INSTITUT DE RECHERCHE
SUR L'ENSEIGNEMENT
DES MATHEMATIQUES

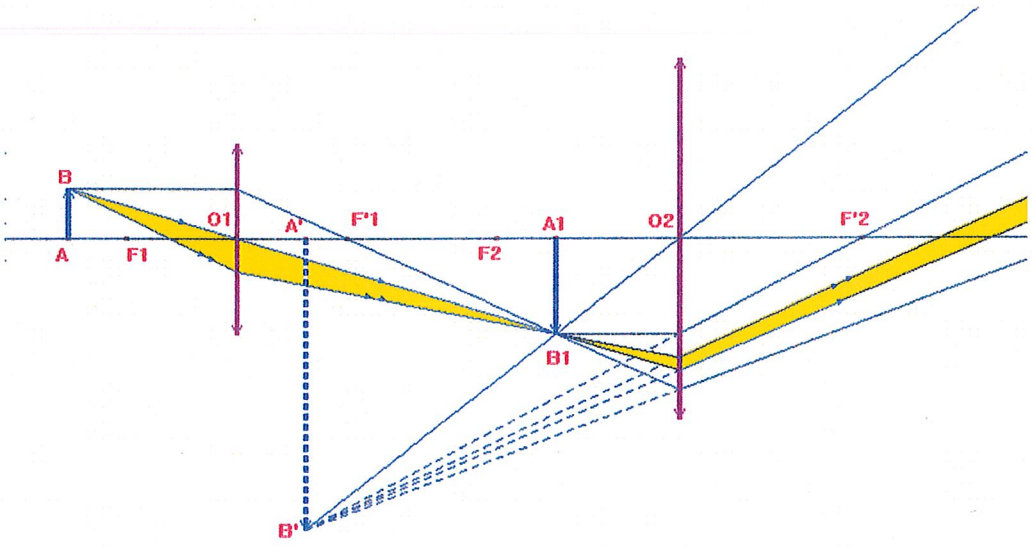
123, avenue Albert Thomas
87060 LIMOGES CEDEX

Tél : 05 55 45 72 49
Fax : 05 55 45 73 20

UNIVERSITE
DE LIMOGES

Mesurer et Calculer :

Une liaison Math-Physique au lycée expérimentée en classe



Gérard ARMENGAUD - Alain VACHER - Michel VILLARET

Une publication de l'IREM de Limoges **septembre 2001**

REMERCIEMENTS

Nous souhaitons tout d'abord remercier vivement Madame A. -M . Dupuy, I.P.R. de physique et Messieurs J. Aymès et J.-C. Robert, I.P.R. de Mathématiques pour leurs encouragements et soutien.

Cette publication a été rédigée avec l'aide de l'**I**nstitut de **R**echerche sur l'**E**nseignement des **M**athématiques de l'Université de Limoges, dirigé par Madame A. Bellido, assistée successivement par R. Arnaud et D. Boularas. Nous leur exprimons toute notre gratitude pour leur accueil dans cet institut et la confiance qu'ils nous y ont accordée.

Monsieur D. Boularas a guidé l'organisation de la rédaction de cette brochure. Nous désirons lui exprimer notre sincère reconnaissance pour sa disponibilité, ses nombreux conseils et son aide attentive.

Nous sommes redevables d'un grand merci envers tous les membres du groupe de recherche pédagogique de l'IREM où est née cette envie de développer la liaison « Math - Physique » ainsi qu'envers Monsieur J.P. Aimonetto, Proviseur du Lyçée Cabanis qui a facilité la concertation sur le terrain.

Nous devons aussi remercier grandement tous les collègues expérimentateurs et particulièrement,

au lycée Turgot de Limoges,
Madame A. Coudert et Messieurs R. Arnaud et Y. Fromage,

au lycée Raymond Loewy de la Souterraine,
Madame C. Guerin, Monsieur B. Offret

au lycée Cabanis de Brive,
Mesdames M. Baudounet, B. Seguy, M.-C. Soignet
et Messieurs A. Chambaud, M. Chastaing, D. Cousty, M. Gebeille et R. Merle.

Merci à Jean-Marie Sainsot pour la mise au point finale de la brochure.

Présentation de la brochure

La genèse de cette brochure se situe dans les travaux d'un groupe de recherche pédagogique de **l'IREM** de Limoges qui s'était donné pour but de proposer à des lycéens des mathématiques concrètes ou tout au moins susceptibles d'être illustrées concrètement. C'est dans ce cadre que naquit l'idée d'utiliser des phénomènes physiques comme support des activités mathématiques.

Une équipe composée d'un professeur de mathématiques (G. Armengaud) et de deux professeurs de physique (A. Vacher et M. Villaret du lycée Cabanis) s'est constituée sur le terrain (en classe, avec les élèves) pour mettre au point trois activités interdisciplinaires, qui, par la suite, ont été expérimentées dans d'autres classes.

Cette brochure regroupe ces trois activités :

- Illustration « physique » de la notion de limite et d'asymptote.
- Lentilles convergentes et modélisations géométriques et analytique de leurs fonctionnements.
- Charge et décharge d'un condensateur et équations différentielles du premier ordre et étude des solutions.

Cette publication a la particularité de proposer aux enseignants de mathématiques et de physique d'une même classe une progression interdisciplinaire concrète livrée « clés en mains » avec des fiches consignes pour les élèves et les fiches réponses correspondantes. Elle permet à ces deux professeurs de préparer des séances coordonnées.

Les deux derniers thèmes consistent à réaliser une expérience, à en imaginer une modélisation mathématique validée par l'observation, puis à utiliser cette modélisation pour découvrir d'autres aspects du phénomène difficilement révélés par une étude purement expérimentale.

Dans chaque cas, l'étude est terminée par un tableau qui compare « l'observé » et le « calculé ».

Le niveau des élèves est indiqué ainsi que la durée des principales séquences. les activités proposées ont été expérimentées par des équipes mixtes math-physique.

Il est sans doute légitime d'espérer que les élèves, qui participeront à des activités conjointes Math-physique, ne poseront que très rarement la perfide question « A quoi servent les mathématiques ? ».

On peut aussi imaginer que les études de cas évoqués ici puissent servir de base pour un travail à proposer à des élèves dans le nouveau cadre des T.P.E.

Peut-être que des professeurs qui pratiqueront des thèmes proposés auront envie de produire d'autres activités pluridisciplinaires « Math-physique ». Merci à tous ceux qui le souhaitent de communiquer à l'IREM de Limoges leurs critiques, suggestions, et idées pour prolonger les thèmes évoqués ... .

Anne Bellido,

Directrice de l'Irem de Limoges

Table des matières

Partie I : "Résistances"

Approche de la notion d'asymptote à partir d'un montage..... 3

T.P. de physique : Résistances équivalentes, séquence 1, fiche consigne..... 7

T.P. de physique : Résistances équivalentes, fiche corrigée..... 9

T.P. de maths : séquence 2, fiche consigne 1..... 11

T.P. de maths : séquence 2, fiche consigne 2..... 13

T.P. de maths : séquence 2, fiche corrigée..... 14

Partie II : "Condensateurs"

Equations différentielles du premier ordre, à coefficients constants
Charge et décharge d'un condensateur..... 17

Plan d'étude..... 21

Fiches consigne de physique..... 23

Fiches consigne de mathématiques..... 31

Fiches corrigées de physique..... 37

Fiches corrigées de mathématiques..... 47

Partie III : "Lentilles"

Modélisations mathématiques du fonctionnement des lentilles minces convergentes..... 61

Lentilles convergentes : loi de Descartes - Observations..... 65

T.P. de physique : Lentilles, séquence 1, fiche consigne..... 67

T.P. de physique : Lentilles, séquence 1, fiche corrigée..... 71

Lentilles convergentes : loi de Descartes - Transcription mathématique des observations..... 73

T.P. de maths : séquence 2, fiche consigne 75

T.P. de maths : séquence 2, fiche corrigée 79

Lentilles convergentes : loi de Descartes - Prolongements : utilisation des modèles..... 87

Premier prolongement : Dérivée d'une fonction et résolution d'inéquations - Interprétation physique des résultats..... 88

Deuxième prolongement : Notions élémentaires sur des appareils d'optique simples..... 95

Références..... 99

APPROCHE

DE LA

NOTION D'ASYMPTOTE

à PARTIR D'UN MONTAGE

« ASSOCIATIONS DE RESISTANCES ELECTRIQUES »

APPROCHE DE LA NOTION D'ASYMPTOTE

à partir d'un montage « ASSOCIATIONS DE RÉSISTANCES »

(niveau première)

THÈME :

EN PHYSIQUE, le montage d'électricité proposé comporte 4 résistors dont la résistance de l'un est variable. Son fonctionnement est mis en évidence par l'étude des variations de la résistance équivalente en fonction de la résistance variable.

EN MATHÉMATIQUES, son fonctionnement est modélisé par l'étude d'une restriction d'une fonction homographique et en particulier par son comportement à l'infini.

La présentation en mathématique et en physique prend la forme de travaux pratiques d'une durée de 2 heures pour chaque matière.

OBJECTIFS :

La réalisation, par les élèves, et l'étude d'un montage d'électricité servent d'introduction et de motivation, mais aussi d'outils pédagogiques pour étudier une fonction mathématique. En même temps les mathématiques, dans cette activité, sont un outil qui permet de passer du cadre expérimental au cadre graphique, puis au cadre algébrique. Cette activité peut permettre d'entraîner les élèves à mener une démarche scientifique en essayant de les amener à expérimenter, conjecturer, valider, vérifier.

PLACE DES SÉQUENCES DANS LES PROGRESSIONS

Ces deux séquences (une en physique, une en mathématiques de 2 heures chacune) se situent dans la dernière semaine du premier trimestre.

En physique ont été préalablement étudiés :

- les lois d'Ohm et de Pouillet,
- la caractéristique d'un dipôle,
- l'association de résistors en série et en parallèle,
- les condensateurs ainsi que leur association en série et en parallèle.

En mathématiques en début d'année, ont été réactualisés les calculs algébriques, les notions géométriques de base. Les factorisations de polynômes, les expressions du second degré ont été traitées. Les dérivées ont été étudiées et pour introduire la dérivée la notion de limite finie a été abordée.

Les fonctions de références : affines, carrée, racine carrée, inverse sont connues.

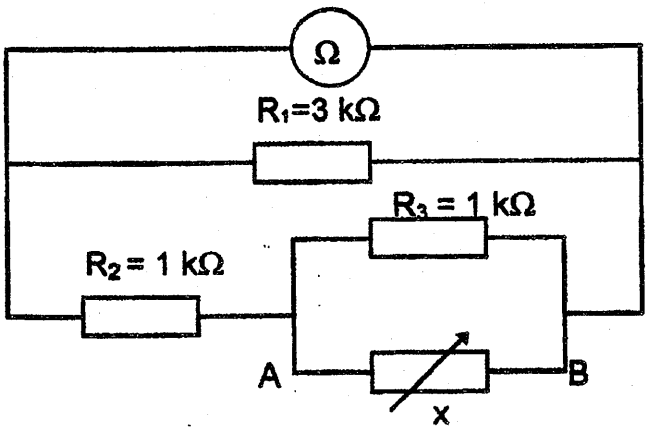
T.P. DE PHYSIQUE : RESISTANCES EQUIVALENTES

SEQUENCE N°1 FICHE CONSIGNE

I. BUT

Le montage étudié est constitué de trois résistors de résistances constantes et d'un résistor de résistance variable x . Le but est l'étude de la variation de la résistance R équivalente à l'ensemble des résistances .

II. SCHEMA DU MONTAGE



III. MESURE A L'OHMMETRE

Faire varier la résistance x de zéro à 500 kΩ et noter la valeur de la résistance équivalente R.

Faire un tableau de mesure.

x (kΩ)	0	1	3	5	10	20	30	40	50	100	200	500
R (x) (kΩ)												

Construire la courbe représentant les variations de R en fonction de x pour

$0 \leq x \leq 40$.

Que constatez - vous ?

IV. ETUDE THEORIQUE

1) Calculer la résistance équivalente R dans le cas où la branche AB est en court - circuit. Faire le schéma du circuit.

2) Calculer la résistance équivalente R dans le cas où la branche AB est ouverte. Faire le schéma du circuit.

3) Exprimer en fonction de x la résistance équivalente R. A partir de cette expression calculer R dans les cas suivants :

$x = 10\ k\Omega$; $x = 50\ k\Omega$.

4) Calculer x pour que R soit égal à 1,1 kΩ.

5) Existe-t-il une valeur de la résistance variable qui rende la résistance équivalente égale à 1,3 kΩ. Justifier.

T.P. DE PHYSIQUE : RESISTANCES EQUIVALENTES

FICHE CORRIGÉE

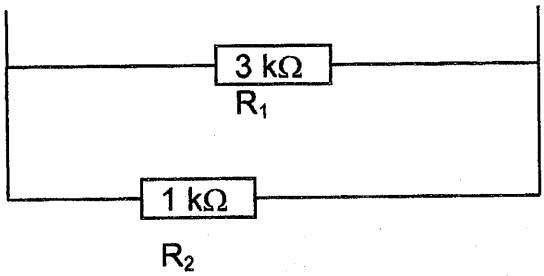
III. MESURE à L'OHMMETRE

Courbe semblable à celle du corrigé de mathématiques pour la partie correspondante à x compris entre 0 et 40 .

La courbe semble croître puis se stabiliser .

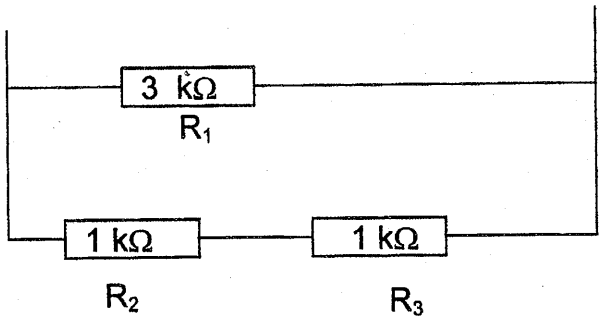
IV. ETUDE THEORIQUE

1) On obtient une résistance x pratiquement nulle quand on réalise un court-circuit.



Résistance en parallèle : $1 / R = 1 / R_1 + 1 / R_2$ d'où $R = 0.75\ k\Omega$

2) On obtient une résistance x pratiquement infinie quand on ouvre le circuit.



$1 / R = 1 / R_1 + 1 / (R_2 + R_3)$ d'où $R = 1.2\ k\Omega$

3) Expression de R en fonction de x : $R = \dfrac{6x+3}{5x+4}$

a) pour $x = 10\ k\Omega$ on a $R \approx 1{,}17\ k\Omega$.

b) pour $x = 50\ k\Omega$ on a $R \approx 1{,}2\ k\Omega$.

4) Pour $R = 1{,}1\ k\Omega$ on trouve $x = 2{,}8\ k\Omega$.

5) La résolution de l'équation $R = 1.3$ donne une solution négative ; or une résistance n'est jamais négative donc il est impossible de rendre la résistance équivalente égale à 1,3 kΩ.

Note au lecteur

Les élèves constatent que la fonction semble croître, vite quand x est petit, lentement quand x est grand et se stabiliser enfin. Au début beaucoup sont surpris et cherchent d'abord ce qui est effectué dans le montage. Peu d'élèves cherchent à vérifier spontanément la concordance des résultats expérimentaux et théoriques.

SEQUENCE N°2 T.P. DE MATHEMATIQUES

FICHE CONSIGNE N°1

FiCHE DE PASSAGE DE LA PHYSIQUE AUX MATHEMATIQUES

PHYSIQUE	MATHEMATIQUES
f semble croissante	f est strictement croissante sur IR^+
Quand la résistance variable devient **grande** , f semble ralentir sa croissance et se **stabiliser** presque à la valeur **1.2**	Quand x tend vers $+\infty$ f (x) tend vers **1,2** On dit que quand x tend vers $+\infty$ **la limite** de f est **1,2** Interprétation graphique La droite D d'équation y = **1,2** est **asymptote** au graphique de f

Note au lecteur

Cette première fiche est distribuée au début de la séquence de mathématiques avec la colonne mathématique restée vierge. Les élèves doivent la remplir pendant la séquence suivant la progression .

SEQUENCE N° 2 : T.P. DE MATHEMATIQUES
Fiche consigne N°2

Etude de la fonction R de variable réelle x définie par : $R(x)=\frac{6x+3}{5x+4}$.

1) Déterminer le sens de variation de la fonction sur IR^*.

2) Quelles valeurs doit-on donner à la résistance variable pour que la résistance équivalente soit pratiquement égale à 1,2 $k\Omega$?

3) (C) est la courbe qui représente cette fonction. Quelle valeur doit-on donner à la résistance variable pour que la distance entre la droite Δ (y = 1,2) et la courbe **(C)** soit presque nulle ?

Note au lecteur

La démarche suivie en mathématiques pour valider les conjectures émises, suit point par point les constatations vues en physique.

1) Au début certains élèves perçoivent mal la nécessité de prouver ce qui a été pressenti en physique pour le sens de variation de la fonction. D'autres les persuadent de l'utilité du signe de la dérivée en remarquant que tout est ignoré entre deux mesures.

2) La difficulté majeure, pour beaucoup d'élèves, est la traduction en langage mathématique facilement exploitable de la question (2) : "Quelles valeurs doit-on donner à x pour que R soit presque égal à 1,2 ?".

Cette expression « presque égal » semble, pour la plupart des élèves, plus simple à exploiter en passant par l'intermédiaire d'un vocabulaire emprunté à l'électricité. Ainsi formulée, la question peut devenir moins aride.

Cette image permet de mieux asseoir la notion de limite introduite par ailleurs.

FICHE CORRIGÉE : Séquence n° 2 T.P. de mathématiques

1) Dérivée $R'(x) = \dfrac{9}{(5x+4)^2}$, la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}^+$

2) Quelles valeurs donner à la résistance variable pour que la résistance équivalente soit presque 1,2 k Ω,

à $\dfrac{1}{100}$ près ?

Résolution de la double inéquation :

$$0 < 1,2 - R < \frac{1}{100}$$

ou

$$0 < \frac{6}{5} - \frac{6x+3}{5x+4} < \frac{1}{100}$$

$$0 < \frac{9}{25x+20} < \frac{1}{100}$$

$0 < \dfrac{9}{25x+20}$ toujours vraie

$$\frac{9}{25x+20} < \frac{1}{100}$$

$$\frac{25x+20}{9} > \frac{100}{1}$$

$25x+20 > 900$

$x > 35,2$

3) Quelles valeurs donner à la résistance variable pour que la résistance équivalente soit pratiquement 1,2 k Ω,

à $\dfrac{1}{10^n}$ près, $n \in \mathbb{N}$?

$$0 < \frac{6}{5} - \frac{6x+3}{5x+4} < \frac{1}{10^n}$$

$0 < \dfrac{9}{25x+20} < \dfrac{1}{10^n}$

$\frac{25x + 20}{9} > \frac{10^n}{1}$ car tous les termes sont strictement positifs

$25x+20 > 9 \times 10^n$ ou $100 x > 36 \times 10^n - 80$

$$x > 0,36 \times 10^n - 0,8$$

$$x > 0,36 \times 10^n - 0,8$$

Cette inégalité ce traduit par la phrase

Toutes les résistances variables supérieures à $(0,36 \times 10^n - 0,8)$ kΩ rendent la résistance équivalente pratiquement égale à 1,2 kΩ,

à $\frac{1}{10^n}$ près.

En fonction des exigences de l'expérimentateur et de la précision des instruments on choisit **n** pour fixer l'ordre de la précision.

Si n = 2 on retrouve 35,2

Si n = 3 on trouve 359,2

Bilan de la séquence

Ces calculs permettent d'imaginer qu'avec des appareils parfaits :

la résistance équivalente peut être rendue aussi proche que l'on veut de 1,2 k Ω, à condition de choisir la résistance variable suffisamment grande.

Pour traduire cette phrase en mathématiques :

On dit: **Quand x tend vers +∞, f (x) tend vers 1,2**

On écrit **Quand $x \to +\infty$, $f(x) \to 1,2$**

ou

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1,2$$

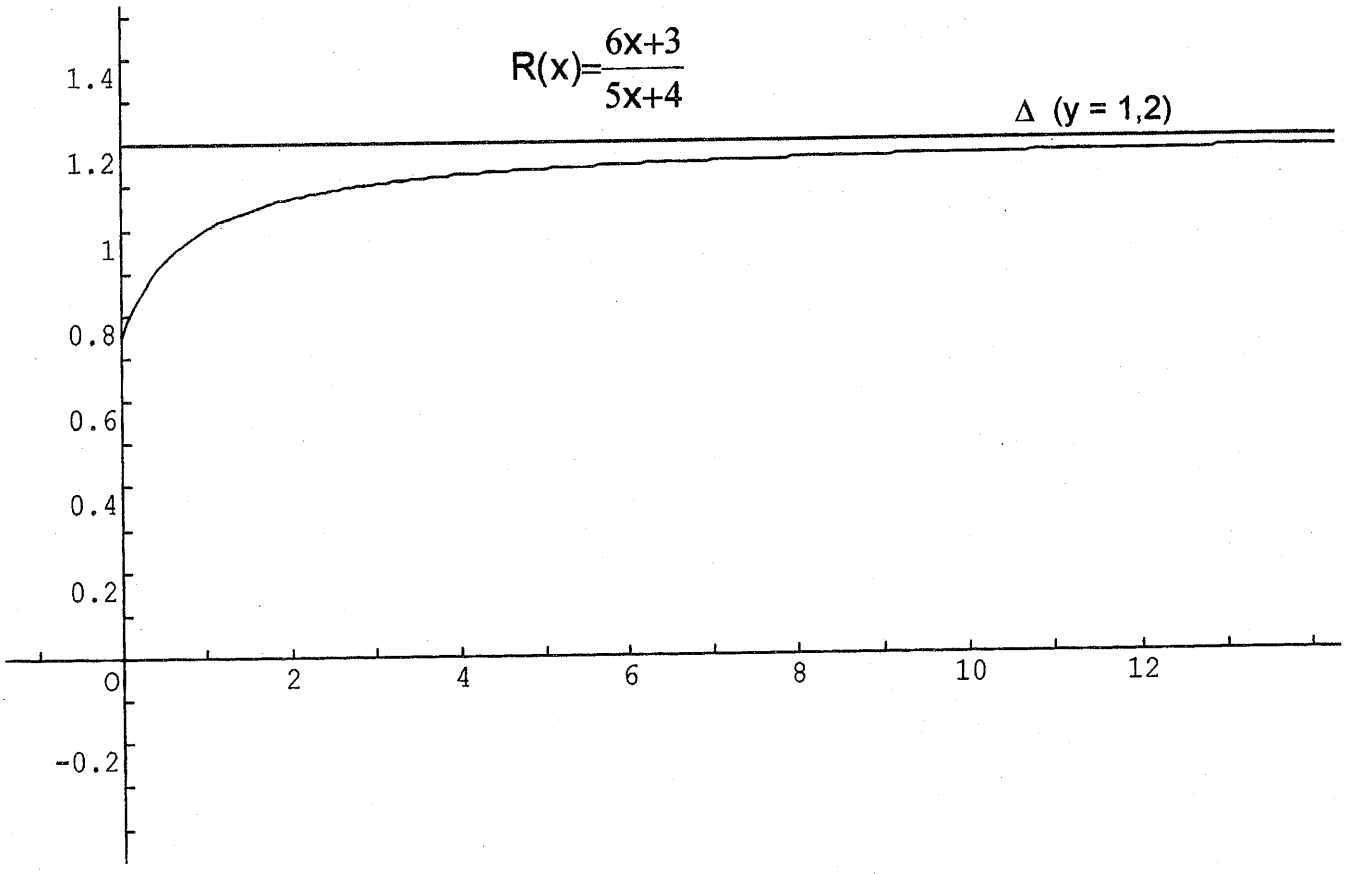
La courbe C se rapproche de la droite Δ (y = 1,2) quand x tend vers + ∞.

Car la distance qui sépare la courbe (C) de la droite Δ peut être rendue aussi petite que l'on veut à condition de choisir x suffisamment grand.

On dit que Δ est asymptote à C (quand $x \to +\infty$)

Note pour le lecteur : cette présentation permet d'approcher la notation théorique qui intervient dans la définition de la limite l de la fonction f, quand x tend vers + ∞.

$$\forall \varepsilon > 0 \ ; \ \exists A \text{ tel que } x > A \Rightarrow | f(x) - l | < \varepsilon$$



EQUATIONS DIFFERENTIELLES

Linéaires
du
Premier ordre

à
coefficients constants

CHARGE

ET

DECHARGE

D'UN

CONDENSATEUR

CHARGE ET DECHARGE D' UN CONDENSATEUR
EQUATIONS DIFFERENTIELLES
du premier ordre à coefficients constants

Pour simplifier l'écriture , ces activités seront par la suite désignées de manière abrégée par (dé)charge d'un condensateur

PRESENTATION

L'observation des sujets de BAC des séries scientifiques et technologiques industrielles des deux dernières décennies montrent que le thème « circuit électrique avec condensateur en série » apparaît tantôt en physique tantôt en mathématiques. En mathématiques ce thème ne sert pratiquement que d'habillage à l'introduction d'une équation différentielle , en physique les sujets d'examen permettent le contrôle des connaissances du fonctionnement du circuit mais n'évoquent que très rarement l'équation qui modélise ce fonctionnement .

Le thème proposé se limite à traiter conjointement la charge et la décharge d'un condensateur et l'équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants qui décrit le phénomène .

Toutes les notions abordées restent strictement dans le cadre des parties communes aux programmes actuels de mathématiques d'une part et de physique des séries S et S.T.I. d'autre part.

Les activités proposées organisent leur présentation en mathématique et en physique pour essayer de renforcer le sens de notions essentielles pour le bac et la poursuite des études

- asymptotes et tangentes à une courbe,
- fonction exponentielle,
- équation et inéquation logarithmique ,
- équations différentielles linéaires du premier ordre .

Dans la série scientifique, en terminale, la charge et la décharge d'un condensateur sont au programme de physique et l'équation différentielle est au programme de mathématiques. Par contre en S.T.I. l'équation différentielle est au programme de mathématiques en terminale alors que la (dé)charge du condensateur est au programme de première de manière expérimentale . Ici les activités proposent de reprendre, en S.T.I., cette étude en terminale de manière plus théorique grâce aux notions d'électricité du programme de physique et aux équations différentielles. Les mêmes activités sont proposées en terminales S et S.T.I. . Elles comprennent un T.P. de physique d'une durée de trois heures suivi d'un T.D. de mathématique de la même durée. Les deux activités sont, si possible, organisées dans la même quinzaine.

PLAN D'ÉTUDE

ÉTUDE PRATIQUE

D'abord en **T.P. de physique** au cours de manipulation les élèves font des observations chiffrées puis construisent des courbes qui représentent les variations de la tension et de l'intensité en fonction du temps correspondant à la charge et à la décharge d'un condensateur . Les élèves sont amenés à **découvrir les propriétés importantes du fonctionnement d'un condensateur** à partir de ces courbes.

ÉTUDE THÉORIQUE

En **T.P. de physique** les élèves ressentent maintenant la nécessité de trouver des lois (fonctions) exprimant la dépendance de la charge et de la décharge en fonction du temps. Contrairement à leurs habitudes ils ne trouvent pas directement ces lois, mais aboutissent à des **équations différentielles** .

En **T.D. de mathématiques,** les élèves résolvent les équations différentielles établies en physique. Ils étudient ensuite les fonctions solutions trouvées. A partir de ces fonctions des calculs permettent de **retrouver** toutes **les propriétés importantes du fonctionnement d'un condensateur.**

CONCLUSION

La concordance des résultats expérimentaux et des résultats calculés permet de valider les modèles mathématiques utilisés.

FICHES CONSIGNES

DE

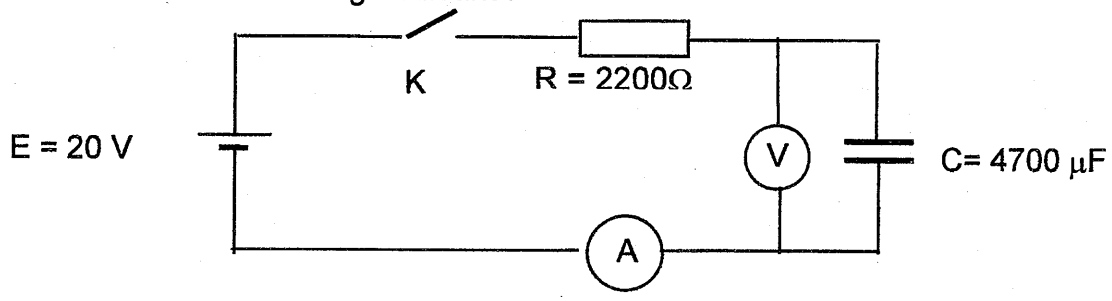
PHYSIQUE

FICHE CONSIGNE ; T.P. DE PHYSIQUE
CHARGE ET DECHARGE D'UN CONDENSATEUR

I. ETUDE PRATIQUE

A. CHARGE

Réaliser le montage suivant :



Calibres : Voltmètre : 30 V , Ampèremètre : 10 mA

a) Observation

Fermer l'interrupteur K . Comment varie la tension ? Comment varie l'intensité ?

Ouvrir l'interrupteur K que constatez-vous ?

Comparer la tension indiquée par le voltmètre et la tension E.

b) Mesures

Relever la valeur de la tension toutes les 5 secondes (de 0 à 60 s). Dresser le tableau de mesures.

Relever la valeur de l'intensité toutes les 5 secondes (de 0 à 60 s). Dresser le tableau de mesures.

c) Tracer les courbes qui représentent les variations de u (tension) et de i (intensité) en fonction du temps t.

d) Calculs .

On appelle τ le temps égal au produit RC (R en Ω ; C en F).

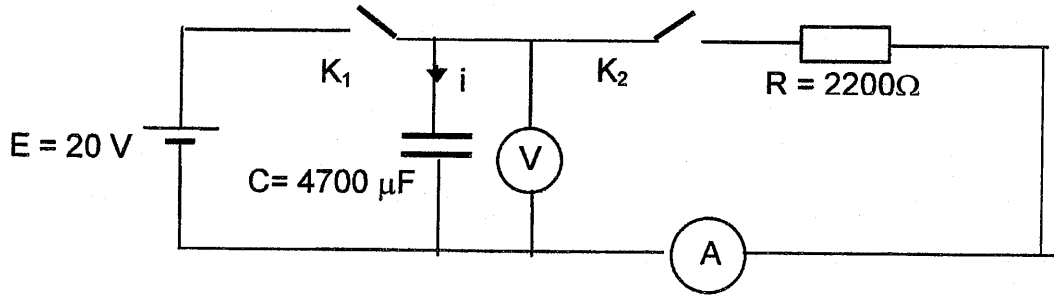
Calculer τ .

Déterminer $u(\tau)$, $u(3\tau)$, $u(5\tau)$.

Calculer , en pourcentage , $u(\tau) / E$; $u(3\tau) / E$; $u(5\tau) / E$.

B . DÉCHARGE

Réaliser le montage suivant :



Calibres : Voltmètre : 30 V , Ampèremètre : 10 mA

a) Observation

K_2 étant ouvert , fermer l'interrupteur K_1 . Le condensateur se charge-t-il ?

Ouvrir l'interrupteur K_1 que constatez-vous ?

Fermer K_2. Comment varient la tension et comment varie la valeur absolue de l'intensité ?

b) Mesures

Recharger le condensateur puis fermer K_2 .

Relever la valeur de la tension toutes les 5 secondes (de 0 à 60 s). Dresser le tableau de mesures.

Relever la valeur absolue de l'intensité toutes les 5 secondes (de 0 à 60 s). Dresser le tableau de mesures .

c) Tracer les courbes qui représentent les variations de la tension et de la valeur absolue de l'intensité en fonction du temps t .

e) Lecture graphique

♦ : Déterminer $u(\tau)$, $u(3\tau)$, $u(5\tau)$.

Calculer , en pourcentage , $u(\tau)/E$; $u(3\tau)/E$; $u(5\tau)/E$.

Calculer le pourcentage de charge restante :

$1 - u(\tau)/E$; $1 - u(3\tau)/E$; $1 - u(5\tau)/E$

♦ : Placer le point A (0 ; 20) sur la courbe représentant les variations de la tension.

Placer le point B (τ ; 0) . Tracer (AB). Quelle position semble avoir cette droite par rapport à la courbe ?

C. AUTRE MÉTHODE POUR L'ÉTUDE DE LA CHARGE ET DE LA DÉCHARGE

Quand RC est trop petit la méthode précédente n'est plus utilisable.

Choisir R = 10 KΩ et C = 0,1 μ F. Calculer R C (τ = RC).

On alimente maintenant le circuit RC par un signal carré produit par un générateur B F.

La tension basse est choisie égale à 0 ; la tension haute est choisie égale à E (E = 10 V).

La fréquence est choisie égale à 100 Hertz. Calculer la période T.

Dans la phase tension haute le condensateur se charge.

Dans la phase tension basse le condensateur se décharge

Brancher l'oscillographe pour visualiser la courbe qui représente la variation de la tension u, aux bornes du condensateur, en fonction du temps t.
Brancher l'oscillographe pour visualiser la courbe qui représente la variation de l'intensité qui traverse le condensateur, en fonction du temps t .

Relever ces deux courbes sur du papier millimétré.

A l'aide de la courbe qui représente la tension en fonction du temps déterminer :

- au bout de combien de temps le condensateur est chargé aux 2 / 3 environ ; exprimer ce temps en fonction de τ ;
- vérifier qu'au bout d'un temps égal à 3τ le condensateur est chargé à 95% environ ;
- vérifier qu'au bout d'un temps égal à 5τ le condensateur est pratiquement totalement chargé.

Remarque au lecteur : Un enregistrement direct de l ' écran de l 'oscillographe sera réalisé , par le professeur, grâce à un ordinateur, une imprimante et une interface.

Cet enregistrement sera conservé et comparé aux courbes tracées dans le TD de mathématiques associé.

FICHE CONSIGNE ; T.P. DE PHYSIQUE
CHARGE ET DECHARGE D'UN CONDENSATEUR

II. Etude théorique

Un montage comprend en série un condensateur, de capacité C, et une résistance R (R et C sont des constantes).

q (t) désigne la charge variable du condensateur à l'instant t ;

u (t) désigne la tension variable aux bornes du condensateur à l'instant t ;

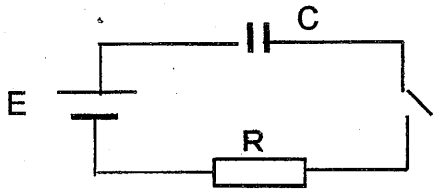
i (t) désigne l'intensité variable qui traverse le condensateur à l'instant t.

Rappels :a) Définition de l'intensité d'un courant : **$i = q' = dq / dt$ (1)**

b) Définition de la capacité C d'un condensateur .

La tension aux bornes d'un condensateur est proportionnelle à sa charge; le coefficient de proportionnalité s'appelle la capacité C : **$q = C u$ (2)**

A) Etude théorique de la charge .



E est la f.e.m. du générateur
(E est constant)

L'instant 0 choisi est celui où le circuit est fermé par l'interrupteur. A cet instant, la tension aux bornes du condensateur totalement déchargé est nulle .

a) Déterminer u (0).

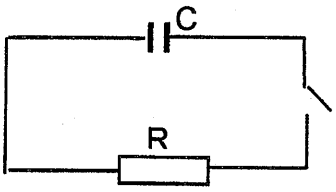
b) Déterminer le lien entre q' et u'.

c) Montrer, en utilisant la loi des tensions, que :

$$u + R C u' = E \quad (I)$$

Remarque La résolution de cette équation différentielle sera effectuée dans une séquence de T.D de mathématiques, ainsi que l'étude théorique de la variation de la tension en fonction du temps.

B) Etude théorique de la décharge



L'instant 0 choisi est celui où le circuit est fermé par l'interrupteur. A cet instant, la tension aux bornes du condensateur chargé est E .

a) Déterminer u (0).

b) Déterminer le lien entre q' et u '.

c) Montrer, en utilisant la loi des tensions, que :

$$u + R C u' = 0. \qquad (II)$$

Remarque La résolution de cette équation différentielle sera effectuée dans une séquence de T.D de mathématiques, ainsi que l'étude théorique de la variation.

FICHES CONSIGNES

DE

MATHEMATIQUES

FICHE CONSIGNE

T.D. DE MATHÉMATIQUES

CHARGE ET DÉCHARGE D'UN CONDENSATEUR

A. DÉCHARGE

I. TENSION

R, C et E sont des réels strictement positifs.

On désigne par τ le produit RC.

1) Résoudre l'équation différentielle :

$u + RC.u' = 0$ (1).

Puis déterminer la solution particulière telle que

$u (0) = E$.

2) Etudier la fonction définie sur $[0 ; +\infty [$ par

$$u (t) = E\, e^{-\frac{1}{RC}t}$$

Tracer la courbe G_U représentative de cette fonction.

3) Démontrer que :

La tangente en A (0 ; E) à la courbe « tension » G_U coupe l'axe des temps au point B d'abscisse τ.

4) Résoudre dans IR :

$$0 < E\, e^{-\frac{1}{RC}t} < \frac{E}{100}$$

En déduire qu'au bout d'un temps égal à 5τ la tension aux bornes du condensateur est inférieure au centième de la tension initiale.

II. INTENSITÉ

Soit la fonction définie sur $[\,0\,;+\infty\,[$ par :

$$i(t) = C\,u'(t)$$

Tracer sa courbe représentative G_i .

FICHE CONSIGNE

T.D. DE MATHÉMATIQUES

CHARGE ET DÉCHARGE D'UN CONDENSATEUR

B. CHARGE

I. TENSION

R, C et E sont des réels strictement positifs.

On désigne par τ le produit RC.

1) Résoudre l'équation différentielle :

$u + RC.u' = E$ (2) (on posera $V = u - E$).

Puis déterminer la solution particulière telle que

$u (0) = 0$.

2) Etudier la fonction définie sur $[0 ; +\infty [$ par :

$$u(t) = E - E\, e^{-\frac{1}{RC}t} = E\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right).$$

Tracer la courbe C_U représentative de cette fonction.

3) Résoudre dans IR :

$$E\left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t} \right) \geq \frac{2}{3} E$$

En déduire qu ' à partir d'une durée de charge voisine de $1.1\,\tau$, le condensateur est chargée au 2/3 .

II. INTENSITÉ

Soit la fonction définie sur $[0 ; +\infty [$ par :

$i (t) = C\, u' (t)$.

Tracer sa courbe représentative C_i .

FICHES CORRIGEES

DE

PHYSIQUE

FICHE CORRIGEE

T.P. DE PHYSIQUE

CHARGE ET DECHARGE D'UN CONDENSATEUR

I. ETUDE PRATIQUE

A. CHARGE

a) Observation

Après la fermeture de l'interrupteur , la tension croit rapidement puis ralentit sa croissance puis se stabilise à une valeur voisine de la tension E du générateur. Quand on ouvre ensuite l'interrupteur la tension aux bornes du condensateur reste constante et égale à une valeur voisine de la tension E du générateur .

b) Mesures

Voir feuille suivante

c) Courbes

d) Calculs : $\tau = R.C = 10,34$ s ; $3\tau = 31,02$ s ; $5\tau = 51,7$ s

e) Lecture graphique (Voir feuille suivante)

$u(\tau) \approx 12,2$ V ; $u(3\tau) \approx 18,2$ V ; $u(5\tau) \approx 19,6$ V.

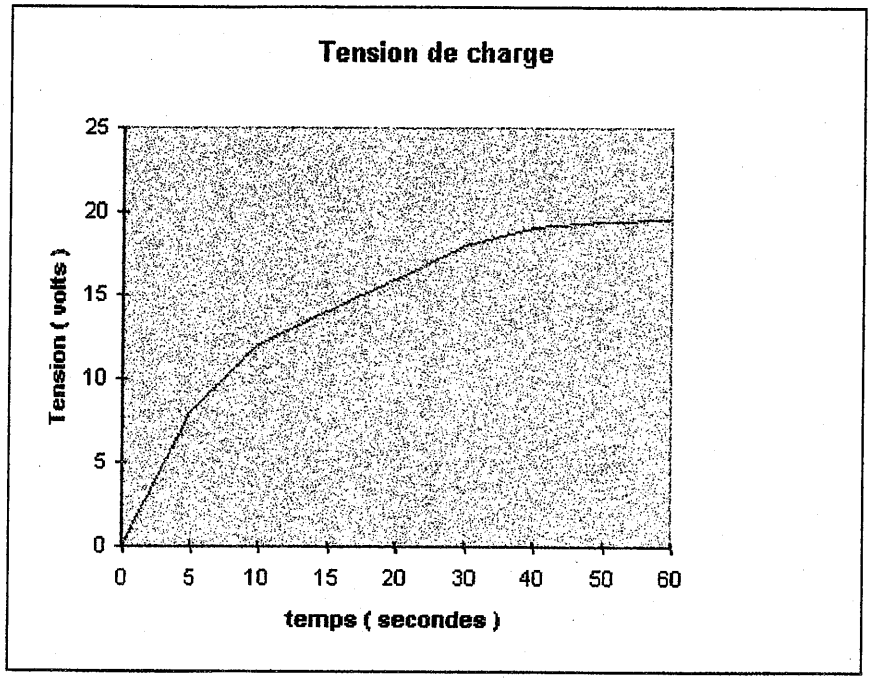
$u(\tau) / E = 61\%$; $u(3\tau) / E = 91\%$; $u(5\tau) / E = 98\%$.

Note au lecteur : Les groupes de T.P. n'ont pas tous les mêmes valeurs des constantes E ; R ; C . Les élèves constatent que :

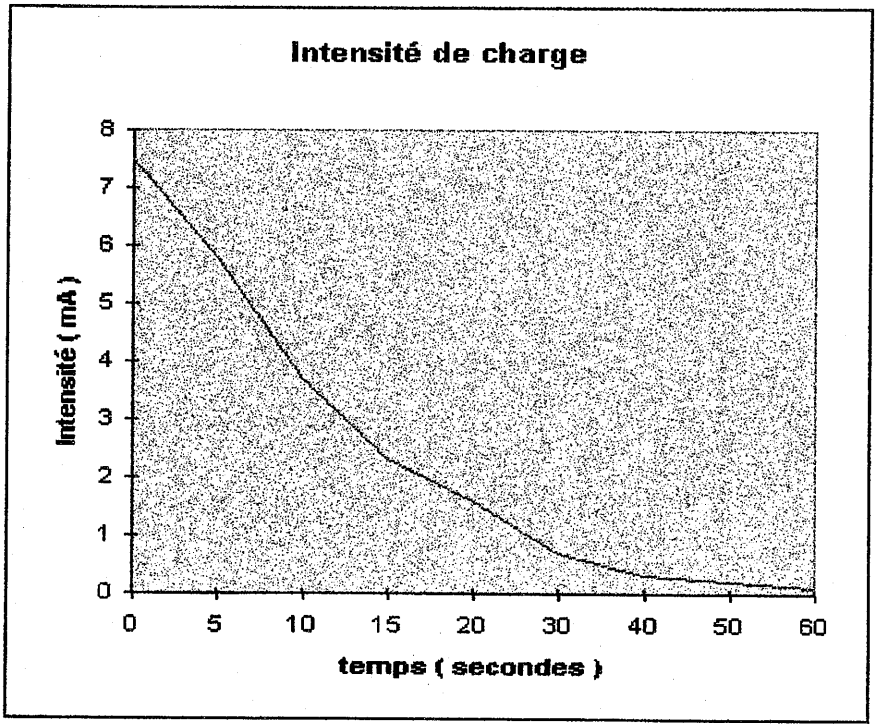
- si seule la valeur de E change la durée de la charge ne varie pas,
- si seule la valeur de la résistance change , la durée de la charge varie proportionnellement à R,
- si seule la valeur de la capacité change, la durée de charge varie proportionnellement à C.

Courbes de charge du condensateur

t (s)	U (V)
0	0
5	8
10	12
15	14
20	16
30	18
40	19
50	19,4
60	19,5



t (s)	I (mA)
0	7,5
5	5,8
10	3,7
15	2,3
20	1,6
30	0,7
40	0,3
50	0,2
60	0,1



B. DECHARGE

a) Observation :

Le condensateur se charge. Quand on ouvre K_1 le condensateur reste chargé. Quand on ferme K_2 , la tension et la valeur absolue intensité diminuent rapidement, puis plus lentement , puis se stabilisent à une valeur proche de 0 .

b) et c) Mesures et Courbes : Voir page suivante

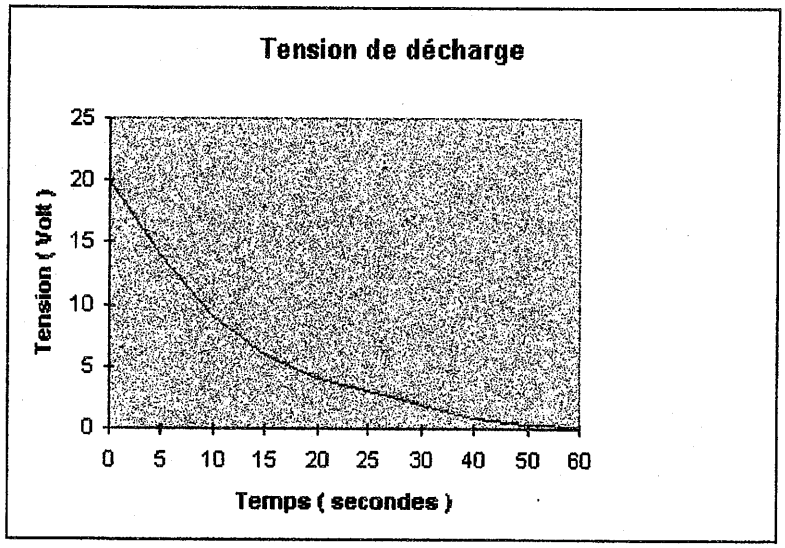
e) Les pourcentages restantes déterminées graphiquement sont :

pour τ : 58% ; pour 3τ : 95 % ; pour 5τ : 99 %.

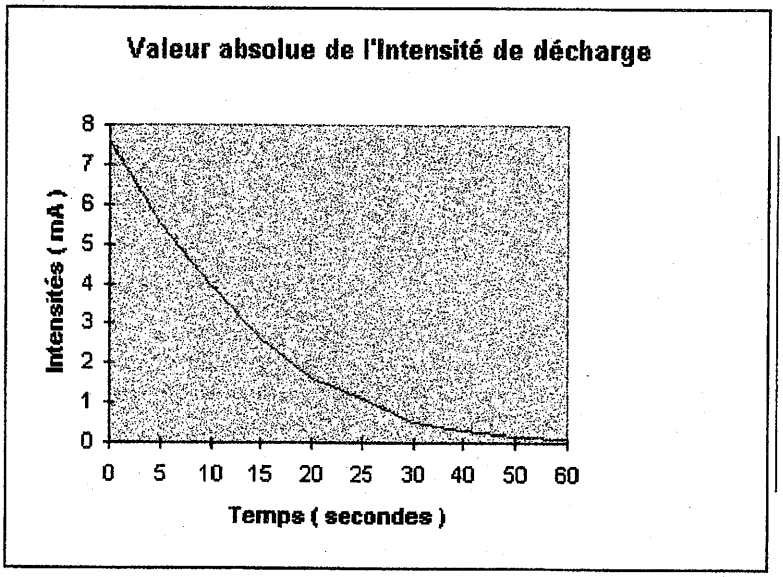
f) La droite (AB) semble tangente à la courbe .

Courbes de décharge du condensateur

t (s)	U (V)
0	20
5	14
10	9
15	6
20	4
25	3
30	2
40	0,8
50	0,4
60	0,1



t (s)	I (mA)
0	7,6
5	5,5
10	3,9
15	2,6
20	1,6
25	1,1
30	0,5
40	0,3
50	0,15
60	0,1



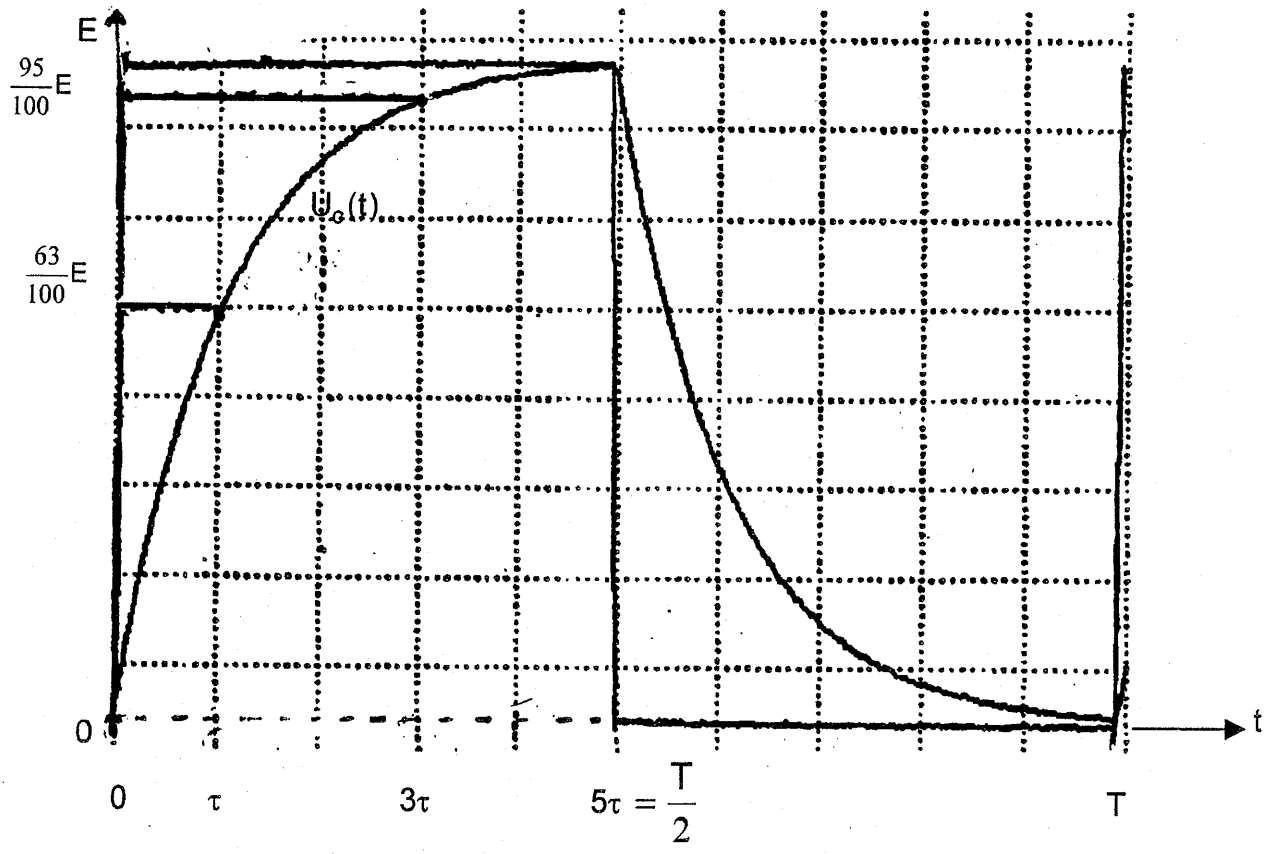
B) Deuxième méthode

Pour visualiser la courbe tension on branche l'oscillographe aux bornes du condensateur.

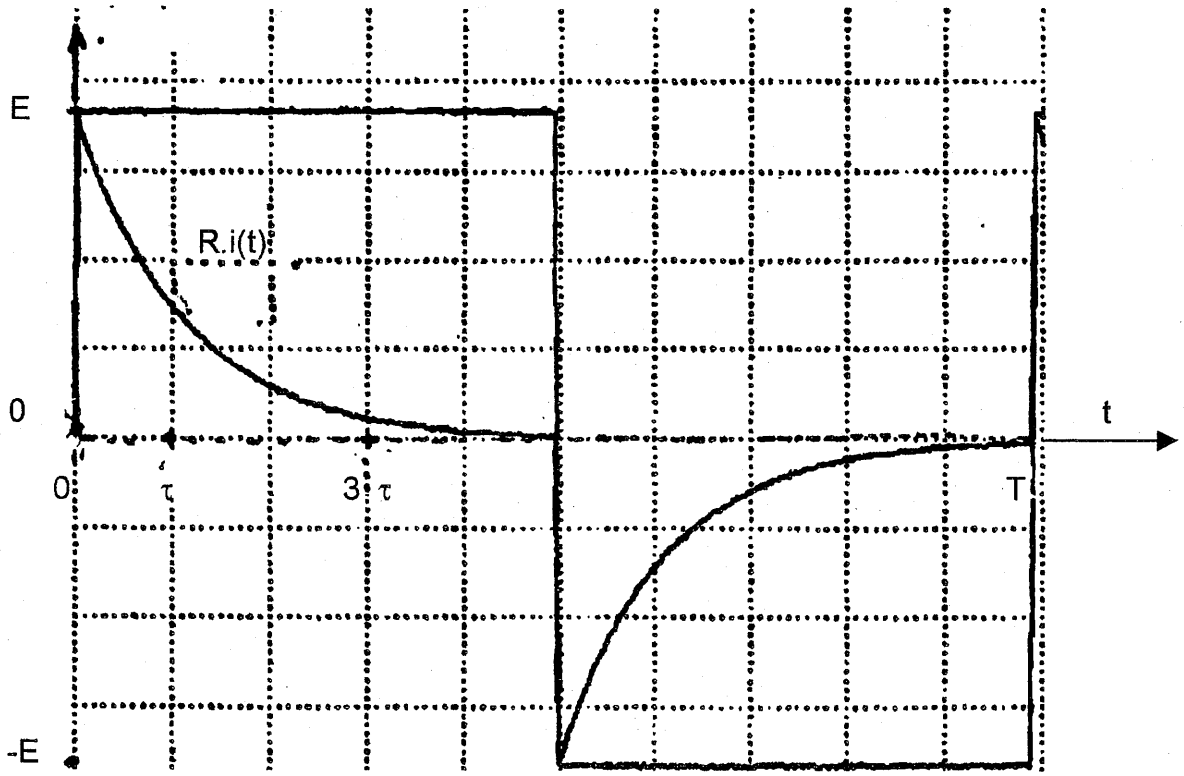
Pour visualiser la courbe intensité on branche l'oscillographe aux bornes de la résistance R (un oscillographe ne visualise que des tensions).

$R = 10\ k\Omega$; $C = 0{,}1\ \mu F$ donc $\tau = 10^{-3}\ s$

Courbe tension



Courbe intensité



FICHE CORRIGEE

T.P. DE PHYSIQUE

CHARGE ET DECHARGE D'UN CONDENSATEUR

II . ETUDE THEORIQUE

A. Etude théorique de la décharge

a) u (0) = E car on prend comme origine des temps l'instant de fermeture de l'interrupteur ; E désigne la charge du condensateur avant la fermeture.

b) Lien entre q' et u' :

En dérivant $q = C u \Rightarrow q' = C u'$ (2')

c) D'après la loi des tensions $u + Ri = 0$,

on remplace i par l'expression de q' dans cette égalité :

$$u + R C u' = 0 \quad (I).$$

B. Etude théorique de la charge

a) Lien entre q' et u' :

En dérivant $q = C u \Rightarrow q' = C u'$ (2').

b) D'après la loi des tensions $u + Ri = E$,

on remplace i par q' dans cette expression :

$$u + R C u' = E \quad (I).$$

LIAISON ENTRE LES OBSERVATIONS PHYSIQUES ET LES MODELES MATHEMATIQUES

CHARGE

PHYSIQUE	MATHÉMATIQUES
La tension croît rapidement au début, puis ralentit sa croissance pour enfin se stabiliser à une valeur constante (voisine de E).	
Au bout d'un temps égal à τ le condensateur semble chargé presque aux 2/3. Au delà il continue à se charger.	
Au bout d'un temps voisin de 5τ le condensateur semble chargé à 99% .	
Au delà il continue à se charger (légèrement). La durée de charge semble proportionnelle à R et à C et indépendante de E.	

DÉCHARGE

PHYSIQUE	MATHÉMATIQUES
La tension décroît rapidement au début puis ralentit sa décroissance pour enfin se stabiliser à une valeur constante (voisine de 0). Au bout d'un temps voisin de 5τ le condensateur semble chargé à 99%. Au delà il continue à se décharger. La durée de décharge **semble** égale à celle de charge . La durée de décharge **semble** proportionnelle à R et à C et indépendante de E.	

Note au lecteur. La colonne de physique reprend quelques observations et conjectures faites lors des travaux pratiques ; la colonne ``mathématiques'', laissée vierge, est remplie progressivement, après chaque démonstration, pendant le T.D. de mathématiques . Pour cela on suggère, au début, à l'élève de choisir parmi les fonctions qu'il connaît, celles dont les graphiques ressemblent à ceux trouvés en physique.

FICHES CORRIGEES

DE

MATHEMATIQUES

FICHE CORRIGÉE

T.D. DE MATHÉMATIQUES

CHARGE ET DÉCHARGE D'UN CONDENSATEUR

A. DÉCHARGE

I. TENSION

1) Résolution de l'équation différentielle :

$u + RC\,u' = 0$ (1)

$u' = -\frac{1}{RC}\,u$ (1')

La solution générale de l 'équation (1) du premier ordre à coefficients constants sans second membre est :

$u(t) = K\ e^{-\frac{1}{RC}t}$ K constante réelle quelconque .

La solution particulière telle que $u(0) = E$ ou telle que $K e^0 = E$ est :

$$\mathbf{u(t) = E\ e^{-\frac{1}{RC}t} = E\ e^{-\frac{t}{\tau}}}\ .$$

2) Etude de la fonction définis par $u(t) = E\ e^{-\frac{t}{\tau}}$ et $t \geq 0$;

Sens de variation : d'après (1') déjà vu, $u' = -\frac{1}{\tau}\,u$

$u'(t) = -\frac{E}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}$ E , τ et une exponentielle ont des signes positifs ; u' est négatif donc u est décroissante .

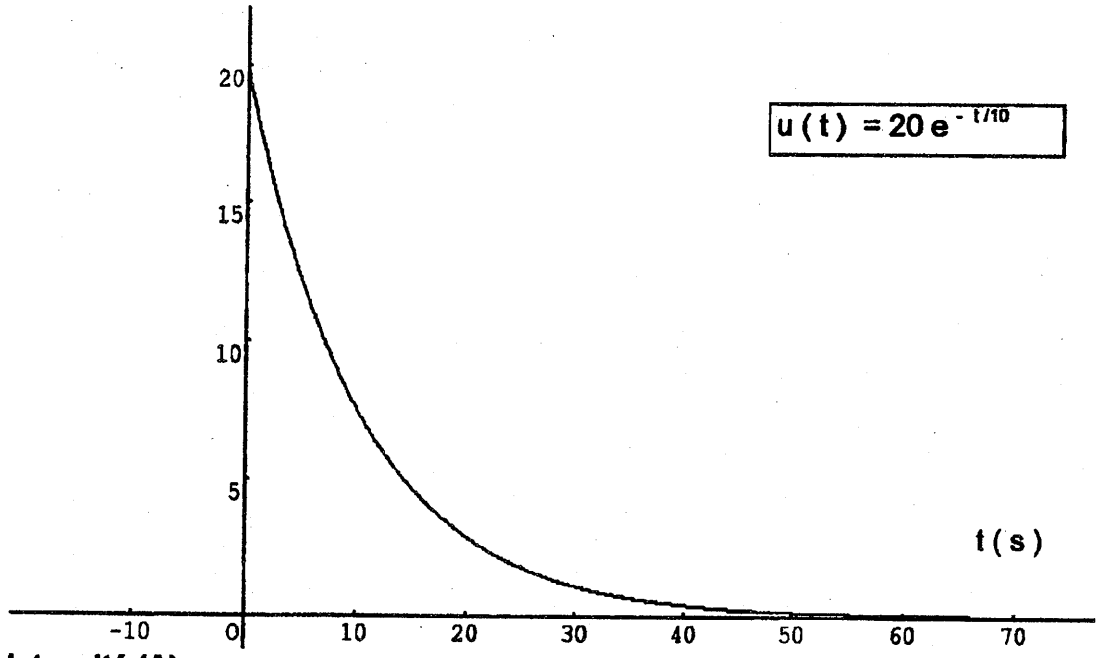
Limite : $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t) = 0^+$ car $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-\frac{t}{\tau}} = 0^+$

Quand tend vers $+\infty$, $u(t)$ tend vers 0^+ , donc l'axe des abscisses est asymptote à la courbe G_U .

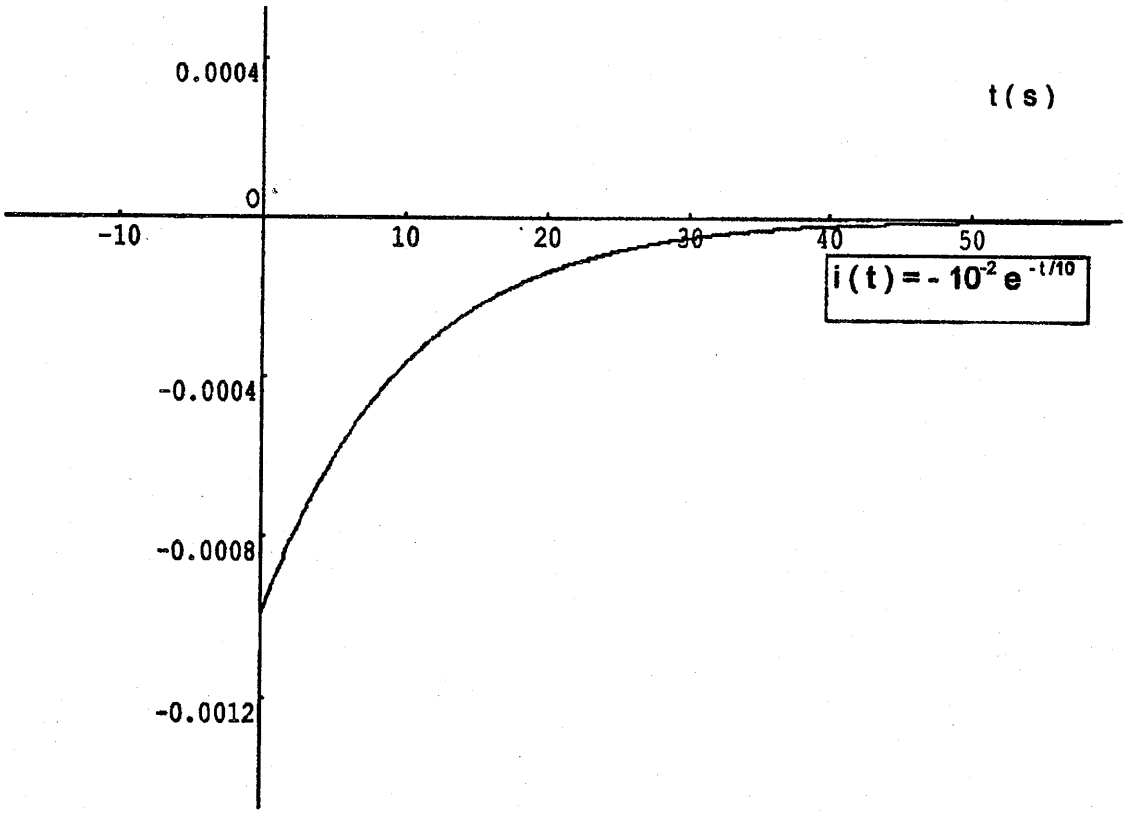
Graphiques :

Décharge du condensateur

Tension (V)



Intensité (A)



3) Détermination des coordonnées de B

Soient A (0 ; E) et B le point d'intersection de la tangente en A à la courbe et de l'axe des temps.

$B (t_B ; 0)$, d'où $\vec{AB} \left| \begin{matrix} t_B \\ -E \end{matrix} \right.$

$\vec{AB}$ est un vecteur directeur de la tangente T à la courbe G_U au point A (0 ; E) .

$\vec{V} \left| \begin{matrix} 1 \\ u'(0) = -E/RC \end{matrix} \right.$

est un vecteur directeur de la tangente en A.

$\vec{AB} \ // \ \vec{V}$ signifie $t_B (-E/RC) + E = 0$, d'où $t_B = RC = \tau$

La tangente en A (0 ; E) à la courbe G_U coupe l'axe des temps au point d'abscisse τ .

On retrouve ici un résultat déjà constaté sur une courbe expérimentale en physique .

4) Résoudre dans IR :

$$(1) \quad 0 < E\, e^{-\frac{1}{RC}t}$$

$$(2) \quad E\, e^{-\frac{1}{RC}t} < \frac{E}{100}$$

L'inéquation (1) est vérifiée pour tout réel t car une exponentielle est toujours positive.

Résolution de l'inéquation (2) dont les 2 membres sont positifs strictement

$$\frac{1}{e^{\frac{1}{RC}t}} < \frac{1}{100} \Leftrightarrow e^{\frac{1}{RC}t} > 100 \Leftrightarrow \frac{t}{RC} > \ln 100$$

ou $t > \tau \ln 100$ or $\ln 100 \approx 4.6$ donc :

Au bout d'un temps à peu près égal à 5 τ la tension aux bornes du condensateur est inférieur au centième de la tension initiale .

Ce temps est indépendant de E par contre il est proportionnel à R et à C d'après la définition de τ .

Remarques :

1. La tension et la charge du condensateur étant proportionnelles (q = Cu), **à partir d'une durée de décharge égale à 5 τ , la charge du condensateur devient inférieure au centième de sa valeur initiale** .

On dit qu'au bout de 5 τ le condensateur est pratiquement déchargé (il est déchargé a plus de 99 %)

2. Dès que la durée de décharge dépasse 5 τ l'écart entre la courbe de décharge et son asymptote est inférieure à 1 / 100.

3. En physique dans le montage de la deuxième méthode la tension d'alimentation du condensateur est un signal carré de fréquence 100 Hertz donc de période 0.01 s et de demi-période 0.005 s . D'autre part , la constante de temps τ du circuit vaut 0.001 s donc 5 τ valent 0.005 s . La décharge s'effectue pendant une demi-période du signal carré c'est à dire pendant 0.005 s ensuite la charge commence avec l'envoi d'une tension égale à E . Au moment où la charge commence , au bout de 0.005 s , le condensateur peut être considéré comme pratiquement déchargé. Ainsi se trouve justifié le choix d'une fréquence de 100 Hz pour le signal carré.

II. INTENSITÉ

Étude de la fonction définie sur [0 ; + ∞ [par :

$$i(t) = C\,u'(t) = -1/R\,.\,u(t) = -\frac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

L'intensité et la tension sont donc proportionnelles ; on passe donc de la courbe G_U à la courbe G_i par une affinité orthogonale d'axe (t' t) et de rapport - 1/R . La courbe G_i obtenue est analogue à celle obtenue en physique pour l'intensité correspondant à la décharge .

FICHE CORRIGÉE ; T.D. DE MATHÉMATIQUES

CHARGE ET DÉCHARGE D'UN CONDENSATEUR

B. CHARGE

I. TENSION

1) Résolution de l'équation différentielle :

$u + RC\,u' = E \qquad (2)$

Cette équation différentielle du premier ordre est à coefficients constants, avec second membre. Pour la résoudre on supprime le second membre ; on pose

$v = u - E$ d'où $v' = u'$

On remplace dans (2) u' par v' et u par v + E

$$v + E + RC\,v' = E \quad \text{soit} \quad v' = -\frac{v}{RC} \qquad (2')$$

La solution générale de l'équation (2') est : $v(t) = K\,e^{-\frac{1}{RC}t}$

Soit en fonction de u $\quad u(t) - E = K\,e^{-\frac{1}{RC}t}$

$$u(t) = K\,e^{-\frac{1}{RC}t} + E$$

K constante réelle quelconque .

Or $u(0) = 0$ d'où $0 = K \times 1 + E$ d'où $K = -E$

$$\mathbf{u(t) = E - E\,e^{-\frac{1}{RC}t}}$$

2) Etude de la fonction définie sur [0 ; + ∞ [

$$u(t) = E - E\,e^{-\frac{1}{RC}t} \quad ; \quad u'(t) = \frac{E}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}$$

t	0	E
u'	+	
u	0 ↗	+ ∞

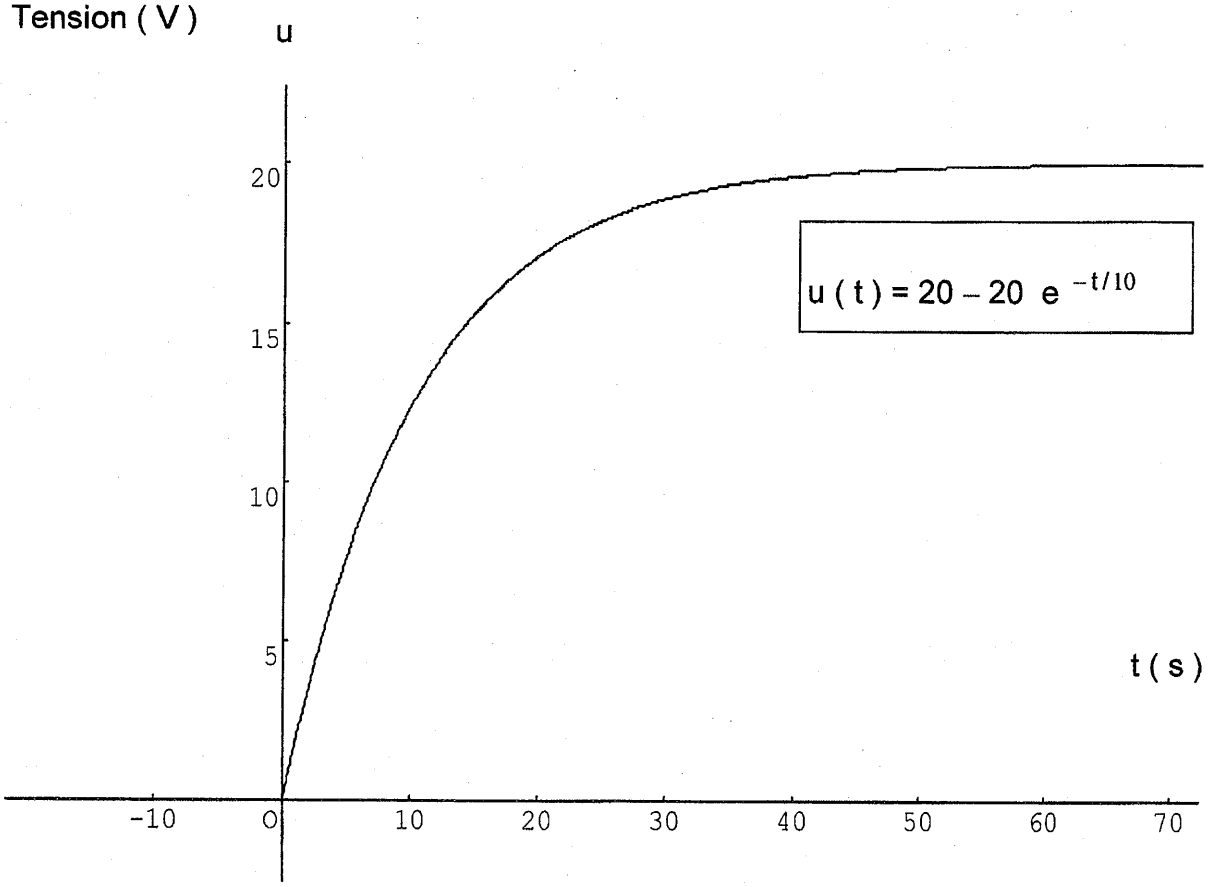
Voir graphique page 55.

Remarque : La tension pour la charge a pour expression $E\ e^{-\frac{t}{\tau}}$

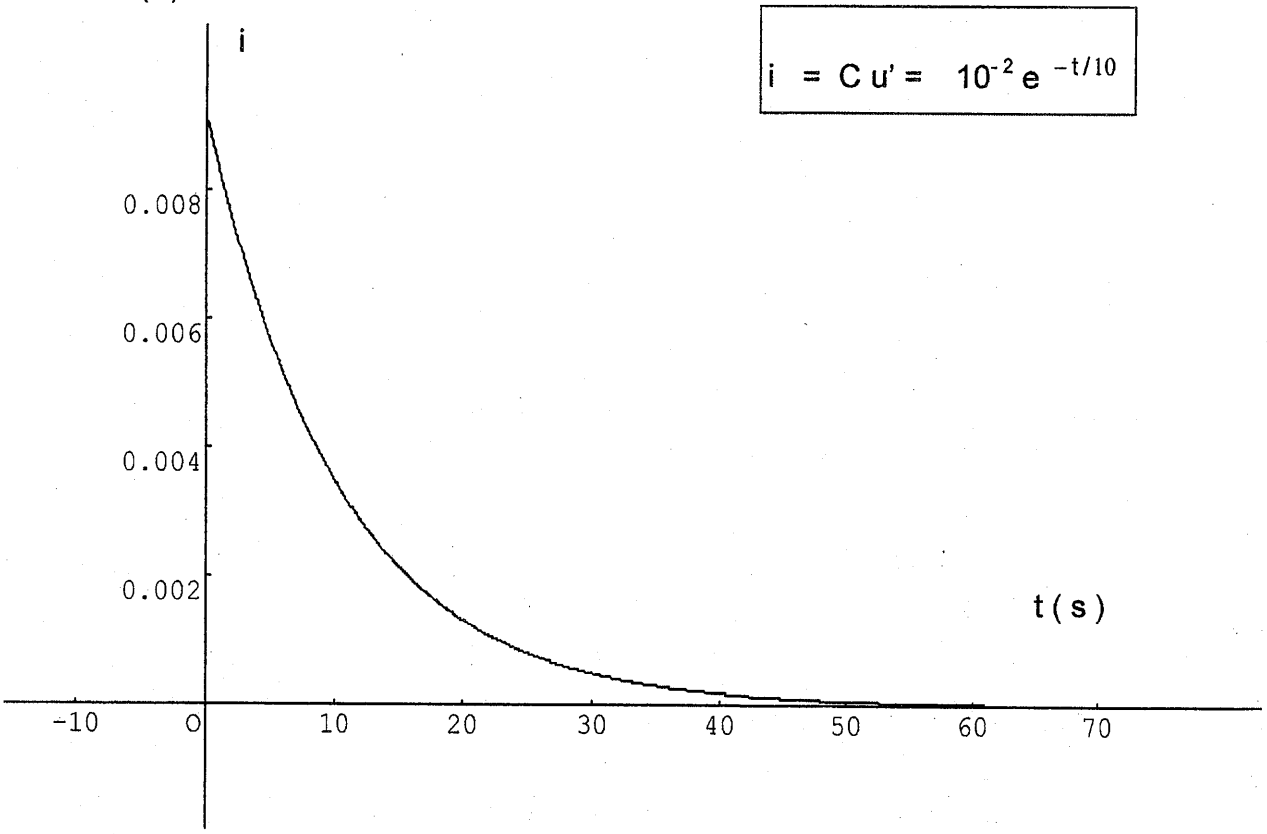
La tension pour la décharge a pour expression $E - E\ e^{-\frac{t}{\tau}}$

On passe de la courbe représentative de la charge à la courbe représentative de la décharge par une symétrie d'axe l'axe des temps suivie d'une translation de vecteur directeur $\vec{E j}$. Ces 2 courbes sont superposables .

Tension (V)



Intensité (A).



3) Résoudre dans IR : $E\left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}\right) \geq \frac{2}{3}E$

$$1 - e^{-\frac{1}{RC}t} \geq \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{3} \geq e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\Leftrightarrow \quad 3 \leq e^{\frac{t}{\tau}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln 3 \leq \frac{t}{\tau}$$

$$\Leftrightarrow \quad \tau \ln 3 \leq t \qquad \text{or} \qquad \ln 3 \approx 1{,}1$$

A partir d'une durée de charge voisine de 1,1 τ le condensateur est chargé aux 2 / 3 .

Remarque : Ce résultat concorde avec celui trouvé dans T.P. de physique : **le condensateur atteint les 2/3 de sa charge au bout d'un temps légèrement supérieur à τ .**

II. INTENSITÉ

Soit la fonction définie sur [0 ; $+\infty$ [par :

$$i(t) = C\,u'(t) = \frac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Pour la charge l'intensité vaut $\frac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$

Pour la décharge l'intensité vaut $-\frac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$

Ces deux intensités sont donc opposées et leurs graphiques sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses .

En mathématiques , les résultats et graphiques concordent avec ceux enregistrés au cours du T.P. de physique .

<u>CONCLUSION</u> : La concordance des résultats mesurés en physique et de ceux calculés en mathématiques valident les modèles utilisés

LIAISON ENTRE LES OBSERVATIONS
ET LES MODÈLES MATHÉMATIQUES

CHARGE

PHYSIQUE	MATHÉMATIQUES
La tension croît rapidement au début, puis ralentit sa croissance pour enfin se stabiliser à une valeur constante (voisine de E)	u' positive donc u est croissante $\lim_{t \to +\infty} u(t) = E$ Le graphique de la tension tension a une asymptote parrallèle à l'axe des temps.
Au bout d'un temps égal à τ le condensateur semble chargé presque aux 2/3. Au delà il continue à se charger.	La solution de l' inéquation $u(t) \geq 2/3\ E$ est $[\ \tau \ln 3\ ;\ +\infty\ [$ Avec $\ln 3 \approx 1{,}1$
Au bout d'un temps voisin de $5\ \tau$ le condensateur semble chargé à 99%.	La solution de l' équation $u(t) = 0.99\ E$ est $\tau \ln 100$ Avec $\ln 100 \approx 4{,}6$
Au delà il continue à se charger (*légèrement*). La durée de charge semble proportionnelle à R et à C et indépendante de E.	u est strictement croissante car sa dérivée est positive (mais *petite*). La durée de charge est proportionnelle à R et à C et indépendante de E.

DÉCHARGE

PHYSIQUE	MATHÉMATIQUES
La tension décroît rapidement au début puis ralentit sa décroissance	u' négative donc u est décroissante
pour enfin se stabiliser à une valeur constante (voisine de 0)	$\lim_{t \to +\infty} u(t) = 0$. Le graphique de la tension tension a une asymptote : l'axe des temps.
Au bout d'un temps voisin de $5\,\tau$ le condensateur semble chargé à 99%.	La solution de la double inéquation $0 < E\, e^{-\frac{t}{RC}} < \frac{E}{100}$ est : $]\tau \ln 100 \ ; \ +\infty[$ Avec $\ln 100 \approx 4{,}6$
Au delà il continue à se décharger.	u est strictement décroissante.
La durée de décharge **semble** égale à celle de charge .	La durée de décharge **est** égale à celle de charge .
La durée de décharge **semble** proportionnelle à R et à C et indépendante de E.	La durée de décharge **est** proportionnelle à R et à C et indépendante de E.

Conclusion : La concordance des résultats mesurés en physique et de ceux calculés en mathématiques valident les modèles utilisés .

MODELISATIONS MATHEMATIQUES

DU FONCTIONNEMENT

DES LENTILLES MINCES CONVERGENTES

MODELISATION DU FONCTIONNEMENT

DES LENTILLES MINCES CONVERGENTES

PRESENTATION D' ACTIVITES AUTOUR DE

LA LOI DE DESCARTES

Niveaux terminales S.T.I. (génie mécanique, génie énergétique et génie civil, arts appliqués, ...) et S (spécialité physique)

(Adaptation possible pour toutes les terminales **S**)

INTRODUCTION

Les élèves connaissent tous quelques instruments d'optique : un appareil photo , une loupe, un microscope, une lunette astronomique. Pour découvrir et comprendre le fonctionnement de ces appareils, on propose l'étude des lentilles minces convergentes qui sont à la base du fonctionnement de ces instruments.

En physique, dés la première séquence de T.P., les lentilles convergentes sont présentées puis l'étude de la position et de la taille de l'image, en fonction de la position de l'objet, est proposée. Dans le cas où l'objet est placé avant le foyer objet, l'étude expérimentale directe est simple. Il est alors facile de conjecturer que la position de l'image, en fonction de celle de l'objet, est régie par la loi de DESCARTES. Dans les cas plus compliqués dans lesquels l'objet est placé entre le foyer objet et la lentille ou après la lentille , une modélisation géométrique du montage optique facilite l'étude. Cette

modélisation élémentaire est basée sur des propriétés très simples des rayons lumineux . Le logiciel cabri-géomètre peut permettre d'animer le modèle géométrique et de bien simuler, de manière dynamique, le fonctionnement des lentilles. Il peut dans les classes où l'étude des lentilles n'est pas au programme de physique, remplacer son étude expérimentale.

Dans la séquence de T.D. de mathématiques, l'algèbre intervient pour transformer le modèle initialement géométrique. La loi de DESCARTES est établie, puis l'analyse associée à l'algèbre permet de poursuivre l'étude théorique des lentilles et d' envisager des prolongements.

Ensuite dans la partie intitulée « prolongement » les activités présentées montrent comment la loi de DESCARTES permet de connaître le rapport des grandissements de deux objectifs photographiques à partir de leurs focales ; elle permet aussi de trouver la distance focale de deux lentilles minces accolées.

Ces activités montrent aussi à partir d'une modélisation mathématique le principe du fonctionnement de la lunette astronomique, de l'appareil photographique et du microscope.

Dans toutes les activités proposées la physique joue un rôle pédagogique essentiel et renforce le sens des notions mathématiques envisagées.

DURÉES DES SÉQUENCES : Physique : 5 heures.
Mathématiques : 5 heures.

Ces temps n'incluent pas la durée des prolongements.

LENTILLES CONVERGENTES

LOI DE DESCARTES

OBSERVATIONS

FICHE CONSIGNE SEQUENCE N° 1

T . P . DE PHYSIQUE : LENTILLES

I. BUT DE LA MANIPULATION .

- Observer l'image d'un objet réel, donnée par une lentille convergente.

- Etudier la position et la taille de cette image par rapport à la position de l'objet, avec représentation graphique : loi de Descartes (1596 - 1650) et grandissement .

- Etudier les variations de la position de l'image en fonction de la position de l'objet soumis à de petites variations. Profondeur de champ.

II. RAPPELS DE QUELQUES NOTATIONS , DEFINITIONS ET CONSTRUCTIONS

- **Lentille :** Milieu transparent limité par deux calottes sphériques, ou une calotte sphérique et une plane.

- **Axe optique** : Droite qui joint les centres des calottes limitant la lentille.

- **Centre optique :** Intersection de la lentille avec l'axe optique.

- **Foyers principaux**

Foyer - objet **F :** Point par où passent les rayons incidents qui ressortent parallèlement à l'axe optique.

Foyer - image **F' :** Point par où passent les directions des rayons incidents parallèles à l'axe optique lorsqu'ils ressortent de la lentille .

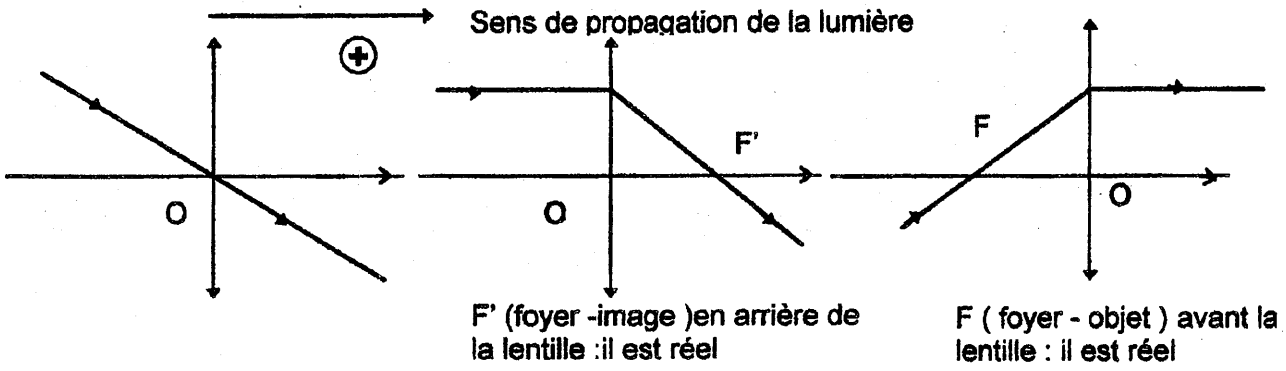
Ces **foyers** sont **symétriques** par rapport à la lentille .

- **Distance focale** : L'axe optique étant orienté dans le sens de propagation de la lumière , $\overline{OF'}$ est appelée distance focale f ' de la lentille .

on appelle **image réelle** une image qui peut être vue sur un écran derrière la lentille.

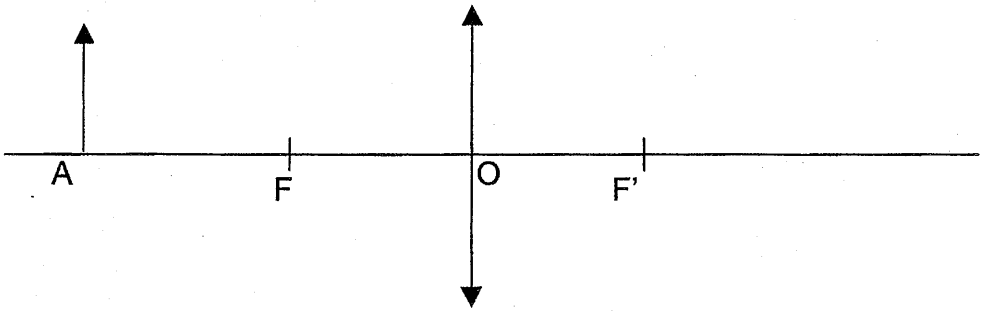
on appelle **image virtuelle** une image qui ne peut pas être vue sur un écran.

- **Trajet d'un rayon lumineux passant par O ou par F ou par F'**



Notation : L'unité de longueur choisie est le mètre, l'origine est le centre optique, le sens positif est celui de la lumière.

III. 1) Manipulation n°1: *L'objet est placé avant le foyer F*



a) **Observation :**

- ♦ L'image est-elle droite ou renversée ?
  L'image est - elle réelle ou virtuelle ?
- ♦ Déplacer l'objet tout en le positionnant avant le foyer - objet F .
  Comment varie l'image ? (en grandeur et en position)
- ♦ Un léger déplacement de l'objet rend-il l'image floue,
  - quand l'objet est proche du foyer ?
  - quand l'objet est loin du foyer ?

b) **Mesures**

Notations : On note l'objet AB et A'B' son image .
On note A le point de l'objet situé sur l'axe
On note A' l'image de A situé sur l'axe optique .

On note $\overline{OF}$ = f = - f '

On note $\overline{OA}$ = p ; $\overline{OA'}$ = q ; $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$ (grandissement).

La lentille utilisée a une distance focale de 33 cm

Mesurer q quand on fait varier p en rapprochant l'objet du foyer

p (cm)	-100	-90	-80	-66	-50	-45
q(cm)						
$-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$						

Vérifier que $-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$ est une quantité constamment égale à 1 / f ' (loi de Descartes).

c) **Construction** : Prendre AB = 2 cm. Construire l'image A'B' de l'objet AB dans le cas où p = $\overline{OA}$ = - 80. Mesurer sur le dessin O A' et vérifier la concordance du résultat avec la mesure expérimentale précédente .

2) Manipulation n° 2 : *L'objet est placé entre le foyer F et la lentille*

a) Observation.

L'image est - elle réelle ou virtuelle ? L'image est-elle droite ou renversée ?

b) Construction : Construire l'image A'B' de l'objet AB dans chacun des cas suivants : p = $\overline{OA}$ = - 30 ; p = - 20 ; p = - 10 (prendre AB = 2 cm).

Dans chaque cas, mesurer q et placer les points de coordonnées p et q dans le repère précédent. (Origine : le centre optique ; unité : le cm).

La loi de Descartes reste - t - elle vraie dans ce cas ?

3) Manipulation n°3 :

L'objet (virtuel) A'_1 B'_1 est placé après la lentille L_1

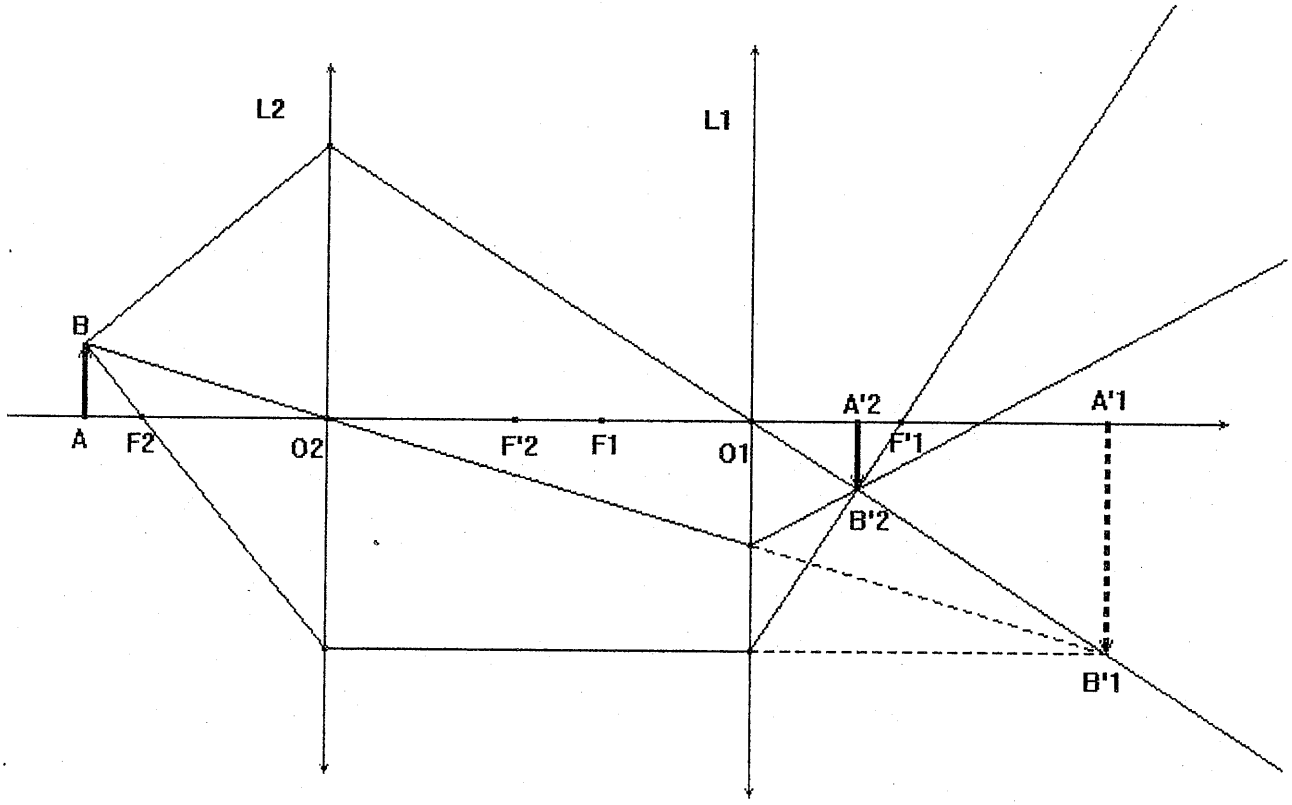
Si on place un objet réel après la lentille L_1 il n'y a pas d'image . Pour pallier à cette absence on place une deuxième lentille L_2 avant la première .

a) Montage

Former l'image réelle A'_1 B'_1 de AB donnée par la lentille L_2 . Mesurer $O_1A'_1$.

Placer L_1 , mesurer O_1O_2 , calculer O_2 A'_1.

L'image réelle A'_1 B'_1 devient objet virtuel pour la lentille L_1 , former l'image réelle A'_2 B'_2 de A'_1 B'_1 par la lentille L_1 , mesurer $O_2A'_2$.



Vérifier la loi de DESCARTES pour la lentille L_1 .

b)Construction

Faire le schéma du montage avec la distance O_1O_2 différente des précédentes puis vérifier la loi de DESCARTES pour L_1 .

FICHE CORRIGEE DU T.P. DE PHYSIQUE

LENTILLES

1) Manipulation n°1: L'objet est placé avant le foyer F

a) Observations

a) L'image est renversée et elle est réelle.

b) Quand l'objet se rapproche du foyer, l'image s'éloigne de la lentille et devient grande.

c) Quand l'objet est loin de la lentille un léger déplacement de l'objet entraîne un faible déplacement de l'image, celle-ci reste nette.

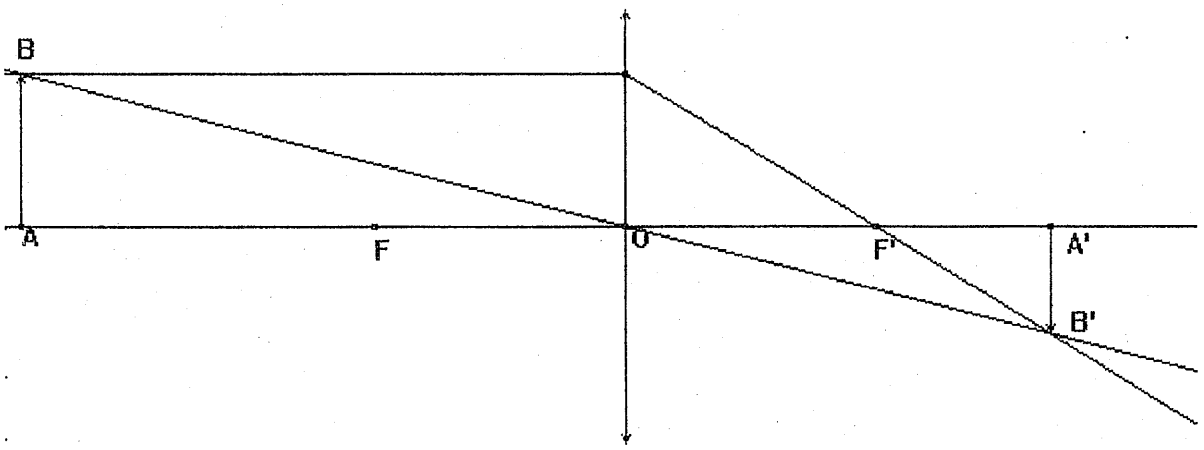
Quand l'objet est près du foyer un léger déplacement de la lentille entraîne un important déplacement de l'image, celle-ci devient floue.

b) Mesures

p (cm)	-100	-90	-80	-66	-50	-45
q(cm)	49.2	52	56	66	97	123.75
$-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03

La quantité (-1/p)+(1/q) est constante et égale à 1 / f' (c'est la loi de DESCARTES).

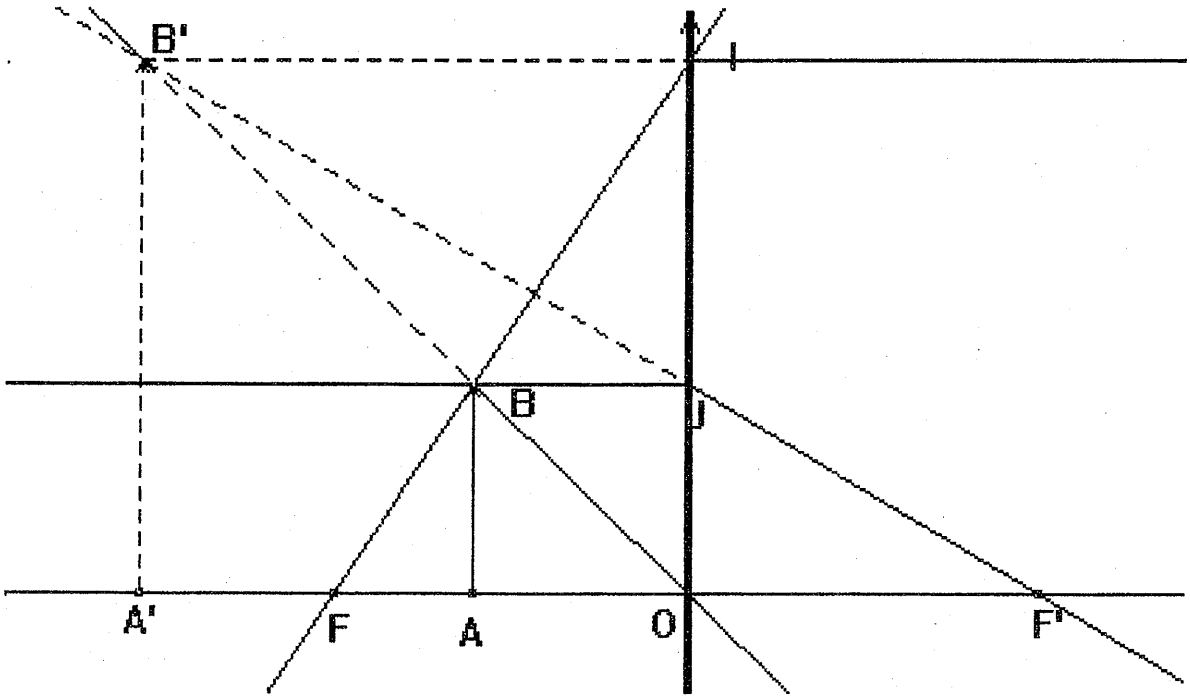
c) Construction d'une image



2) Manipulation n° 2 : *Objet entre le foyer - objet et la lentille*

a) Observation Quand on place l'objet entre la lentille et F, l'image disparaît, elle devient virtuelle.

b) Construction



LENTILLES CONVERGENTES

LOI DE DESCARTES

TRANSCRIPTIONS MATHEMATIQUES DES OBSERVATIONS

BUT DES SEQUENCES DE MATHEMATIQUES

LENTILLES CONVERGENTES

Dans la partie « physique » la loi de Descartes a été établie grâce aux observations sur un nombre réduit de positions de l'objet. L'étude mathématique consiste à démontrer la loi de Descartes (ici, l'argumentation est géométrique) et d'anticiper sur les variations des positions de l'image difficiles à observer expérimentalement.

Pour cela on suppose que :

A - Tout rayon parallèle à l'axe optique émerge en passant par le foyer image F'.

B - Tout rayon passant par le foyer objet émerge parallèle à l'axe optique.

C - Tout rayon passant par le centre optique O n'est pas dévié.

Notation :

On choisit comme unité de longueur le mètre, comme origine O le centre optique.
On oriente l'axe optique dans le sens de la lumière.
F et F' désignent respectivement les foyers objet et image de la lentille.
AB désigne l'objet et A'B' désigne l'image.
On pose : $f = \overline{OF}$; $f' = \overline{OF'} = -f$; $p = \overline{OA}$; $q = \overline{OA'}$.

FICHE CONSIGNE SEQUENCE N°2

T . P . DE MATHEMATIQUES : LENTILLES

Démonstration de la loi de Descartes et conséquences

I . IMAGE D ' UN OBJET PLACE AVANT LE FOYER .

I . Démonstration de la loi de conjugaison de Descartes

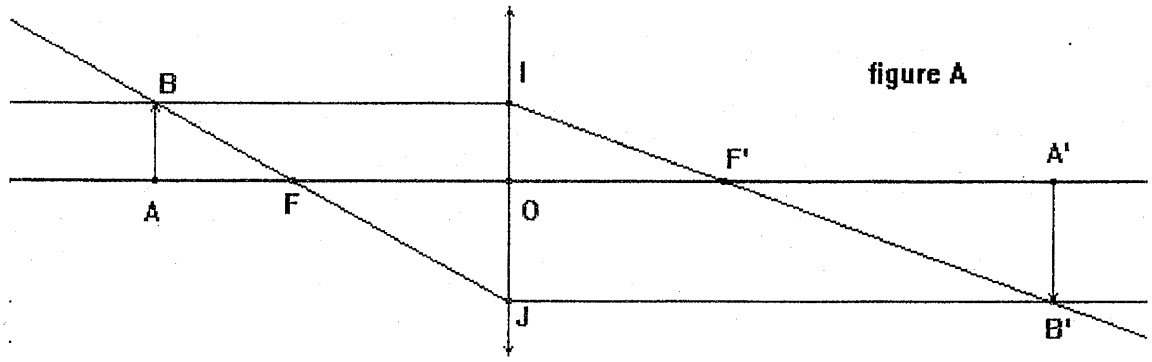


figure A

1) Démontrer que $\frac{FO}{BI}=\frac{OJ}{IJ}$ et que $\frac{F'O}{B'J}=\frac{OI}{IJ}$

En déduire que $\frac{FO}{OA}+\frac{F'O}{OA'}$ est un réel constant

En déduire que $\frac{1}{OA}+\frac{1}{OA'}=\frac{1}{OF'}$ puis que $\boxed{-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{f'}}$

Vérifier la concordance de cette formule démontrée avec la **Loi de Descartes** conjecturée en physique.

2) Exprimer q en fonction de p et de f ' .

3) Grandissement γ :

Rappel :Le grandissement γ est le rapport $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$.

Calculer γ en fonction de p et q .

4) Exprimer q et γ dans le cas où f ' vaut $\frac{1}{3}$ (cas vu en physique. Unité=1 mètre).

II . On note f_1 la fonction définie sur $]-\infty\ ;-\frac{1}{3}[$ par $f_1(p) = \frac{p}{3p+1}$

1) Etudier cette fonction f_1

2) Montrer que les mathématiques permettent de retrouver les observations faites en physique en complétant le tableau suivant .

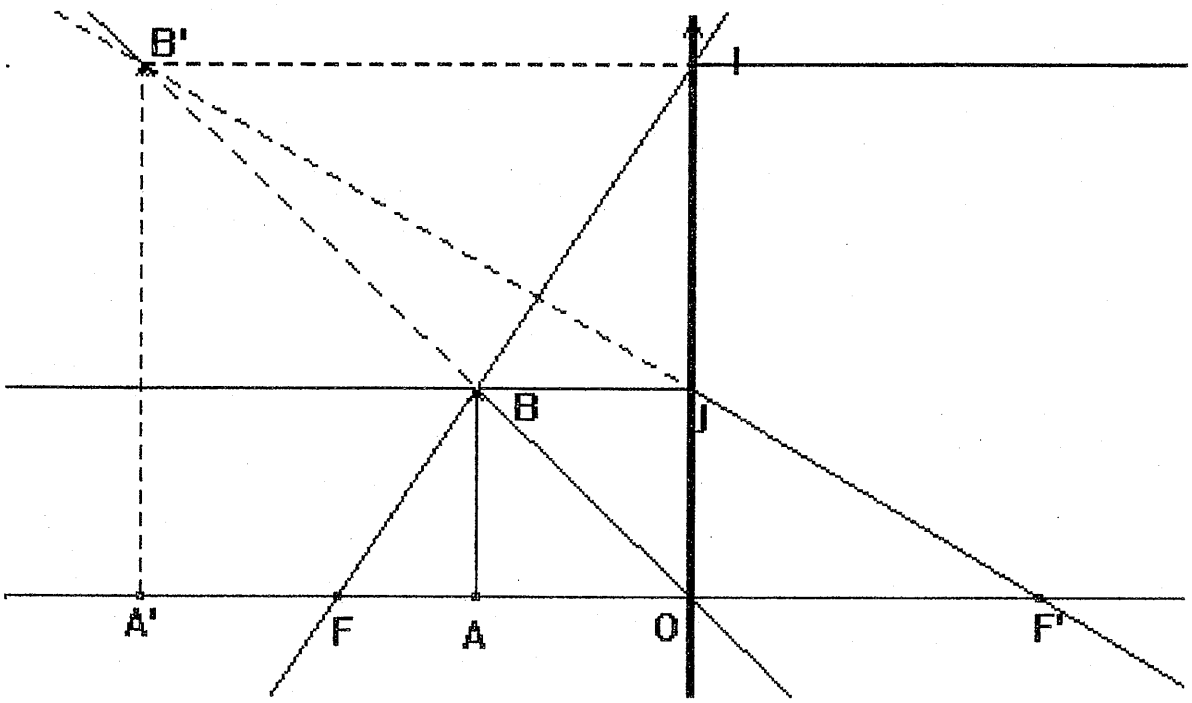
III . Tableau comparatif

$p \in]-\infty\ ;-\frac{1}{3}[\quad q = f_1(p) = \frac{p}{3p+1} \qquad \gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{q}{p} = \frac{1}{3p+1}$

PHYSIQUE Observations (manipulation et / ou dessin)	**MATHEMATIQUES**
a) Quand l'objet est très éloigné de la lentille : **l'image est très proche de F',**	Compléter $\lim\limits_{p\to\dots} f_1(p) = \dots$
et l'image est très petite.	Déterminer $\lim\limits_{p\to-\infty} \frac{1}{3p+1}$
b) Quand on déplace l'objet , l'image et l'objet se déplacent dans le même sens .	Quand $\overline{OA}$ grandit comment varie $\overline{OA'}$? Quand OA diminue comment varie OA' ?
c) Quand on déplace l'objet vers la lentille , l'image renversée grandit .	1) Quel est le signe de $\frac{q}{p}$? 2) Quand OA diminue comment varie OA' ? Quand OA diminue , montrer que $\frac{A'B'}{AB}$ augmente , en déduire que A'B augmente .
d) L'image est renversée et de même taille que l'objet quand $p \approx 0.66$ m .	Démontrer que $\gamma = -1 \Leftrightarrow p = -\frac{2}{3}$
e) Si $p > -0.66$ m l'image est renversée et plus grande que l'objet .	Démontrer que $\gamma < -1 \Leftrightarrow -\frac{2}{3} < p < -\frac{1}{3}$
f) Quand l'objet est très près du foyer , l'image est très éloignée de la lentille .	Déterminer $\lim\limits_{p\to-1/3^{<}} f_1(p)$

II. CAS D' UN OBJET PLACE ENTRE LE FOYER ET LA LENTILLE
(- 1/3 < p < 0)

1) Démonstration de la loi de Descartes



Démontrer que $\frac{FO}{BJ}=\frac{OI}{IJ}$ et que $\frac{F'O}{B'I}=\frac{OJ}{IJ}$

En déduire que $\frac{FO}{OA}-\frac{F'O}{OA'}$ est un réel constant.

En déduire que $\frac{1}{OA}-\frac{1}{OA'}=\frac{1}{OF'}$ puis que $-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{f'}$.

Vérifier la concordance de cette formule démontrée avec la **Loi de Descartes** conjecturée en physique.

2) Etude de la fonction qui à p associe q .

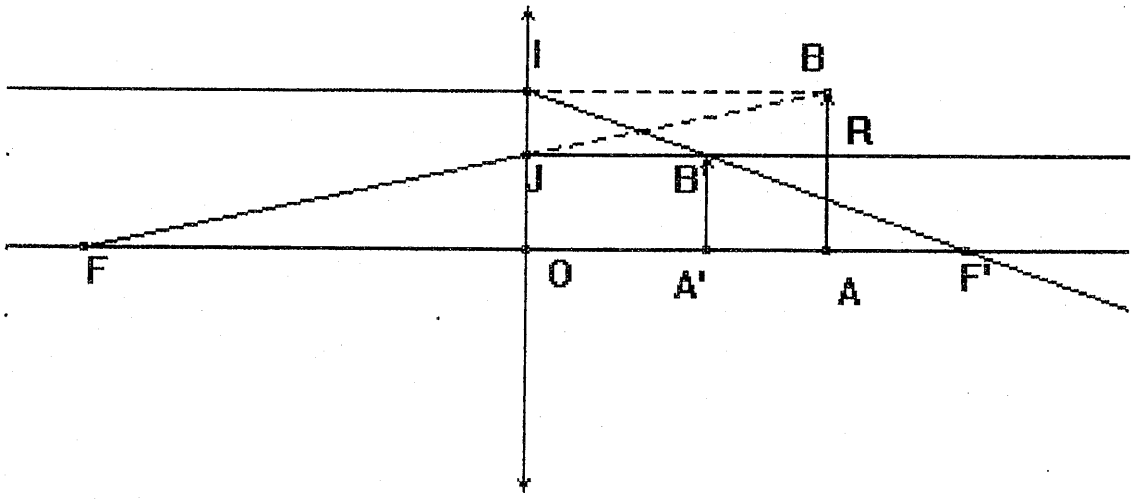
a) Exprimer q en fonction de p en donnant à f ' la valeur 1 / 3 en utilisant la loi de Descartes.

b) Etudier la fonction f_2 qui a p associe q (avec - 1 / 3 < p < 0).

c) Tracer le graphique de cette fonction.

III. CAS D'UN OBJET (VIRTUEL)PLACE APRES LA LENTILLE (P > 0)

Démonstration de loi de Descartes



Les triangles (FOJ) et (JRB) sont homothétiques donc $\frac{FO}{OA} = \frac{OJ}{IJ}$.

Les triangles (F'OI) et (JIB') sont homothétiques donc $\frac{F'O}{OA'} = \frac{OI}{IJ}$.

A partir de ces deux résultats démontrer la **loi de Descartes**.

EXPRESSION de q en fonction de p

En donnant à f ' la valeur 1 / 3 et grâce à la loi de DESCARTES montrer que :

$$q = f_3(p) = \frac{p}{3p+1} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{q}{p} = g_3(p) = \frac{1}{3p+1}.$$

GRAPHIQUES G_f et Gg des fonctions f_3 et g_3

Tracer ces deux graphiques

FICHE CORRIGEE SEQUENCE N°2

T . P . DE MATHEMATIQUES : LENTILLES

I. IMAGE D ' UN OBJET PLACE AVANT LE FOYER .

I. Etude de la position et de la taille de l'image en fonction de la position de l'objet : Loi de conjugaison de DESCARTES

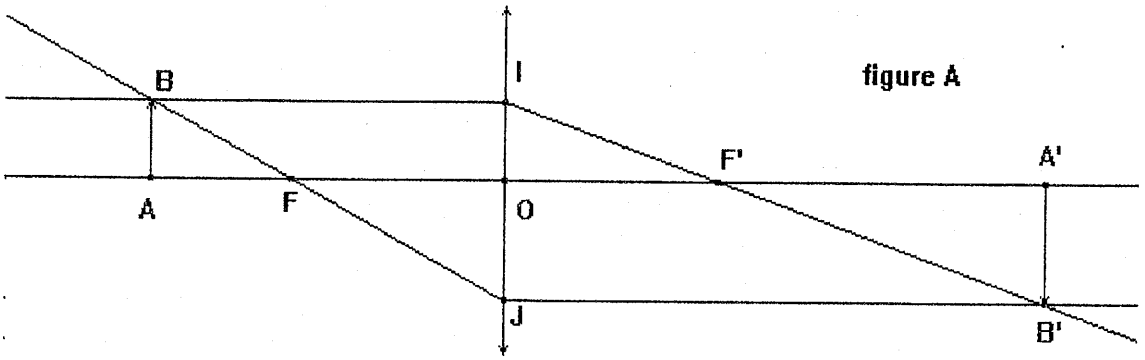


figure A

1) Les triangles (FOJ) et (BIJ) sont homothétiques donc $\frac{FO}{BI}=\frac{OJ}{IJ}$.

Les triangles (F'OI) et (B'J I) sont homothétiques donc $\frac{F'O}{B'J}=\frac{OI}{IJ}$.

d'où en additionnant ces égalités membre à membre $\frac{FO}{OA}+\frac{F'O}{OA'}=1$.

En divisant les deux membres de cette égalité par OF' (OF' = OF).

On obtient : $\frac{1}{OA}+\frac{1}{OA'}=\frac{1}{OF'}$.

Or OA = - p ; OA' = q ; OF' = f ' donc $\boxed{-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{f'}}$

2) Exprimer q en fonction de p et f ' . $\frac{-q+p}{pq}=\frac{1}{f'}$ d'où $f'(-q+p)=pq$ $(p\neq 0 ; q\neq 0)$

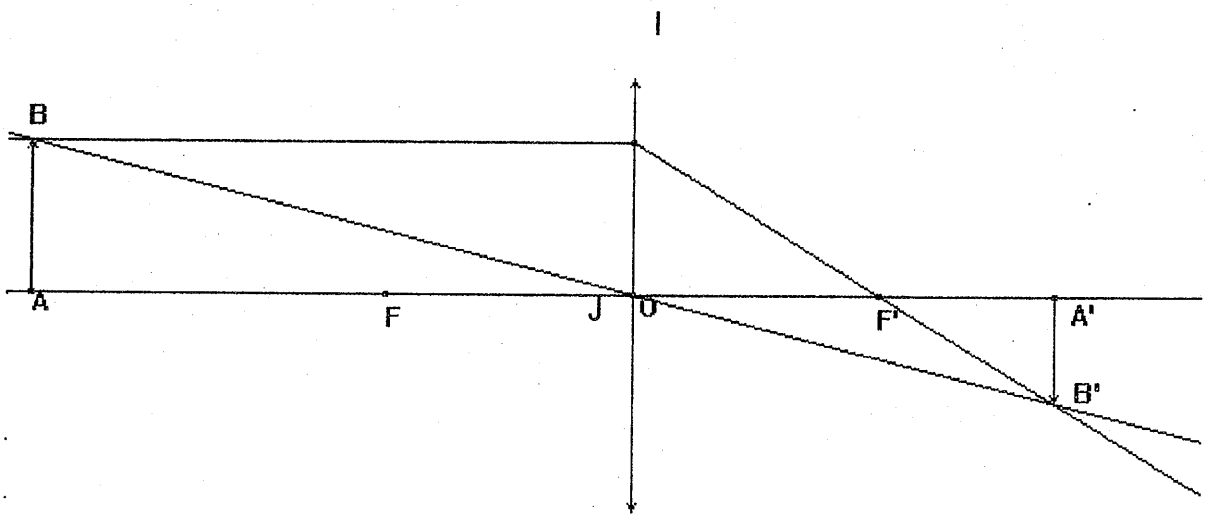
d'où $\boxed{q=\frac{pf'}{p+f'}}$

3) Grandissement γ :

Première méthode : en utilisant le point de départ

A. Tout rayon parallèle à l'axe optique émerge en passant par F'

C. Tout rayon passant par le centre optique O n'est pas dévié.



Les triangles (OA'B') et (OAB) sont homothétiques ; donc $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$.

D'autre part, $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$ et donc $\gamma = \frac{q}{p}$

Deuxième méthode : sans utiliser [C]

a) $\frac{FO}{BI} = \frac{OJ}{IJ}$ devient $\frac{FO}{OA} = \frac{A'B'}{IJ}$ (1)

$\frac{F'O}{B'J} = \frac{OI}{IJ}$ devient $\frac{F'O}{OA'} = \frac{AB}{IJ}$ (2)

En divisant membre à membre (1) et (2): $\frac{OA'}{OA} = \frac{A'B'}{AB}$ d'où $\frac{\overline{OA'}}{-\overline{OA}} = \frac{-\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$

d'où $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{q}{p} = \frac{f'}{p+f'}$

b) D'après l'égalité $\gamma = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$, A' est l'image de A par l'homothétie h de centre O et de rapport γ . Comme $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$, on a : $\overrightarrow{A'B'} = \gamma \overrightarrow{AB}$. Cette égalité

vectorielle traduit la propriété caractéristique de l'homothétie h ; B' est donc l'image de B par l'homothétie de centre O et de rapport γ. Or pour toute homothétie, chaque antécédent est aligné avec son image et le centre ; donc B ,O ,B' sont alignés.

La suite de la démonstration est celle de la méthode n°1.

Remarque ;: Dans les résultats admis comme point de départ la condition [C] (*Tout rayon passant par le centre optique O n'est pas dévié)* n'est pas nécessaire.

4) Expression de q et de γ si f ' = 1 / 3 .

D'après la loi de DESCARTES $-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=3$ d'où $q=\frac{p}{3p+1}$ $(p \neq -1/3)$

$$\gamma = \frac{q}{p} = \frac{1}{3p+1}$$

II] Fonction définie sur $]-\infty\ ;-\frac{1}{3}[$ par $f_1(p)=\frac{p}{3p+1}$

1) Etudier cette fonction f_1

$$f_1'(p) = \frac{1}{(3p+1)^2}$$

p	$-\infty$	- 1/3
q'	+	
q	1/3 ↗	$+\infty$

Le graphique est la première branche de la représentation tracée à la page 86 .

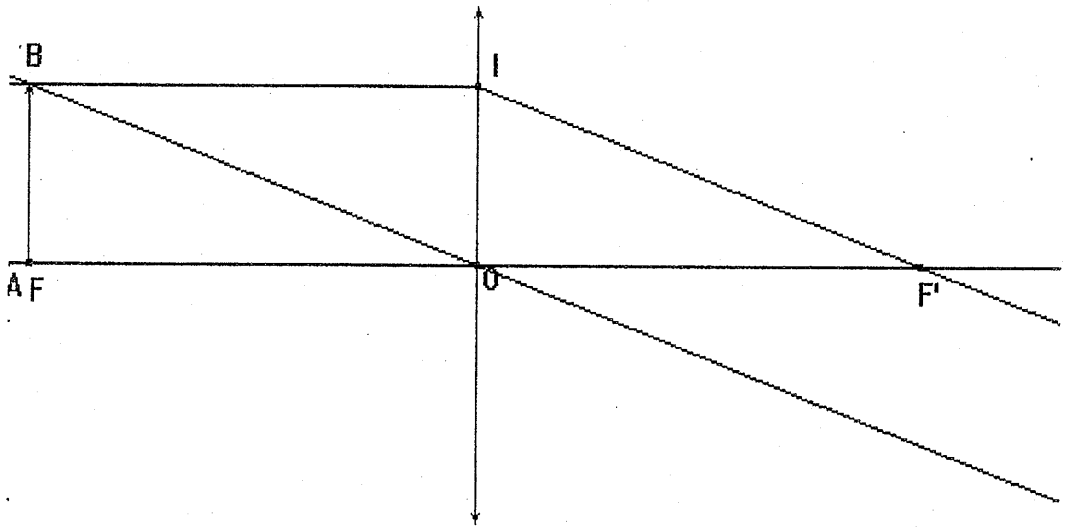
2) Les mathématiques permettent de retrouver des observations faites en physique :

PHYSIQUE	MATHEMATIQUES
a)	$\lim_{x \to -\infty} q \qquad \lim_{x \to -\infty} \dfrac{1}{3+\dfrac{1}{p}} = \dfrac{1}{3}$; donc la droite D_1 (q = 1 / 3) est asymptote au graphique
	$\lim_{\substack{< \\ p \to -1/3}} \gamma = +\infty$ donc la droite D_2 (p = - 1 / 3) est asymptote au graphique $\gamma = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$; un quotient qui tend vers zéro , dont le dénominateur est constant , a son numérateur qui tend vers zéro .
b)	Quand $\overline{O\,A}$ grandit , p grandit or la fonction f_1 est croissante , donc q et $\overline{O\,A'}$ grandissent . Quand OA diminue , $\overline{O\,A}$ grandit donc $\overline{O\,A'}$ et OA' grandissent .
c)	1) q et p sont de signes contraires donc q / p est négatif , de même γ est négatif . 2) Quand OA diminue OA' augmente donc OA' / OA augmente . de même A'B' / AB augmente . Quand OA diminue , le grandissement , en valeur absolue , augmente . Le rapport A'B' / AB , qui augmente , a un dénominateur constant donc son numérateur A'B' grandit .
d)	$\gamma = -1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{3p+1} = -1$ $\Leftrightarrow p = -2/3$
e)	$\gamma < -1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{3p+1} < -1$ $\Leftrightarrow \dfrac{1}{3p+1} + 1 < 0$ $\Leftrightarrow \dfrac{3p+2}{3p+1} < 0$ $\Leftrightarrow -\dfrac{2}{3} < p < -\dfrac{1}{3}$
f)	$\lim_{\substack{< \\ p \to -1/3}} f_1(p) = +\infty$

Les rubriques b) c) , d) et e) peuvent être interprétées graphiquement en mathématique avec la représentation de f_1 .

g) Remarque :

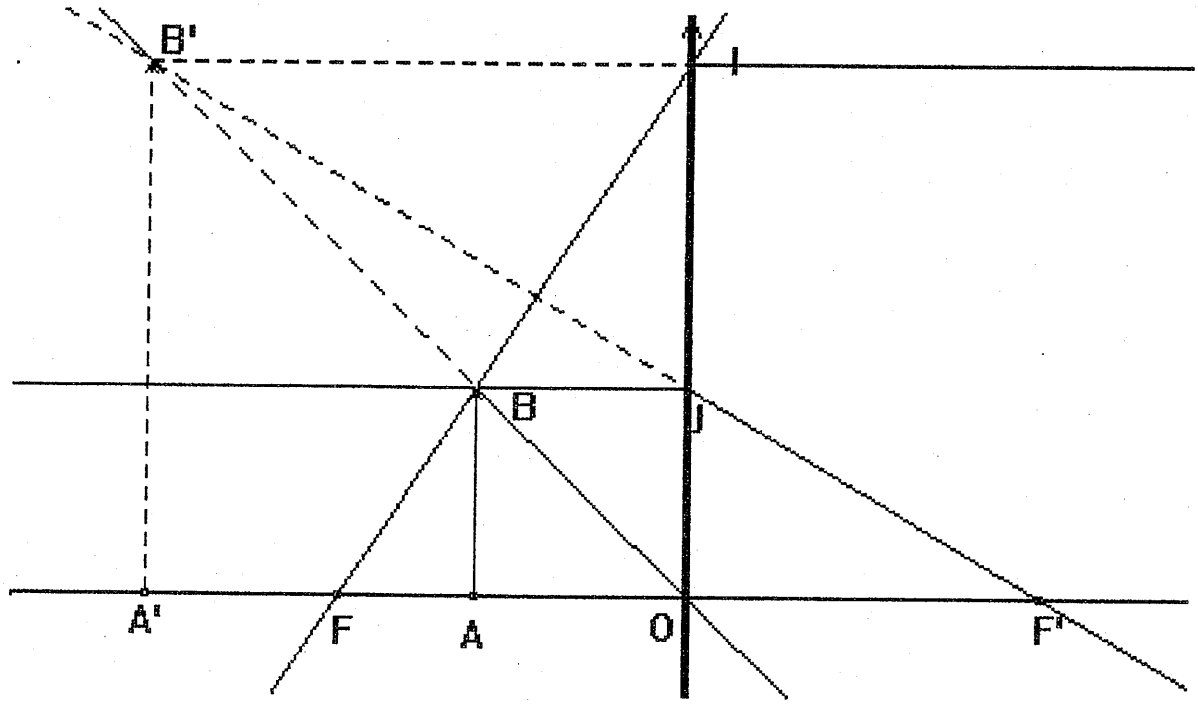
1)Quand l'objet est au foyer , l'image n'existe plus , on dit qu'elle est rejetée à l'infini les rayons émergents sont parallèles . En effet :
Les triangles BFO et OIF' sont égaux donc les angles $\widehat{BOF}$ et $\widehat{IF'O}$ donc les droites (BO) et (OF') sont parallèles.



2) On peut démontrer d'une manière analogue que l'image d'un objet à l'infini est dans le plan focal image (principe du retour inverse de la lumière).

II. CAS DE L'OBJET PLACE ENTRE LE FOYER ET LA LENTILLE

1) Loi de DESCARTES



$\frac{FO}{BJ} = \frac{OI}{IJ}$, car les triangles (FOI) et (BJI) sont homothétiques.

$\frac{F'O}{B'I} = \frac{OJ}{IJ}$, car les triangles (F'OJ) et (B'JI) sont homothétiques.

D'où $\frac{FO}{OA} - \frac{F'O}{OA'} = \frac{OI - OJ}{IJ} = \frac{IJ}{IJ} = 1.$

En divisant par FO (FO = O F'), on obtient $\frac{1}{OA} - \frac{1}{OA'} = \frac{1}{OF'}$.

D'où $\frac{1}{-p} - \frac{1}{-q} = \frac{1}{f'}$ d'où $-\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f'}$.

Cette dernière égalité porte le nom de **loi de Descartes.**

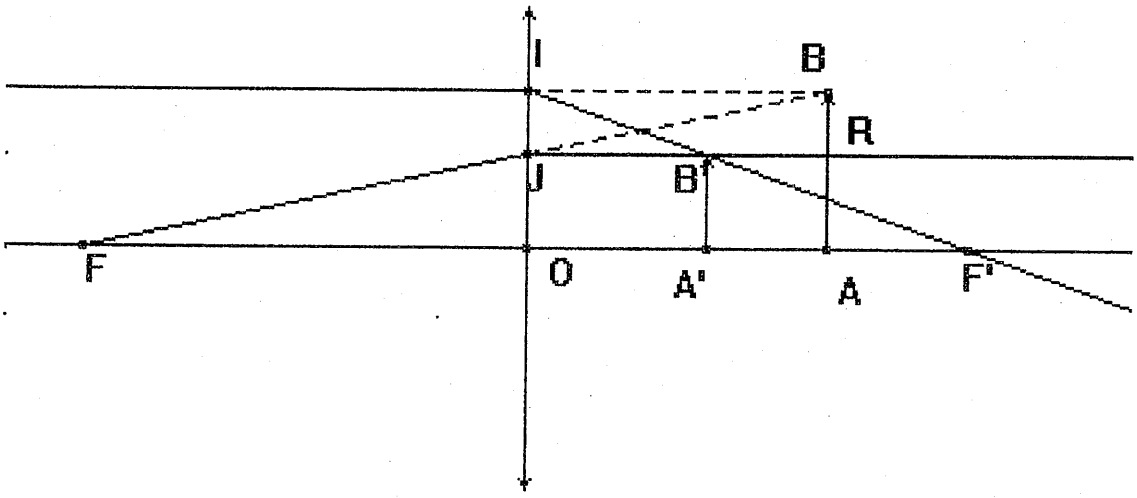
2) Fonction f_2

Même développement littéral que la fonction f_1 (avec $-1/3 < p < 0$).

Le graphique est la partie de la deuxième branche située à la gauche de l'axe des ordonnées et représentée à la page 86.

III. CAS D'UN OBJET (VIRTUEL)PLACE APRES LA LENTILLE (P >0)

1. Loi de DESCARTES



Les triangles (FOJ) et (JRB) sont homothétiques donc $\frac{FO}{OA} = \frac{OJ}{IJ}$.

Les triangles (F'OI) et (JIB') sont homothétiques donc $\frac{F'O}{OA'} = \frac{OI}{IJ}$.

D'où $\frac{F'O}{OA'} - \frac{FO}{OA} = \frac{OI - OJ}{IJ} = \frac{IJ}{IJ} = 1$ en divisant par FO : $\frac{1}{OA'} - \frac{1}{OA} = \frac{1}{FO}$.

D'où $\frac{1}{q} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'}$.

On retrouve la **loi de Descartes.**

2. EXPRESSION de q en fonction de p

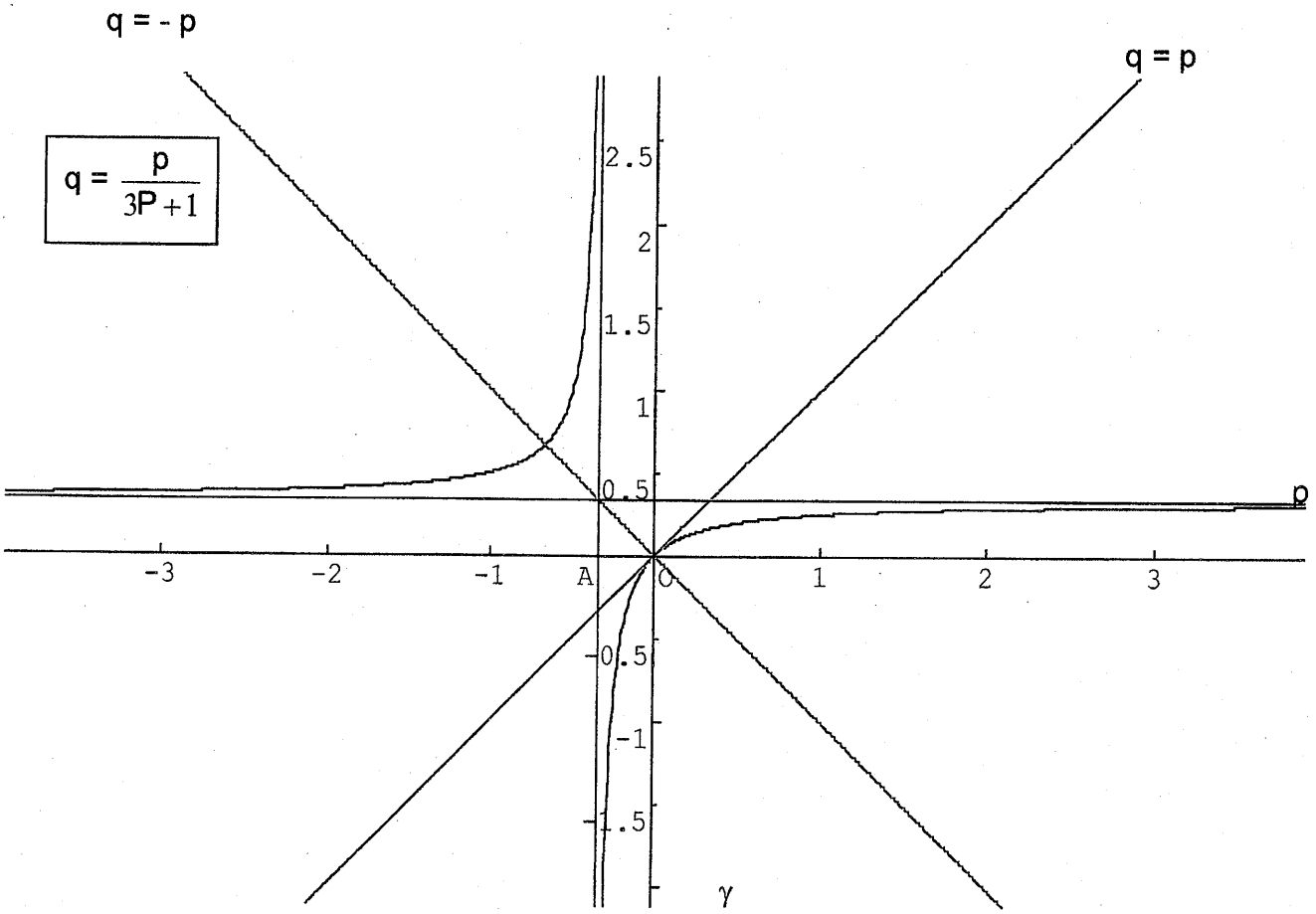
En donnant à f ' la valeur 1 / 3 on obtient , grâce à la loi de DESCARTES,

$$q = f_3(p) = \frac{p}{3p+1} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{q}{p} = g_3(p) = \frac{1}{3p+1}.$$

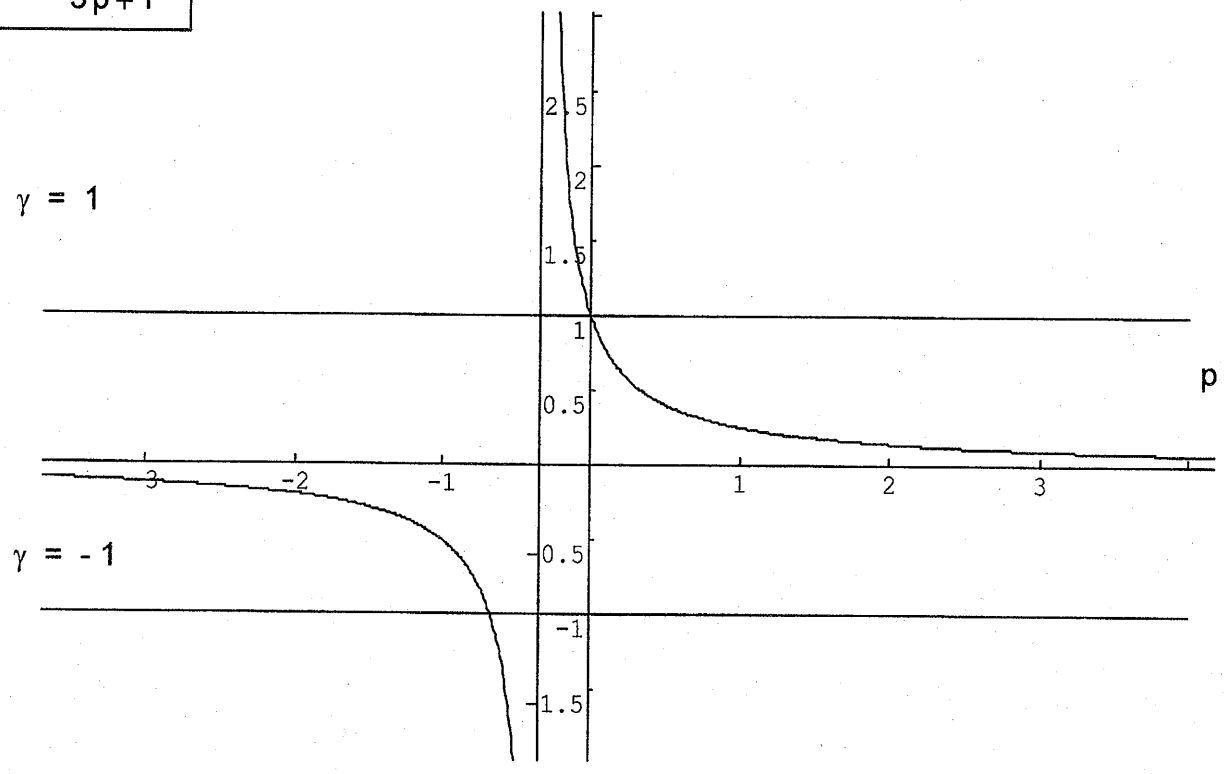
3. GRAPHIQUES G_f et Gg des fonctions f_3 et g_3

(voir page suivante)

Remarque : Soit M (p ; q) un point quelconque de la courbe G_f, l'inclinaison de la droite (OM) par rapport à l'axe des abscisses caractérise le grandissement .



$\gamma = \frac{1}{3p+1}$



LENTILLES CONVERGENTES

LOI DE DESCARTES

PROLONGEMENTS

UTILISATION DES MODELES

Premier prolongement (mathématique)

Dérivée d'une fonction et résolutions d'inéquations

Interprétation physique des résultats .

FICHE CONSIGNE : EXERCICE N°1

BUT

On a pu observer en physique que

Un léger déplacement de l'objet

- **ne modifie pas la netteté de l'image quand l'objet est loin du foyer,**
- **rend l'image floue quand l'objet est proche du foyer .**

La notion de dérivée permet d'expliquer ceci.

Soit la fonction numérique f_1 définie par $f_1(p) = q = \dfrac{p}{3p+1}$ où $p < -1/3$

1) Déterminer $f_1'(p)$.

2) Déterminer $\lim\limits_{p \to -\infty} f'_1(p)$ et $\lim\limits_{p \to -1/3} f'_1(p)$

3) Donner le tableau de variation de f_1'

4) Soient deux points $M_1(p_1 ; q_1)$ et $M_2(p_2 ; q_2)$ très proches sur le graphique G de f_1 . En admettant que le coefficient directeur de la droite $(M_1 M_2)$ est voisin de f_1' déduire des questions précédentes que :

a) Si M_1et M_2 sont très éloignés de l'origine du repère q_1 et q_2 sont très proches .

b) Si M_1et M_2 sont très proches de l'asymptote Δ ($p = -1/3$) q_1 et q_2 sont très différents .

FICHE CORRIGEE : EXERCICE N° 1

Soit la fonction numérique f_1 définie par $f_1(p) = q = \dfrac{p}{3p+1}$ où $p < -1/3$.

1) $f_1'(p) = \dfrac{1}{(3p+1)^2}$

2) et 3) $f_1''(p) = \dfrac{-6}{(3p+1)^3}$

p	$-\infty$	$-1/3$
$f_1''(p)$	+	
$f_1'(p)$	0 →	$+\infty$

4) $f_1'(p)$ est le coefficient directeur de la tangente au graphique G_1 de f_1, au point d'abscisse p..

$M_1(p_1, q_1)$; $M_2(p_2; q_2)$ désignent deux points très proches sur G_1.

Le coefficient directeur de (M1M2) est voisin $f_1'(p)$.

- Si M_1 et M_2 sont très éloignés de O (centre optique), quand p_1 tend vers $-\infty$ alors $f_1'(p_1)$ tend vers 0 donc la sécante ($M_1 M_2$) est presque parallèle à l'axe des abscisses donc q_1 et q_2 sont très proches .

- Si M_1 et M_2 sont très proches de l'asymptote d'équation $p = -1/3$ (en physique M_1 et M_2 sont alors très proche du foyer objet), quand p_1 tend vers $-1/3$ alors $f_1'(p_1)$ tend vers $+\infty$ donc la sécante ($M_1 M_2$) est presque parallèle à l'axe des ordonnées d'où q_1 et q_2 sont très différents .

On retrouve ainsi la constatation faite en physique :

- Si l'on bouge légèrement l'objet éloigné de la lentille , l'image reste nette (grande profondeur de champ).

- Si l'on bouge légèrement l'objet proche du foyer de la lentille, l'image devient floue (petite profondeur de champ).

FICHE CONSIGNE : EXERCICE N°2

BUT

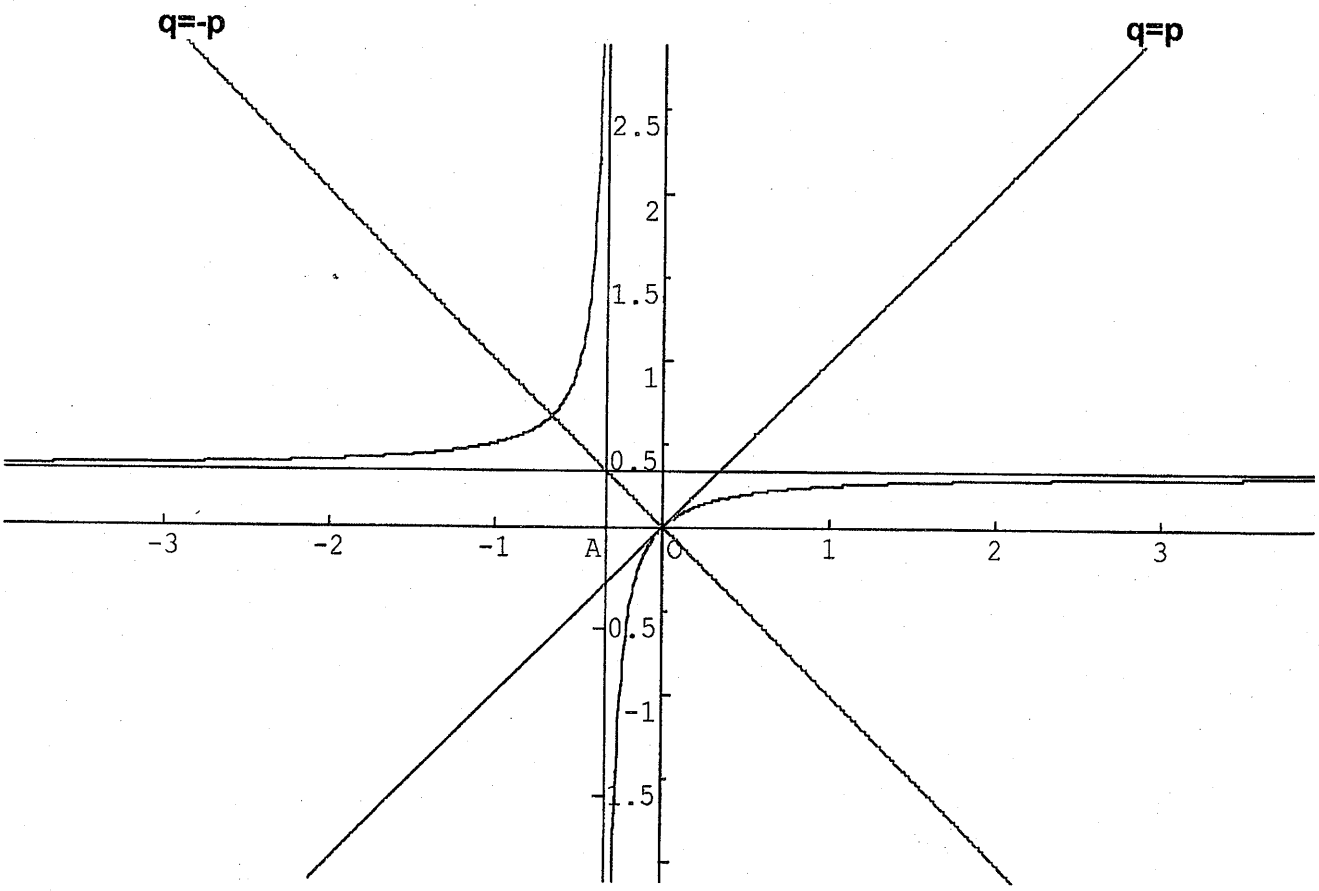
Où placer l'objet pour que son image soit renversée ou réduite ?

I. Déterminer algébriquement puis géométriquement la position de l'objet pour que son image soit renversée.

II. Déterminer algébriquement puis géométriquement la position de l'objet pour qu'il soit plus grand que son image.

III. Interpréter d'un point de vue optique cette double inéquation et sa solution

$$-1 < 1/(3p+1) < 1$$



FICHE CORRIGEE : EXERCICE N° 2

I. DETERMINER LA POSITION DE L'OBJET POUR QUE SON IMAGE SOIT RENVERSEE

On doit résoudre dans IR l'inéquation $\gamma < 0$

- Par l ' algèbre : $\frac{1}{3p+1} < 0$ d'où $S =]-\infty ; -1/3[$.

- Par l ' analytique : les solutions sont les abscisses des points de la courbe G_g situés au-dessous de la droite des abscisses.

Ces solutions sont aussi les abscisses des points de la courbe G_f situés dans les quadrants 2 et 4 (correspondant à p et q de signes contraires).

INTERPRETATION en OPTIQUE de cette inéquation et de sa solution :

L'image est renversée si seulement si l'objet est placé avant la lentille à une distance supérieure à la distance focale.

II. DETERMINER LA POSITION DE L'OBJET POUR QU'IL SOIT PLUS GRAND QUE SON IMAGE

On doit résoudre dans IR l'inéquation $|\gamma| < 1$

- Par l ' algèbre $-1 < \frac{1}{3p+1} < 1$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{-3p-2}{3p+1} < 0 \text{ et } \frac{3p}{3p+1} < 0\right)$$

$$S =]-\infty ; -2/3[\cup]0 ; +\infty[$$

- Par l'analytique $-1 < \frac{1}{3p+1} < 1$ (1)

Méthode n° 1 : Les solutions sont les abscisses des points de la courbe G_g situés dans une bande horizontale limitée par les droites D_{-1} ($\gamma = -1$) et D_1 ($\gamma = 1$).

Méthode n°2 :

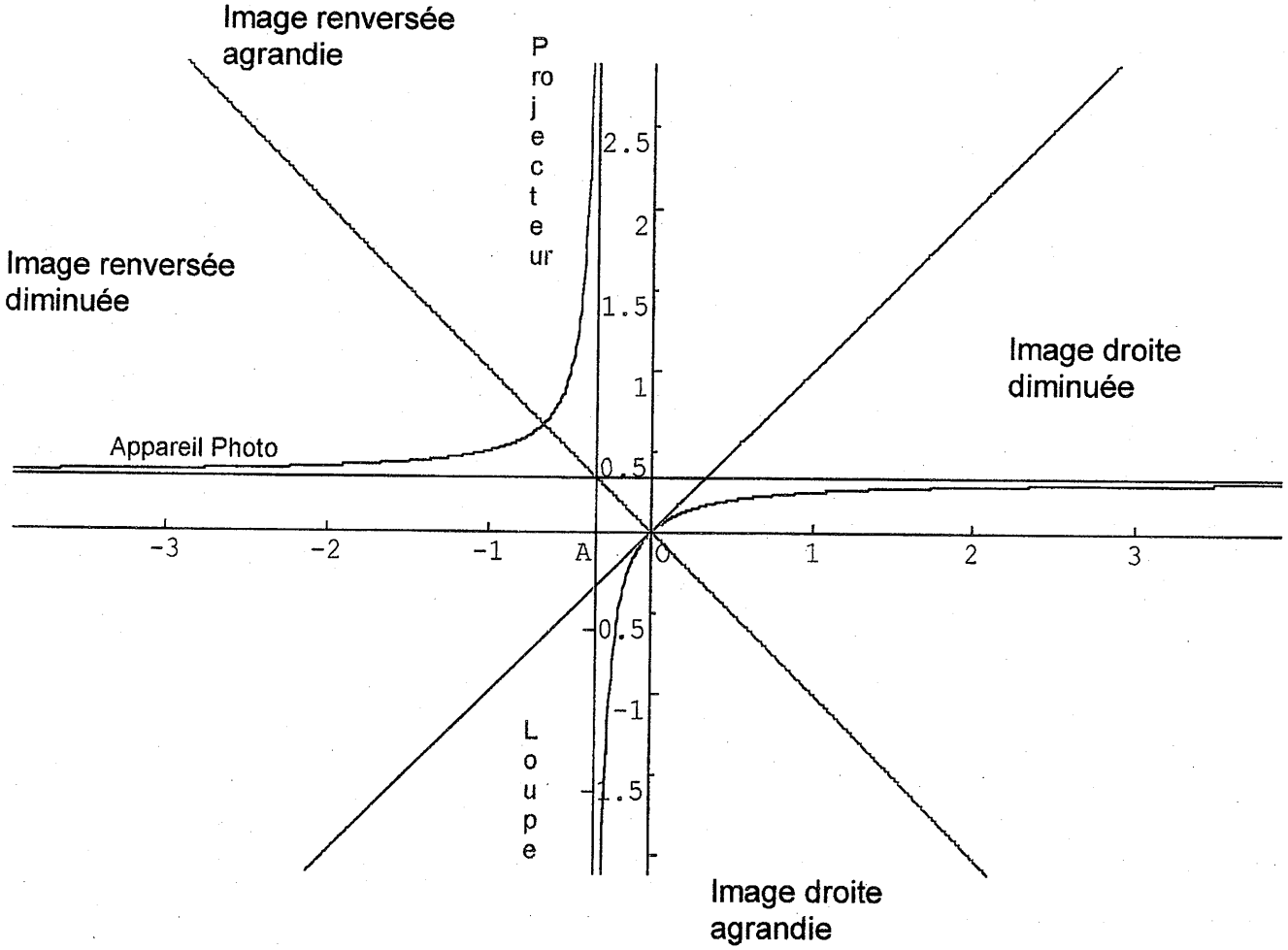
$$(1) \Leftrightarrow \left[\left(-p < \frac{p}{3p+1} < p \text{ et } p > 0\right) \text{ ou } \left(p < \frac{p}{3p+1} < -p \text{ et } p < 0\right)\right.$$

Les solutions sont les abscisses des points de la courbe G_f situés dans

la portion de plan contenant l' axe des abscisses et comprise entre les droites D (q = p) et D' (q = - p).

III. INTERPRETATION en OPTIQUE DE L'INEQUATION –1<1/(3p+1) <1 ET DE SA SOLUTION : S =]–∞ ; –2/3[∪]O; + ∞[

L'image est agrandie quand l'objet est placé avant la lentille à une distance inférieure au double de la distance focale .



FICHE CONSIGNE : EXERCICE N° 3

BUT

Comprendre une caractéristique d'un objectif photographique :

Montrer que pour les objets éloignés , le rapport des grandissements de 2 objectifs photographiques , est très voisin du rapport de leurs distances focales .

FICHE CORRIGEE : EXERCICE N° 3

D'après la loi de Descartes pour un appareil photographique de distance focale f le grandissement est $\gamma_1 = \dfrac{1}{\dfrac{p}{f}+1}$.

Pour un appareil photographique de distance focale k f ($k \neq 0$), le grandissement est $\gamma_2 = \dfrac{1}{\dfrac{p}{kf}+1}$.

Le rapport des grandissements est :

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{\dfrac{1}{\dfrac{p}{f}+1}}{\dfrac{1}{\dfrac{p}{kf}+1}} = \frac{\dfrac{p}{kf}+1}{\dfrac{p}{f}+1}.$$

et la limite du rapport γ_1 / γ_2 quand p tend vers $-\infty$ est $\dfrac{1}{k}$.

FICHE CONSIGNE : EXERCICE N° 4

BUT : Comment faire varier la convergence d'un objectif ?

Montrer que la vergence de deux lentilles accolées de distance focale f_1 et f_2 est

$\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}$.

FICHE CORRIGEE : EXERCICE N° 4

Loi de Descartes pour L_1 : $-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{f'_1}$ (1)

Loi de Descartes pour L_2 : $-\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=\frac{1}{f'_2}$ (2)

D'où en additionnant (1) et (2) : $-\frac{1}{p}+\frac{1}{q'}=\frac{1}{f'_1}+\frac{1}{f'_2}$

On appelle $\frac{1}{f}$ le deuxième membre de cette égalité.

On reconnaît alors la loi de Descartes d'une lentille L de même centre optique que L_1 et L_2 et de vergence la somme des vergences de L_1 et L_2 .

C'est cette propriété qui est utilisée quand on adjoint un « doubleur de focale » à un objectif photographique.

D'autre part en photographie, pour les zooms, c'est souvent en faisant varier la distance e entre les deux lentilles que l'on fait varier la vergence de l'objectif.

DEUXIÈME PROLONGEMENT

Notions élémentaires sur des appareils d'optique simples

1. Appareil photo

L'objectif de l'appareil photo est schématisé par une lentille mince convergente. Cette lentille très convergente forme l'image réelle diminuée de l'objet réel sur la pellicule. Pour que l'appareil puisse fonctionner il faut que l'objet soit situé à une distance deux fois supérieure à la focale de la lentille. La mise au point se fait en déplaçant l'objectif.

2. Projecteur de diapositives

Il peut être schématisé par une lentille mince convergente. Il a pour but de former des images réelles agrandies, c'est pourquoi on place l'objet (diapositive) renversé à une distance de la lentille comprise entre la focale et deux fois cette focale.

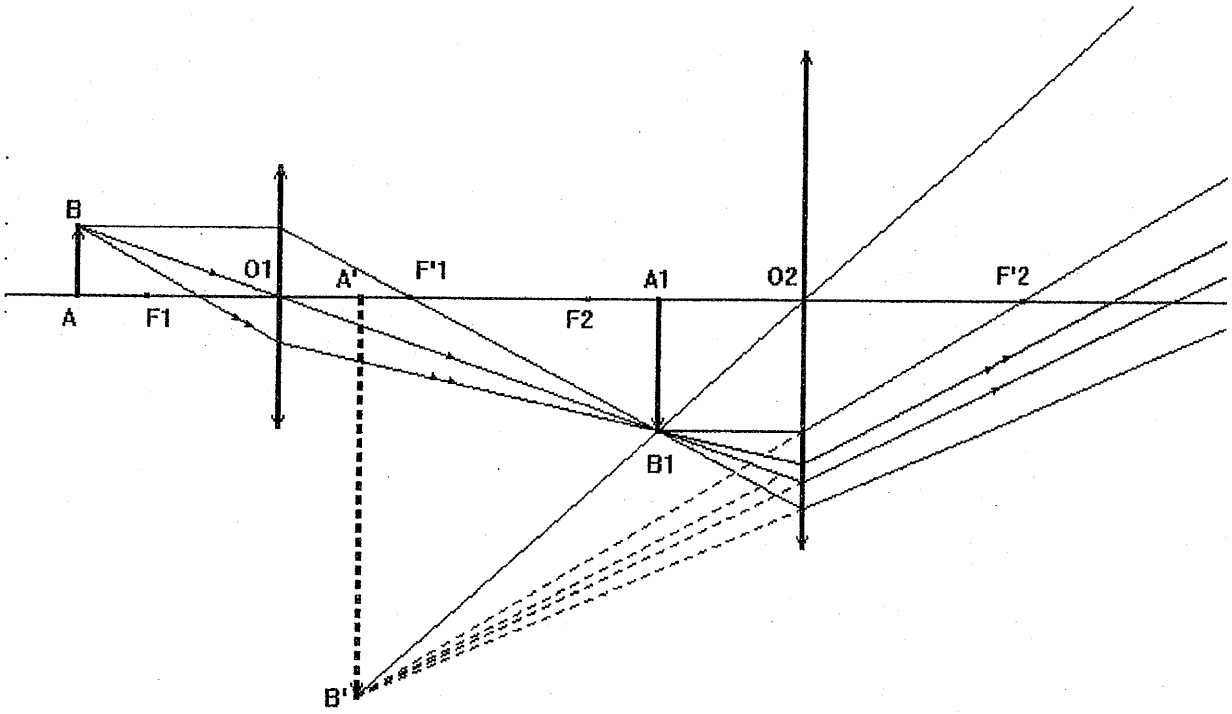
3. Loupe

La loupe est une lentille mince convergente. Elle a pour but de former des images réelles agrandies. C'est pourquoi on place l'objet à observer à une distance inférieure à sa focale.

4. Microscope

Un microscope a pour but d'observer des objets minuscules.
Un microscope se compose essentiellement de deux lentilles assimilées à des lentilles minces convergentes montées aux deux extrémités d'un tube.
La lentille L_1, placée près de l'objet observé, s'appelle **l'objectif**. Elle est très convergente (focale de quelques millimètres) ; elle donne une image très agrandie.

La lentille L_2, derrière laquelle l'œil de l'observateur viendra se placer, s'appelle **l'oculaire**. Elle a pour but de jouer le rôle d'une loupe qui va donner une image virtuelle agrandie de l'image donnée par l'objectif.



Principe (très grossier) du microscope

5. Lunette astronomique afocale

Une lunette astronomique a pour but d'observer des objets célestes (très éloignés).

Elle compose essentiellement de deux systèmes optiques que l'on peut grossièrement assimiler à deux lentilles simples convergentes.

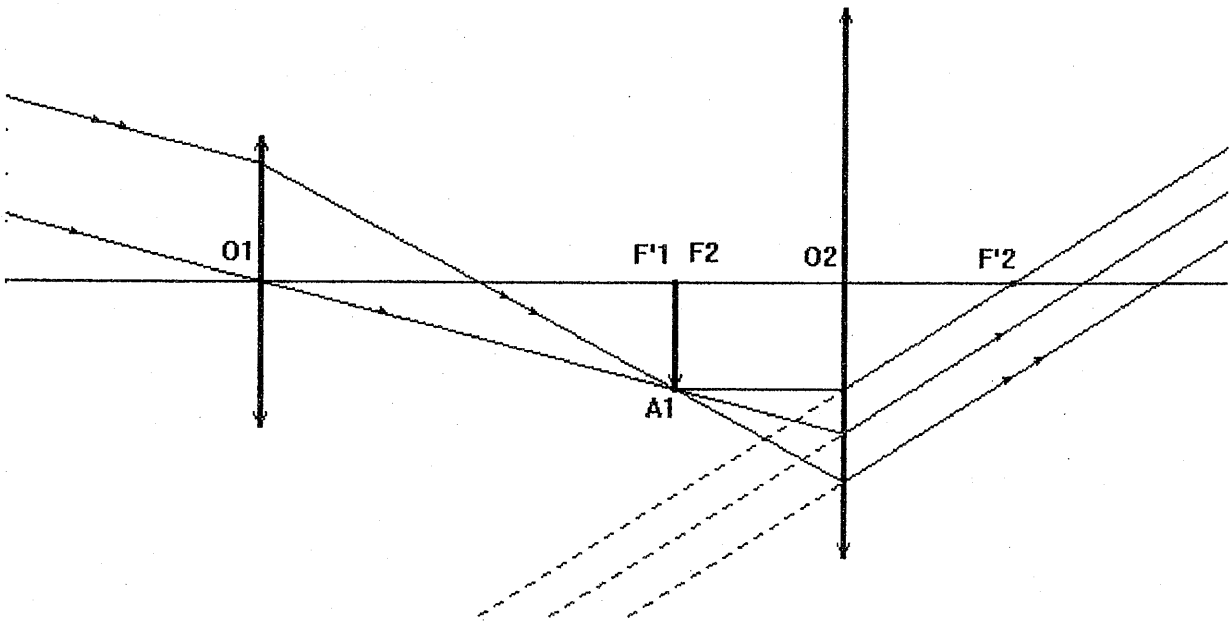
L'objectif L_1 a une très grande distance focale (de 1 à plusieurs mètres).

L'oculaire L_2 a une très courte distance focale (de 1 à quelques centimètres).

Le foyer image de l'objectif est confondu avec le foyer objet de l'oculaire.

Un objet très éloigné envoie sur L_1 des rayons parallèles qui après L_1 convergent dans son plan focal image pour donner une image réelle. Cette image réelle est observée à travers l'oculaire L_2 qui joue le rôle de loupe. L'image virtuelle

donnée par L_2 est rejetée à l'infini (voir la remarque (g) à la fin de la fiche corrigée du T.P. de mathématique). L'œil, placé après l'oculaire, peut observer sans accommoder.



Principe de la lunette afocale

Ouvrages de référence

Mathématiques

A. Antibi et R. Barra	Mathématiques - Terminale S Nathan 1998	Collection : Nouveau Transmath
A. Excellent	Mathématiques - Terminale STI Hachette 1998	Collection : Hachette Education
Blanc	Mathématiques - Terminale STI Hachette 1994	Collection : Hachette Technique
Blanc	Mathématiques - Première STI Hachette 1993	Collection : Hachette Technique

Physique

P. Martin	Physique appliquée Hachette 1993	Collection : Hachette Education Niveau : 1ère STI
J.-P. Chanal	Physique appliquée Educalivre 1999	Collection : Cours et exercices Niveau : 1ère STI
Niard	Les courants électriques Nathan 1990	Collection : Nathan Technique Niveau : 1ère F
Lecardonnel	Physique Bordas 1995	Collection : Galileo Niveau : Term. S
.....	Anabac Hatier 1998	Collection : ..... Niveau : Term. S

Sujets de bac

Mathématiques

Epreuves de 1995, série STI Génie électrique et électronique, groupes I, II, III et IV.

Epreuves de 1997, série STI Génie électrique et électronique, groupes I, II, III et IV.

Physique

Epreuves de 1997, série S , Pondichéry

Epreuves de 1996, série S (spécialité physique), Pondichéry

Epreuves de 1994, série S (spécialité physique), Amérique du sud

Epreuves de 1995, série S (spécialité physique), La Réunion

Epreuves de 1995, série S (spécialité physique), Polynésie

Epreuves de 1995, série S (spécialité physique), Antilles

I. Auteurs

Gérard ARMENGAUD, Alain VACHER et Michel VILLARET.

II. Titre

Mesurer et Calculer : une liaison Math-Physique au lycée expérimentée en classe

III. Caractéristiques

Édité par l'Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques de Limoges.
123, avenue Albert Thomas 87060 Limoges cedex.
Format : A4

IV. Type de documents et support

Brochure.
Papier.

V. Matériel utilisé dans l'ouvrage

Cabri-géomètre, Géoplan, Excel.

VI. Public visé

Enseignants de lycées et de lycées professionnels, étudiants qui préparent le CAPES de Math ou le CAPLP2 de Math-Physique.

VII. Contenus

Cette brochure présente des activités autour des thèmes :

- Illustration « physique » de la notion de limite et d'asymptote.
- Lentilles convergentes et modélisations géométriques et analytique de leurs fonctionnements.
- Charge et décharge d'un condensateur et équations différentielles du premier ordre et étude des solutions.

Elle contient des activités conçues pour être menées de façon conjointe par les enseignants de Mathématiques et de physique d'une même classe de première ou de terminale S, STI.
Elle propose une progression interdisciplinaire concrète livrée « clés en mains »

avec des fiches consignes pour les élèves et les fiches réponses correspondantes.

MCL : appareil d'optique, asymptote, charge d'un condensateur, décharge d'un condensateur, dérivée, fonction, inéquation, lentille mince, limite, loi de Descartes, modélisation, représentation graphique, résistance, sens de variation.