître le recours à l'aire : les sommes de Riemann sont des aires et leurs limites peuvent par extension garder ce nom sans risque de contradiction ; c'est ainsi que l'entendent les auteurs de la collection Transmaths (A. Antibi et al., Terminale S, Nathan 2002).

Le mot "quadrature", sans ambiguïté dans l'Antiquité, est devenu peu à peu synonyme de recherche de primitives : il y a peu, on parlait encore de la résolution de telle équation différentielle au moyen de n quadratures (voir Picard-Vessiot) ou bien encore de l'équation de Riccati insoluble au moyen des seules quadratures.

Enfin, les méthodes de résolution approchée des équations différentielles mettent en jeu des calculs d'aires et ceci plus encore de nos jours en raison de l'utilisation des machines à programmes.

Par l'évocation de ces seuls exemples, la justification du recours à l'aire semble solidement établie sur les plans historique, mathématique et pédagogique.

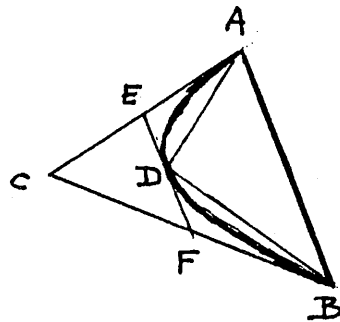
Cependant l'histoire n'a jamais été un modèle à suivre aveuglément ni même à la lettre : résoudre le problème du mouvement uniformément accéléré à la manière de Galilée serait à présent le signe d'un archaïsme maniéré et inutile.

De même, le calcul du volume de la boule de rayon R est rendu facile par l'utilisation d'une primitive de la fonction $\pi(R^2 - z^2)$ et toute intervention d'une aire sous la courbe de cette fonction ne ferait que compliquer le problème.

Enfin, l'augmentation des savoirs requiert en vue de leur transmission des exposés dont le degré de simplicité n'a parfois plus rien à voir avec la complication caractérisant la première approche historique des questions concernées. Là aussi, une trop grande fidélité à l'histoire devient une faute pédagogique.

Mais dans le problème qui nous occupe nous allons voir, avec étonnement, qu'un fait historique a priori étranger à toute recherche de primitives va nous mettre sur la voie d'une interprétation de l'aire non pas valable pour une vaste classe d'ensembles du plan, mais spécifique au cas des ensembles concernés par la définition des intégrales.

Il s'agit du calcul de l'aire du secteur parabolique par Archimède.



Détaillons la première étape du raisonnement : (AC) et (BC) étant tangentes à la parabole P et appelant E et F les milieux des segments $[AC]$ et $[BC]$ la géométrie montre que (EF) est tangente à P (en D). Sachant par ailleurs P située toute entière d'un même côté de ses tangentes et les cordes $[AB]$, $[AD]$, $[BD]$ contenues dans le secteur parabolique (on dit maintenant "par convexité"), on peut affirmer : si l'aire du secteur existe, elle est comprise entre aire $ADB = \frac{\text{aire}ACB}{2}$ et aire $AEFB = \frac{3}{4} \text{ aire } ACB$.

De même dans les triangles AED et BFD (d'aire totale égale au quart de celle de ABC) et ainsi de suite, Archimède obtient des encadrements de plus en plus fins et conclut par exhaustion que l'aire du secteur ne peut être égale qu'à $\frac{2}{3} \text{ aire } ACB$.

Notons-le bien, pour en arriver là Archimède a seulement besoin de connaître l'existence d'une fonction additive d'ensembles dont la valeur est connue pour les triangles ; il y a dans cette remarque toute l'inspiration du §III qui va suivre.

Cependant la similitude des démarches ne devra pas nous cacher que nous avons en vue la définition de l'intégrale (des fonctions continues). La définition générale de l'aire (des ensembles quarrables) est beaucoup plus difficile. Donner des définitions et des théorèmes généraux est une préoccupation des temps modernes. L'aire entre difficilement dans ce moule ; historiquement son domaine est plutôt celui de la résolution subtile de problèmes particuliers dont le secteur parabolique est un exemple.

III La définition de l'intégrale et ses propriétés

A. A tous a et b réels et toute f bornée sur $[a, b]$, on admet que l'on puisse faire correspondre un nombre réel (non nécessairement unique) noté $\int_a^b f(x)dx$ et tel que

a) quel que soit $\lambda \in \mathbb{R}$: $\int_a^b \lambda dt = \lambda(b-a),$

b) pour $b \geq a$ et $f \geq g$: $\int_a^b f(t)dt \geq \int_a^b g(t) dt,$

c) quels que soient a, b, c : $\int_a^c f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt.$

Remarques :

1. Une idée intuitive de l'aire est en accord avec ces propriétés.
2. (Niveau post bac) Pour prouver le résultat d'existence ci-dessus, on pose :

$$\int_a^b f(x)dx = \sup_{\sigma} \left[\sum_{k=1}^n m_k(x_k - x_{k-1}) \right] \text{ où } \sigma \text{ est la subdivision}$$

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \text{ et } m_k = \inf_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x).$$

3. On a les relations : $\lim_{x \rightarrow a} \int_a^x f(t)dt = 0$; $\lim_{x \rightarrow b} \int_a^x f(t)dt = \int_a^b f(t)dt.$

4. Pour obtenir l'unicité déjà évoquée, ce qui assurera la définition de l'intégrale, il faut et il suffit que pour tout entier $n > 0$ il existe g_n et h_n en escalier sur $[a, b]$ telles que $g_n \leq f \leq h_n$ et

$$\int_a^b h_n(t)dt - \int_a^b g_n(t)dt \leq \frac{1}{n} \text{ et alors } \int_a^b f(t)dt = \lim_n \int_a^b g_n(t)dt = \lim_n \int_a^b h_n(t)dt.$$

Exemples

1. Soit $f(t) = pt + q$ une fonction affine et ≥ 0 dans $[a, b]$ avec $p > 0$. Posons pour $1 \leq k \leq n$, $x_k = a + k \frac{b-a}{n}$ et pour $t \in]x_{k-1}, x_k[$: $g_n(t) = f(x_{k-1})$; $h_n(t) = f(x_k)$.

Alors

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(x_{k-1}) = \int_a^b g_n(t)dt \leq \int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b h_n(t)dt = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k)$$

d'où

$$(b-a)(pa+q)+p\left(\frac{b-a}{n}\right)^2 \sum_1^n (k-1) \leq \int_a^b f(t)dt \leq (b-a)(pa+q)+p\left(\frac{b-a}{n}\right)^2 \sum_1^n k,$$

soit

$$(b-a)(pa+q)+\frac{p(b-a)^2}{n} \times \frac{n-1}{2} \leq \int_a^b f(t)dt \leq (b-a)(pa+q)+\frac{p(b-a)^2}{n} \times \frac{n+1}{2}$$

on a bien $\lim_n \frac{p(b-a)^2}{n} = 0$ et par conséquent :

$$\int_a^b f(t)dt = (b-a) \left(pa+q+p\frac{(b-a)}{2} \right) = (b-a) \left(p\frac{a+b}{2} + q \right)$$

où l'on reconnaît bien l'aire du trapèze, et de même pour $p < 0$.

2. Supposons maintenant f croissante sur $[a, b]$ et définissons g_n et h_n comme ci-dessus. On a alors

$$\int_a^b h_n(t)dt - \int_a^b g_n(t)dt = \frac{(b-a)}{n} \times (f(b) - f(a))$$

et l'intégrale de f est bien définie de manière unique ; de même c'est le cas pour f monotone.

B. Abordons maintenant le cas d'une fonction f continue sur $[a, b]$. Nous devons d'abord admettre le théorème selon lequel f est alors bornée sur $[a, b]$. Ensuite nous ne pouvons pas espérer appliquer immédiatement ce qui précède car il existe (malheureusement ?) des fonctions continues qui ne sont pas sommes de deux fonctions monotones.

Une première façon de procéder déduit l'existence de g_n et de h_n de la continuité uniforme de f continue sur $[a, b]$ (théorème de Heine). C'est le point de vue qui est exposé dans l'ouvrage de la collection Transmaths (A. Antibi et al., Terminale S, Nathan 2002). Notons que $\int_a^b f(t)dt$ peut alors être interprétée comme la limite des

sommes de Riemann $\sum_1^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$ où $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, et cela donne aussitôt la linéarité de l'intégrale. Ainsi est respectée la volonté du programme manifestée dans la séparation en deux chapitres.

C. Une autre méthode parvient à faire l'économie de la continuité uniforme mais elle repousse à plus tard la linéarité et nous oblige à démontrer d'abord le "théorème fondamental de l'analyse", ainsi que l'appellent les auteurs anglo-saxons.

Théorème 1 Soit f continue sur $[a, b]$; alors, pour tout $x \in]a, b[$, on a

$$f(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt.$$

Autrement dit $\int_a^x f(t) dt$ est uniquement défini, comme étant la valeur en x de l'unique primitive de f continue et nulle en a (cette dernière unicité découlant du théorème admis en première sur les fonctions de dérivée nulle).

Démonstration (à la portée des élèves de Terminale s'ils savent ce qu'est une fonction continue).

Soit $\varepsilon > 0$; il existe $\eta > 0$ tel que $|t - x_0| \leq \eta$ implique $|f(t) - f(x_0)| \leq \varepsilon$.

Pour $0 < h < \eta$ on a d'après les conditions a) et b) :

$$h(f(x_0) - \varepsilon) = \int_{x_0}^{x_0+h} (f(x_0) - \varepsilon) dt \leq \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt \leq \int_{x_0}^{x_0+h} (f(x_0) + \varepsilon) dt = h(f(x_0) + \varepsilon)$$

et

$$h(f(x_0) - \varepsilon) = \int_{x_0-h}^{x_0} (f(x_0) - \varepsilon) dt \leq \int_{x_0-h}^{x_0} f(t) dt \leq \int_{x_0-h}^{x_0} (f(x_0) + \varepsilon) dt = h(f(x_0) + \varepsilon)$$

d'où, d'après la condition c), et en divisant par h :

$$f(x_0) - \varepsilon \leq \frac{\int_a^{x_0+h} f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt}{h} \leq f(x_0) + \varepsilon$$

$$\text{et } f(x_0) - \varepsilon \leq \frac{\int_a^{x_0-h} f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt}{-h} \leq f(x_0) + \varepsilon \quad \text{c.q.f.d.}$$

Corollaire 1 Soit f et g continues sur $[a, b]$, λ et μ réels; alors on a :

$$\int_a^b [\lambda f(t) + \mu g(t)] dt = \lambda \int_a^b f(t) dt + \mu \int_a^b g(t) dt.$$

En effet pour $x \in]a, b[$ les deux fonctions $\int_a^x [\lambda f(t) + \mu g(t)] dt$ et

$\lambda \int_a^x f(t) dt + \mu \int_a^x g(t) dt$ ont la même dérivée $\lambda f(x) + \mu g(x)$, sont continues et nulles

en a .

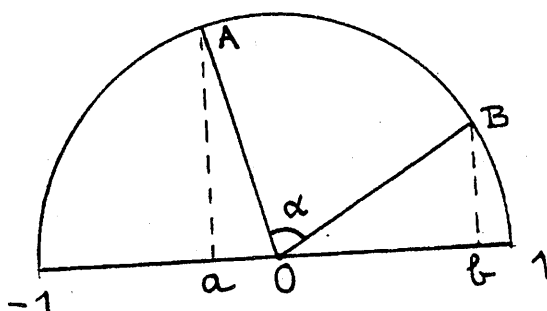
Ces deux fonctions sont donc égales (théorème déjà admis). Ensuite on passe à la limite en b en appliquant la remarque 3) ci-dessus.

IV Ce que l'aire permet de faire

Au cours du §III, la définition de l'intégrale a nécessité d'admettre plusieurs résultats d'Analyse : outre le premier théorème d'existence, on a cité le fait que toute fonction continue est bornée, la constance de toute fonction de dérivée nulle, et dans le cas de la méthode de Riemann la continuité uniforme de toute fonction continue sur $[a, b]$. Pour inévitables qu'ils soient, ces "emprunts" laisseront une désagréable impression de grapillage s'ils ne sont pas exploités en vue de l'obtention de résultats marquants. Et pour respecter la novation voulue par le programme, j'ai choisi d'exposer des propriétés inspirées par des questions d'aire. Ainsi, plutôt qu'un savoir antérieur définissant l'intégrale, comme l'ont compris certains manuels, l'aire se trouvera restaurée dans son rôle de riche problématique inspirant la mise en place de quelques fondements de l'Analyse.

Rappelons l'exemple classique de $\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}$ pour lequel la constance de $\int_x^{ax} \frac{dt}{t}$ conduit immédiatement à la relation $\ln ax = \ln a + \ln x$.

Etudions maintenant l'aire $\mathcal{A}$ du secteur circulaire de rayon 1 limité par les demi-droites $[0A)$ et $[0B)$.



Soit $-1 < a < b < 1$; par définition

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_a^b \sqrt{1-t^2} dt - \int_a^0 \frac{\sqrt{1-a^2}}{a} t dt - \int_0^b \frac{\sqrt{1-b^2}}{b} t dt \\ &= \left[t\sqrt{1-t^2} \right]_{t=a}^{t=b} + \int_a^b \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}} dt + \frac{a\sqrt{1-a^2}}{2} - \frac{b\sqrt{1-b^2}}{2} \\ &= - \int_a^b \sqrt{1-t^2} dt + \int_a^b \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} + \frac{b\sqrt{1-b^2}}{2} - \frac{a\sqrt{1-a^2}}{2} \end{aligned}$$

$$\text{d'où } 2\mathcal{A} = \int_a^b \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Outre l'additivité des aires de deux secteurs circulaires adjacents nous allons déduire de cette relation l'invariance de ces aires par rotation de centre O .

Soit $\alpha = \widehat{AOB}$, $x = b$, d'où $a = x \cos \alpha - \sqrt{1-x^2} \sin \alpha$, tels que $x \in]-\cos \alpha, 1[$

alors $1 - a^2 = 1 - (x^2 \cos^2 \alpha + (1-x^2) \sin^2 \alpha - 2x\sqrt{1-x^2} \sin \alpha \cos \alpha)$

$= \cos^2 \alpha (1-x^2) + x^2 \sin^2 \alpha + 2x\sqrt{1-x^2} \sin \alpha \cos \alpha$

$= (\sqrt{1-x^2} \cos \alpha + x \sin \alpha)^2$.

Alors

$$\frac{d}{dx} \int_{x \cos \alpha - \sqrt{1-x^2} \sin \alpha}^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \left(\cos \alpha + \frac{x \sin \alpha}{\sqrt{1-x^2}} \right) \times \frac{1}{\sqrt{1-x^2} \cos \alpha + x \sin \alpha},$$

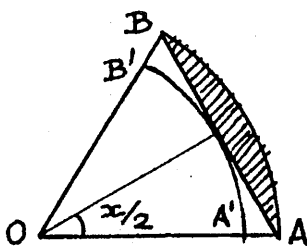
$$= 0$$

d'où l'invariance recherchée.

On peut donc en déduire la mesure de l'angle α par le double de l'aire de tout secteur circulaire de rayon 1 d'angle α . De là la définition de sinus et cosinus comme fonctions de la variable réelle.

Les deux exemples qui suivent vont montrer la fécondité de cette définition ; nous y admettons qu'une homothétie de rapport k multiplie les aires par k^2 (question à rapprocher de celle des unités vue en §I, ou que l'on peut résoudre grâce au théorème fondamental de l'analyse).

1. Recherche de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ et de $\frac{d}{dx} \left(\frac{\sin x}{x} - 1 \right)_{x=0}$ on démontre d'abord (par les aires) pour $t \geq 0$: $\sin t \leq t$.



Puis pour $x \in]0, \frac{\pi}{2}]$:

$$0 < x - \sin x = 2 \text{ (aire secteur } OAB - \text{ aire triangle } OAB)$$

$$< 2 \text{ (aire secteur } OAB - \text{ aire secteur } OA'B') = x \left(1 - \cos^2 \frac{x}{2} \right).$$

$$\text{D'où } 0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < \sin^2 \frac{x}{2} < \frac{x^2}{4}.$$

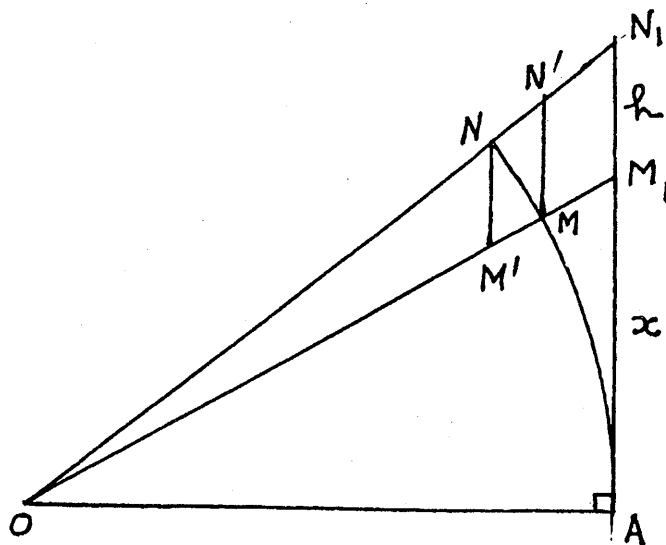
Quand $x \rightarrow 0$, $\frac{\sin x}{x}$ tend vers 1 et sa dérivée est nulle en 0.

2. Recherche de $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$.

$$\text{On a } \frac{h}{2[1+(x+h)^2]} = \text{aire } OM'N < \text{aire secteur } OMN < \text{aire } OMN' = \frac{h}{2(1+x^2)}$$

$$\text{d'où } \frac{d}{dx} (\text{aire du secteur } OAM) = \frac{1}{2(1+x^2)}$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = 2 \times \text{aire quart de disque} = \frac{\pi}{2}.$$



V Conclusion

On a pu voir qu'entre les cheminements a) et b), mon choix a été rapidement fait en faveur de b) c'est-à-dire d'une solution inspirée par une lecture au second degré du programme.

Rappelons que la solution a) est hérissée de trop de contradictions par rapport au programme lui-même et par rapport aux objectifs déclarés de l'Enseignement des Mathématiques ; l'on oubliera pas que l'incohérence (voire l'hypocrisie) va à l'encontre d'une véritable formation scientifique.

Voulant être constructif, j'ai esquissé les points essentiels à l'adoption du point de vue b). Au reproche d'avoir élaboré un de ces "exposés théoriques" interdits par le programme je répondrai simplement :

1. que la définition de l'intégrale (§III - A) ne met en jeu que des propriétés (croissance, Chasles) devant être de toutes façons acquises par les élèves et que cette définition est notablement plus simple que la définition générale des aires,
2. que la mise en valeur du théorème fondamental de l'analyse faisait partie du programme enseigné il y a 50 ans, à une époque où la priorité était pourtant ailleurs qu'en Analyse.

Pour ces deux raisons au moins il me semble que le développement b) reste conforme aux desseins du programme et ne va pas au delà. J'ai même résolu de croire que le dit programme avait en vue l'apport de l'aire à l'Analyse.

La richesse du sujet justifiait a priori ma confiance, mais à la réflexion le doute reste possible pour deux raisons.

1. Dans le contexte d'une illustration de l'intégrale, particulièrement pour définir de nouvelles fonctions, l'introduction de l'exponentielle par $y' = y$ semble spécialement insolite et inopportune.
2. Depuis 1996, d'autres matières (Arithmétique et Probabilités) ont en fait diminué l'importance de l'Analyse. Dans l'état actuel des choses, renforcer cette dernière risque de "charger la barque à l'excès".

Cet article aura atteint son but s'il fait prendre conscience de ces contradictions.

Annexe

Extrait du programme de Terminale S :

Intégration

Pour une fonction f continue positive sur $[a, b]$, introduction de la notation $\int_a^b f(x)dx$ comme *aire sous la courbe*. Valeur moyenne d'une telle fonction.

Extension à l'intégrale et à la valeur moyenne d'une fonction de signe quelconque.

Linéarité, positivité, ordre, relation de Chasles.

Inégalité de la moyenne.

Intégration et dérivation

Notion de primitive.

Théorème : "si f est continue sur un intervalle I , et si a est un point de I , la fonction F telle que $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f sur I s'annulant en a ".

Calcul de $\int_a^b f(x)dx$ à l'aide d'une primitive de f .

Intégration par parties.

Auteurs
Georges LION
Titre
Aires et intégrales
Préface
Jean-Pierre FERRIER
Caractéristiques
Édité par l'Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques de Limoges 123 Avenue Albert Thomas – 87060 Limoges Cedex Format A4
Type de documents et support
Brochure Papier ISBN 2-910165-14-0
Public visé
Enseignants de Mathématiques de Lycée et d'Université
Contenus
Notion d'intégrale en classe de Terminale S