



Institut de Recherche
sur l'Enseignement des Mathématiques

**DES PISTES POUR
PARCOURS DIVERSIFIÉS
ET
TRAVAUX CROISÉS**

Publication de l'IREM de Limoges
*avec le soutien de la Formation
continue de l'IUFM du Limousin*

Janvier 2000

SOMMAIRE

- Introduction

- Mise en place d'un parcours diversifié

- 1° - Les conditions
- 2° - Les domaines d'intervention
- 3° - Aide à l'élaboration
- 4° - Production et évaluation

- Exemples de thèmes étudiés en stage

- 1° - Le chronotachygraphe ou mouchard
- 2° - L'alcool au volant
- 3° - Le château fort

- Exemples de thèmes expérimentés en classe

- 1° - Activités avec Cabri
- 2° - Le cadran solaire
- 3° - Pliages géométriques
- 4° - Pentaminos et pentacubes

- Des pistes historiques pour la quatrième

- 1° - Le théorème du perroquet
- 2° - Les fractions Egyptiennes
- 3° - Des équations à travers les âges

- Recensement de quelques parcours

- Conclusion

INTRODUCTION

Notre groupe est né du souhait de professeurs de mathématiques de prendre part au volet parcours diversifiés du cycle central du nouveau collège.

Nous souhaitons par ce biais explorer d'autres aspects de notre discipline que ceux développés dans le cadre habituel du cours, animés par l'idée que les parcours nous permettraient d'essayer, de tâtonner, de nous lancer dans des actions correspondant à nos goûts, de créer un espace autre que celui de l'horaire obligatoire en espérant que ce détour serait un moyen pour certains élèves de revenir en cours plus motivés et plus solides.

Notre premier souci, après lecture des textes, a été de définir les conditions matérielles de mise en place de parcours où les mathématiques jouent un rôle privilégié, de réfléchir aux objectifs de notre action puis d'envisager les types de productions attendues ainsi que leur évaluation.

Lors de stages que nous avons animés à propos des parcours diversifiés, certains thèmes ont fait l'objet de travaux de groupes dont nous vous livrons le compte-rendu.

Nous vous exposons plus en détail le contenu de parcours niveau 5° que nous avons pu expérimenté avec des élèves.

Enfin nous vous présentons quelques pistes historiques susceptibles de servir de point de départ à des activités niveau 4° permettant une approche différente et un enrichissement de certains points du programme.

Mise en place d'un parcours diversifié

1° Conditions :

- Gestion du temps et des groupes élèves :

- en 5^{ème} : accepter 3,5 h si il y a mise en place d'un parcours diversifié, sinon exiger 4h.

Le temps consacré au parcours diversifié peut être de 0,5 h année ou 1 h semestre avec des groupes d'élèves à effectif réduit.

- en 4^{ème} : compte tenu des nombreux impératifs du programme, il semble souhaitable de conserver 4 h classe entière et d'y ajouter une plage spécifique pour le parcours diversifié, ou les travaux croisés :

cette plage pourrait être de 0,5h année par groupe allégé (1 semaine sur 2, en alternance) afin de « mieux coller au programme ».

- Constitution des groupes suivant les thèmes abordés :

- en 5^{ème} : hétérogénéité des groupes (liée au choix des élèves)

- en 4^{ème} : mise en groupes de niveaux, si nécessaire, suivant le contenu du parcours.

En conclusion, et compte tenu des expériences vécues, il apparaît nécessaire qu'une plage spécifique soit attribuée aux parcours diversifiés, afin que leur mise en place soit efficace.

2° Etude des différents domaines d'intervention possibles.

Il semble important de bien dégager les compétences à développer en termes d'apprentissages liés à la discipline : faire des mathématiques autrement, oui, mais faire des mathématiques !

Textes extraits du compte-rendu du stage interacadémique de Nantes « Le nouveau collège », qui s'est déroulé les 28 et 29 Janvier 1997. (pages 3 et 4)

Des entrées diverses

- Une entrée en termes de **contenus, autour d'objets liés à la discipline**, mais qui ne sont pas nécessairement des objets d'étude dans la pratique habituelle.

Ce peut être, par exemple la recherche de problèmes ouverts, l'appropriation de la notion de variable, le dessin géométrique et la maîtrise du langage ; des activités sur les nombres, les polygones et les polyèdres particuliers ; l'utilisation des calculatrices ...

- Une entrée par « **commande externe** » : d'un objectif général, déterminé dans le cadre du projet d'établissement, on est conduit à imaginer et à réaliser une action en mathématiques.

Des exemples ont été présentés : constructions géométriques en lien avec le Français et les Arts Plastiques à propos des compétences générales : « choisir », « concevoir », « réaliser », « formuler » ; liaison math-français sur la méthodologie, la lecture d'énoncés, la production écrite ...

Certains dispositifs transversaux se retrouvent dans cette catégorie d'entrée.

- Une entrée par « **d'autres manières de faire des mathématiques** » :

le recours à l'outil informatique avec un logiciel de géométrie dans le cadre d'ateliers de constructions géométriques ;

représentations de statistiques sur l'Europe avec exposition ; étude du programme de statistiques à partir de documents, puis exposé à d'autres élèves... intervention commune avec les professeurs de Physique et de Technologie (calcul approché, harmonisation des apprentissages) ; réalisation d'un produit (exposition, cahier de vacances ...)

« Risques et dérives »

- S'engager par le biais d'objectifs qu'on ne parvient pas à incarner dans les disciplines, dont on ne peut pas assurer le transfert avec l'ensemble de l'enseignement. Une injonction venant exclusivement de généralistes ou de gestionnaires risquant de provoquer une perte des objectifs de connaissances. Il faut rappeler que l'intention essentielle est de contribuer à l'atteinte des objectifs d'apprentissage du cycle.
- Une logique de club, parce que la coupure des temps, des groupes cloisonne le parcours, avec abandon d'une visée en termes d'apprentissage. On occupe simplement la durée octroyée.
- Des liens mal gérés par l'élève qui a plusieurs professeurs.
- Une dilution hors de la discipline, une perte de temps.
- Des écarts creusés entre les élèves.

3° Aide à l'élaboration .

Thème : Titre	Objectifs généraux ou disciplinaires	Notions mathématiques nécessaires	Horaire approximatif	Production attendue	Evaluation envisagée

4° Production, évaluation :

Les productions peuvent être :

- un objet (ex : cadran solaire)
- une ou des affiches pour une exposition.
- un dossier personnel pour l'élève.

Il est souhaitable que l'évaluation soit en rapport avec la production demandée. Elle peut apparaître sous diverse formes, mais un bilan doit être fait en tenant compte de l'investissement et de la motivation de l'élève ; celui-ci peut d'ailleurs être acteur dans le choix des critères.

Exemples de thèmes étudiés en stage

1° Le chronotachygraphe ou mouchard

2° L'alcool au volant

3° Le château fort

1° Le chronotachygraphe

Thème : Titre	Objectifs généraux ou disciplinaires	Notions mathématiques nécessaires	Horaire approximatif	Production attendue	Evaluation envisagée
Ecole et police : enfin la collaboration !	Approfondissement des matières de gestion de données 5 ^{ème} et ouverture sur la 4 ^{ème}	- gestion de données - constitution de tableaux - réalisation de graphiques et d'histogrammes - fréquences et effectifs cumulés - usage éventuel d'un tableur-grapheur		Dossier	Voyage de fin d'année

Exemple de progression, à partir de documents extraits de « Enseigner la Sécurité Routière au Collège », année 95/96.
Brochure disponible au CDI des établissements.

- **Séquence 1** : (1 h) Comment utiliser le chronotachygraphe . Questions 1 et 3 .
Utilisation pratique : exemples de lecture de disques « réels »

Plan de la séquence : par groupes de 3 élèves .
 - Lecture silencieuse du document .
 - Réécrire les points réglementaires que doit connaître un chauffeur routier .
 - Etude du chronotachygraphe .

- **Séquence 2** : Représentation graphique : distance en fonction du temps, question 5 .

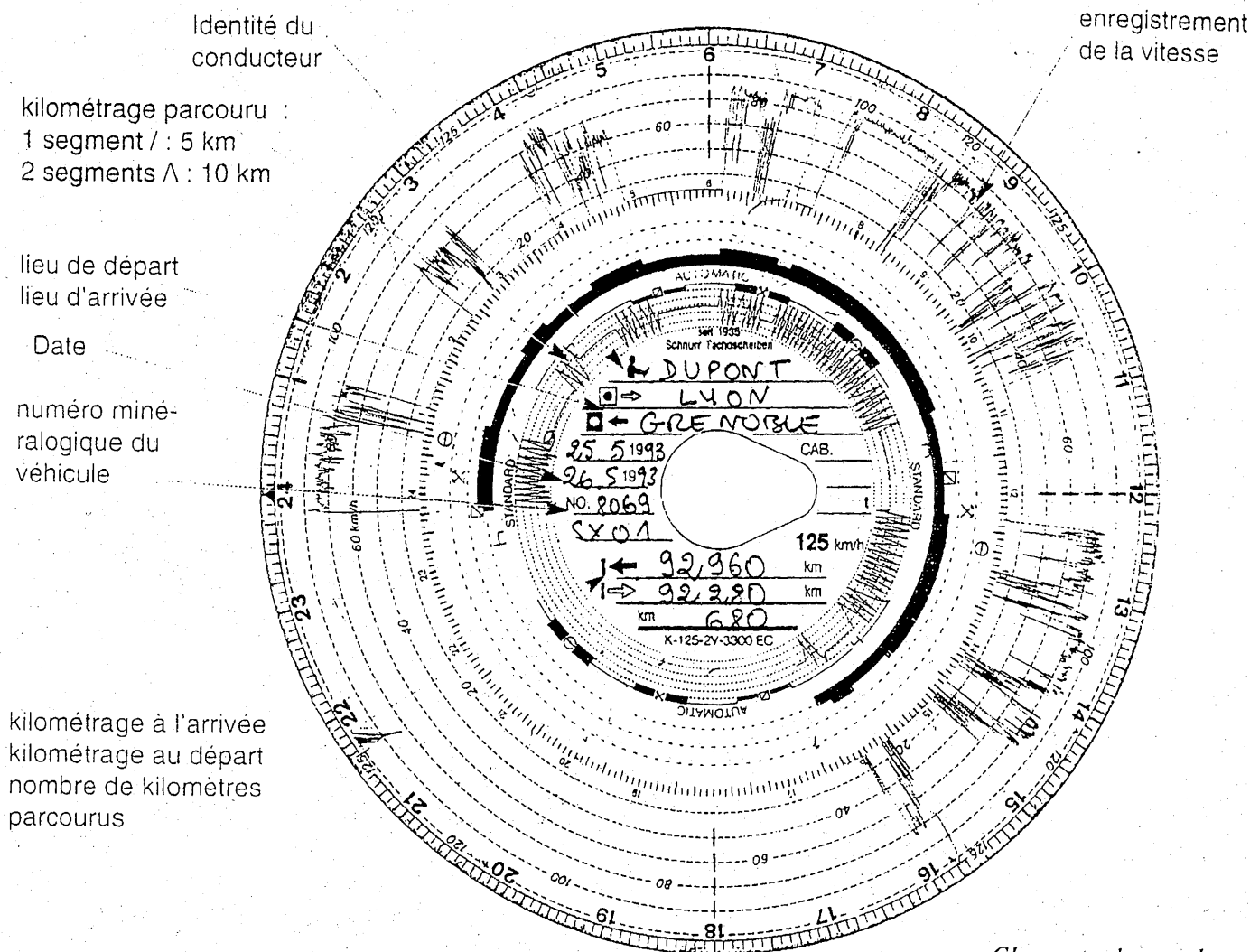
- **Séquence 3** : Questions 4 et 5 .

- **Séquence 3 bis** : Utilisation d'un tableur-grapheur .

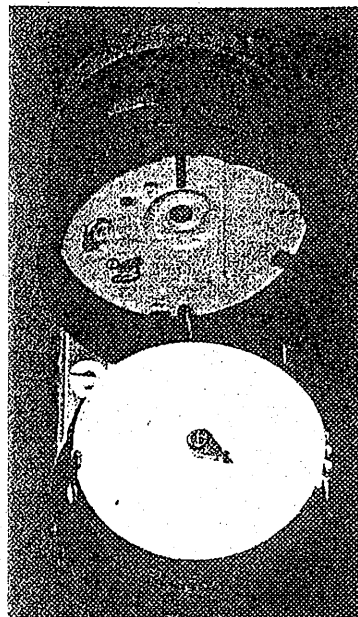
- **Séquence 4** : Préparation du voyage .
Graphique, utilisation du tableur .

- **Séquence 5** : Rédaction .

. Comment utiliser le chronotachygraphe.



Chronotachygraphe ouvert avec, au premier plan, le disque.



- Chaque conducteur a ses propres disques (et non le véhicule).
- La durée d'utilisation d'un disque est de 24 heures.
- Lorsqu'il prend en charge un véhicule, le conducteur inscrit sur un disque neuf : la date, son nom, le numéro minéralogique, le nombre de kilomètres au compteur, le lieu où il se trouve.
- À la fin de son service, il enlève le disque et y inscrit : la date, le lieu où il se trouve, le nombre de km au compteur.
- Un bouton sélecteur permet d'enregistrer les différents types d'activités :
 - Temps de conduite
 - Temps de travail
 - Temps de disponibilité (les temps d'attente entrent dans cette catégorie)
 - Temps de repos
- Le conducteur doit pouvoir présenter :
 - les disques de la semaine en cours
 - le disque correspondant à son dernier jour de conduite de la semaine précédente.

Remarque : il n'existe aucune réglementation pour les particuliers. Il semblerait raisonnable que ce qui s'applique aux professionnels ne puisse être ignoré par tous les conducteurs.

2° L'alcool au volant

Thème : Titre	Objectifs généraux ou disciplinaires	Notions mathématiques nécessaires	Horaire approximatif	Production attendue	Evaluation envisagée
Alcoolémie et sécurité routière	- Utiliser des données sous toutes les formes (graphiques, tableaux) pour sensibiliser aux risques d'accidents liés à l'alcoolémie. - Utiliser un grapheur.	- Calcul numérique, exact et approché. - Repérage dans le plan. - Graphiques (lecture et construction) - Unités de masses et de volumes. - Proportionnalité.	1 heure tous les 15 jours sur un semestre	Dossier Panneaux d'information	Résultats à l'A.S.S.R Attestation Appréciation du dossier

Exemple de progression, à partir de documents extraits de « Enseigner la Sécurité Routière au Collège », année 97/98.
Brochure disponible au CDI des établissements.

- Séquence 1 : (Professeur de SVT)

- Conduites à risques : alcoolémie
- Réglementation
- Sécurité routière + recherche pour séquence suivante :
« D'après toi, de quoi dépend l'alcoolémie d'un individu ? »

- Séquence 2 : (Professeur de Maths)

- Travail de groupes (cf recherche ci-dessus)
- Synthèse des réponses sous forme écrite.

- Séquence 3 : (Professeur de Maths)

- Vérification par le calcul des hypothèses de la séquence 2.
Ex : * Comparaison de la quantité d'alcool pur contenu dans un verre de bière et une dose de whisky
* utilisation des formules permettant de calculer le taux d'alcoolémie en fonction de la masse de l'individu, de la quantité d'alcool absorbé (calculatrice)
-- à jeun
-- au cours d'un repas

- **Séquence 4** : (Professeur de Technologie)
Initiation à l'utilisation d'un tableur
- **Séquence 5** : (Professeur de Maths)
Compléter à l'aide d'un tableur les deux tableaux (notions abordées en fin de séquence 3)
-- Vérification des hypothèses de la séquence 2.
- **Séquence 6** : (Professeur de Maths)
Exploitation d'un graphique
-- Vérification des hypothèses de la séquence 2.
- **Séquence 7** : (Professeur de SVT)
-- Tirer les conclusions -- rédaction
- **Séquence 8** : (Professeur d'Education Civique)
-- Panneaux d'information.

3° Le château fort

Thème : Titre	Objectifs généraux ou disciplinaires	Notions mathématiques nécessaires	Horaire approximatif	Production attendue	Evaluation envisagée
Château fort	- Lire et traduire pour construire une maquette. - Décrire. - Lecture de courbes de niveau	- Aire, volume - Echelle - Patron - Unités de mesure	10 h	Construction d'une maquette	Implication de l'élève

Exemple de progression, à partir de documents historiques (plaquette de présentation de sites, issus des manuels d'histoire de la classe de 5°)

- **Séquence 1** : 1 heure avec le professeur d'Histoire
Présentation du contexte historique.
Explication du vocabulaire.
- **Séquence 2** : 1 heure avec les professeurs d'Histoire et de Maths
Repérage : - du lieu (sur une carte)
 - de la date (sur une frise)
- **Séquence 3** : 2 heures avec le professeur de Maths
Reconnaître les formes :
Description : vue de face et vue de dessus ; plan personnel
- **Séquence 4** : 3 heures avec le professeur de Maths
Travail sur les échelles et les longueurs :
 . Calculs de volumes (réalité et maquette)
 . Calculs d'aires (réalité et maquette)
Sur un carton d'aire donnée, peut-on placer la maquette ? Justification du choix de l'échelle.
- **Séquence 5** : 3 heures avec le professeur de Maths
Construction de la maquette

Exemples de thèmes expérimentés en classe

1° Activités avec CABRI (Logiciel de construction géométrique)

2° Le cadran solaire

3° Pliages géométriques

4° Pentaminos et pentacubes

Activités avec CABRI

Ces activités ont été menées en 1997/1998 lors d'une dizaine de séances dans deux classes de 5°, puis en 1998/1999 tout au long de l'année à raison d'une heure par quinzaine avec des groupes d'environ 14 élèves d'une même classe de 5°.

Thème : Titre	Objectifs généraux ou disciplinaires	Notions mathématiques nécessaires	Horaire approximatif	Production attendue	Evaluation envisagée
Utilisation de Cabri-Géomètre	- Utiliser l'outil informatique pour aborder ou traiter certains points du programme. - Rechercher une définition ou une propriété permettant de construire une figure donnée, puis de valider cette construction. - Réinvestir les notions vues en « cours » ou les années antérieures. - Conjecturer à partir d'une figure ; aider au raisonnement déductif.	- Propriétés des figures usuelles - Symétries. - Droites remarquables dans un triangle. - Représentation en perspective de parallélogrammes rectangles et de prismes droits.	1 heure tous les 15 jours, par groupe.	Une ou deux fiches, ou plus, à compléter par séquence.	Difficile : voir les observations ci-dessous.

Observations, « effets sur la classe... » :

Une première observation pourrait être considérée négative : les « bons » élèves sont plus vite autonomes dans la perception du potentiel du logiciel et donc avancent plus vite alors que les élèves en difficulté observent au bout d'un moment que la possibilité qu'ils pensaient avoir : faire aussi vite et aussi bien que tout le monde (c'est l'ordinateur qui a le crayon et les outils...) n'existe pas plus ici !, ce qui n'est pas forcément très motivant !

Il y a donc beaucoup d'écarts dans le comportement des élèves.

Toutefois, on peut considérer que ce phénomène est dans l'idée du projet : permettre à certains élèves de s'intéresser différemment à l'acquisition de certaines connaissances tout en pouvant proposer à d'autres d'approfondir les leurs et parfois d'aller au-delà des compétences exigibles du programme. Il faut donc pouvoir proposer des exercices différents et des réponses plus ou moins approfondies. (justifications...)

Il a été observé une modification du comportement de certains élèves vis-à-vis du travail demandé en mathématiques : le « prof » a des choses à apprendre à l'élève en maths, c'est normal et pas très intéressant, mais le « prof » peut aussi donner des conseils dans l'utilisation d'un logiciel, même pour utiliser la partie dessin du logiciel et réaliser un « logo »... Là, l'élève commence à écouter et ... continue pendant le cours.

L'observation la plus fréquente est l'impression que beaucoup d'élèves deviennent plus à l'aise vis-à-vis des constructions géométriques, visualisent les particularités de certaines figures et mémorisent mieux les définitions et les propriétés abordées en classe.

Quelques exemples de séquences...

Prise en main du logiciel...

(voir fiche)

Les triangles particuliers

Construire :

- un triangle isocèle. (Mise en œuvre de la propriété caractéristique de la médiatrice d'un segment, ou si l'outil cercle est imposé, de la définition du cercle)
- un triangle équilatéral.
- un triangle rectangle.

Les droites remarquables dans un triangle

Construire :

- les médiatrices et le cercle circonscrit à un triangle.
- les trois hauteurs.
- les trois médianes.
- les trois bissectrices.

Pour les hauteurs et les médiatrices, en modifiant la figure, mettre en évidence le cas particulier du triangle rectangle et les cas des triangles pour lesquels l'orthocentre et le centre du cercle circonscrit sont à « l'extérieur » du triangle. (objectif : aide pour le tracé des hauteurs dans un triangle possédant un angle obtus). Pour les élèves les plus rapides, construire toutes les droites remarquables d'un même triangle et conjecturer...

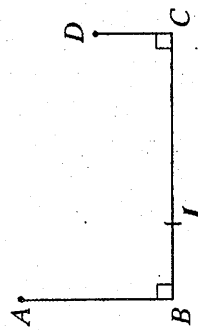
Les symétries

(voir fiche)

Un exemple pour conjecturer, pour démontrer

D'après l'exercice B11 page 163 du livre de 5° « Cinq sur Cinq » de Hachette.

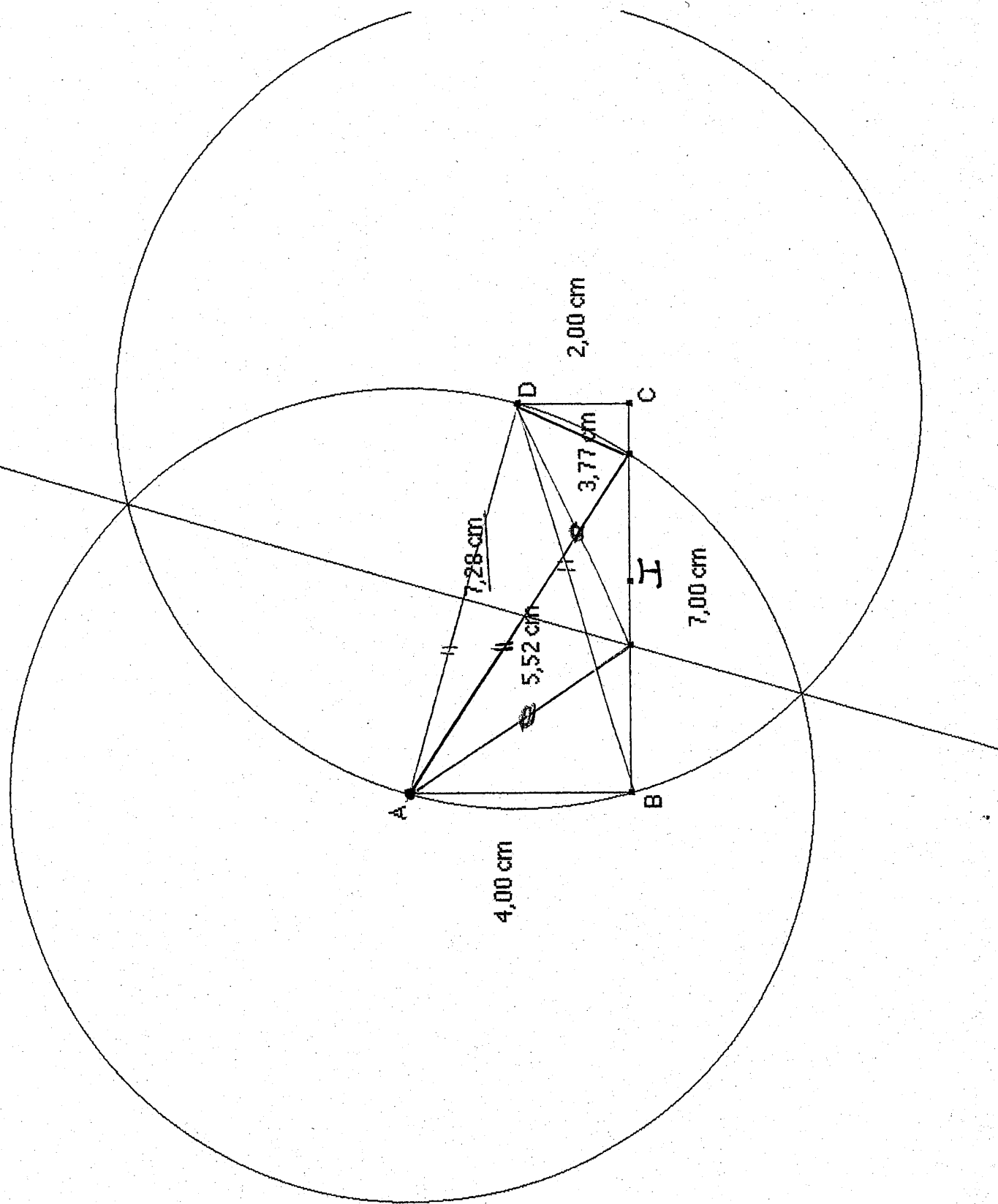
Reproduire la figure ci-contre avec $AB = 4\text{ cm}$, $BC = 7\text{ cm}$ et $DC = 2\text{ cm}$.



Quelles sont les trois places que peut occuper I sur $[BC]$ pour que le triangle AID soit isocèle ?

(voir figure obtenue)

D'après l'exercice B11 page 163 du livre de 5° « Cinq sur Cinq » de Hachette.



Prise en main du logiciel...

Exercice n°1 :

Placer trois points A, B et C non alignés.

Tracer les droites (AB) et (AC).

Construire la perpendiculaire à la droite (AB) passant par C ; elle coupe la droite (AC) en F.

Construire la parallèle à la droite (AC) passant par F ; la nommer d.

Exercice n°2 :

Construire un cercle de centre O.

Placer quatre points A, B, C et D sur ce cercle tels que :

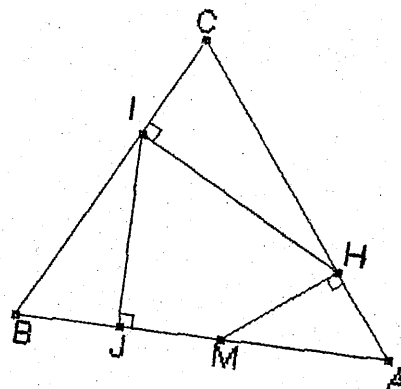
- les points A et B sont diamétralement opposés.
- la droite (CD) est perpendiculaire à la droite (AB).

Exercice n°3 :

- Reproduire la figure ci-contre.
- Recopier et compléter le programme de construction suivant :

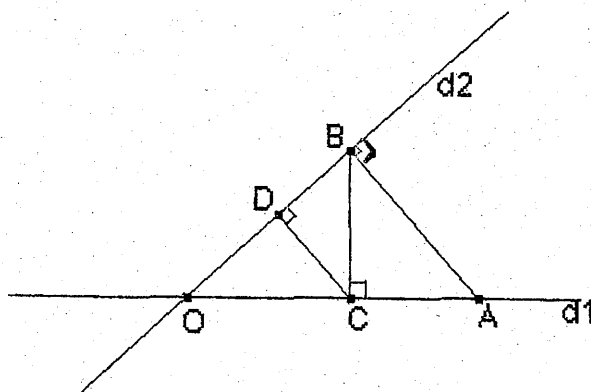
Trace un triangle ABC. Place un point M sur le [AB].

Trace la perpendiculaire à (AC) passant par M : elle coupe (AC) en H. Puis trace la ...



Exercice n°4 :

- Reproduire la figure ci-dessous.
- Ecrire un programme de construction, qui permette de la reproduire.



Symétries

Exercice n°1 :

Soient O et A deux points : construis A' le symétrique de A par rapport à O .

Ecris un programme de construction te permettant de le faire sans utiliser la commande « symétrique de » du menu.

Construction :

Programme :

Exercice n°2 :

Trace deux droites d_1 et d_2 sécantes en un point O .

Place un point A n'appartenant ni à d_1 , ni à d_2 .

Construis :

- le point A_1 , symétrique du point A par rapport à la droite d_1 .
- le point A_2 , symétrique du point A par rapport à la droite d_2 .
- le point A_3 , symétrique du point A par rapport au point O .

Quelle conjecture peux-tu faire pour les quatre points A , A_1 , A_2 et A_3 ?

Justifie ta réponse.

Construction :

Justification :

Exercice n°3 :

Trace un cercle (c) de centre O et un diamètre $[AB]$ de ce cercle.

Place un point M sur la droite (AB) .

Construis le cercle (c') , symétrique du cercle (c) par rapport au point M .

Indique, suivant la position du point M sur la droite (AB) , le nombre de points d'intersection du cercle (c') avec le cercle (c) .

Construction :

Réponse :

Un exemple de parcours : l'étude et la réalisation d'un cadran solaire horizontal

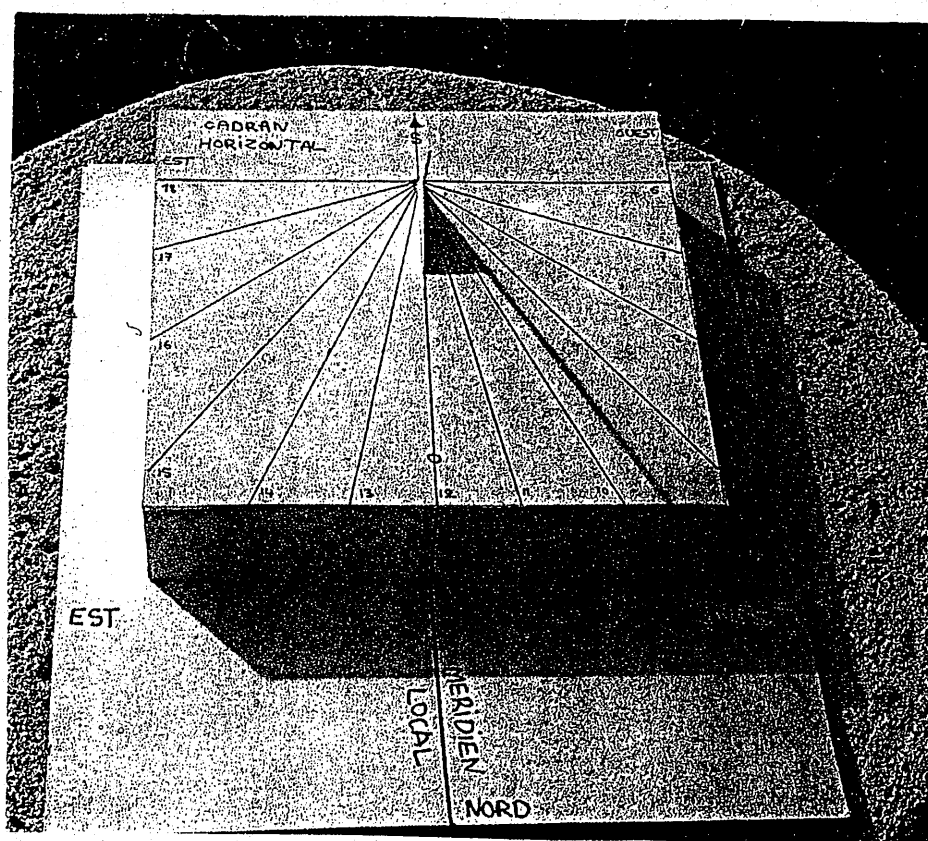
Ce thème de parcours est intéressant à situer dès le premier trimestre de 5^e, en effet la construction constitue un rappel et une synthèse des principales notions géométriques du programme de 6^e.

Le travail peut être mené en interdisciplinarité : Maths / Hist-Géo, les notions utiles étant variées (voir fiche : le principe des cadrans solaires).

Le cadran solaire horizontal offre un intérêt pédagogique supérieur à celui des autres types de cadrans mais la construction d'un cadran vertical ou équatorial n'est pas plus difficile et peut être envisagée comme enrichissement de cette étude.

La principale source de documentation est la BT n° 600, il existe également des ouvrages niveau collège : les cadrans solaires de JF Homet, Ed C Massin ; le temps et l'espace coll passion des sciences chez Gallimard.

Objectifs généraux	Lire et traduire pour construire : -sur papier canson . -en utilisant le logiciel Cabri . Manipuler
Notions mathématiques nécessaires	Objets géométriques du plan et de l'espace . Outil rotation de Cabri.
Horaire approximatif	8 à 10 séances .
Production attendue	Dossier avec les différentes étapes de la construction et les recherches annexes . Objet réalisé en carton .
Evaluation envisagée	Appréciation du dossier. Qualité de la production.

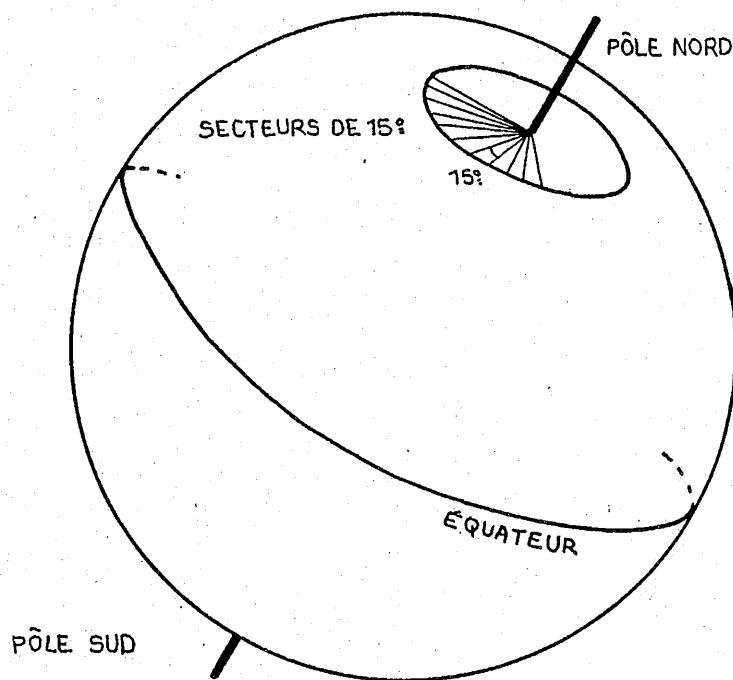


Le principe des cadrans solaires

Il s'agit de mesurer le **déplacement de l'ombre d'une tige** appelée style ou gnomon .

Pour cela il convient de connaître quelques notions simples d'astronomie .

La terre tourne autour du soleil sur son axe de 360° en 24h , si l'on tanchait la terre parallèlement à l'équateur , l'ombre de l'axe nord/sud ferait un tour complet en un jour , en une heure , le déplacement formerait un secteur angulaire égal à : $360/24 = 15^\circ$.



Il faut donc transposer ce principe en des points divers de la surface du globe et sur des plans non parallèles à l'équateur .

Pour construire un cadran solaire , on a donc besoin de connaître les **coordonnées du lieu** d'installation et l'**orientation du plan** portant les lignes horaires .

Pour tenir compte de la **longitude du lieu** , on ote 4min par degré de longitude est (si le cadran est situé à l'est du méridien de Greenwich) , on ajoute 4 min par degré de longitude ouest .

On peut également , si on est exigeant , tenir compte de l'**équation du temps** correspondant aux variations du passage du soleil en un point précis : ces variations correspondent à des irrégularités de rotation de la terre , ce qui provoque une avance ou un retard du passage du soleil en un point donné . Il faut savoir que l'erreur est de plus ou moins 15 min sur l'année , cette variation peut être négligée si on ne souhaite pas en faire l'étude .

L'heure solaire n'est pas l'**heure légale** : en France , il faut ajouter 1h en hiver et 2h en été .

En résumé , pour traduire l'heure solaire en heure légale on peut utiliser la formule :

Temps légal = temps solaire + 1 ou 2h +ou-correction longitude +ou-équation du temps

Contenu des séquences

Séquence n°1 : - présentation du thème (la mesure du temps , les cadrans solaires)
- notion de latitude et de longitude (repérage d'un point sur la terre)
- observation de différents types de cadrans solaires .

Cette séquence peut être traitée en interdisciplinarité Maths / Hist Géo .

Séquence n°2 : - étude du programme de construction d'un cadran solaire horizontal .
- lecture détaillée , choix des outils .
- schéma préparatoire .

Séquence n°3 : - réalisation de la construction sur feuille de canson .

Séquence n°4 : - utilisation du logiciel Cabri .
- réalisation des parties 1 , 2 , 3 du programme .
- liste des outils nécessaires avec Cabri .

Séquence n°5 : - travail avec Cabri (suite) .
- utilisation de l'outil rotation (de façon expérimentale)
- parties 4 , 5 du programme .

Séquence n°6 : - fin de la construction à l'aide de Cabri .
- utilisation de l'outil cacher pour obtenir le dessin du dessus du cadran .
- mise en page , cadrage , impression .

Séquence n°7 : - étude préparatoire à la réalisation de la maquette en carton .
- patron .
- vue en perspective .
- choix des dimensions .

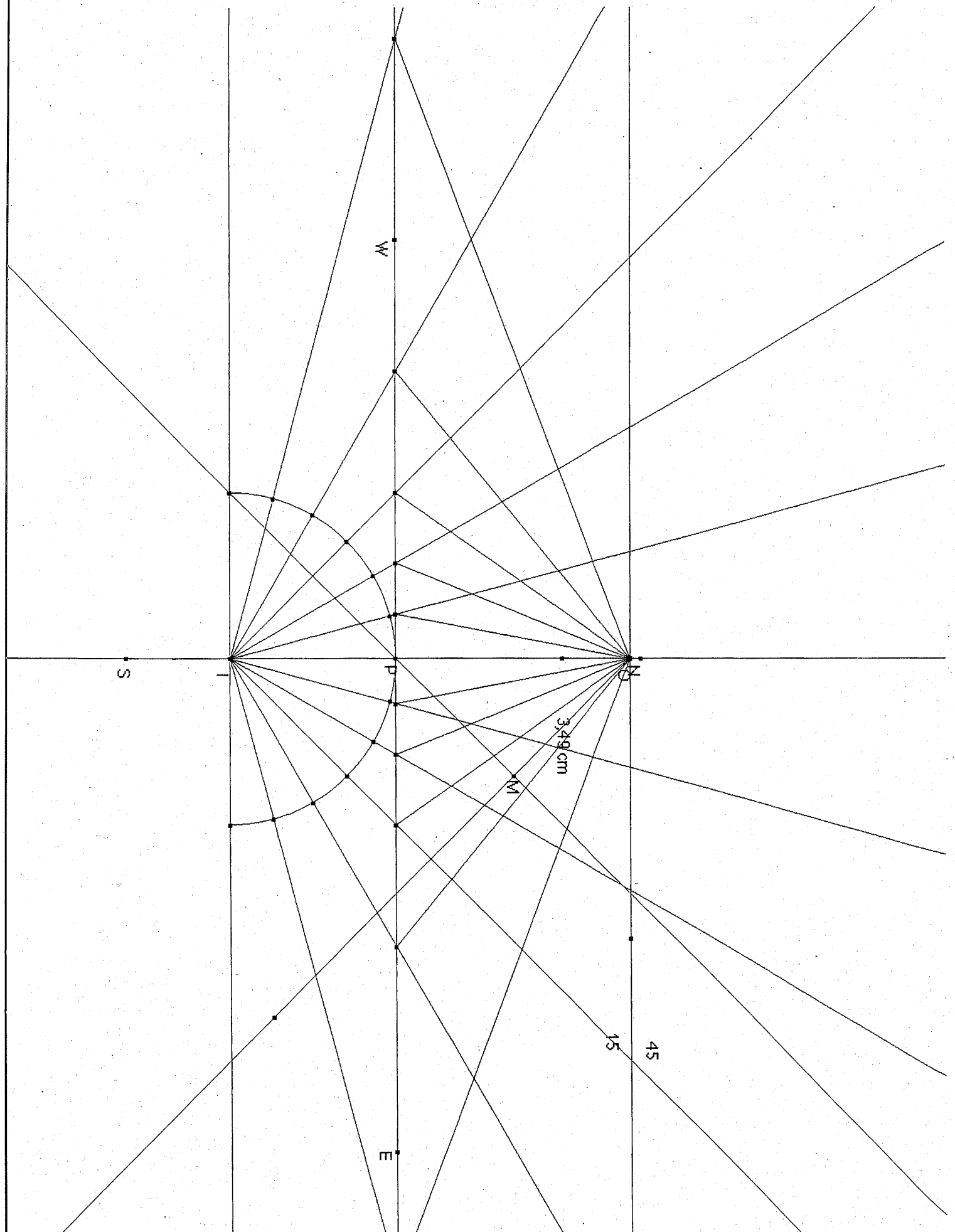
Séquence n°8 : - réalisation de la maquette en carton .
- report de la construction effectuée avec cabri sur la face de dessus.
- positionnement du gnomon , utilisation .

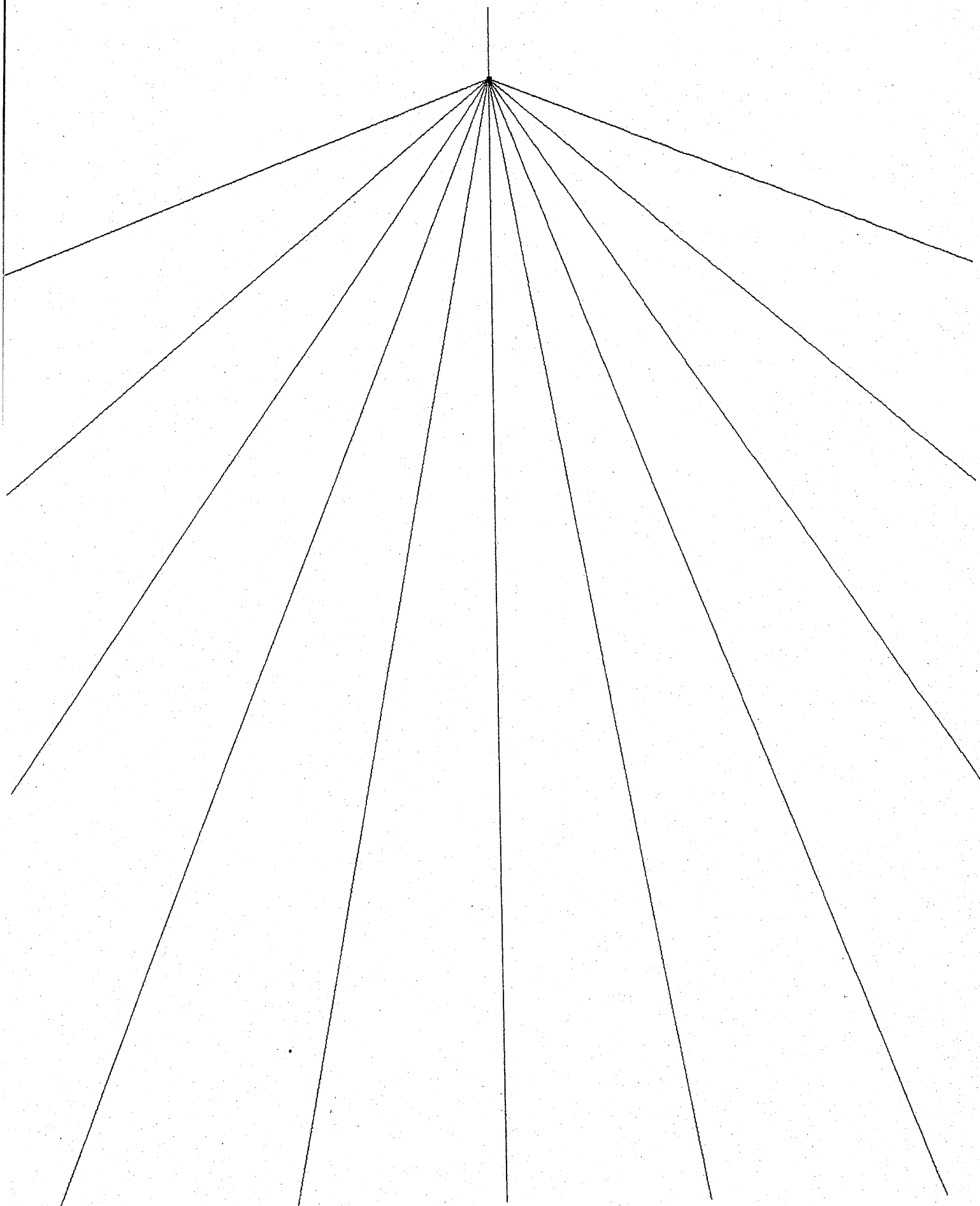
Si ce travail est mené en interdisciplinarité avec un professeur d'histoire géographie , il est intéressant de le prolonger par des recherches concernant d'autres types de cadrans solaires, voire d'autres instruments de mesure du temps (sablier , bougie , clepsydre ...).

Cadran solaire horizontal : programme de construction .

- 1°) Tracer une droite verticale (ns) . Placer sur cette droite un point O et tracer la perpendiculaire à (ns) passant par O .
- 2°) Construire l'angle $\widehat{sox}$, à droite de [Os) , tel que sa mesure soit égale à la latitude du lieu où l'on se trouve.
- 3°) Sur [Ox) placer un point M à environ 3 cm de O et tracer la perpendiculaire à (OM) passant par M . Elle coupe (ns) en P .
- 4°) Sur (ns) placer le point I tel que PI = PM et tel que I soit de l'autre côté de O par rapport à P . Tracer la droite (we) perpendiculaire à (ns) passant par P .
- 5°) Construire le demi - cercle de centre I et de rayon PI . Partager ce demi-cercle en douze arcs de même mesure .
- 6°) Tracer les rayons obtenus en joignant I à chaque extrémité des arcs de cercle , les prolonger . Ils coupent (ew) en P1 , P2 , P3 ,....., P10 . Tracer les segments [OP1] , [OP2] [OP10] .
- 7°) Choisir un cadre rectangulaire ou carré convenable pour délimiter le cadran solaire .
- 8°)Epaissir et conserver les segments [OP1] , [OP2] , , [OP10] qui représentent les graduations du cadran solaire .

Liste du matériel de construction sur canson	Liste des outils de Cabri
1°)	
2°)	
3°)	
4°)	
5°)	
6°)	
7°)	
8°)	





Pliages géométriques

Ce thème a fait l'objet d'un parcours niveau 5° situé au dernier trimestre ; les constructions et manipulations étant associées à des travaux d'écriture de deux types :

- Description de la méthode de construction permettant d'obtenir la figure demandée .
- Rédaction de démonstrations justifiant les propriétés des figures obtenues .

Les activités ont été proposées sous forme de défis à raison d'un par séance et les recherches étaient menées par groupes de deux ou de trois ; lors de la séance suivante , les résultats et productions des différents groupes étaient présentées , commentées voire critiquées . A l'issue de cette séance une synthèse plus ou moins élaborée était mise en forme dans chacun des groupes et prenait place dans un dossier à coté du pliage concerné .

Les ouvrages à l'origine de ce travail sont les suivants : Pliages et Mathématiques ACL éditions et un dossier du PLOT spécial pliages de M Darche .

Objectifs généraux	Manipuler Coder Ecrire pour décrire Ecrire pour justifier
Notions mathématiques nécessaires	Propriétés concernant : - Les symétries - Les angles - Les polygones particuliers
Horaire approximatif	8 à 10 séances
Production	Dossier réunissant les objets obtenus par pliage, la méthode de construction de chacun d'eux ainsi que sa justification .
Evaluation	Appréciation de la qualité des productions en papier et des travaux de rédaction.

Sommaire des séances :

- Défi 1 :

Avec une feuille A4, construire un angle de 45° , même question avec un angle de 30° et de 60° .

- Défi 2 :

A partir d'une feuille A4, construire un triangle équilatéral .

- Défi 3 :

Avec une feuille A4 , construire un tétraèdre régulier .

- Défi 4 :

A partir de deux feuilles A4 , obtenir 4 triangles rectangles isocèles superposables .

A l'aide de ces triangles (en utiliser au moins 3) , reconstituer un carré , un rectangle , un parallélogramme , un trapèze isocèle , un trapèze rectangle .

- Défi 5 :

Avec deux feuilles A4 , obtenir 2 carrés superposables . A l'aide de ces carrés , construire par pliage un angle de 135° .

- Défi n°6 :

A partir d'un carré , obtenir un hexagone régulier .

Même question à partir d'un triangle équilatéral .

A partir d'un carré , obtenir un octogone régulier .

PENTAMINOS ET PENTACUBES PLATS

Thème	Objectifs généraux ou disciplinaires	Notions mathématiques nécessaires	Horaire approximatif	Production attendue	Évaluation envisagée
Polyminos et pentacubes plats	Manipulation de formes en vue de pavages. Favoriser la vision des objets dans l'espace	Symétries Dénombrements Perspective (lecture et représentation)	7 séquences ou plus	Dessins Constructions	

Ce parcours est presque entièrement géré par le professeur de mathématiques, auquel peuvent se joindre éventuellement les professeurs d'arts plastiques et de technologie.

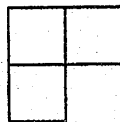
Ce qui est fait lors d'une séquence varie suivant la compréhension des consignes, l'habileté de nos élèves, de leur nombre, ...; aussi nous nous bornerons à donner seulement le déroulement du parcours.

On choisit une unité de longueur, et on considère des carrés (5 ou 6) ayant pour côté cette unité.

On les fait découper dans une feuille de papier cartonné (ou non).

La première partie des activités consiste à obtenir des "formes" différentes (c'est à dire non superposables, même en les retournant) en juxtaposant exactement ces carrés le long de leurs côtés.

Exemple : avec 3 carrés



Pour chaque "forme" obtenue, on fait indiquer le périmètre, l'aire, l'existence ou non d'axes et de centre de symétrie.

On commence avec 1 carré, puis 2, puis 3, puis 4, puis 5, éventuellement 6.

On dénombre alors ces "formes" différentes : carré (1), domino (1), triminos (2), tétraminos (5), pentaminos (12). On peut aller jusqu'aux hexaminos (35) et faire rechercher parmi ceux-ci les 11 patrons d'un cube (il faut alors prévoir du temps et des discussions en perspective !).

Ensuite, avec les pentaminos trouvés, on se propose de "paver" des rectangles. La question qui se pose alors, est de savoir quelles sont les dimensions possibles de ces rectangles, si on utilise les 12 pentaminos. Cela amène à rechercher les diviseurs de 60, mais tous ne conviennent pas.

Pour apporter un aspect un peu ludique au parcours, on peut proposer la construction d'un "jeu" évolutif consistant à recouvrir progressivement un rectangle de dimensions 12×5 (voir Annexe).

Il y a alors une recherche sur le nombre de positions possibles de chaque pièce, des assemblages (utilisation des symétries), ... Des défis peuvent être lancés pour trouver un maximum de "pavages" différents (les faire dessiner, ceci pour éviter les contestations!).

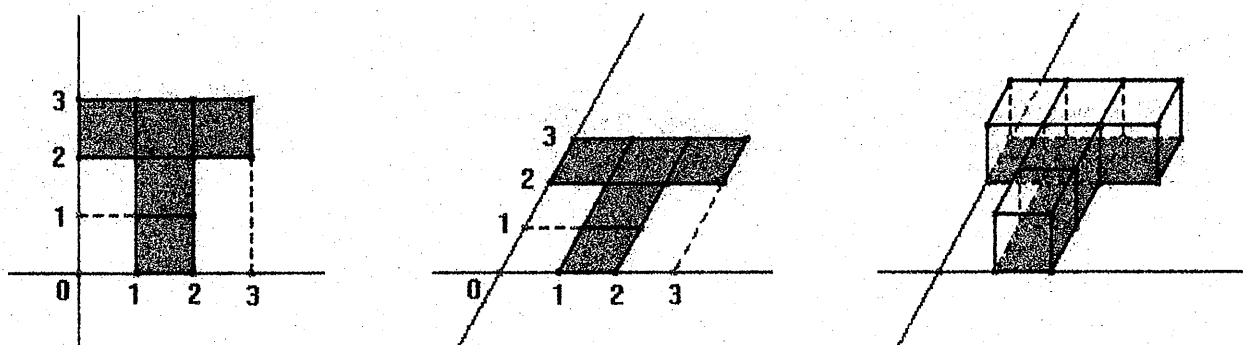
Une autre activité, en liaison avec le français, est proposée par François Drouin dans le bulletin vert de l'A.P.M.E.P. n° 419, ce sont les "Pentatextes".

La partie suivante du parcours, consiste à imaginer que les pentaminos sont cinq cubes posés à plat dont on voit les faces supérieures. Les solides ainsi obtenus sont appelés des pentacubes plats (il y en a donc 12, alors qu'on dénombre en tout 29 pentacubes). Le mieux serait d'essayer de les construire (en bois, plastique, ...).

Après quelques rappels concernant les représentations de solides, on se propose de faire dessiner ces pentacubes plats en perspective cavalière sur papier quadrillé ou pointé, mais aussi en perspective axonométrique (papier pointé triangulaire recommandé), et ceci sous différentes vues (2 dessins par élève semblent suffisants).

Pour les élèves, c'est une activité difficile, aussi peut-il être intéressant de partir d'un "plan au sol" avec repérage ou non et ensuite de dessiner la "hauteur" (élévation).

Exemple :



On essaie à présent de construire avec ces 12 pentacubes plats des parallélépipèdes rectangles. On est donc amené à rechercher les dimensions possibles de ceux-ci.

Pour des parallélépipèdes de dimensions $(L \times l \times h)$:

$10 \times 6 \times 1$, il y a 2339 constructions différentes

$12 \times 5 \times 1$, il y en a 1010

$15 \times 4 \times 1$, il y en a 368

$20 \times 3 \times 1$, il y en a 2

$6 \times 5 \times 2$, il y en a 264

$10 \times 3 \times 2$, il y en a 12

$5 \times 4 \times 3$, il y en a 3940.

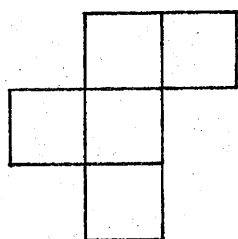
Ce sont des puzzles de l'espace souvent difficiles et il vaut mieux donner des exemples de reconstitution notamment vus en perspective (voir Annexe).

Remarque : On peut reprendre le "jeu" vu précédemment avec les pentaminos, mais en prenant les pentacubes plats qui sont plus faciles à manipuler.

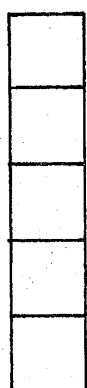
ANNEXE

JEU

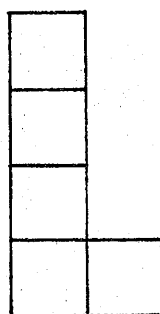
On doit d'abord reconnaître chacun des pentaminos, en remarquant que l'on peut les assimiler à des lettres comme ci-dessous :



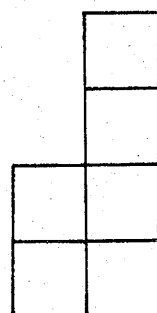
F



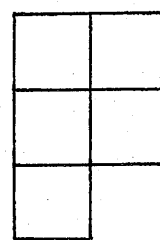
I



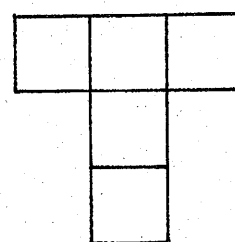
L



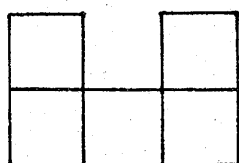
N



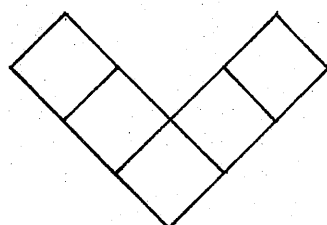
P



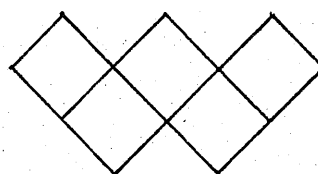
T



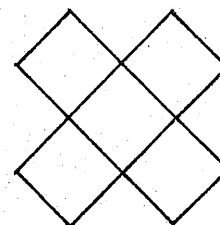
U



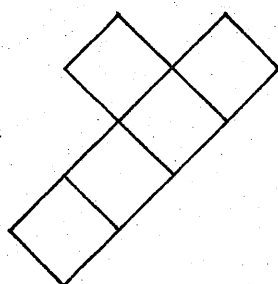
V



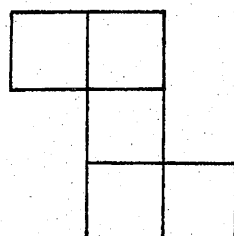
W



X



Y



Z

Le jeu consiste, avec ces pentaminos, à paver progressivement une grille 5 sur 12 en commençant par un rectangle 5 sur 4, puis 5 sur 5, puis 5 sur 6, etc..., jusqu'à 12. On pourra appeler ces rectangles respectivement Penta 4, Penta 5, Penta 6, etc...

Ces recouvrements doivent se faire en respectant la série de pentaminos imposés, écrits sur une fiche que l'on aura préalablement tirée au sort.

Grille 5 sur 12 :

PENTA	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Exemple de fiche :

PENTA 4 : Y, N, V, T

" 5 : F

" 6 : I

" 7 : P

" 8 : W

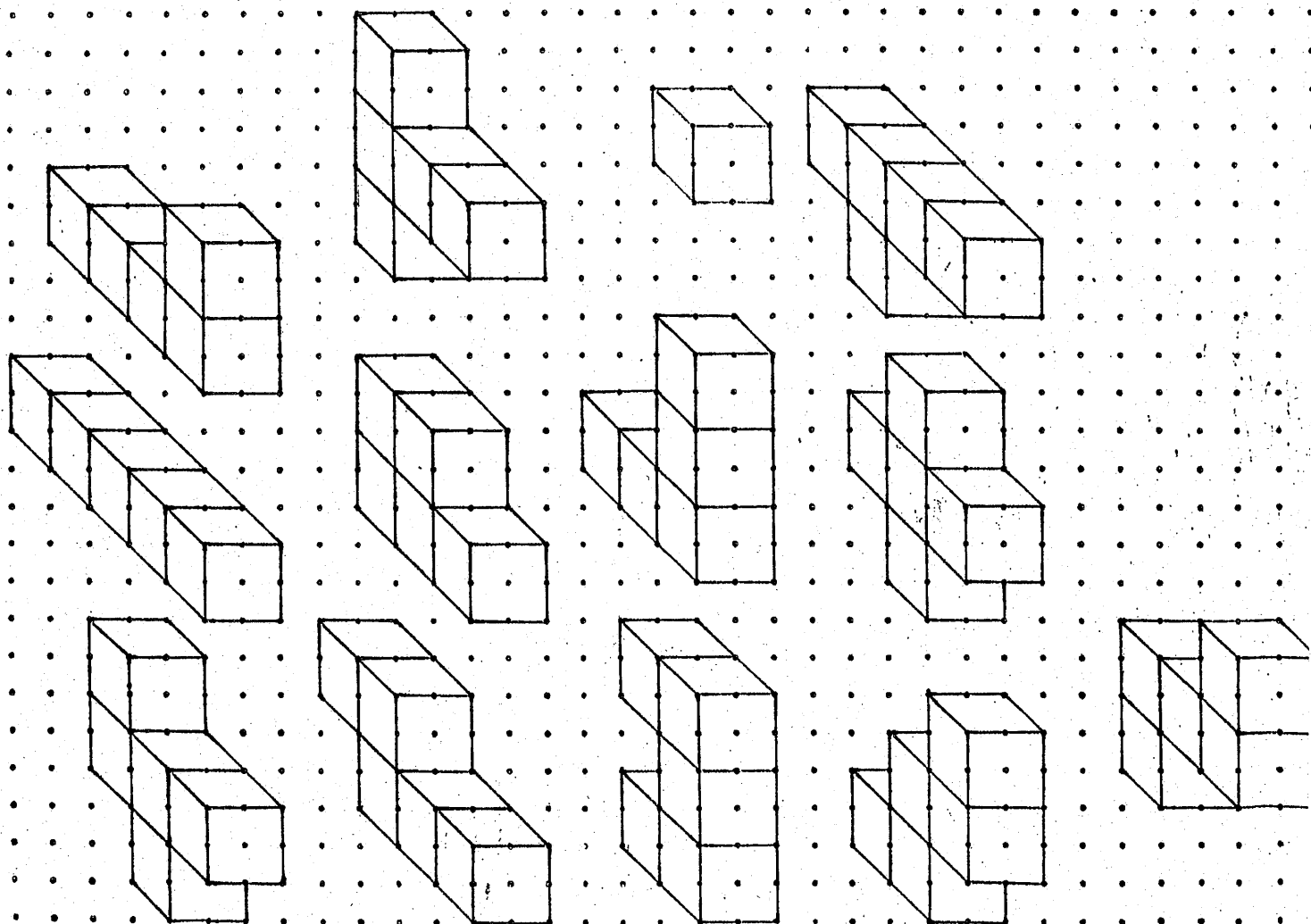
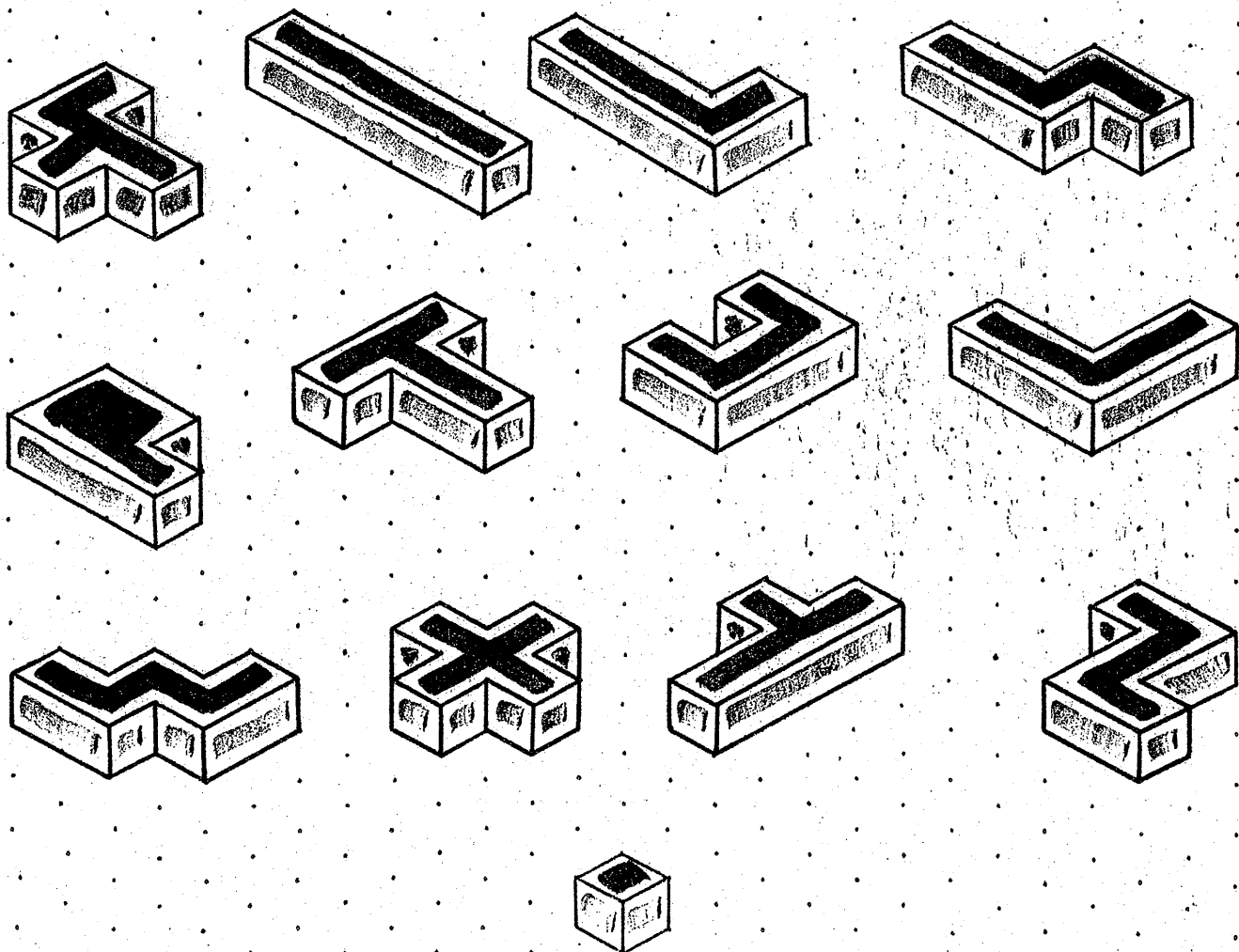
" 9 : Z

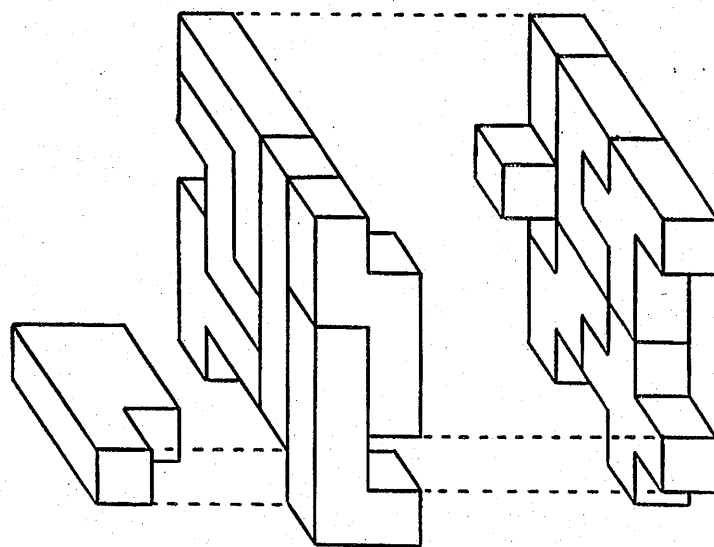
" 10 : X

" 11 : U

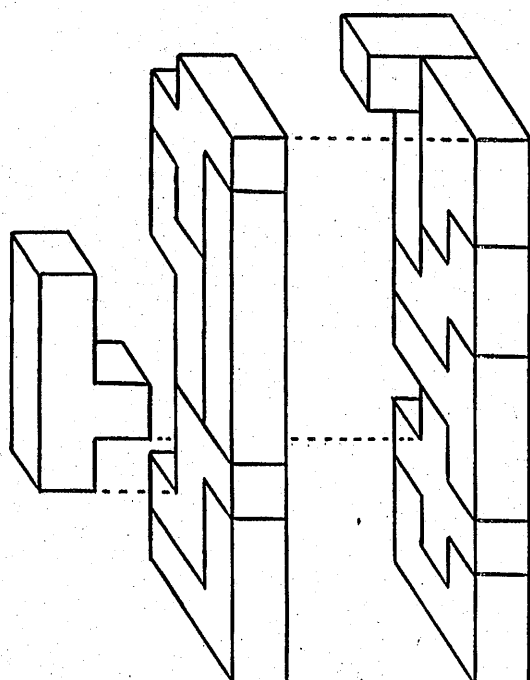
Exemple de séries :

Séries	PENTA 4				5	6	7	8	9	10	11
1	L	Y	P	W	Z	N	V	T	F	I	U
2	L	Y	U	F	Z	V	P	N	T	I	X
3	L	N	P	U	Z	I	Y	F	W	V	X
4	Y	N	P	U	Z	I	V	L	W	T	X
5	Y	P	U	F	T	L	X	W	N	I	V
6	L	Y	V	P	N	F	W	T	Z	X	I
7	L	Y	V	U	Z	I	F	T	X	N	W
8	L	Y	P	T	W	Z	F	X	N	I	U
9	L	Y	P	Z	V	W	F	U	X	T	I
10	L	N	V	Z	U	T	P	I	X	F	W
11	Y	N	V	T	F	I	P	W	Z	X	U
12	L	P	U	F	W	Y	Z	N	V	T	X



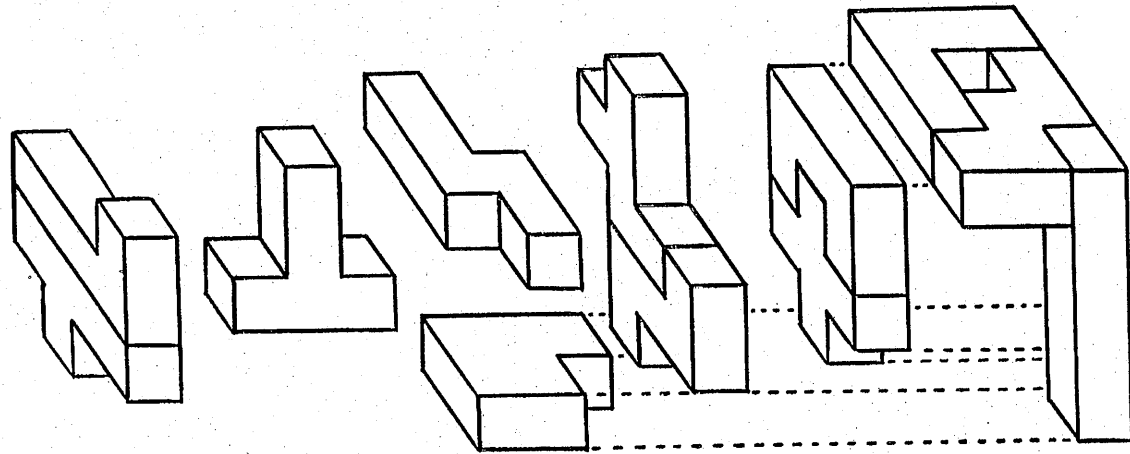


6x5x2

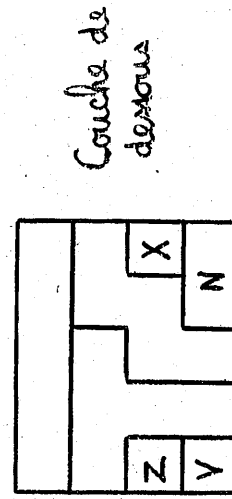
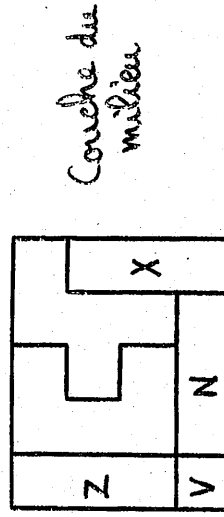
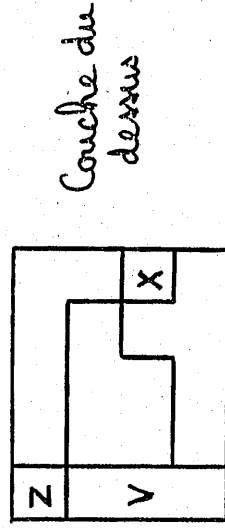


10x3x2

A l'aide des indications ci-dessous, reconstituer un parallélépipède rectangulaire : $5 \times 4 \times 3$ ($L \times l \times h$) en utilisant les 12 pentacubes plats.



$5 \times 4 \times 3$



Des pistes historiques pour la classe de 4^{ème}

1° Le théorème du perroquet

2° Les fractions Egyptiennes

3° Des équations à travers les âges

« Le théorème du perroquet »
de Denis Guedj.

Proposition d'une exploitation possible en classe :

1. Présentation du livre

C'est l'histoire d'un vieux libraire, philosophe de formation, qui reçoit d'un vieil ami, mathématicien, deux lettres rédigées comme des énigmes ainsi que sa bibliothèque, uniquement composée d'ouvrages de mathématiques ou relatant la vie et les travaux de mathématiciens. Cet ami venant à disparaître dans des conditions étranges, il veut découvrir le pourquoi et le comment de cette disparition ; pour cela il va être amené à redécouvrir les mathématiques, guidé par le plan des lettres de son ami et aidé par les livres de la bibliothèque.

2. Une approche historique du théorème de Thalès

A partir d'une lecture du chapitre ou d'extraits « **Thalès, l'homme de l'ombre** » :

(lecture individuelle, éventuellement avec un professeur de français pour une lecture guidée, puis reprise par des lectures en groupe ou collective)

- replacer Thalès dans son époque : temps et lieux géographiques.
(Supports papier : dictionnaires, encyclopédies, atlas géographiques et historiques ; informatiques : CD-ROM, Internet)
- retrouver les différentes étapes de la découverte du théorème de Thalès.
(Refaire les différents schémas, les expliquer les commenter ; illustrer « les ombres » à l'aide d'une maquette d'une pyramide ...)

Remarque : la question a été posée lors des journées de stage de la place de ce travail dans la progression annuelle, en particulier doit-il suivre ou précéder le chapitre fait « en cours » sur le Théorème de Thalès : les avis semblent très partagés.

Prolongements possibles :

- comparaison des pyramides de Chéops et du Louvre ...
- à partir d'une autre lecture de ce même chapitre, comment sensibiliser les élèves aux mathématiques ; en effet deux personnages du livre sont des adolescents, et il peut être intéressant de débattre avec la classe de leur « vue » des mathématiques.

On peut peut-être faire un travail analogue en utilisant **les chapitres sur Pythagore.**

(Lire au moins un court extrait sur les nombres irrationnels « nombres constructibles mais non mesurables ... »)

NUMÉRATION ET CALCULS ÉGYPTIENS

Travailler sur le système décimal non positionnel égyptien pour mieux comprendre l'intérêt de notre système décimal positionnel.

Étudier quelques problèmes anciens pour apprécier l'apport de l'algèbre.

Numération égyptienne :

I	II	III	IIII	IIII II	IIII III	IIII IIII	IIII IIII	IIII IIII
1	2	3	4	5	6	7	8	9
↪	↪↪	↪↪↪	↪↪ ↪↪	↪↪↪ ↪↪	---	---	---	---
10	20	30	40	50	60	70	80	90
↻	↕	👉	👤	👤👤👤👤	👤👤👤👤👤👤	👤👤👤👤👤👤👤👤		
100	1000	10000	100000	1000000	10000000	100000000		

Ce système rend les **additions** évidentes car il s'agit de compter le nombre de symboles de chaque sorte, en tenant compte des retenues éventuelles.

La technique de la **multiplication** repose entièrement sur la duplication (prendre le double) et quelquefois sur la multiplication par 10 qui ne nécessite qu'un décalage dans les symboles.

Dans le papyrus de Rhind, écrit par le scribe Ahmès vers 1650 avant Jésus-Christ, on trouve les calculs de 12^2 et 16^2 suivants :

<table style="width: 100%;"> <tr> <td style="width: 30%;">I</td><td style="width: 70%;">↪ II</td></tr> <tr> <td>II</td><td>↪↪ IIIII</td></tr> <tr> <td>IIII</td><td>↪↪ IIIII /</td></tr> <tr> <td>IIII IIII</td><td>↪↪↪↪ IIIII /</td></tr> </table> résultat: ↻ ↪↪ IIIII	I	↪ II	II	↪↪ IIIII	IIII	↪↪ IIIII /	IIII IIII	↪↪↪↪ IIIII /	<table style="width: 100%;"> <tr> <td style="width: 30%;">I</td><td style="width: 70%;">↪ IIIII /</td></tr> <tr> <td>↪</td><td>↻ ↪↪↪ /</td></tr> <tr> <td>IIII</td><td>↪↪↪↪ /</td></tr> <tr> <td>II</td><td>↪↪↪↪</td></tr> </table> résultat: ↻↻ ↪↪↪ IIIII	I	↪ IIIII /	↪	↻ ↪↪↪ /	IIII	↪↪↪↪ /	II	↪↪↪↪
I	↪ II																
II	↪↪ IIIII																
IIII	↪↪ IIIII /																
IIII IIII	↪↪↪↪ IIIII /																
I	↪ IIIII /																
↪	↻ ↪↪↪ /																
IIII	↪↪↪↪ /																
II	↪↪↪↪																

Faire d'autres multiplications avec cette technique, comme par exemple 47×63 , 125×97 et 54×43 , mais en utilisant nos chiffres.

Quant à la **division**, elle est ramenée à la multiplication.

Par exemple, calculer 364 divisé par 26 :

1	26	
2	52	/
4	104	/
8	208	/

$364 = 2 \times 26 + 4 \times 26 + 8 \times 26$
 $364 = 26 \times (2 + 4 + 8)$

Résultat : $2 + 4 + 8 = 14$.

Lorsque le résultat de la division ne tombait pas "juste", les égyptiens avaient recours aux **fractions**, mais comme seules les parts avaient un sens pour eux, ils n'utilisaient que celles du type $\frac{1}{n}$, où n est un entier, et la fraction $\frac{2}{3}$.

Relations trouvées, mais non utilisées dans les calculs ordinaires, car les égyptiens ne répétaient jamais 2 parts semblables :

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

D'où les relations du papyrus de Rhind suivantes :

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = 1 + \frac{1}{6}$$

Il semble que les règles d'utilisation étaient les suivantes :

- * n'utiliser que des fractions différentes
- * classer les fractions par ordre décroissant
- * entre deux décompositions, choisir celle avec les plus petits entiers, et ne pas dépasser 1000
- * préférer une égalité comportant 2 fractions à une en comportant 3, une à 3 fractions par rapport à une en ayant 4, et ne pas dépasser 4 fractions
- * préférer les nombres pairs aux nombres impairs.

Ils savaient doubler une fraction de dénominateur pair, et à l'aide de la relation $\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$, ils pouvaient doubler n'importe quelle fraction de dénominateur divisible par 3 (en utilisant alors le fait que $\frac{2}{3n} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n}$, ce qui fait obtenir les $\frac{2}{3}$ de toute fraction unitaire).

Exemples :

Doublements successifs de $\frac{1}{12}$:

1	$\frac{1}{12}$
2	$\frac{1}{6}$
4	$\frac{1}{3}$
8	$\frac{2}{3}$

Doublements successifs de $\frac{1}{9}$:

1	$\frac{1}{9}$
2	$\frac{1}{6} + \frac{1}{18}$
4	$\frac{1}{3} + \frac{1}{9}$
8	$\frac{2}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{18}$

Extraits du papyrus de Rhind :

Quotient de 19 par 8 :

1	8
2	16 ✓
$\frac{1}{2}$	4
$\frac{1}{4}$	2 ✓
$\frac{1}{8}$	1 ✓

résultat $2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$

Quotient de 16 par 3 :

1	3 ✓
2	6
4	12 ✓
$\frac{2}{3}$	2
$\frac{1}{3}$	1 ✓

résultat $5 + \frac{1}{3}$

Quotient de 4 par 15 :

1	15
$\frac{1}{10}$	$1 + \frac{1}{2}$
$\frac{1}{5}$	3 ✓
$\frac{1}{15}$	1 ✓

résultat $\frac{1}{5} + \frac{1}{15}$

Petits problèmes :

Partager entre 10 hommes, 6, 7, 8 ou 9 pains.

Il y a aussi dans ce papyrus une liste de décomposition de fractions $\frac{2}{n}$, de $n = 3$ à $n = 101$.

Ils devaient se servir de l'égalité : $2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$, et en déduire $\frac{2}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n} + \frac{1}{6n}$.

Dans certains calculs, figuraient des nombres écrits en rouge appelés "auxiliaires rouges" qui correspondaient aux numérateurs des fractions si elles avaient été réduites au même dénominateur.

Par exemple :

Dans 2 divisé par 35, on trouve écrits en rouge les nombres 6, 7 et 5 sous les nombres $\frac{1}{35}$, $\frac{1}{30}$ et $\frac{1}{42}$,

ce qui correspondrait à faire : $\frac{2}{35} = \frac{2 \times 6}{210} = \frac{7}{210} + \frac{5}{210} = \frac{1}{30} + \frac{1}{42}$.

Ces auxiliaires rouges étaient souvent utilisés pour trouver le complément à 1 d'une somme de fractions unitaires.

Exemple :

Compléter à 1, la somme $\frac{2}{3} + \frac{1}{15}$. Les auxiliaires rouges sont 10 et 1, de somme 11, et donc il

manque 4 pour obtenir 15. On trouve $\frac{1}{5} + \frac{1}{15}$.

Chercher le complément à 1 de $\frac{2}{3} + \frac{1}{30}$, les auxiliaires rouges étant 20 et 1.

Les problèmes égyptiens :

Ils sont presque tous de type : $x + ax = b$, ou $x + ax + cx = b$ et sont résolus par la méthode dite de "fausse position", utilisée encore jusqu'au XX^e siècle, notamment en arithmétique.

* Problème 26 du papyrus de Rhind :

Une quantité et son quart font 15. Quelle est cette quantité ?

On calcule avec 4 : $\begin{array}{cc} 1 & 4 \\ \frac{1}{4} & 1 \end{array}$ la somme de 4 et 1, est 5.

Pour passer de 5 à 15, on multiplie par 3, donc la quantité cherchée est 4×3 , c'est à dire 12.

* Problème 24 :

Une quantité et son septième valent 19. Quelle est cette quantité ? $(16 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8})$

* Problème 25 :

Une quantité et son demi valent 16. Quelle est cette quantité ? $(10 + \frac{2}{3})$

* Problème 27 :

Une quantité et son cinquième valent 21. Quelle est cette quantité ? $(17 + \frac{1}{2})$

* Problème 34 :

Une quantité, son demi et son quart valent 10. Quelle est cette quantité ? $(5 + \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{14})$

* Quand le scribe te dit : "10 est les $\frac{2}{3}$ plus le $\frac{1}{10}$ de quoi ?" Que réponds-tu ?

* Sur un tas de blé de 21 mesures, le paysan doit donner au Pharaon une part égale au cinquième de la sienne. Quelle est la part du paysan ? (Problème 27).

COMPLÉMENTS

Pour les égyptiens, les mathématiques se rapportent à la vie quotidienne : répartition de miches de pain, d'animaux ou encore redistribution des terres après les crues du Nil.

Il peut être intéressant de faire vérifier par les élèves quelques-unes des règles qu'utilisaient les égyptiens pour leurs calculs, en essayant de les adapter aux nôtres.

* Par exemple, comment retrouver la décomposition de $\frac{2}{21}$ en deux fractions unitaires.

L'une des façons est de remarquer que $\frac{2}{21}$ revient à prendre les $\frac{2}{3}$ de $\frac{1}{7}$ et comme ils savaient que $\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$, ils en déduisaient que $\frac{2}{21} = \frac{1}{14} + \frac{1}{42}$.

Mais on peut aussi faire chercher les diviseurs de 21, qui sont 1, 3, 7, 21 et faire écrire une fraction égale à $\frac{2}{21}$ dont le numérateur est la somme de deux de ces diviseurs (c'est à dire 4, 8, 10, 22, 24, 28).

Cela donne :

- pour 4 : $\frac{2}{21} = \frac{2 \times 2}{21 \times 2} = \frac{1}{21 \times 2} + \frac{3}{21 \times 2} = \frac{1}{42} + \frac{1}{14}$

- pour 8 : $\frac{2}{21} = \frac{2 \times 4}{21 \times 4} = \frac{1}{21 \times 4} + \frac{7}{21 \times 4} = \frac{1}{84} + \frac{1}{12}$

- pour 10 : $\frac{2}{21} = \frac{2 \times 5}{21 \times 5} = \frac{3}{21 \times 5} + \frac{7}{21 \times 5} = \frac{1}{35} + \frac{1}{15}$

etc ...

Celle utilisée par les égyptiens était $\frac{2}{21} = \frac{1}{14} + \frac{1}{42}$, conformément à leurs règles énoncées dans les pages précédentes.

* Problème du partage de 7 pains entre 10 hommes :

L'auxiliaire rouge utilisé était 3. D'où : $\frac{7}{10} = \frac{7 \times 3}{10 \times 3} = \frac{20}{30} + \frac{1}{30}$.

Le résultat étant $\frac{2}{3} + \frac{1}{30}$.

* Problème 27 : Quelle quantité et son cinquième donnent 21 ?

La méthode utilisée est celle de la "fausse position".

On prend la quantité 5. En reportant dans le problème, on trouve 5 + 1, c'est à dire 6.

On est donc amené à chercher le coefficient multiplicateur qui permet de passer de 6 à 21.

On fait donc le quotient de 21 par 6 :

$$\begin{array}{r} 1 \quad 6 \quad / \\ 2 \quad 12 \quad / \\ \frac{1}{2} \quad 3 \quad / \end{array}$$

Ce coefficient est donc $3 + \frac{1}{2}$

Pour obtenir la quantité inconnue dans le problème, il suffit alors de multiplier la quantité 5 par ce coefficient et cela donne $17 + \frac{1}{2}$.

DES EQUATIONS A TRAVERS LES AGES

I - Un peu d'histoire

- Les premiers problèmes découverts dans les textes anciens datent de 1800 avant JC en Mésopotamie sur des **tablettes Babyloniennes**. Nous retrouvons des solutions à des problèmes de partage présentés par des scribes décrivant des enchaînements de calculs conduisant à la réponse dans des **Papyrus célèbres** : celui de **Rhind** et celui de **Moscou**. On peut y repérer un procédé appelé **méthode de fausse position**.
- Dans le monde antique Grec, vers le III^e siècle av JC, Euclide développe une « algèbre » dans laquelle les calculs sont justifiés par des **considérations géométriques**. Plus tard, **Diophante** dans son **Arithmétique** traite des équations en désignant l'**inconnue** par un signe.
- Dans les **mathématiques chinoises**, on trouve aussi, dès le III^e siècle av JC des exemples utilisant la méthode de fausse position ainsi que des méthodes géométriques.
- Mais, c'est avec l'essor des mathématiques au VII^e siècle dans le monde arabe que naîtra l'algèbre. Du IX^e au XV^e siècle, on verra se succéder des mathématiciens qui écriront des traités d'algèbre. Le premier d'entre eux, est l'oeuvre d'**AL Kharizmi**, c'est l'**abrégé du calcul par l'al-jabr et la muquabala**. La nouveauté qu'il introduit réside dans le fait qu'il ramène tous les problèmes résolus par ses prédécesseurs à la résolution de six équations - type : ces équations dites canoniques servent de modèles applicables aux situations étudiées à cette époque. Mais ces méthodes ne s'appliquent qu'aux équations du second degré.
- Omar **Khayyam**, au XI^e siècle, mathématicien et poète célèbre d'Asie centrale, écrit un traité d'algèbre dans lequel il associe méthodes algébriques et méthodes géométriques. Il réussit à résoudre des équations du troisième degré de manière graphique par intersection de courbes.
- Durant la Renaissance, les notations commencent à se simplifier. Les français **Nicolas Chuquet** et **François Viète** sont considérés comme les précurseurs de l'écriture algébrique que nous utilisons aujourd'hui.
- C'est à cette époque, en Italie, aux XV^e et XVI^e siècles qu'un nouvel essor sera donné à l'algèbre et que les équations du troisième degré seront étudiées par le calcul : la voie est ouverte par Scipione del Ferro et quelques décennies plus tard c'est **Niccollo Fontana dit Tartaglia** qui découvrira une méthode générale de résolution rendue publique par **Cardan**, puis, un autre italien, **Rafaele Bombelli** poursuivra en introduisant de nouveaux nombres : les imaginaires trouvant ainsi des solutions à toutes les équations de degré trois. Sur sa lancée il s'attaque aux équations de degré quatre et en donne les solutions.
- En ce qui concerne les degrés supérieurs, il faudra attendre trois siècles pour qu'un prodige norvégien **Abel** réussisse à montrer que la résolution d'une équation de degré égal ou supérieur à cinq n'est pas possible en général. Malheureusement, tuberculeux, il meurt à 27 ans. Trois ans plus tard, un autre prodige, Français celui-là, **Evariste Galois** donnera les conditions qui permettent de dire avant de se lancer dans sa résolution si une équation est ou non résoluble. Lui aussi, meurt très jeune à 20 ans tué en duel, en ayant à la hâte rédigé le fruit de ses découvertes la nuit précédant sa mort. *Après lui les équations n'eurent plus de secret, mais derrière toutes ces techniques se cachent 5000 ans de recherches !*

II - A propos de la méthode de simple fausse position

« Il faut poser un nombre en lequel se mettront entièrement les parties proposées et cela pour éviter les nombres fractionnaires , et non pas qu'on puisse bien le faire avec un autre , mais avec davantage de peine . » F Pellos 1492 .

Le départ du raisonnement ressemble à la méthode algébrique mais au lieu de désigner l'inconnue par une lettre , on lui assigne une valeur numérique précise , puis partant de ce nombre , de cette «supposition» , on lui applique les conditions imposées par l'énoncé . La quantité cherchée étant liée aux données de façon linéaire , on applique en dernière étape la règle de proportionnalité pour trouver la solution du problème .

L'origine des méthodes de fausse position est très ancienne , on en trouve des exemples sur certaines tablettes Babyloniennes ou papyrus Egyptiens (voir doc pages suivantes) .

Le champ d'application de ces méthodes est celui des problèmes linéaires , on peut remarquer que , jusqu'au début du XX siècle , la technique de fausse position figure dans les ouvrages d'arithmétique de fin d'études mettant en oeuvre les opérations élémentaires , les nombres fractionnaires , la proportionnalité ...

Ce sont souvent des problèmes «faussement» concrets qui servent de prétexte à la mise en oeuvre de cette méthode (voir exemples pages suivantes)

III - D'autres méthodes historiques

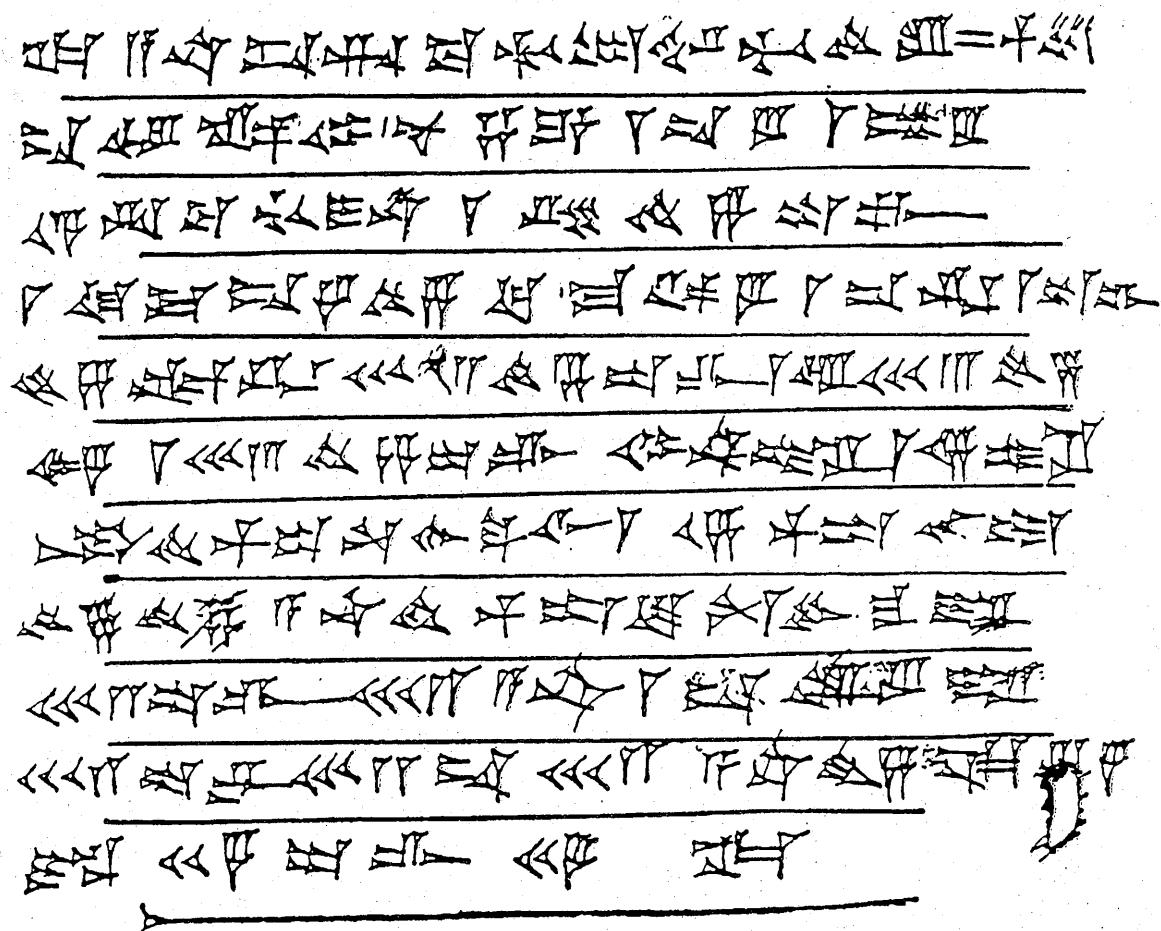
Des problèmes concrets du second degré peuvent être résolus par des calculs d'aires , on en trouve des exemples traités par Euclide ou Al Kharizmi (méthode du carré imparfait) . Seules les solutions positives sont considérées (voir exemples pages suivantes) .

Il est intéressant également d'étudier les textes de problèmes traités par les précurseurs des méthodes algébriques : Diophante et Newton (voir exemples) .

On peut également proposer à nos élèves la recherche de solutions (nombre , valeurs approchées) en s'inspirant des travaux d' O mar Khayyam , c'est à dire par détermination des points d'intersection de courbes .

DOCUMENT 1 : La Tablette Babylonienne

Extrait des textes Mathématiques de Suse édités par E.M Bruins et M. Rütten Geuthner
Paris 1961. Problème XIX, C.



Traduction par E.M Bruins et M. Rütten :

Posons que la largeur (du rectangle) mesure un quart de moins par rapport à la longueur. 40 (est la dimension de la diagonale). Quelles sont la longueur et la largeur ?

Toi, pose 1, la longueur, pose 1 le prolongement. 15 le quart, soustrais de 1, tu trouveras 45.

Pose 1 comme longueur, pose 45 comme largeur, carre 1 la longueur, 1 tu trouves. Carre 45, la largeur : 33;45 tu trouves. Du 1 et 33;45 (fais) la somme : 1;33;45 tu trouves. Quelle est la racine carrée ? 1;15 tu trouves.

Attendu que 40, la diagonale t'a été indiquée, cherche l'inverse de 1;15 la diagonale. 48. (tu trouves). Porte 48 à 40 la diagonale qui t'a été dit, 32 tu trouves.

Porte 32 à 1 la longueur que tu as posée : 32 tu trouves, 32 (c'est) la longueur. Porte 32 à 45 la largeur que tu as posée : 24 tu trouves. 24 (c'est) la largeur.

DOCUMENT 2 : Le problème 26 du papyrus Rhind

Extrait de : The Rhind Mathematical Papyrus, édité par A. Chace, 2vol, Oberlin, Ohio, 1927-1929, planche 49.

10

Handwritten Egyptian hieroglyphs representing the problem 26 from the Rhind Mathematical Papyrus.

Handwritten Egyptian hieroglyphs representing the solution to problem 26, showing the steps of the calculation.

Traduction de M. Guillemot

1. Une quantité son $\bar{4}$ lui est ajouté. Elle devient 15.
2. Calcule à partir de 4. Tu feras leur 4, à savoir 1. Le total est 5.
3. Calcule à partir de 5 pour trouver 15.

/ 1	5	
/ 2	10	

 Il advient 3.
4. Multiplie 3 par 4.

1	3	/ 4	12
2	6	Il advient	12
5.

1	12	
$\bar{4}$	3	le total est

 15
6. La quantité est 12
 Son $\bar{4}$ est 3. Le total est 15.

DES EXEMPLES DE PROBLEMES ANCIENS

Problèmes Babyloniens :

Pb n°1: «La largeur du rectangle est égale à sa longueur diminuée de son quart , sa diagonale mesure 40 ; trouver la longueur et la largeur. »

Pb n°2 : « J'ai mangé les deux tiers de ma provende : le reste est 7 . Quelle était la quantité originaire de ma provende ? »

Pb n°3 : « J'ai pris une pierre : je n'en connais pas le poids . J'en ai retiré le sixième , puis je lui ai rendu le onzième de ce que je lui ai retiré et cinq sicles . Alors ma pierre est revenue à son état primitif . Quel est le poids originaire de ma pierre . »

Problèmes Egyptiens :

Problèmes extraits du papyrus de Rhind :

«Partage 9 pains entre 10 hommes . Combien ? »

«100 pains de pefsu 10 sont échangés contre des pains de pefsu 15 . Combien ?»

«Un nombre augmenté de son quart donne 15 . Quel est ce nombre ?»

« Un nombre augmenté de son septième donne 19 . Quel est ce nombre ?»

Problème Chinois :

9 pièces d'or pèsent autant que 11 pièces d'argent . Si dans le premier tas on remplace une pièce d'or par une pièce d'argent et inversement dans le second , le premier tas pèse 5g de moins que le second . Combien pèse une pièce d'or ? une pièce d'argent ?

Problèmes Indiens :

Pb n°1: Quel est le nombre qui , multiplié par cinq , après soustraction du tiers de ce produit et division par dix du reste puis addition d'un tiers, d'une moitié et d'un quart de la quantité d'origine donne deux de moins que soixante-dix ?

Pb n°2 : La cinquième partie de la troupe moins trois alla se réfugier dans une caverne et un singe grimpé sur une branche à l'entrée vit arriver un seul homme. Combien étaient-ils avant les combats ?

A propos de Diophante ...

Trois problèmes issus des « Livres d'Arithmétiques »

Pb n°1 : Quel nombre faut-t-il ajouter à 100 et à 20 pour que le plus grand résultat soit le triple du plus petit .

Pb n°2 : Existe-t-il un nombre qui ajouté à son tiers donne 18 ?

Pb n°3 : Trouver deux nombres dont la somme est 20 et le produit 96 .

Anecdote : Son enfance dura le sixième de sa vie , sa barbe poussa un douzième de sa vie ; après un septième de celle-ci , il se maria ; cinq ans plus tard , il eut un fils qui vécut la moitié de la vie de son père et mourut quatre ans avant lui ; à quel âge Diophante est-il mort

Du XV^{ème} au XIX^{ème} :

Francès Pello, gentilhomme niçois de la fin du XV, étudia cette situation :

« Une lance a la moitié et le tiers dans l'eau et 9 pans (longueur de main) à l'extérieur. Je demande sa longueur. »

Clavius en 1608 écrivait ce texte :

« Afin d'encourager son fils à étudier l'arithmétique, un père accepte de lui donner 8 sous à chaque problème bien résolu, mais il lui prend 5 sous pour chaque problème non résolu. Après 26 problèmes, chacun a donné autant qu'il a reçu. Combien de problèmes ont-ils été résolus ? »

Dans un ouvrage du XVI, on peut lire :

« Je dispose de 32 pièces, les unes de 5 livres, les autres de 2 livres, le tout faisant la somme de 124 livres : combien ai-je de pièces de chaque sorte ? »

Newton, dans son *Arithmetica Universalis* publié en 1707 proposait :

« Un marchand augmente son argent du tiers chaque année, moins cent livres qu'il dépense dans le même espace de temps pour les besoins de sa famille ; au bout de trois ans ses richesses sont doublées ; on demande combien il avait d'argent. »

« Un homme veut distribuer de l'argent à des pauvres, s'il avait huit deniers de plus il pourrait en donner trois à chacun or il ne leur en donne que deux et il lui en reste trois. On demande le nombre de pauvres. »

« Deux messagers A et B sont éloignés l'un de l'autre de 59 milles ; ils partent le matin pour aller à leur rencontre mutuelle. A fait 7 milles en deux heures et B en fait 8 en trois heures, mais A est parti une heure avant B. On demande combien A fera de milles avant de rencontrer B. »

Dans un manuel de la fin du siècle dernier :

« Un sac contient 154 fr. en pièces de 5 fr. et de 2 fr. ; il y a 41 pièces. Trouver le nombre de pièces de 5 fr. »

Des problèmes géométriques :

L'énigme du père Galion :

« Le père Galion a un jardin carré. Il en augmente tous les côtés de 4 mètres. La mesure de la surface augmente alors de 72 m^2 . Trouver la longueur du côté du carré initial. »

Problème du carré et du rectangle :

« Trouver un carré qui soit tel que, si on lui ajoute un rectangle de largeur égale à son côté et de longueur 10, la surface totale de la figure mesure 39. »

Problème du Papyrus de Moscou :

« Si on te donne un rectangle de 12 de surface, $\frac{3}{4}$ de la longueur pour largeur, calcule ses dimensions. »

Problème du Papyrus de Berlin :

« L'aire d'un carré de 100 est égale à celle de deux carrés plus petits. Le côté de l'un est $\frac{3}{4}$ de celui de l'autre. Fais moi connaître les côtés des deux carrés inconnus. »

Dans un ouvrage du XVI siècle ...

« Je dispose de 32 pièces , les unes de 5 livres , les autres de 2 livres , le tout formant la somme de 124 livres . Combien de pièces de chaque sorte ai-je en ma possession ? »

Méthode de fausse position

En supposant que toutes les pièces soient de 5£ , la somme totale serait : 5×32 soit 160£ , la différence entre la somme supposée et la somme réelle est $160 - 124$ soit : 36£ .

Or , chaque fois qu'une pièce de 5£ est remplacée par une pièce de 2£ , la somme diminue de 3£ : 36£ représentent 12 fois 3£ : il y a donc 12 pièces de 2£ et $32 - 12$ soit 20 pièces de 5£ .

Méthode géométrique

	32	x	
5£			2£
		160-124	3£

Le rectangle incomplet :

$$A = 5 \times 32 = 160$$

$$A' = 2 \times x, \quad x \text{ étant le nombre de pièces de } 2£$$

$$A'' = 3 \times x = 36, \quad x = 12$$

12 est donc le nombre de pièces de 2£ , d'où $32 - 12 = 20$ est le nombre de pièces de 5£ .

La lance de Pellos

« Une lance a la moitié et le tiers dans l'eau et neuf paumes à l'extérieur . Je te demande combien elle a de long . »

Méthode de fausse position

Supposons que la lance mesure 12p (il est judicieux de choisir un nombre divisible par 2 et par 3) , sa moitié mesure 6p et son tiers 4p .

$6 + 4 = 10$ et la différence entre 12 et 10 est 2 : il resterait donc alors 2p hors de l'eau , or il en reste 9 .

En utilisant la proportionnalité , on conclut que 12 étant le produit de 2 par 6 , le nombre cherché est le produit de 9 par le même facteur 6 ; la longueur de la lance est donc de 54 paumes .

Le problème de Clavius

« Un père donne 8 sous à son fils à chaque bonne réponse et lui en prend 5 à chaque mauvaise . Après 26 problèmes , chacun a donné autant qu'il a reçu . Combien de problèmes ont - ils été résolus ? »

Méthode de fausse position

Supposons que le fils ait toutes ses réponses justes , il aurait gagné : $8 \times 26 = 208$

L'écart entre un gain de 8 et une perte de 5 étant de 13 , en calculant le quotient de 208 par 13 on obtient le nombre de problèmes non résolus , c'est à dire 16 , d'où 10 le nombre de bonnes réponses .

Recensement de quelques parcours :

- * Géométrie avec l'ordinateur (utilisation de logiciels de géométrie plane ou de l'espace).
 - * Activités de dessins (fresques, frises, ...).
 - * Constructions de solides (maquettes, ...).
 - * Art et mathématiques (représentations de l'espace : perspectives,...).
 - * Lecture et écriture en mathématiques (énoncés,...).
 - * Logique et démonstration.
 - * Jeux logiques et jeux mathématiques.
 - * Astronomie et mathématiques.
 - * Météorologie.
 - * Puzzles du plan et de l'espace.
 - * Pliages.
 - * Pavages.
 - * Calcul mental, calculatrice.
 - * Formation du citoyen (Prévention Routière, statistiques, jeu de l'Euro, ...).
 - * Mathématiques et EPS (plan, chronométrage, ...).
 - * Bandes dessinées (histoire des maths, ...).
 - * L'environnement et les maths.
- Etc...

En conclusion, on peut dire que la démarche des parcours diversifiés est exigeante et complexe. Elle devrait donc être librement choisie par les établissements, les professeurs et les élèves, ce qui n'est pas très souvent le cas.

Elle met en œuvre des "détours" pédagogiques permettant de renforcer des compétences transversales et ainsi servir à atteindre les objectifs généraux du Cycle central.

Bien que les apprentissages visés soient inscrits dans les programmes, ces détours doivent trancher avec le cours.

Ils peuvent promouvoir l'autonomie, développer la sociabilité, le sens esthétique, le plaisir de chercher, de communiquer, de produire quelque chose. Cela ne va pas sans un minimum de prise de risque.

Ce fascicule se veut être une aide modeste auprès de nos collègues pour la mise en place de parcours diversifiés (5^{ème}) ou travaux croisés (4^{ème}).

Si les savoirs développés et les apprentissages réalisés lors de ces activités peuvent faire l'objet de transferts en cours, certains des objectifs fixés au départ seront en passe d'être atteints.

Bibliographie

- Bibliothèque du travail n°600 : Cadrons solaires.
- Cadrons solaires de JF Massin, Editions C Massin.
- Le temps et l'espace : Collection Passion des Sciences chez Gallimard.
- Pliages et Mathématiques : ACL Editions.
- Dossier du PLOT spécial pliages de M Darche.
- Enseigner la sécurité routière au collège 95/96.
- Le Cube : Ludimaths n°4.
- La fabuleuse Histoire des Nombres d'Eliane Cousquer, Collection Passion des Sciences.
- Histoire d'Algorithmes de JL Chabert, Collection Passion des Sciences.
- Science et Vie Junior : Dossier spécial Equations 99.
- Maths lycée manuel + d'André Deledicq , Editions de la Cité.
- Le Théorème du perroquet de Denis Guedj . Seuil.

I. Auteurs

Groupe collège IREM Limoges

II. Titre

DES PISTES POUR PARCOURS DIVERSIFIÉS ET TRAVAUX CROISÉS

III. Caractéristiques

Édité par l'IREM de Limoges

Format : A4, 48 p.

ISBN : 2-910165-11-6

IV. Type de documents et support

Brochure

Papier

V. Matériel utilisé dans l'ouvrage

Logiciel de dessin géométrique : CABRI

VI. Public visé

Professeurs de collège - Cycle central

VII. Contenus

RÉSUMÉ : Le but de cette publication est :

- de fournir une aide à la mise en place de parcours
- de présenter des exemples d'activités expérimentées ou projetées au Cycle Central.

MCL : Parcours diversifiés - Histoire des mathématiques - Nombres - géométrie
- pliages - puzzles - logiciel de dessin géométrique.