LECTURE DIDACTIQUE
DES NOUVEAUX PROGRAMMES DE MATH

INTRODUCTION

Ce stage s'est déroulé durant deux journées consécutives. Il a été réalisé à trois reprises : au Collège Olympique à Grenoble, au Collège Charles de Gaule de Guilherand Granges (Valence), et au Collège Garibaldi à Aix-les-Bains.

Nous avons choisi de rendre compte dans ce fascicule du travail coopératif entre les stagiaires et les animateurs de l'IREM en respectant l'ordre et la logique de son déroulement effectif.

Ce fascicule s'adresse donc prioritairement aux stagiaires qui sauront compléter ce document, par moment allusif ou trop succinct. Nous les remercions de leur participation active et bienveillante.

L'objectif de la formation, tel qu'il avait été formulé dans l'appel d'offre, était de prendre connaissance des contenus des nouveaux programmes de Troisième, au travers de l'analyse de l'évolution des contenus durant la période 1977-1999 (modifications, disparitions, apparitions) et en cherchant à donner des raisons à cette évolution. Rappelons que ces nouveaux programmes seront effectifs durant l'année scolaire 1999-2000.

Les méthodes de travail proposées durant ce stage et le déroulement de la formation ont fait alterner :

- le travail de groupe, favorisant ainsi les échanges privés entre les stagiaires sur leurs pratiques et leurs points de vue sur les nouveautés du programmes,
- collectivement, les synthèses et les débats qui en résultent,
- les apports d'informations sous forme d'exposés des animateurs IREM.

Les deux journées de la formation ont été conçue selon la logique suivante :

• la première journée porte sur une analyse de la réorganisation (ou non) de *savoirs constamment présents* dans les programmes depuis 1977, au travers de l'analyse des contenus des programmes du collège des trois périodes : 1977-78, 1992-1995, 1996-1999,

• la deuxième journée est consacrée aux *savoirs nouveaux* qui surgissent dans les nouveaux programmes de Troisième. Ont-ils toujours étaient absents ?

Si non (travail de la matinée) : qu'enseignait-on ? quel travail demandait-on aux élèves ? Pourquoi les a-t-on introduit ?

Si oui (travail de l'après midi) : Pourquoi les a-t-on introduit ? Que peut-on faire ?

PREMIERE JOURNEE

Rappelons que la première journée porte sur une analyse de la réorganisation (ou non) de *savoirs constamment présents* dans les programmes depuis 1977, au travers de l'analyse des contenus des programmes du collège des trois périodes : 1977-78, 1992-1995, 1996-1999. Cette journée comporte deux moments :

- Un travail de groupe sur certaines parties du programme
- Des exposés de synthèse du travail des groupes suivi d'un exposé d'A. Bessot sur « Analyse de l'évolution des programmes à propos de Thalès »

1. Travail en groupe

Chaque participant du stage prend en charge certaines rubriques du programme en se répartissant dans les groupes. Quatre groupes sont constitués comme suit :

Groupe 1

A. Travaux géométriques
1- Géométrie dans l'espace. Sphère
2- Triangle rectangle : relations trigonométriques, distance de deux points dans un repère orthonormé du plan

Groupe 2

A. Travaux géométriques [...]
4- Vecteurs et translations
5- Rotations. Angles, polygones réguliers

Groupe 3

B - Travaux numériques
1 – Écritures littérales : identités remarquables
2 - Calculs élémentaires sur les radicaux (racines carrées)
3 - Équations et inéquations du premier degré

Groupe 4

C - Organisation et gestion des données - Fonctions
1 - Fonction linéaire et fonction affine
2 - Proportionnalité et traitements usuels sur les grandeurs
3 - Statistique

Consigne du travail de groupe (*document donné à chaque participant*)

Comparer le contenu étudié du nouveau programme avec celui correspondant des programmes de Troisième des périodes 1978 et 1989 (période actuelle), en tenant compte de la colonne commentaires, selon les points suivants :

- Préciser les modifications, disparitions, apparitions : donner votre point de vue sur les raisons des changements, sur l'intérêt ou non ...
- Les contenus à enseigner dans la rubrique étudiée sont-ils en relation avec d'autres contenus d'autres rubriques (tenir compte de la colonne commentaires) ? si oui lesquels ? Et dans les deux autres programmes ?
- Prendre un manuel relevant du programme 1989 et chercher dans ce manuel les exercices associés au(x) chapitre(s) correspondant aux contenus étudiés.

Proposeriez-vous dans le cadre des nouveaux programmes certains de ces exercices ? Lesquels ? Sinon, que changeriez-vous ?

Le travail des groupes sera finalisé par la production de transparents (photocopiable) pour un exposé aux autres groupes l'après midi et pour le document du stage.

Pour conduire ce travail, chaque stagiaire dispose du texte des nouveaux programmes, des programmes de troisième actuel (dernière année de validité) et de ceux des années 1978. On trouvera les textes des programmes des années 1978 ainsi que les tableaux synoptiques des programmes suivants dans l'annexe 1 en fin du paragraphe 2. (Synthèse des travaux des groupes). S'y reporter pour suivre les synthèses du travail de chacun de ces quatre groupes.

Un temps important a été consacré à ce travail des groupes puisque c'est

• un moment de lecture personnel des programmes,

• l'occasion d'échanges entre les stagiaires,

• mais aussi un travail inhabituel par l'obligation de prendre de la distance vis-à-vis des contenus présents dans les nouveaux programmes en les comparant avec ceux des autres programmes, suivi de l'écriture d'une synthèse pour exposer le travail aux autres stagiaires.

2. Synthèses des travaux des groupes

La première partie de l'après midi de cette première journée est consacrée aux exposés de chacun des quatre groupes suivi à chaque fois d'un débat.

Nous donnons ci-après les productions bruts des stagiaires, c'est à dire la reproduction de leurs transparents.

Groupes 1

A. Travaux géométriques

1- Géométrie dans l'espace. Sphère

2- Triangle rectangle : relations trigonométriques, distance de deux points dans un repère orthonormée du plan

Groupes 2

A. Travaux géométriques [...]

4- Vecteurs et translations

5- Rotations. Angles, polygones réguliers

Groupes 3

B - Travaux numériques

1 - Écritures littérales : identités remarquables

2 - Calculs élémentaires sur les radicaux (racines carrées)

3 - Équations et inéquations du premier degré

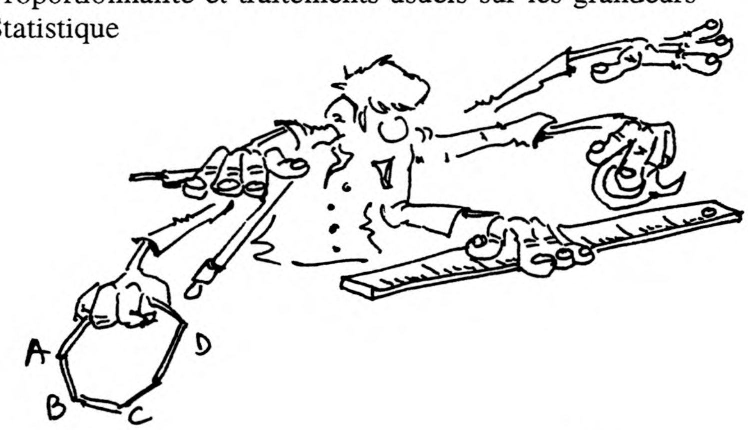
Groupes 4

C - Organisation et gestion des données - Fonctions

1 - Fonctions linéaires et fonction affine

2 - Proportionnalité et traitements usuels sur les grandeurs

3 - Statistique



Groupes 1

la notion	ce qui est conservé	ce qui change	questions diverses.
la sphère	l'esprit de l'étude en 4°	passage de la 4° vers la 3°. grands cercles - points diamétralement opposé. plan tangent à la sphère.	- problèmes des représentations. - définition d'un grand cercle d'une sphère. - Remarque : passage de l'étude de la sphère en 3° préférable (semblait parachutée en 4°).
pyramides. cones.		étude de l'objet en 4°.	- étude des prismes non reprise en 3°.
prismes			
sections planes...	×	généralisation à tous les solides (sauf prismes)	- Synthèse de toutes les années collège qui permet le réinvestissement de Pythagore, Thalès, Trigo, équations, proportionnalité etc...
agrandissement réduction.	×	traité dans la partie proportionnalité.	- ce qui reste au stade de l'observation en 3° (géométrie dans l'espace) : quel est le prolongement au lycée ?
trigonométrie.	tout est conservé -	- le quart de cercle trigonométrique - - le radian a disparu.	- Nécessité des formules $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ et $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$?
distance :	tout	rien	

Questions soulevées :

- Représentation d'objets : perspective cavalière
  sections
  grand cercle d'une sphère

- Géométrie dans l'espace : aucune justification des propriétés de parallélisme, orthogonalité, etc...

Remarques :

Programme de 78 : peu de commentaires.
On est bien content d'avoir des commentaires actuellement.

Comparaison d'exercices :

- Les exercices utilisés précédemment le sont encore dans l'ensemble.
- On souhaiterait des exercices de dessin.

Géométrie dans l'Espace

<u>Programme 77</u> Pas d'étude systématique. On observe des objets de l'espace au niveau 5ème ; rien en 4ème. Au niveau 3ème on utilise des solides pour mettre en pratique des notions vues ailleurs. (Trigo ; Pythagore)

<u>Programme 89</u> Etude systématique de la pyramide (pyramide régulière et pyramide dont la hauteur est une arête latérale) et du cône de révolution. Section de ces deux solides par un plan parallèle à la base

Agrandissement et réduction

<u>Programme 99</u> Sphère. Problèmes de section plane de solides (Pyramides et cônes)

Aire de la sphère. Volume de la boule.

→ Intérêt de ces changements.

<u>Pour</u> On observe et on calcule un peu en 6ème - 5ème - 4ème et on fait une synthèse en 3ème

<u>Contre</u> Ne voit pas l'intérêt de ce changement entre 4ème et 3ème

→ Raison de ces changements

On passe moins de temps sur la sphère que sur pyramides et cônes ; donc on allège le programme de 3ème

→ Utilisation d'autres rubriques dans "Géométrie dans l'espace" (Orthogonalité ; parallélisme ; Pythagore ; Trigo)

→ En conclusion : même programme, mais dans un ordre différent (entre 89 et 99)

→ Exercices TransMath Nathan Sphère 13 p 117
16 p 117 ??

Aucun exercice réutilisable sur sections de pyramides et cônes

TRIANGLE RECTANGLE

<u>Programme 77</u>

<u>3e</u> : Pythagore - Réciproque
Sinus - Cosinus - Tangente
Utilisation de la table trigonométrique
Relations trigonométriques dans un triangle rectangle

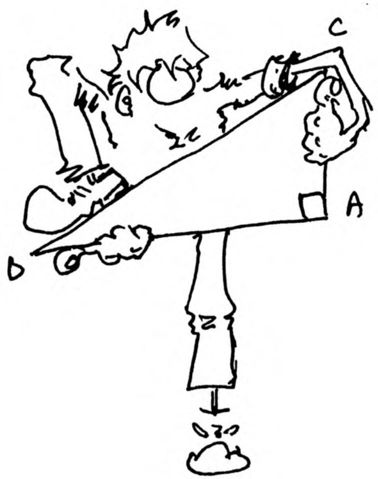
<u>Programme 89</u>

<u>4e</u> : Cosinus
Triangle rectangle et cercle circonscrit et th. de la médiane
Pythagore et réciproque

<u>3e</u> : Sinus - Tangente

<u>Programme 99</u>

Pas de changements si ce n'est qu'on peut introduire la trigonométrie avec le quart de cercle trigonométrique
Le théorème de la médiane a disparu.



1 - Géométrie dans l'espace :

* Sphère : * apparition en 3^e (déplacement de 5^e en 4^e puis de 4^e en 3^e).
  * absence de patron → logique en 3^e.
  * aire et volume glissent dans gestion de données, ainsi que agrandissement, réduction.
* Problèmes de sections planes de solides :
  * appliqués à tous les volumes du collège (nouveau pour pavés droits et cylindres)

- - - - - - - - - - - - - - - - - - -

⊛ En relation avec : Thalès, Pythagore, trigo et $\sqrt{\ }$.

⊛ Exercices : · tous ceux de 3^e actuels peuvent convenir
· de quel type pour section pavé droit ?

2. Triangle rectangle :

* Relations trigonométriques : identiques au progr. actuel sauf dans les commentaires où il y a apparition possible du quart de cercle trigonométrique.
* Distance de 2 points ds repère orthonormé : apparaît ici car il n'y a plus les équations de droites et car lié au th. de Pythagore.

- - - - - - - - - - - - - - - - - - -

⊛ En relation avec : proportionnalité, équations, Pythagore, $\sqrt{\ }$, calculs avec les relatifs, géométrie dans l'espace.

⊛ Exercices : tous ceux actuels de 3^e peuvent convenir (sauf équations de droites)

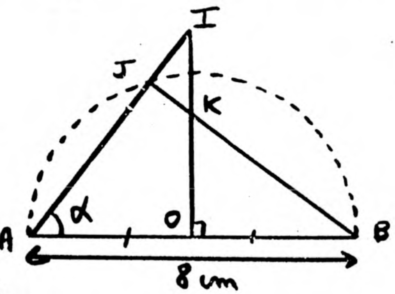
Propositions d'exercices

Hachette

n°17 p 187 : on coupe une boule de 12,6 cm de diamètre par un plan situé à 5,6 cm du centre, et une autre boule de 6,6 cm de diamètre par un plan situé à 1,6 cm du centre.
Comparer les aires des disques obtenus.

n°19 p 187 : Sur un globe terrestre, le 40^e parallèle a pour longueur 40 cm. Quelle est l'échelle de ce globe ? Rappel : le rayon de la Terre est d'environ 6 370 km.

n°43 p 211 :

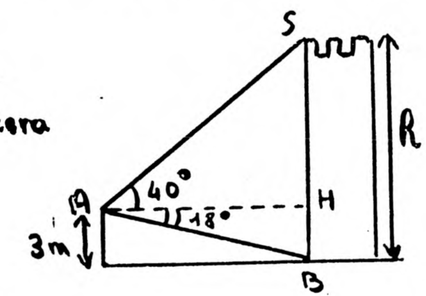


1°) Exprimer en fonction de α :
AI, AJ, BJ, BK, JK, OI et OK.
2°) Trouver α pour que AJ = 3 cm.
3°) Soit L le point d'intersection des droites (AK) et (BI).
a) Prouver que L est sur le demi-cercle.
b) Indiquer la position de L si $\alpha = 45°$, puis calculer AL.

n°44 p 212

La hauteur de la tour

Calculer h (on commencera par calculer AH)



Vecteurs et translations

	4e	3e
78	– Translation, composition des translations. Vecteurs ; addition des vecteurs. (lié à classe d'équivalence)	– Multiplication d'un vecteur par un réel – coordonnées d'un vecteur – orthogonalité de 2 vecteurs rapportés à un repère orthonormé
88-89	– Transformations de figures par translation – (par rotation – Polygones réguliers) – Introduction "naïve" des vecteurs (direction sens longueur) $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$ – Translation reliée au parallélogramme	– Composition des translations (figures) – coordonnées d'un vecteur. – Somme vectorielle
98-99	– Transformations de figures par translation	– Vecteurs – somme de 2 vecteurs – vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \ldots$ – vecteur nul $\vec{0}$ vecteurs opposés. – coordonnées de vecteur

Groupes 2

Point de vue : Allègement de 78 à 98 de la notion de vecteur.
L'aspect expérimental prend le pas sur l'aspect théorique.

En 4e : Besoin d'indiquer le sens sur les constructions
Manque de l'outil vecteur pour la rédaction.
→ Lourdeur des démonstrations

En 3e : Commentaire : utilisation du terme "couple de points homologues" pour introduire la notion "vecteur"
Retour sur 78 ?
– Coordonnées d'un vecteur n'est rattachée à aucune autre notion (disparition équations de droites)

Lien avec les autres parties du programme
– parallélogramme
– lien avec les sciences physiques. (?)
– introduction au programme de seconde ?

Comparaison de différents manuels de 4e
– "Triangle" dessine le vecteur sans le nommer
– "5 sur 5" dessine le vecteur en pointillé
– Transmath ne dessine pas le vecteur
– "Décimale" dessine le vecteur en dessous.

Il semble que tous les exercices de l'ancien programme de 4e et ceux de 3e peuvent être utilisés en 3e nouveau programme – **En 4e** l'accent est mis sur des exos de construction et sur parallélogramme

Programmes 78	Programmes 89	Programmes 99
* Produit d'un vecteur par un réel. * Notation $\vec{u}$ * Classes d'équivalences * Orthogonalité (produit scalaire) * vecteur directeur.	* Somme et introduction des vecteurs faits auparavant en 4e (en relation avec les sciences physiques).	* $2\vec{AB}$ (Composition de 2 symétries centrales) * $\vec{u}$ réapparaît pour des raisons de commodité * Points homologues par une même translation $\vec{u} = \vec{AA'} = \vec{BB'}$ Couples $(A, A'), (B, B')$
	* Apparition de la rotation en 4e.	* Disparition de la rotation en 4e et apparition en 3e * Etude plus approfondie des polygones réguliers qui disparaissent en 4e.
	* Angle inscrit, angle au centre	* angle inscrit, angle au centre.

Ex: Soit les points $A(0;4)$ $B(4;5)$ $E(2;2)$.

1) Construire
- le symétrique F de A par rapport à E.
- le ——— D de E ——— F.
- le point C tel que $\vec{AB} = \vec{CD}$
- le milieu K de [BD].

2) Calculer les coordonnées de F, C, D, K.

3) Tracer le point G tel que ABCG soit un parallélogramme.

4) Calculer les coordonnées de G.

5) Tracer $\vec{AH} = \vec{AB} + \vec{AD}$

6) Calculer les coordonnées de H.

(1) Vecteurs.

78. × d'un vecteur par un réel. disparition. et de l'écriture du $\vec{u}$ et reapp en 99.
faire passer ces notions lourdes en 2e ; $2\vec{AB} = \vec{AB} + \vec{AD}$ → privant d'une écriture commode.
cela reap. en 99. au cours de l'étude de la conf de 2 sym centrale (droite des milieux)
(donc la facilité dif de la notion de vecteurs directeurs)
– de même l'introduction à partir de classes d'équivalence qui savent un programme de 99 (p 13.) notion de couple.

Transformations.

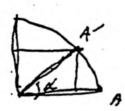
89. – Apparition de la rotation en 4e alors qu'avant elle n'apparaissait pas.
mais disparition du programme de 4e en 99
– en 99. apparition plus marquée de l'étude de polygones réguliers
qui disparaissent de 4e.

Charge de programme.

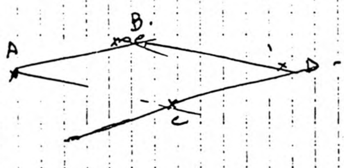
2) × Liaisons avec les autres parties du programme.
– Vecteurs, et coordonnées, géométrie analytique. Pour les vecteurs.
– Polygones réguliers et Pyramides. section par un plan parallèle à la base :
Rotation : (liaison avec tangente calcul trigo) ??
– dans les 2 autres programmes.
en 78 : Vecteurs liés avec coordonnées équation de droite – orthogonalité – Produit scalaire.
– en 83 : idem.

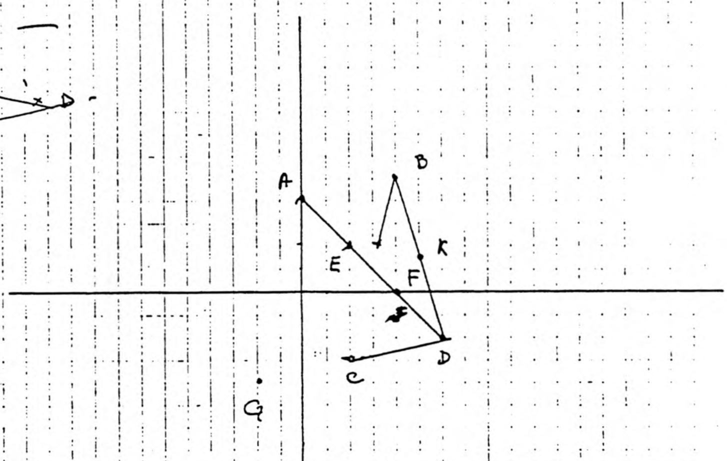
– Avec le livre.

– Pythagore. hors la loi. on pourrait maintenant donner les exercices proposés
– Rotation. elles étaient en 4e. réapparaître en 89. avec des quadrillages.
en 99. on va plus loin sur les symétries et les rotations
rotations pavages figures invariantes par rotation.



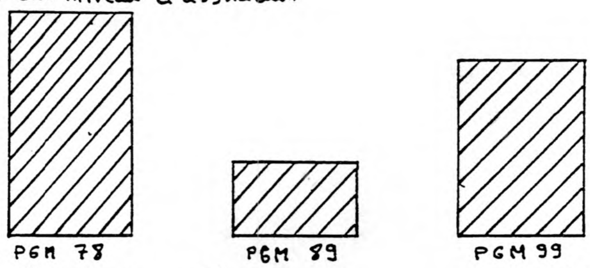
× Exercices.





4. TRANSLATIONS ET VECTEURS

• Évolution du niveau d'abstraction



PGM 78

- en 4^e : vecteurs addition
- en 3^e : - produit par un réel
  - orthogonalité
  - composition de translations

PGM 89

- "bricolage"
  - addition est seulement une initiation
  - ne pas donner une place excessive au calcul de coordonnées de vecteurs

PGM 99

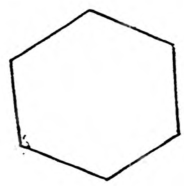
- somme de 2 vecteurs à établir
- notation $2\vec{AB}$ autorisée
- notation vecteur $\vec{u}$ (non lié à des points)
- composée de 2 transformations explicitement nommée
  - 2 translations
  - 2 sym centrales → déterminer le vecteur de la translation

5. ROTATIONS, ANGLES, POLYGONES RÉGULIERS

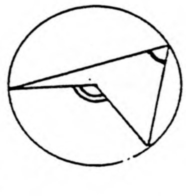
* Le nouveau programme insiste sur
  - les propriétés des rotations, et application pour des problèmes de construction
  - les polygones réguliers et les problèmes de pavages.

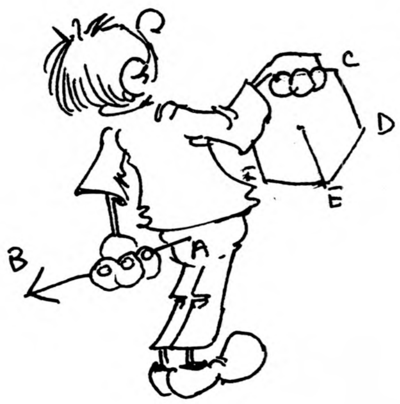
↓

recherche des transformations laissant invariant un polygone régulier



* Le théorème angle inscrit / angle au centre devient exigible. (brevet ?)





Ecritures littérales - Identités remarquables

programmes

Groupes 3

78	89	98
vus en 4ème • produit • leur utilisation	en 3ème	• acquis dans le sens développement • en cours d'acquisition pour la factorisation en plus • utilisation du calcul littéral dans la mise en équation et la résolution de problèmes

lien

$(x+2)(x-3) - (x+2)$?

Calculs élémentaires sur les radicaux

78	89	98
vus en 3ème bijection $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ $x \to \sqrt{x}$ Usage des tables		mêmes capacités exigibles en plus faire le lien avec les identités remarquables en moins $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$ qu'est que ça signifie ?

—

Equations - Inéquations

78	89	98
vues en 4ème en 3ème systèmes d'équations . d'inéquations résolution de problèmes signe du produit signe du quotient	vues en 4ème équations. Inéquations à 1 inconnue problèmes en 3ème • résolution de systèmes d'équations sur les inéquations à deux inconnues rien d'exigible signe du produit	rien n'a changé

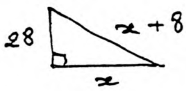
• équations produits → lien entre résolutions de systèmes et fonctions affines

① Résoudre

$\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} = \sqrt{2}$ (en activités dirigées)
difficile de trouver une situation concrète amenant à cette équation.

exercice trouvé dans un livre de 89 à ne pas donner en 99

② Triangle rectangle



Trouver x.

exercice trouvé dans un livre de 89 à proposer en 99
(fin du 1° trimestre)

Présentation ~~des~~ programmes

89 précision sur les notations hors programme (⊂, ∪, ∩ "o")
Usage de la calculatrice (+ usage de l'ordinateur éventuel)

99 Plus détaillée et précise
- Citoyenneté : formation à la citoyenneté (interdisciplinarité)
- Maîtrise de la langue (écrite et orale) symboles permis (sin, tan)
- Synthèse des nbres avec éclairage historique)

① Ecritures littérales.

78	89	99
Produits remarquables traités en 4e	Peu de changement - en 99 on insiste sur la difficulté à reconnaître un produit remarquable. - Factorisation poursuivie au lycée à n'utiliser que dans des cas très simples. - Puissances : notamment puissances de 10.	

* Relations avec équations et résolution de problèmes.

Exercices : Hors programme :
- Développement d'une somme de 3 termes au carré
- Factorisation avec 2 lettres.
- Factorisations trop compliquées.

② Racines carrées.

78	89	99
Application bijective + tables.	en 99 on ajoute l'utilisation du développement et des identités remarquables (lien entre les différentes rubriques)	

EXERCICES

① factoriser : $g(x) = (2x+1)(3x+4) - (x+7)(2x+1)$

② factoriser $f(x) = (2x-1)(4x-5) + 8x - 4$

③ factoriser $(2x-1)^2 - (8x-3)^2$

④ Donner l'écriture scientifique
$$17 \times 10^{14} + 405 \times 10^{17}$$

⑤ Ecrire sous la forme $a\sqrt{b}$ les nombres :
$$\sqrt{5^4 \times 7} \quad ; \quad \sqrt{128}$$
(avec ou sans calculatrice ?)
$$\sqrt{\frac{0{,}49}{0{,}01}} \qquad \sqrt{\frac{4{,}9}{0{,}1}}$$

⑥ Résolution par combinaison :
$$\begin{cases} 4x - 7y = 3 \\ 3x - 7y = 2 \end{cases}$$

⑦ Résolution par substitution :
$$\begin{cases} 2x - y = 2 \\ 9x + 8y = 30 \end{cases}$$

⑧ méthode au choix : $\begin{cases} x - y\sqrt{5} + 4 = 0 \\ x\sqrt{5} + 2y - 3\sqrt{5} = 0 \end{cases}$

Racines carrées :

Dans le programme de 89, il était mentionné des calculs à ne pas faire :

$$\sqrt{3+2\sqrt{2}} \quad ; \quad \frac{1}{\sqrt{2}+1}$$

EXERCICES : $\sqrt{20} + 4\sqrt{45} - 3\sqrt{5}$,

suppression de la racine carrée au dénominateur ? $\dfrac{3}{2\sqrt{5}}$?

③ Equations et inéquations :

78	89	99.
contenu important donné en 3 lignes. Pas de commentaires.	en 99, pas de système de 2 inéquations. On précise : représenter les solutions de l'inéquation sur une droite graduée.	Résoudre algébriquement : substitution ? combinaison ?

Relation avec d'autres rubriques : problèmes sur différentes parties du programme. (déjà dans le programme de 89)

$\boxed{\text{Prog 89}}$

Modifications

définition de $\sqrt{\ }$ sous forme algébrique
pas de variable sous $\sqrt{\ }$
identités translatées en 3e.

Disparitions

notion de bijection de $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$
usage des tables
$\mathbb{R}$
résolution graphique des systèmes d'inéquations

Apparitions

$x^2 = a$
touche $\boxed{\sqrt{\ }}$
équation produit ?

$\boxed{\text{Prog 99}}$

translation 4e → 3e

factorisation
inéquations du 1er degré à 1 inconnue
ordre et multiplication pour $c < 0$.

modification

approfondissement des tests de substitution de valeurs numériques à des lettres

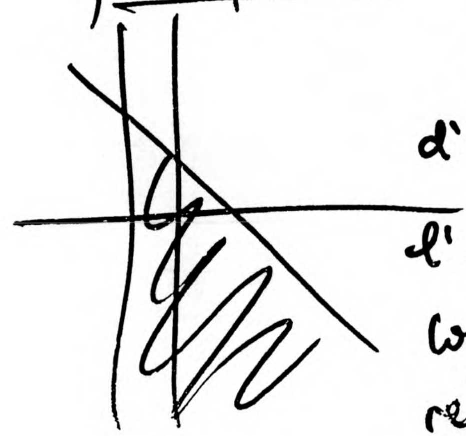
Rapport induit avec les autres sujets.

Exercices du livre plus adaptés

1) **Factoriser**

$$\left.(x+3)^2 - 4\left(x+\frac{1}{3}\right)^2\right\} ?$$

2) **Inéquation**



Donner un syst. d'inéquations dont l'ensemble des sol. correspond à la région hachurée

Les programmes.
Fonction linéaire, fonction affine, proportionnalité.

	1978	1988	1989
4°	Application Bijection Composition (dès la 5° !...)	Pas de définition théorique	
		grandeurs quotient grandeurs produit	grandeurs quotient et leurs changements d'unité (vitesse)
		fréquences. % ⟷	id
		eff. cumulés, fréq. cumulées... ⟶	id
		indices ⟶	notion seulement (exemples..)
		Proportionnalité. applications linéaires.	Proportionnalité.
			Tableurs-grapheurs.
3°	Étude de l'application bijective de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ $x \longmapsto x^2$		
	Représentation graphique d'applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.		
	Applications linéaires et affines ; leurs représentations graphiques.	(applications linéaires en 4°)	on parle de fonction
		gestion de données (~~moyennes, médiane~~) on utilise encore %	grandeurs composées ch^t d'unité.
		Réduction, agrandissement sur les aires et volumes (en géométrie) ⟷	id. (en gestion de données)

Groupes 4

GRANDEURS - MESURES

prog 78	prog 89	prog 99
6° Chang^{nt} d'unités lg, aire, perimetre 5° masse, masse vol. Durée, tp, vitesse débit	6° 5° lg aire perimetre volume durée (en 5°)	
	4° 3° en plus : - grandeur quotient - grandeur produit en 3^e : Effet d'agrandissem^t et de Réduction	4^e Grandeurs-quotient courantes 3° grandeurs composées

REPRESENTATION

prog 78	prog 89	prog 99
6°. Quadrillage - repérage	6° 5° lecture, interprétation réalisation de tableaux et graphiques	6° exc → lire établir des tabl. des graphiques
		5°
		4° Relation de proportionnalité : repr. graphique
		3e. Repr. graph. d'une fonction linéaire ou affine
3e Repr. graphique d'application linéaire et affine		

FONCTIONS NUMERIQUES

prog 78	prog 89		prog 99	
6° suites finies propor. calcul % chang d'unités	6° $\times \frac{a}{b}$ aplication %	de la 6° à la 3e Changement d'unités : lg, aire (6°) volume echelle (Chgt échelle) 4ème propor.	6° aplication % exc et contre exc de proportion.	Changement d'unités Long. Aire
5° RELATIONS : application bijection	5° vitesse moy. Calcul % fréquence, taux		5e mouvement uniforme calcul % fréquence coéf de prop.	temps - Volume
4° appl. linéaire bijection récip	4e proportionnalité (application) % indice		4e vitesse moy. Calcul avec % aplication de prop.	pour les grand. quotient, cour.
3° Algèbre appl. linéaire . affine	3e aplic. affine		3e Réduct. Agrand. sur les aires et volumes Fonction linéaire et affine	pour les grand. composées

Un problème - 38 p 266 Transmath 3°.

x °Celsius. $f(x)$ °Fahrenheit.

$f(x) = ax + b$.

1) Trouver les valeurs de a et b sachant que

pour l'eau 0°C un Anglais lit 32°F
l'eau à 100°C " " lit 212°F

Ecrire $f(x)$ en fonction de x. (système)

2) Graphiquement
* représenter la fonction f (équation droite)
→ * interprétation graphique de a et b.
* Lecture graphique.

3) Applications.
* film "Fahrenheit 451" 451°F
Trouver x.
* température qui s'exprime par le même nombre en °F et °C.

→ 4) Proportionnalité des accroissements

x	..	..
$f(x)$	..	...

calculer $\dfrac{f(x') - f(x)}{x' - x}$
$= a$

Organisation et gestion de données (modifications)
Partie apparue en 89.

1. Fonctions linéaires et fonctions affines
79 : appl. linéaires et affines de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (partie algèbre)
89 : appl. linéaires en 4e
99 : le mot "fonction", notation $x \mapsto ax$,
démons de l'alignement par Thalès + translation
- disparition des équations de droites

2. Proportionnalité et traitements sur les grandeurs
Rien en 79, réduit en 89, beaucoup + développé en 99
Grandeurs-quotients en 4e et grandeurs-produits en 3e
Aires et volumes, réductions : passés de géom. en gestion.
Aire et volume de la boule : passé de 4e en 3e

3. Résolution d'éq par essai ... : disparu

Organisation et gestion de données (commentaires)

- Application : sous-entendait l'étude des relations
Fonction : plus parlant pour les élèves habitués à "en fonction de"

- Volonté de rendre cette partie plus concrète
Plus de liaisons avec les autres parties et les autres matières (physique, chimie, instruction civique)
Est-ce au détriment de l'abstraction?

ANNEXES 1

• **Programmes de Mathématiques de 1978**

• **Tableau synoptique des programmes de Mathématiques de 1989**

• **Tableau synoptique des nouveaux programmes de Mathématiques**

Classe de Sixième

(Arrêté du 17 mars 1977)

Le langage des ensembles et les symboles ∈, ⊂, ∩, ∪, ∅, seront utilisés dans l'étude des différentes parties du programme ; ils n'ont pas à faire l'objet d'un apprentissage pour eux-mêmes.

I. — NOMBRES DECIMAUX

Contrôle de l'acquisition du sens des opérations sur les nombres décimaux : addition, soustraction, multiplication, division (exacte ou approchée) ; techniques d'exécution de ces opérations, vérifications.

Pratique des symboles $<$, $\leqslant$, $>$, $\geqslant$.

Ordre de grandeur d'un résultat ; calcul mental, exercices simples sur des suites d'additions et de multiplications ; usage de parenthèses.

Suites finies proportionnelles (1) ; calculs de pourcentages, exercices de changements d'unité.

II. — NOMBRES DECIMAUX RELATIFS

Exemples introduisant les nombres relatifs ; somme de deux ou plusieurs nombres ; différence de deux nombres. Exercice concernant le repérage d'un point sur une droite orientée, munie d'une origine et régulièrement graduée.

III. — OBSERVATIONS D'OBJETS GEOMETRIQUES ET PHYSIQUES

Premières observations sur des solides, des surfaces, des lignes. Segment de droite, morceau de surface plane.

(1) Deux suites sont proportionnelles, si on passe de l'une à l'autre par une multiplication ou par une division, ou par une succession de telles opérations.

Vocabulaire de la géométrie plane : droite, plan, demi-plan, demi-droite ; cercle (longueur), arc de cercle, secteur angulaire. Unités usuelles de longueur, d'aire, d'angle. Droites parallèles, perpendiculaires (ou orthogonales) ; tangente à un cercle en l'un de ses points.

Observation et tracé de figures usuelles, par exemple : triangle, trapèze, parallélogramme, rectangle, losange, carré.

Quadrillage, repérage d'un point dans un plan quadrillé.

Aires du rectangle, du triangle, du trapèze, du disque, du secteur circulaire.

CLASSE DE CINQUIÈME

(Arrêté du 17 mars 1977)

I. — RELATIONS

On se bornera à étudier :

1° Application d'un ensemble dans un ensemble ; bijection.

2° Exemples de partition d'un ensemble et de relation d'équivalence.

II. — ARITHMETIQUE

Ensemble des multiples d'un entier naturel ; division euclidienne d'un entier naturel par un entier naturel.

Diviseurs d'un entier naturel ; nombres premiers.

Sur des exemples : pratique de la décomposition d'un entier naturel en un produit de nombres premiers et exercices sur les multiples communs et sur les diviseurs communs à deux ou plusieurs entiers naturels.

III. — NOMBRES RELATIFS

1° Ensemble Z des entiers relatifs : définition, addition, ordre, valeur absolue, multiplication (les propriétés des opérations et de l'ordre seront présentées progressivement et sans démonstration).

2° Nombres décimaux relatifs, pratique opératoire :

Somme, différence, ordre, valeur absolue.

Produit d'un nombre relatif par un entier naturel : produit par un entier naturel d'une somme, d'une différence.

Produit de deux nombres relatifs ; puissances entières d'exposant positif (et nul). Produit d'une somme par un nombre relatif ; mise en facteur.

IV. — OBSERVATION D'OBJETS GEOMETRIQUES ET PHYSIQUES

1° Révision du vocabulaire relatif aux figures planes.

2° Exercice de dessin dans le plan ; tracés usuels faits avec les instruments. Reproduction d'un dessin fait sur fond quadrillé ; agrandissement et réduction d'un dessin.

3° Observation d'objets physiques de l'espace. Plans horizontaux ; droites verticales ; droites horizontales, plans verticaux. Droites parallèles de l'espace, plans parallèles ; droite et plan perpendiculaires.

Observation d'objets tels que cubes, prismes droits, cylindres droits, cylindres de révolution, pyramides, cônes de révolution.

Calcul de volumes.

Observations d'une sphère ; plan tangent en un point ; aire de la sphère ; volume de la boule.

Observation de surfaces coniques et cylindriques ; plan tangent en un point.

4° (En liaison avec la physique.) Masse ; masse volumique. Durées ; unités de temps et de vitesse. Débits.

CLASSE DE QUATRIÈME

(Arrêté du 16 novembre 1978)

Les notions et les propriétés que les élèves doivent connaître et savoir utiliser sont énumérées ci-dessous ; leur groupement en alinéas ne vise qu'à la commodité de la présentation.

En algèbre comme en géométrie certaines propriétés, au choix du professeur, seront admises ; elles permettront d'obtenir les autres par voie déductive.

Les notions suivantes :

Applications ; composition des applications ;

Bijection ; bijection réciproque ;

Partition d'un ensemble et relation d'équivalence,

n'ont pas à faire l'objet d'un apprentissage pour elles-mêmes : on les dégagera progressivement à partir des exemples qui se présenteront dans l'étude du programme.

I. — CALCUL NUMERIQUE

Exemples introduisant la notion de fraction.

Révision des opérations sur les décimaux.

Pratique des opérations sur les rationnels, sur les réels.

Relation d'ordre ; valeur absolue ; exemples de calculs approchés.

Produits $(a+b)^2$, $(a-b)^2$, $(a+b)(a-b)$: leur utilisation.

Exemples numériques d'équations et d'inéquations du premier degré à une inconnue.

II. — GEOMETRIE PLANE

L'étude de la géométrie plane est nécessairement alimentée par l'observation et l'expérimentation, lesquelles requièrent l'usage des instruments de dessin : règle graduée, compas, équerre : l'effort de réflexion qu'elles suggèrent conduit au raisonnement déductif.

Le programme est rédigé en termes d'acquisition, non de progression. Il revient au professeur de suivre une ligne cohérente, mais aucun choix d'hypothèses ne lui est imposé. Il a notamment toute latitude pour faire intervenir, dès que cela lui paraît opportun, les notions de distance, de cercle, de parallélisme, d'orthogonalité, qui ont été introduites jusque-là de façon intuitive.

Droites du plan ; demi-droites.

Abscisse d'un point d'une droite dans un repère de cette droite ; notation $\overline{MN}$; relation de Chasles.

Médiatrice : sa construction. Losange ; triangle isocèle.

Symétrie orthogonale par rapport à une droite. Rectangle.

Parallélisme, orthogonalité.

Projection sur une droite selon une direction ; conservation du milieu par projection. Projection orthogonale ; distance d'un point à une droite.

Parallélogramme. Symétrie centrale.

Coordonnées d'un point du plan dans un repère quelconque.

Translation ; composition des translations. Vecteur ; addition des vecteurs.

CLASSE DE TROISIÈME

(Arrêté du 16 novembre 1978)

Les notions et les propriétés que les élèves doivent connaître et savoir utiliser sont énumérées ci-dessous ; leur groupement en alinéas ne vise qu'à la commodité de la présentation.

En algèbre comme en géométrie, certaines propriétés, au choix du professeur, seront admises : elles permettront d'obtenir les autres par voie déductive.

I. — ALGÈBRE

Racine carrée : notation $\sqrt{a}$ ($a \geqslant 0$). [On admettra que l'application $x \to x^2$ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ est bijective.] Usage des tables pour le calcul des carrés et des racines carrées. Racine carrée d'un produit, d'un quotient de réels.

Construction, sur des exemples, de la représentation graphique d'une application d'une partie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Applications linéaires et applications affines de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; leurs représentations graphiques.

Equations et inéquations du premier degré à deux inconnues à coefficients numériques : résolution d'une équation, d'une inéquation, d'un système de deux équations ; résolution graphique d'un système d'équations ou inéquations.

Exemples variés de problèmes du premier degré.

II. — GÉOMÉTRIE

Notions et propriétés fondamentales

Propriété de Thalès. Multiplication d'un vecteur par un réel. Coordonnées d'un vecteur dans un repère. Equations d'une droite dans un repère.

Rapport de projection orthogonale ; symétrie de ce rapport.

Propriété de Pythagore et sa réciproque.

Orthogonalité de deux vecteurs rapportés à un repère orthonormé.

Notions pratiques de trigonométrie

On admettra l'existence et l'unicité de la mesure des arcs de cercle, la mesure du demi-cercle étant fixée.

Angle de deux demi-droites de même origine : sa mesure. Bissectrice.

Somme des mesures des angles d'un triangle.

Cosinus, sinus d'un angle : tangente. Usage des tables trigonométriques en degrés décimaux et en radians.

Relations trigonométriques dans le triangle rectangle.

Applications

Expression analytique de la distance de deux points dans un repère orthonormé.

Symétries laissant globalement invariant : un cercle, la réunion de deux demi-droites de même origine, la réunion de deux droites.

Exercices (distances et angles) sur le triangle isocèle, le triangle équilatéral, le losange, le rectangle, le carré, les polygones réguliers...

Exercices de géométrie dans l'espace, par exemple : sphère (intersection avec un plan) ; cube (calcul de la diagonale) ; pyramide régulière (calcul d'éléments métriques).

Programmes 1985

MATHÉMATIQUES : Tableau Synoptique pour le Collège

	Classe de sixième	Classe de cinquième	Classe de quatrième	Classe de troisième
Grandeurs et mesures	Périmètre et aire du carré, du rectangle. Longueur du cercle. Volume du parallélépipède rectangle. Unités usuelles : longueur, aire, volume, angle.	Aire du parallélogramme, du triangle, du disque. Aire et volume du cylindre de révolution, des prismes droits. Somme des angles d'un triangle. Unités usuelles : durées.	Aire de la sphère, volume de la boule.	Volume d'une pyramide, d'un cône de révolution. Effet d'un agrandissement ou d'une réduction sur longueur, aires et volumes, masses.
			Grandeurs quotients (vitesse en km/h et en m/s, débit...). Grandeurs produits (voyageurs × km, kwh...).	
Repérage distances et angles	Repérage sur une droite graduée par les nombres relatifs. Repérage dans un plan quadrillé (coordonnées).		Inégalité triangulaire. Distance d'un point à une droite. Cosinus d'un angle, comme opérateur de projection orthogonale. Propriété de Pythagore et sa réciproque. Pente d'une droite.	Coordonnées d'un vecteur du plan ; somme vectorielle. Trigonométrie dans le triangle rectangle. Distance en repère orthonormal. Equation d'une droite sous la forme : $y = mx$; $y = mx + p$; $x = p$
Configurations constructions et transformations	Parallélépipède rectangle. Rectangle, losange. Triangle, triangle isocèle. Cercle. Transformation de figures par symétrie par rapport à une droite.	Prismes droits, cylindre de révolution. Parallélogramme. Triangle : les médiatrices sont concourantes. Transformation de figures par symétrie par rapport à un point.	Sphère ; section par des plans. Dans le plan, projection sur une droite selon une direction ; conservation du milieu. Triangle : «droites des milieux» ; concours des bissectrices, médianes et hauteurs. Triangle rectangle : cercle circonscrit. Transformation de figures par translation, par rotation ; polygones réguliers.	Pyramides, cônes de révolution ; section par des plans parallèles au plan de base. Angle inscrit dans un cercle et angle au centre associé. Enoncé de Thalès relatif au triangle. Construction de transformées de figures par composition de deux translations, de deux symétries centrales, de deux symétries par rapport à des droites parallèles ou perpendiculaires.
Nombres et calcul	Écriture fractionnaire des nombres décimaux positifs et opérations $+, -, \times$. Quotient de deux décimaux positifs. Approximations de ce quotient. Critères de divisibilité par 2, 3, 5, 9. Troncature et arrondi. Rangement de décimaux positifs.	Comparaison et addition de deux nombres positifs en écriture fractionnaire de même dénominateur, multiplication de deux nombres en écriture fractionnaire. Égalités $k(a + b) = ka + kb$ pour les décimaux positifs. Comparaison, addition et soustraction de nombres relatifs en écriture décimale. Équations numériques : $a + x = b$ ou $ax = b$ $(a \neq 0)$	Opérations $(+, -, \times, /)$ sur les nombres relatifs en écriture décimale ou fractionnaire. Effet de l'addition et de la multiplication sur l'ordre. Puissances entières d'exposant positif ou négatif. Écriture des nombres en notation scientifique et en notation ingénieur. Développement d'expressions de la forme $(a + b)(c + d)$. Équations et inéquations du premier degré à une inconnue ; problèmes qui y conduisent.	Factorisation d'expressions de la forme : $a^2 - b^2$, $a^2 + 2ab + b^2$, $a^2 - 2ab + b^2$. Calculs élémentaires sur les radicaux. Système de deux équations du premier degré à deux inconnues ; problèmes qui y conduisent. Problèmes se ramenant au premier degré. Exemples élémentaires d'algorithmes ; application numérique sur ordinateur.
Représentation et organisation de données	Lecture, interprétation et réalisation de tableaux et de graphiques.		Fréquences, expression en pourcentage. Effectifs cumulés, fréquences cumulées.	Moyenne, moyennes pondérées. Médiane.
Fonctions numériques	Multiplication par une fraction $\frac{a}{b}$. Application d'un pourcentage.	Vitesse moyenne. Calcul d'un pourcentage, d'une fréquence, d'un taux.	Proportionnalité. Applications. Pourcentages, indices.	Applications affines.
	Changement d'unités de longueur, d'aire et de volume. Échelle d'une carte ; changements d'échelle. Quatrième proportionnelle.			

Nouveaux Programmes

MATHÉMATIQUES : TABLEAU SYNOPTIQUE POUR LE COLLÈGE

	Classe de Sixième	Classe de Cinquième	Classe de Quatrième	Classe de Troisième
Configurations, constructions et transformations.	Cercle. Triangles, triangles particuliers. Rectangle, losange. Transformation de figures par symétrie axiale. Parallélépipède rectangle.	Parallélogramme. Construction de triangles (instruments et/ou logiciel géométrique). Concours des médiatrices d'un triangle. Transformation de figures par symétrie centrale. Prismes droits, cylindres de révolution.	Triangle : théorèmes relatifs aux milieux de deux côtés. Triangles déterminés par deux droites parallèles coupant deux sécantes : proportionnalité de longueurs. Droites remarquables d'un triangle, leur concours. Triangle rectangle et son cercle circonscrit. Transformation de figures par translation. Pyramides, cône de révolution.	Polygones réguliers. Théorème de Thalès et réciproque. Transformation de figures par rotation; composition de symétries centrales ou de translations. Vecteurs, somme de deux vecteurs. Sphère. Problèmes de sections planes de solides.
Repérage, distances et angles.	Abscisses positives sur une droite graduée. Repérage par les entiers relatifs, sur une droite graduée (abscisse) et dans le plan (coordonnées).	Repérage sur une droite graduée, distance de deux points. Repérage dans le plan (coordonnées). Inégalité triangulaire.	Relation de proportionnalité : représentation graphique. Théorème de Pythagore et sa réciproque. Distance d'un point à une droite. Tangente à un cercle. Cosinus d'un angle aigu.	Représentation graphique d'une fonction linéaire ou affine. Coordonnées du milieu d'un segment. Coordonnées d'un vecteur. Distance de deux points. Trigonométrie dans le triangle rectangle.
Grandeurs et mesures.	Périmètre et aire d'un rectangle, aire d'un triangle rectangle. Longueur d'un cercle. Volume d'un parallélépipède rectangle à partir d'un pavage.	Somme des angles d'un triangle. Aire du parallélogramme, du triangle, du disque. Mesure du temps. Aire latérale et volume d'un prisme droit, d'un cylindre de révolution.	Grandeurs quotients courantes. Volume d'une pyramide, volume et aire latérale d'un cône de révolution.	Grandeurs composées. Aire de la sphère, volume de la boule.
Nombres et calcul numérique.	Écriture décimale et opérations +, -, ×. Division par un entier : quotient et reste dans la division euclidienne, division approchée. Troncature et arrondi. Écriture fractionnaire du quotient de deux entiers, simplifications.	Successions de calculs, priorités opératoires. Produit de fractions. Comparaison, somme et différence de fractions de dénominateurs égaux ou multiples. Comparaison, somme et différence de nombres relatifs en écriture décimale.	Opérations (+, -, ×, :) sur les nombres relatifs en écriture décimale ou fractionnaire (non nécessairement simplifiée). Puissances d'exposant entier relatif. Notation scientifique des nombres. Touches $\sqrt{\ }$ et cos d'une calculatrice ; inverses.	Calculs comportant des radicaux. Fractions irréductibles. Exemples simples d'algorithmes et applications numériques sur ordinateur.
Calcul littéral.	Substitution de valeurs numériques à des lettres dans une formule.	Égalités $k(a + b) = ka + kb$ et $k(a - b) = ka - kb$. Test d'une égalité ou d'une inégalité par substitution de valeurs numériques à une ou plusieurs variables.	Développement d'expressions. Effet de l'addition et de la multiplication sur l'ordre. Équations du premier degré à une inconnue.	Factorisation (identités). Problèmes se ramenant au premier degré. Inéquations. Systèmes de deux équations du premier degré à deux inconnues.
Fonctions numériques.	Application d'un taux de pourcentage. Changements d'unités de longueur, d'aire. Étude d'exemples relevant ou non de la proportionnalité.	Mouvement uniforme. Calcul d'un pourcentage, d'une fréquence. Changements d'unités de temps et de volume. Coefficient de proportionnalité.	Vitesse moyenne. Calculs faisant intervenir des pourcentages. Changements d'unités pour des grandeurs quotients courantes. Applications de la proportionnalité.	Étude générale de l'effet d'une réduction, d'un agrandissement sur des aires, des volumes. Problèmes de changements d'unités pour des grandeurs composées. Fonctions linéaires et affines.
Représentation et organisation de données.	Exemples conduisant à lire, à établir des tableaux, des graphiques.	Classes, effectifs d'une distribution statistique. Fréquences. Diagrammes à barres, diagrammes circulaires.	Effectifs cumulés. Fréquences cumulées. Moyennes. Initiation à l'usage de tableurs-grapheurs.	Approche de la comparaison de séries statistiques.
	1996	1997	1998	1999

Stage Irem 1998-99

3. Exposé « Analyse de l'évolution des programmes à propos du théorème de Thalès »[1] par Annie Bessot

La géométrie enseignée au Collège a été profondément bouleversée par une succession de programmes : 1964, 1971, 1978, 1989 et 1998. Au travers de ces bouleversements subsistent quelques invariants, comme le théorème de Thalès ou le théorème de Pythagore. Ces invariants semblent apparaître aux concepteurs des programmes comme nécessaires pour organiser l'enseignement de la géométrie au Collège.

Origine du théorème de Thalès

On s'accorde pour dire que le théorème de Thalès trouve son origine dans la résolution de problèmes pratiques dans lesquels apparaissent (implicitement ou explicitement) parallélisme et proportionnalité. La première démonstration connue, trois siècles après Thalès, se trouve dans les Eléments Euclide (livre VI). Elle nécessite en particulier la théorie des proportions du livre V (pour établir les rapports d'aires des triangles) : on trouvera dans l'annexe 2 à la fin de ce paragraphe un extrait de cette démonstration cité par Bkouche (1995).

Le passage par des « objets de dimension 2 » (aires), pour établir une propriété portant sur des « objets de dimension 1 » (segments portés par les droites dont les longueurs sont proportionnelles) évite le problème de la nature des nombres…

Des parties cachées

Une « partie cachée » dans l'établissement de la propriété de Thalès dans l'enseignement secondaire est la nécessité de la construction de la droite réelle et des réels.

> Comment d'ailleurs pourrait-il en être autrement, dès lors que cette construction touche à des problèmes délicats seulement résolus dans la deuxième partie du XIXème siècle bien qu'entrevus dès l'Antiquité. (Matheron 1994)

Cependant, il faut souligner une seule exception, celle de la période de la réforme des mathématiques modernes où, de 1971 à 1978 en quatrième, la construction de R était traitée par les suites décimales illimitées.

Actuellement, la possibilité d'au moins une bijection entre l'ensemble des points d'une droite et un ensemble de nombres est rendu évidente, comme allant de soi, par l'image de la « droite dite réelle ».

Il y a là un véritable problème de transposition…

Une autre partie mathématique « caché » est la relation entre Thalès et la géométrie vectorielle, dans laquelle ce théorème s'intègre comme une simple conséquence de la distributivité de la première loi d'un espace vectoriel dans l'espace affine associé :

$$a.(\vec{u} + \vec{v}) = a.\vec{u} + a.\vec{v}$$

[1] Sources de l'exposé : Matheron Y.(1994) Les répercussions des changements de programme entre 1964 et 1989 sur l'enseignement du théorème de Thalès, *petit x*, n°34, 59-87 et Commission Inter-Irem 1er cycle (1996) *Autour de Thalès*, Bulletin Inter-Irem

a. Programme de 1964

L'arrivée du théorème de Thalès se fait en terrain préparé et dans un environnement riche. Ceci se traduit dans les programmes comme suit :
en Quatrième :

étude des applications particulières du théorème de Thalès aux parallèles *équidistantes* et aux théorèmes relatifs aux *milieux dans un triangle*

en Troisième :

étude précédée de celle des rapports de longueurs et de *mesures algébriques* de segments.

MANUEL (MONGE-GUINCHAN, ED. Belin, TROISIEME)

Avant l'introduction de Thalès

- On distingue et on définit *segments commensurables et segments incommensurables*[2].
- La possibilité de l'écriture du rapport de deux segments incommensurables est *admise*.
- Les définitions de la colinéarité de deux vecteurs et de la mesure algébrique est donnée.
- On étudie et on fait étudier « les points divisant un segment dans un rapport réel (relatif) ou arithmétique (positif) donné ».
- TP : *parallèles équidistantes*, manipulation de $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}$ pour différentes positions de M, de calculs littéraux, de l'étude de la position de points dans un rapport donné.

Une grande diversité d'exercices donne sens à l'écriture $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}$: calculs de rapports, de longueurs connaissant leur rapport et une relation, de rapports de mesures algébriques, d'abscisses, de relations algébriques...

Introduction du théorème de Thalès (forme « rapport de projection »[3])

- On démontre le théorème pour des segments commensurables en utilisant le théorème des parallèles équidistantes établi précédemment[4].
- On admet *explicitement* la validité du théorème pour les segments incommensurables (rapport irrationnel)
- La réciproque est établie dans le cas général (par l'absurde)
- On considère *ensuite* les applications du théorème de Thalès aux cas particuliers du triangle et du trapèze et on établit les propriétés des bissectrices intérieures et extérieures d'un triangle.
- En Travaux pratiques : division d'un segment en segments de longueurs proportionnelles, construction d'une 4^{e} proportionnelle, d'un point divisant un segment dans un rapport rationnel donné, calculs de longueurs dans un triangle notamment
- exercices : utilisation des théorèmes direct et réciproque, établissement de relations algébriques telles que le théorème de Ménélaüs.

---

[2] " Comparer deux segments sur une même droite revient à chercher si ces segments contiennent une nombre de fois exact un même segment de droite : il est possible de prendre ce dernier segment comme unité et on dit que les deux segments comparés sont commensurables. Leur rapport est un nombre rationnel " Carral 1995

[3] On trouvera dans l'annexe 2 à la fin de ce paragraphe les différentes formes que peut prendre le théorème de Thalès (d'après une enquête APMEP, citée par Brousseau 1995).

[4] On trouvera dans l'annexe 2 à la fin de ce paragraphe une démonstration du thèorème de Thalès basée sur la distinction commensurable / incommensurable (Carral 1995).

DEVENIR DE THALES : LIENS AVEC D'AUTRES SAVOIRS

Programme

Triangles semblables. Cas de similitude

Divisions semblables sur deux droites parallèles

Manuel

- triangles homothétiques par le sommet
- rapport d'homothétie défini comme rapport des mesures algébriques des côtés homologues
- divisions semblables sur des droites parallèles (théorèmes direct et réciproque) comme conséquence de la notion d'homothétie
- Homothétie, puis triangles semblables et les trois cas de similitude de deux triangles
  - démonstration des relations métriques dans le triangle rectangle (dont *théorème de Pythagore*) et leurs réciproques
  - définitions : cosinus, cotangente, sinus et tangente
  - puissance d'un point par rapport à un cercle
  - rapport des aires de deux triangles semblables
  - géométrie dans d'espace : exercices consacrés « au parallélisme de droites et de plans ».
- Dans la partie « algèbre » est démontré par Thalès que les représentations graphiques des fonctions linéaires et affines sont des droites[5]. Nous donnons dans l'annexe 2 (à la fin de ce paragraphe) la démonstration figurant dans un manuel datant de 1937 (on trouvera dans la même annexe une démonstration rigoureuse).

b. Programme de 1971 (Réforme des mathématiques modernes)

PARTI-PRIS AXIOMATIQUE

On a la volonté de construire, grâce à une axiomatique, les concepts et les objets à enseigner dans le corpus du programme.

MANUEL QUATRIEME (QUEYSANNE-REVUZ)

Avant l'introduction de Thalès

- L'ensemble des réels est construit par les suites décimales illimitées
- Introduction des notions de point, droite et plan « mathématiques »

Les manipulations de quelques instruments (règle, crayon et équerre) occupent deux paragraphes : elles permettent d'explorer le plan physique

Ensuite sont introduites « Les règles du jeu mathématique ». Je me permets de citer longuement les auteurs :

> Nous venons de constater expérimentalement un certain nombre de propriétés du « *plan physique* » de ses éléments : les « *points physiques* » et de certaines de ses parties les « *droites physiques* ». Toutefois quand nous avons fait les tracés le long des deux arêtes d'une même règle, on a pu prolonger un peu ces tracés, mais limités par les dimensions de la feuille ou de la table, il a quand même fallu faire un effort d'imagination pour concevoir un tracé illimité idéal à propos duquel, l'esprit convenait assez naturellement, que l'intersection de ces ensembles idéaux était vide.

[5] Rappelons que dans les commentaires des nouveaux programmes de Troisième aux contenus " 1. Fonctions linéaires et fonctions affines ", on peut lire : " L'énoncé de Thalès permet de démontrer que la représentation graphique d'une fonction linéaire est une droite passant par l'origine ; cette droite a une équation de la forme y = ax. On interprétera graphiquement le nombre a, coefficient directeur de la droite. "

Pour le « *point physique* » on sait aussi que la trace du crayon, vue à la loupe, apparaît trop étendu pour que l'esprit l'admette comme un « *point* » modèle.
Nous sommes donc amenés à remplacer par l'esprit ces objets physiques que sont, le point physique, la droite physique et le plan physique par des modèles purs qui sont : le *point mathématique*, la *droite mathématique* et le *plan mathématique*, nous dirons plus simplement : le point, la droite et le plan.
Ces objets mathématiques seront soumis à des lois très strictes qui doivent en faire le modèle idéal qui permettra, d'abord, de traduire les propriétés les plus fécondes des objets physiques correspondants, puis d'en découvrir de nouvelles peut être moins visibles expérimentalement.
Le jeu mathématique consiste à se placer dans la situation d'une personne intelligente, mais qui n'aurait aucune expérience physique, à qui on demanderait de tirer les conséquences de ces lois que nous appellerons « **axiomes** ».
Pour simplifier le travail de déduction nous ne donnerons pas dès le début tous les axiomes de la géométrie du plan, mais seulement ceux qui nous permettrons d'obtenir les premières propriétés des points et des droites du plan. Aussi il ne faudra pas s'étonner quand quelques axiomes nouveaux viendront s'ajouter à notre première collection (pp. 225-226)

Les premières constatations expérimentales de l'observation du *plan " physique "* conduisent aux 3 axiomes d'incidence :

[...]
i1) D est non vide et toute droite Δ de D est une partie propre non vide de Π
i2) Toute paire de points distincts est incluse dans une droite et une seule.
13) Pour toute droite Δ et tout point A n'appartenant pas à Δ, il existe une droite unique contenant A et dont l'intersection avec Δ soit vide.
(Ce dernier axiome est appelé axiome d'Euclide) (p.226)

• Arrivée de la droite « réelle » :
- existence *admise* d'une bijection g de (D) sur R appelée *graduation* de (D) (Une partie cachée de Thalès devient visible)
- existence *admise* d'une famille de bijections g de (D) sur R telles que pour deux quelconques de ces bijections g et g' et pour tout point M de (D), il existe deux réels a et b tels que : g' (M) = ag (M) + b : *c'est la définition de la droite réelle du programme de 1971*
• possibilité de la graduation de toute droite du plan : notion de distance

L'arrivée de l'axiome de Thalès (forme « conservation de l'abscisse ») est liée à l'insuffisance de l'axiomatique du plan mathématique pour définir le plan réel. Deux nouveaux axiomes sont nécessaires :

Un plan mathématique est appelé plan réel, s'il vérifie les deux axiomes suivants :
P_1) Toute droite de ce plan est une droite réelle
P_2) (Axiome de Thalès)
Pour trois droites quelconques D, D' et D" de ce plan telles que la troisième ait une direction distincte de celles des deux premières, si p désigne la projection sur D' parallèlement à D", pour toute graduation g de D, (A, B) étant le repère de cette graduation :
l'abscisse dans la graduation g d'un point quelconque de D, est égale à l'abscisse de sa projection p(M) dans la graduation g' de repère (p(A),p(B) (p. 194)

• La réciproque de l'axiome de Thalès est démontrée.
• Puis suivent les applications directe et réciproque au triangle et la conservation du barycentre de deux points par projection
• Le problème du partage d'un segment dans un rapport donné est présent sous la forme : « construction graphique du barycentre de deux points »

• Les graduations sur deux axes et la projection p de l'un sur l'autre conduisent à énoncer :

il existe un réel k tel que quel que soit le couple (M, N) de points d'un axe : $\overline{p(m)p(N)} = k \times \overline{MN}$ *k rapport de projection*

• La distinction entre longueurs *commensurables et incommensurables* disparaît puisque l'ensemble des réels a été construit.

PLACES ET ROLES DE L'ENSEIGNANT ET DES ELEVES

• Le professeur a la responsabilité de l'exposé théorique, ici l'axiomatisation du plan euclidien

• L'élève doit :

- constater de manière empirique (par le recours à la droite ou au plan physique) la pertinence ou l'insuffisance de l'axiomatique construite.
- appliquer la théorie apprise à l'intérieur d'exercices essentiellement calculatoires.

La pauvreté des exercices reflète la place laissée à l'élève dans cette construction axiomatique, celle des applications calculatoires du cours :

• calcul ou comparaison d'abscisses par application directe de l'énoncé de l'axiome de Thalès

• construction du point divisant un segment dans un rapport donné, présenté grâce à la conservation du barycentre par projection

• calcul du rapport de projection ou le calcul d'abscisses connaissant ce rapport.

DEVENIR DE THALES : LIENS AVEC D'AUTRES SAVOIRS

L'axiome de Thalès est insuffisant pour l'étude de *l'orthogonalité !*

• L'observation du plan et la droite physiques conduit à introduire « deux axiomes de l'orthogonalité ».

• On définit alors la projection orthogonale et son rapport, cas particulier du rapport de projection.

• Un nouvel axiome dit de « définition d'un plan euclidien » est introduit : « le rapport de projection orthogonal est symétrique »[6].

• La forme du théorème de Pythagore, cohérente avec ce qui précède, est alors la suivante :

Si k et k' sont les rapports de projections orthogonales d'un même axe sur deux axes de supports perpendiculaires, on a la relation : $k^2 + k'^2 = 1$.

c. Programme de 1978 (Contre-réforme)

L'arrêté du 16/11/1978 marque la réaction à la réforme précédente :

En algèbre comme en géométrie, certaines propriétés, au choix du professeur, seront admises ; elles permettent d'obtenir les autres par voie déductive

• Il n'est plus fait référence explicite à la nécessité d'une construction axiomatisée du déroulement du cours de mathématiques, le mot même d'axiome est banni...

• Qu'a-t-on le droit d'admettre ?

- ce qui est une nécessité, c'est à dire un axiome résultant de l'axiomatique choisie par le professeur et qui peut varier
- ou un théorème *dont le professeur choisit de ne pas enseigner la démonstration.*

La disparition (définitive) de la construction de l'ensemble des réels dans ces nouveaux programmes donne en fait à l'enseignant une liberté de choix limitée !

[6] k=c(d, d') : c(d,d')=c(d',d) symétrie de la relation c

MANUEL (MAUGUIN, ED. Istra, QUATRIEME ET TROISIEME)

La stratégie d'enseignement développée dans ces manuels est : observation empirique, démonstration dans des cas particuliers, généralisations admises.

Avant l'introduction du Théorème de Thalès

- En Quatrième

• L'insuffisance des rationnels conduit à démontrer l'irrationalité de $\sqrt{2}$. On dit que Π n'est pas non plus rationnel.

• L'ensemble des réels est défini comme le « plus grand ensemble des nombres » *permettant de mesurer toutes les longueurs* : son existence est *admise* (p. 108.109), et il n'est pas construit. Cependant on trouve l'indication explicite suivante : « dans le plan muni d'une distance, on peut réaliser une bijection des points d'une droite quelconque sur R ».

• La notion de *mesure algébrique* est introduite.

- En Troisième, on définit :

• la projection de direction donnée d sur une droite d' n'appartenant pas à d

• la projection du milieu d'un segment : partage d'un segment en trois segments de même longueur

Introduction du théorème de Thalès

• Le théorème de Thalès est démontré dans le cas particulier où $\overline{MN} = 3 \times \overline{AB}$; puis il est généralisé à $\overline{MN} = p \times \overline{AB}$ ($p \in Z$)

• On observe puis on démontre le cas $\overline{MN} = \frac{3}{5} \times \overline{AB}$;

on généralise, sans démonstration, à $\overline{MN} = \frac{p}{q} \times \overline{AB}$ ($\frac{p}{q} \in Q$)

• On admet alors : $\overline{MN} = k \times \overline{AB} \Rightarrow \overline{M'N'} = k \times \overline{A'B'}$ ($k \in R$)

La commensurabilité et l'incommensurabilité est sous-jacente à la démarche, mais on n'en parle plus !

Deux formes pour le théorème coexistent : $\overline{MN} = k \times \overline{AB} \Rightarrow \overline{M'N'} = k \times \overline{A'B'}$ ($k \in R$) (forme « rapport de projection ») et $\frac{\overline{MN}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{M'N'}}{\overline{A'B'}}$ (forme « dilatation »)

• La réciproque du théorème de Thalès est démontrée de manière classique (par l'absurde)

• Des problèmes de construction sont traités : recherche de point partageant deux autres dans un rapport algébrique donné, 4^{e} proportionnelle.

PLACES ET ROLES DE L'ENSEIGNANT ET DES ELEVES

On retrouve des exercices comparables à ceux de la réforme de 1964 avec des modifications de vocabulaire et des prolongements empruntés au programme de 1971 concernant les *transformations :*

• écriture et comparaison de quotients de mesures algébriques

• résolution de problèmes de construction,

• calculs d'abscisses, de longueurs.

• « vrais problèmes de géométrie » où l'on demande des démonstration de relations algébriques (comme le théorème de Ménélaüs)

• les transformations sont intégrées dans des exercices où on invoque projections, symétries centrales et translations.

DEVENIR DE THALES : LIENS AVEC D'AUTRES SAVOIRS

En Troisième

• La multiplication d'un vecteur par un réel figure sur la même ligne que Thalès dans le programme. Les relations telles que $\overline{MN} = k \times \overline{AB}$ sur une droite ou $\vec{u} = k \times \vec{v}$ sont reliées à Thalès.

• A l'occasion de l'établissement des quatre axiomes d'un espace vectoriel relatif à la multiplication, Thalès permet de démontrer $a.(\vec{u} + \vec{v}) = a.\vec{u} + a.\vec{v}$ pour a=3.

• Le rapport de projection orthogonale est introduit comme suit :

k *rapport de projection orthogonale* de d sur d' ; $k = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$ ne dépend pas du choix de A et B et est noté c(d,d'). La symétrie[7] de ce rapport fait l'objet d'un paragraphe.

Il en découle les relations métriques dans le triangle rectangle dont le *théorème de Pythagore.*

Plus tard, le rapport de projection orthogonale permet d'introduire le cosinus d'un angle et ouvre ainsi le champ de la trigonométrie (p. 215).

En Seconde

• calcul vectoriel puis homothéties et barycentre

En Première

• étude explicite des espaces vectoriels

En conclusion :

> Considéré comme une des « notions et propriétés fondamentales », même si son introduction renvoie à des pré-construits implicites, une fois établi il [le théorème de Thalès] trouve à l'intérieur du programme un environnement qui lui permet de vivre. Il assure la cohérence interne d'une partie du corpus de la géométrie, à travers les notions de produit par un scalaire et rapport de projection orthogonale, ce dernier débouchant sur le théorème de Pythagore et la trigonométrie. (Matheron 1994)

d. Programme de 1989

NOUVELLES ORIENTATIONS

Ce programme résulte d'une refonte complète de l'enseignement au Collège, ceci dans l'ensemble des disciplines. Dans les débats accompagnant cette refonte on voit apparaître des justifications de l'ordre de :

- *l' aspect « utilitariste » des mathématiques*

> A ce niveau, les mathématiques apprises sont non seulement utiles, mais indispensables dans la vie quotidienne (privée comme professionnelle). Il faut s'assurer de l'efficacité de cet enseignement (Rapport Dacunha Castelle, p. 2)

- *des buts sociaux assignés à l'enseignement des mathématiques*

> Le but premier est de donner à tous une formation de base (maths pour tous) [...] Le but second est de former plus de scientifiques. (idem, p. 4)
>
> [...] bâtir des mathématiques à partir des problèmes rencontrés dans plusieurs disciplines et, en retour, d'utiliser les savoirs mathématiques dans des spécialités diverses (Instructions, p. 77)

- *de la manière d'enseigner les mathématiques :*

> C'est dans l'activité mathématique que l'élève peut se former. Si cette activité est bien vécue, l'appropriation des connaissances à l'école ou après l'école se fera plus aisément (Rapport Dacunha Castelle)

---

7 k=c(d, d') : c(d,d')=c(d',d) symétrie de la relation c

Il s'en suit :

> Il faut poser des problèmes qui aient du sens pour l'élève et construire avec lui les outils nécessaires à leur résolution (Rapport Dacunha Castelle, p. 12)

La coïncidence entre le but (utilitaire) des maths, et les moyens de leur enseignement (activités) renforce cette volonté de refonte. La double fonction de cette approche est de tenter de résoudre le problème posé par la gestion de *la grande hétérogénéité du public de Collège* en phase avec l'idéologie de l'époque - l'enfant « d'abord », « au centre », ou « singulier ».

Les conséquences pour le théorème de Thalès de ce nouveau contrat institutionnel se traduisent ainsi dans les instructions :

> Des activités expérimentales, reliées à la pratique de la projection, permettront de dégager le théorème de Thalès relatif au triangle et sa réciproque : cette réciproque sera formulée en précisant dans l'énoncé les positions relatives des points (janvier 1989, Instructions complémentaires)

Cependant :

- l'énoncé général du théorème de Thalès est hors programme
- toute intervention de mesures algébriques est exclue
- la construction d'une moyenne géométrique n'est pas demandée. (idem)

MANUEL (PYTHAGORE, ED. Hatier, TROISIEME, 1989)

• plus aucune référence aux ensembles de nombres,
• étude du théorème appauvrie au point de se limiter au triangle, champ d'utilisation du théorème très restreint
• Réciproque : la « démarche expérimentaliste » par *observation* conduit à des énoncés qui sont institutionnalisés dans la « boîte à outils », en se référant aux trois types de figures possibles, sans mentionner explicitement que l'ordre dans lequel se trouvent les points est important. « L'interdiction » portant sur les mesures algébriques, empêche d'assurer le parallélisme à partir de l'égalité de rapports de longueurs.
• On montre l'utilisation « pratique » du théorème de Thalès dans une activité (le tracé d'escalier) suivie d'une autre activité mettant en oeuvre les théorèmes direct et réciproque de Thalès.

Dans ces conditions, il devient impossible à l'enseignant, ne serait-ce que de tenter une démonstration du théorème et il y a obligation pour l'élève de recourir à la constatation visuelle (portant sur l'ordre des points), pour pouvoir utiliser la réciproque de Thalès (faute de définir la notion de mesure algébrique).

Par contre, les exercices nombreux et d'un grand éclectisme permettent de donner une place importante à l'activité de l'élève, en accord avec les nouvelles orientations

DEVENIR DE THALES : LIENS AVEC D'AUTRES SAVOIRS

Dans les programmes précédents de 1964, 1971 et 1978, le théorème de Thalès occupait une « position haute » permettant :

• l'introduction d'objets nouveaux : cosinus, théorème de Pythagore par exemple
• de donner du sens au concept de projection, épine dorsale de ces objets nouveaux.

Le programme de 1989 opère un renversement qui peut être considéré comme une rupture par rapport à la tradition antérieure

• le théorème de Pythagore passe de Troisième en Quatrième : il n'est pas démontré faute « d'outils » (mathématiques)

• Le cosinus passe de Troisième en Quatrième. Un « deuxième débouché » du théorème de Thalès se referme lui aussi.
• Le théorème de Thalès ne permet plus d'établir la forme canonique de l'équation d'une droite.
• Le lien avec la projection devient ténu puisque limité au cas particulier du triangle où le recours explicite à Thalès n'est plus nécessaire.
• Le seul réinvestissement de Thalès au collège se fait à l'occasion de l'étude de la section par un plan parallèle à la base du cône et de la pyramide.
• L'unique fonction du théorème semble être d'introduire des situations d'agrandissement-réduction, et plus tard la notion d'homothétie étudiée en seconde (liée à la forme « dilatation » du théorème de Thalès)

e. Nouveaux programmes

NOUVELLES ORIENTATIONS

Les nouveaux programmes confirme certaines orientations prises lors des programmes de 1989, comme de privilégier l'activité des élèves. Cependant de nouvelles orientations apparaissent, comme l'affirmation de la place que doivent prendre les synthèses, le travail personnel de l'élève (en classe et *à l'extérieur de la classe*), le travail de mémorisation ... :

> Comme dans les classes antérieures, la démarche suivie dans l'enseignement des mathématiques renforce la formation intellectuelle des élèves, *et concourt à celle du citoyen*, en développant leur aptitude à chercher, leur capacité à critiquer, justifier ou infirmer une affirmation, et en les habituant à s'exprimer clairement aussi bien à l'oral qu'à l'écrit.
> *[...]* ils seront le plus souvent possible, en classe et en dehors de la classe, mis en situation d'élaborer et de rédiger des démonstrations. *On privilégiera l'activité de l'élève, sans négliger les temps de synthèse qui rythment les acquisitions communes.*
> *Le travail personnel* des élèves, en classe et en dehors de la classe, est essentiel à leur formation, comme dans les classes antérieures. *Les devoirs de* contrôle sont d'abord destinés à vérifier l'acquisition des compétences exigibles. Les autres travaux peuvent avoir des objectifs beaucoup plus larges et revêtir des formes diverses, permettant éventuellement la prise en compte de la *diversité des projets des élèves*. La régularité d'un *travail extérieur à la classe* est importante pour les apprentissages. En particulier, les travaux individuels de rédaction concourent efficacement à la *mémorisation* des savoirs et savoir-faire, au développement des capacités de raisonnement et à la maîtrise de la langue. (Présentation programme de Troisième, BO n°10, 15 Oct. 1998)

L'aspect expérimental, déjà présent dans l'esprit de la contre-réforme de 1978, est associée clairement à l'activité de l'élève et est relié fortement au statut que peut prendre un énoncé, conjectures ou théorème, et à la place de la démonstration pour ce changement de statut :

> *On poursuivra les études expérimentales* (calculs numériques avec ou sans calculatrice, représentations à l'aide ou non d'instruments de dessin et de logiciels) *en vue d'émettre des conjectures et de donner du sens aux définitions et aux théorèmes. On veillera, comme par le passé, à ce que les élèves ne confondent pas conjecture et théorème :* ils seront le plus souvent possible, en classe et en dehors de la classe, mis en situation d'élaborer et de rédiger des démonstrations. (Présentation programme de Troisième, BO n°10, 15 Oct. 1998)

MANUEL (PYTHAGORE, ED. Hatier, QUATRIEME, 1998)

Le théorème dit « de la droite des milieux » est démontré par les propriétés caractéristiques du parallélogramme. Il est utilisé pour démontrer la propriété de Thalès (dans le triangle) pour la situation dite des « Tiers » et admise dans les autres cas. C'est le seul manuel où l'on donne au théorème le nom de Thalès : par exemple dans le Nouveau Transmath (1998), on parle de « Propriété des 3 rapports égaux », Thalès n'est même pas évoqué.

Le théorème de Pythagore, comme dans le précédent programme, reste en Quatrième et est démontré indépendamment de Thalès, par les aires des carrés construit sur les côtés d'un triangle rectangle.

Par contre, le cosinus d'un angle aigu est introduit à l'aide de la propriété de Thalès : ceci nécessite de passer de la forme « dilatation » à la forme « rapport de projection » sans que la notion de rapport de projection soit introduite.

EN TROISIEME

Examinons, dans le texte des nouveaux programmes de Troisième (BO n°10, 15 Oct. 1998) l'endroit où est cité le théorème de Thalès : il désigne à lui tout seul le paragraphe 3 de la rubrique A. concernant les travaux géométriques, ce qui est la marque de son importance.

A. Travaux géométriques

[...]

3. Propriété de Thalès	Connaître et utiliser dans une situation donnée les deux théorèmes suivants. Soient d et d' deux droites sécantes en A. Soient B et M deux points de d, distincts de A. Soient C et N deux points de d', distincts de A. Si les droites (BC) et (MN) sont parallèles alors $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$ Soient d et d' deux droites sécantes en A. Soient B et M deux points de d, distincts de A. Soient C et N deux points de d', distincts de A. Si $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$ et si les points A,B,M et les points A,C,N sont dans le même ordre, alors les droites (BC) et (MN) sont parallèles.	Il s'agit d'un prolongement de l'étude faite en classe de quatrième. L'étude de la propriété de Thalès est l'occasion de traiter des situations de proportionnalité dans le cadre géométrique du plan et dans l'espace. La réciproque est formulée en tenant compte de l'ordre relatif des points sur chaque droite. L'utilisation d'un logiciel de construction géométrique peut permettre de créer des situations reliées au théorème de Thalès, notamment lors des activités d'approche de la propriété par la mise en évidence de la conservation des rapports. Le travail de construction de points définis par des rapports de longueurs permet de mettre en évidence l'importance de l'orientation sur la droite. On s'intéressera particulièrement au problème suivant : étant donnés deux points A et B, construire les points C de la droite (AB) sachant que le rapport $\frac{CA}{CB}$ a une valeur donnée sous forme de quotient d'entiers.

• Tout d'abord, le Théorème de Thalès sort du triangle, ce qui dans le programme précédent était fait en seconde.

• La forme que prend le théorème est la « dilatation » comme pour la propriété de Thalès en Quatrième, préparant ainsi l'introduction de l'homothétie en Seconde. On ne fait cependant pas apparaître le nombre k tel que $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} = k$.

• La notion de mesure algébrique restant non disponible (comme dans le programme précédent), la réciproque de Thalès doit intégrer dans sa formulation la notion « d'ordre des points ». Les commentaires prennent soin de souligner l'importance de cette notion qu'ils mettent en relation avec l'orientation de la droite :

> Le travail de construction de points définis par des rapports de longueurs permet de mettre en évidence l'importance de l'orientation sur la droite.

• On retrouve dans la colonne commentaire le problème suivant, un classique des programmes d'avant 1989 :

> On s'intéressera particulièrement au problème suivant : étant donnés deux points A et B, construire les points C de la droite (AB) sachant que le rapport $\frac{CA}{CB}$ a une valeur donnée sous forme de quotient d'entiers.

DEVENIR DE THALES : LIENS AVEC D'AUTRES SAVOIRS

• On retrouve dans ce programme le réinvestissement possible de Thalès au sein même de la géométrie pour les sections par un plan parallèle (à une face, à une arête) des différents solides étudiés à ce niveau et aux niveaux précédents.

• Une nouveauté est l'incitation forte[8] à démontrer par Thalès que « les représentations graphiques des fonctions linéaires et affines sont des droites ». Ce commentaire se trouve dans la rubrique C - Organisation et gestion des données - Fonctions, dans le paragraphe 1 - Fonction linéaire et fonction affine :

> L'énoncé de Thalès permet de démontrer que la représentation graphique d'une fonction linéaire est une droite passant par l'origine ; cette droite a une équation de la forme y = ax. On interprétera graphiquement le nombre a, coefficient directeur de la droite.

[8] bien que non exigible

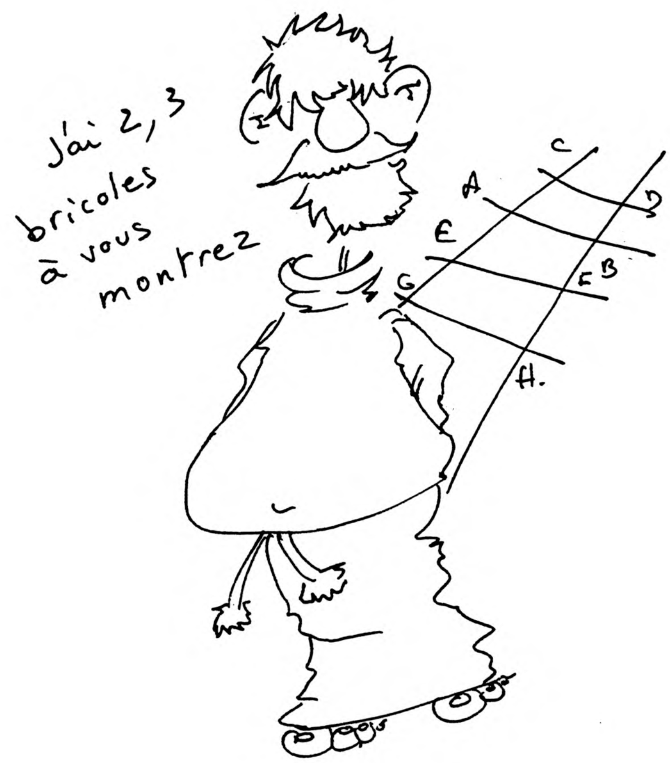
ANNEXES 2

- **Extrait de " Variations sur les liens entre le géométrique et le numérique " Bkouche 1995**

- **Les trois formes du théorème de Thalès**

- **Une démonstration du théorème de Thalès basée sur la distinction commensurable / incommensurable**

- **Démonstration à l'aide du théorème de Thalès que les représentations graphiques des fonctions linéaires et affines sont des droites**

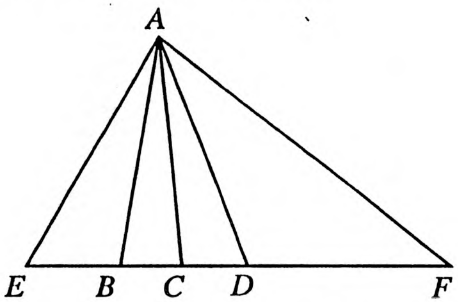


"Variations sur les liens entre le géométrique et le numérique" R. Bkouche 1996.

Remarque : Le rapport de deux grandeurs n'est pas un nombre (sauf si la première est un multiple de la seconde) ni même un rapport de nombres (sauf si les grandeurs sont commensurables) ; la théorie d'Eudoxe-Euclide élimine ainsi le numérique. Notons que dans les calculs pratiques, les géométres grecs savaient approcher les rapports de grandeurs par des rapports de nombres (les fractions d'aujourd'hui), un exemple est donné par le calcul approché de p par Archimède[14] ou les calculs d'aires et de volumes par Héron d'Alexandrie[15].

3. *La démonstration*

Nous allons voir comment la notion d'égalité de raison permet de montrer la proposition 1 du Livre VI. (Euclide)



Soient m et n deux nombres entiers et soient les points E et F sur la droite CD tels que

$$CE = m\,CB$$
$$CF = n\,CD$$

la proposition 38 du Livre I implique

$$\text{aire } ACE = m \text{ aire } ACB$$
$$\text{aire } ACF = n \text{ aire } ACD$$

On montre aisément que si CE est plus grand que, égal à, ou plus petit que CF, alors l'aire du triangle ACE est plus grande que, égale à, ou plus petite que l'aire du triangle ACF ; autrement dit

$$m\,CB > n\,CD \text{ implique } m \text{ aire } ACB > n \text{ aire } ACD$$
$$m\,CB = n\,CD \text{ implique } m \text{ aire } ACB = n \text{ aire } ACD$$
$$m\,CB < n\,CD \text{ implique } m \text{ aire } ACB < n \text{ aire } ACD$$

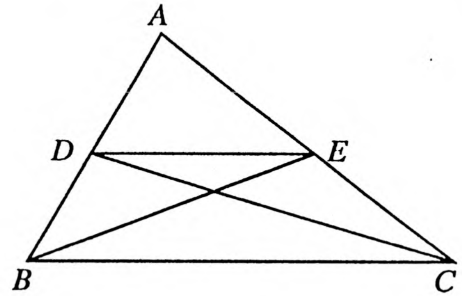
14 Archimède [Arc], p. 140-143

15 Heath [He2], vol. 2, p. 320-343

donc la raison de BC à CD est la même que celle du triangle ABC au triangle ACD.

On peut alors montrer le théorème de Thalès (proposition 2 du Livre VI) :

"Si l'on mène une droite parallèle à un des côtés d'un triangle, cette droite coupera proportionnellement les côtés de ce triangle ; et si les côtés d'un triangle sont coupés proportionnellement, la droite qui joindra les sections sera parallèle au côté restant du triangle."



On veut montrer l'égalité

$$\frac{BD}{DA} = \frac{CE}{EA}$$

On sait, d'après la proposition précédente, que

$$\frac{BD}{DA} = \frac{\text{aire } EBD}{\text{aire } EDA}$$

$$\frac{CE}{EA} = \frac{\text{aire } DCE}{\text{aire } DAE}$$

d'autre part, les triangles BED et CED ayant même base et compris entre les mêmes parallèles sont égaux, d'où la proposition.

On laisse au lecteur le plaisir de démontrer la réciproque.

extrait de
Brousseau G. (1995) Promenade avec Thalès, entre la Maternelle et l'Université

que l'on présente parfois sous la forme :

$$\text{Si } \overrightarrow{AB} = \alpha.\overrightarrow{AB'} \text{ alors } \overrightarrow{AC} = \alpha.\overrightarrow{AC'}$$

pour éviter d'habituer les élèves à écrire des rapports de vecteurs (qui n'ont pas de sens en général).

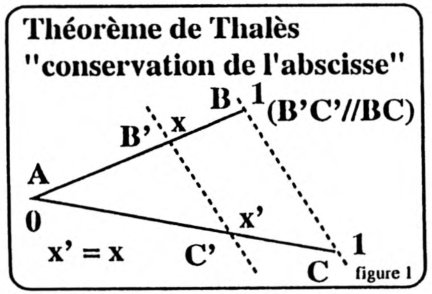


figure 1

1.1.2. la conservation du rapport de projection (de AC sur AB)

Ce point de vue (fig. 2) exprime l'égalité des rapports entre les mesures algébriques de segments correspondants déterminés sur deux sécantes.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AB'}}{\overline{AC'}}$$

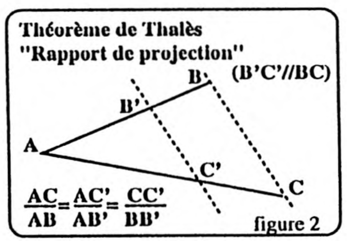


figure 2

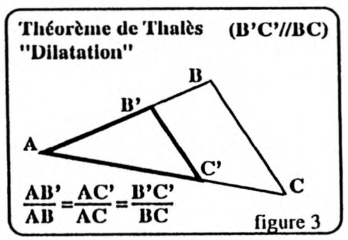


figure 3

1.1.3. la dilatation

Ce que l'enquête de l'APMEP appelle le point de vue "**dilatation**" (fig.3) exprime la similitude des vecteurs portés par les parallèles dans une homothétie ayant pour centre l'intersection des sécantes :

$$\frac{\overrightarrow{B'C'}}{\overrightarrow{BC}} = \frac{\overrightarrow{AB'}}{\overrightarrow{AB}} \text{ ou encore Si } \overrightarrow{B'C'} = \alpha.\overrightarrow{BC} \text{ alors } \overrightarrow{AB'} = \alpha.\overrightarrow{AB}$$

Les auteurs remarquent que les nouveaux programmes présentent le point de vue dilatation comme le faisaient déjà les programmes de 1947, dans le cadre de la similitude (p.31).

1.2. Résultats et difficultés

Pour orienter notre promenade, suivons le chemin des difficultés rencontrées par les élèves ? Quelles sont-elles ? Les exercices de l'enquête permettent-ils de choisir entre ces trois points de vue ?

1.2.1 Dispositions simples.

Les taux de réussites varient beaucoup, peut-on dire sous l'effet de quelles variables ?

Dans une configuration "reconnaissable" par 75 % des élèves, en troisième,

- avec des renseignements et des questions du type "*rapport de projection*" (dans $\mathbb{R}^2$, Q E 21-22) , 69% des élèves calculent correctement le quatrième segment (il est le plus grand dans le rapport conservé). Ce résultat se maintient en seconde, mais tombe à 45% dans un questionnaire à choix multiple alors qu'il est de 74% au Japon.
- avec des renseignements du type *dilatation*, dans $\mathbb{R}^2$, (Q B31-32), 63% réussissent dans un calcul où le côté demandé est plus petit que son correspondant et 65% interprètent correctement Thalès dans le cas d'une homothétie de $\mathbb{R}^3$ (Q P 14-15).

1.2.2. quelques modifications

Le plongement de la configuration dans une figure légèrement plus complexe (et avec un rapetissement au lieu d'un agrandissement) conduit à 51% de réussite dans le cas "*rapport de projection*" correspondant à (Q E 21-22), et à 41% seulement dans celui d'une *dilatation*, correspondant à (Q B31-32). La même combinaison avec le point d'intersection entre les parallèles fait tomber la réussite à moins de 20 % (Q N 25-26).

1.2.3. réciproque et calculs

La réciproque du théorème de Thalès est maîtrisée par 51% des élèves lorsque les segments caractéristiques sont dans la configuration habituelle (Q C 18-19), et à 23% sinon (Q M 4-5).

En seconde, lorsque le rapport de projection est donné sous forme décimale, l'application directe est réussie par 56% des élèves dont 24% seulement font référence au théorème.

fermeture, éd. Ellipses

249. *Remarque* : Il se peut que le rapport $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}$ soit incommensurable (21) ; afin de pouvoir considérer tous les cas possibles, il convient d'étendre par "un acte de foi" ce dernier théorème aux nombres irrationnels, c'est à dire aux rapports incommensurables. Ceci se fait sans ambiguïté car tout nombre irrationnel (ou tout nombre réel) s'approxime aussi près que l'on veut par un nombre rationnel et il en est de même d'un rapport incommensurable (21).

Ainsi pour tout nombre réel k et tous points A et B distincts, il existe un unique point C tel que $\overline{AC} = k\overline{BC}$.

250. Deux points distincts A et B étant donnés, pour tout nombre $k > 0$ $(k \neq 1)$, si on ne tient pas compte des signes, il existe deux points M et N tels que les rapports $\frac{MA}{MB}$ et $\frac{NA}{NB}$ soient égaux à k ; si $k = 1$ un des points se situe au milieu de AB et l'autre à l'infini. On dit que l'on a une *proportion* ou *division harmonique*[14] :

251. Définition. — *Deux points M et N divisent harmoniquement un segment AB, et sont dits conjugués harmoniquement par rapport au segment AB, si les rapports $\frac{AM}{AN}$ et $\frac{BM}{BN}$ sont égaux, c'est à dire si $\frac{\overline{AM}}{\overline{AN}} = -\frac{\overline{BM}}{\overline{BN}}$.*

S'il en est ainsi, les points A et B divisent harmoniquement le segment MN.

252. Théorème. — *Si des droites parallèles déterminent sur une sécante des segments égaux, elles déterminent sur toute autre sécante des segments égaux.*

Soient trois droites parallèles Δ_1, Δ_2, Δ_3, coupées par une sécante L aux points A, B, C, tels que AB égale BC.

Considérons une autre sécante L' coupant les droites Δ_1, Δ_2, Δ_3, en A', B', C', respectivement. La parallèle à la droite L passant par A' coupe la droite Δ_2 en E et celle passant par B' coupe la droite Δ_3 en F.

Les quadrilatères convexes $AA'EB$ et $BB'FC$ sont des parallélogrammes (103), d'où $A'E$ égale AB et $B'F$ égale BC (106) ; par suite les segments $A'E$ et $B'F$ sont égaux. De plus les angles $\widehat{B'A'E}$ et $\widehat{C'B'F}$, respectivement $\widehat{A'EB'}$ et $\widehat{B'FC'}$, sont égaux (98). Par suite les triangles $A'B'E$ et $B'C'F$ sont égaux (48) et $A'B'$ égale $B'C'$.

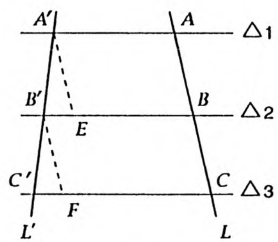


Fig. 109.

253. Théorème de Thalès. — *Des droites parallèles déterminent sur deux sécantes quelconques des segments correspondants proportionnels.*

Considérons Δ_1, Δ_2, Δ_3 trois droites parallèles coupées par deux sécantes L et L' aux points A, B, C et A', B', C' respectivement.

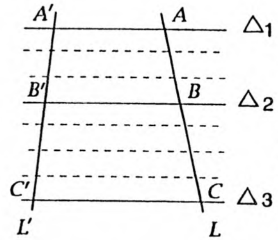


Fig. 110.

1º *cas* (Fig. 110) : Les segments AB et BC ont une commune mesure contenue p fois dans AB et q fois dans BC.

Par les extrémités des points de division induits par cette commune mesure sur les segments AB et BC, on mène les parallèles aux droites Δ_i ; ainsi on détermine sur la droite L' des segments égaux (252). Par suite $\frac{A'B'}{B'C'} = \frac{p}{q}$ c'est à dire $\frac{A'B'}{B'C'}$ égale $\frac{AB}{BC}$.

2º *cas* (Fig. 111) : Pour un entier m donné, divisons le segment BC en m parties égales (15). Portons à partir de B et vers le point A cette commune mesure plusieurs fois, jusqu'à ce que l'on définisse un encadrement du point A. On définit ainsi les points A_n et A_{n+1} tels que le point A soit situé sur le segment A_nA_{n+1} et A_nB soit n fois cette commune mesure et $A_{n+1}B$ le soit $(n+1)$ fois.

Les parallèles aux droites Δ_i passant par les points A_n et A_{n+1} respectivement coupent la sécante L' aux points A'_n et A'_{n+1} tels que A' soit situé sur le segment $A'_nA'_{n+1}$; on a les inégalités :

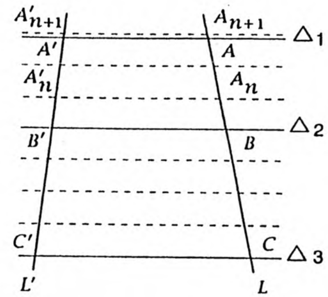


Fig. 111.

$$\frac{A'_nB'}{B'C'} < \frac{A'B'}{B'C'} < \frac{A'_{n+1}B'}{B'C'} \text{ et } \frac{A_nB}{BC} < \frac{AB}{BC} < \frac{A_{n+1}B}{BC}.$$

D'où $0 < \frac{A'B'}{B'C'} - \frac{A'_nB'}{B'C'} < \frac{A'_{n+1}A'_n}{B'C'} = \frac{1}{m}$ et $0 < \frac{AB}{BC} - \frac{A_nB}{BC} < \frac{A_{n+1}A_n}{BC} = \frac{1}{m}$.

Comme $\frac{A'_nB'}{B'C'}$ égale $\frac{A_nB}{BC}$ (1º cas), les rapports $\frac{A'B'}{B'C'}$ et $\frac{AB}{BC}$ sont égaux à $\frac{1}{m}$ près et ceci pour tout m ; ainsi $\frac{A'B'}{B'C'}$ égale $\frac{AB}{BC}$ (22).

254. *Note* : Le théorème de Thalès s'énonce aussi avec les rapports des mesures algébriques des segments, car le signe de ces rapports ne dépend pas du sens de parcours choisi sur les sécantes, étant entendu que l'on prend les segments orientés avec leurs extrémités homologues.

255. Réciproque du théorème de Thalès. — *Toute droite déterminant sur les côtés non parallèles d'un trapèze des segments proportionnels est parallèle aux bases.*

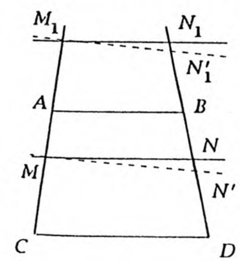


Fig. 112.

Soit MN (ou M_1N_1) une droite déterminant sur les côtés non parallèles AC et BD d'un trapèze $ABCD$ des segments proportionnels.

La parallèle aux bases passant par M coupe le côté BD en un point N', et on a $\frac{\overline{AM}}{\overline{MC}} = \frac{\overline{BN'}}{\overline{N'D}}$ (253) ; par hypothèse $\frac{\overline{AM}}{\overline{MC}} = \frac{\overline{BN}}{\overline{ND}}$ d'où $\frac{\overline{BN'}}{\overline{DN'}} = \frac{\overline{BN}}{\overline{DN}}$ et les points N et N' sont confondus (246).

La droite est parallèle aux bases du trapèze.

[14] De nombreux auteurs affirment que le mot "harmonique" vient des liens qui unissent les mathématiques et la musique. Plus précisément si on note $AM = a$, $BM = b$, $MN = m$ la proportion harmonique donne $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{m}$. D'autre part l'accord parfait majeur *do mi sol* nécessite que les longueurs d'une corde vibrante donnant ces trois notes soient proportionnelles à 1, $\frac{4}{5}$, $\frac{2}{3}$; ainsi les longueurs inverses sont proportionnelles à 4, 5, 6 et comme $4 + 6 = 2 \cdot 5$ les trois longueurs de cordes a, b, m satisfont la relation $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{m}$.

(†) Le géomètre Chasles a montré que le rapport harmonique était un invariant de la géométrie projective.

F. Brachet et J. Dumarque (1937) Précis d'algèbre pour les classes de mathématiques [cité par Chevallard 97]

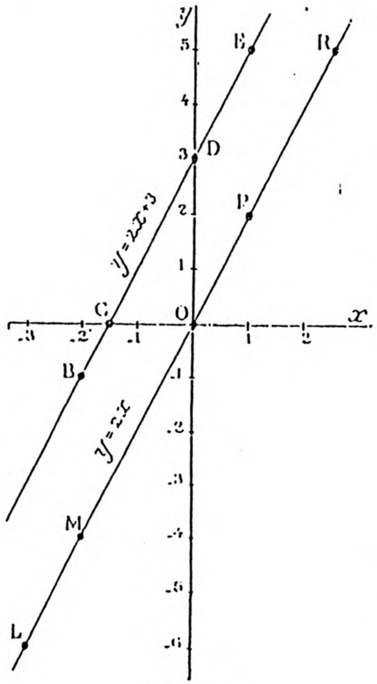


FIG. 20.

2° EXEMPLE :

$$y = 2x$$

(même coefficient de x que dans le 1er exemple).

On constate que les points représentatifs sont sur une droite. En traçant les deux droites sur la même figure, on constate qu'elles sont parallèles.

Ces résultats vont être démontrés.

§ 2. — L'ÉQUATION $Ax + By + C = 0$ ET LA DROITE

226. Théorème. — *Le lieu des points dont l'abscisse x et l'ordonnée y sont liées par une relation du 1er degré*

$$Ax + By + C = 0$$

est une droite; et réciproquement, à toute droite du plan on peut faire correspondre une relation de cette forme, qu'on appelle son équation.

CAS GÉNÉRAL

A et B sont différents de zéro.

L'équation est équivalente à

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}.$$

Elle est de la forme $\quad y = mx + p$.

227. — 1° $\quad p = 0$. $\quad$ On a $\quad y = mx$.

Nous allons raisonner sur un exemple numérique.

$$y = 2x.$$

Pour $x = 0$, $y = 0$; on obtient le point O.

Pour $x = 1$, $y = 2$; on obtient le point T défini par : $\overline{OA} = 1$ (unité graphique), $\overline{AT} = 2$.

Soit un point M', d'abscisse OP', pris sur le graphique de la fonction $y = 2x$; montrons qu'il est sur la droite OT. On a en effet : $\overline{P'M'} = 2\overline{OP'}$ et par suite :

$$\frac{P'M'}{P'O} = \frac{AT}{AO} (= 2).$$

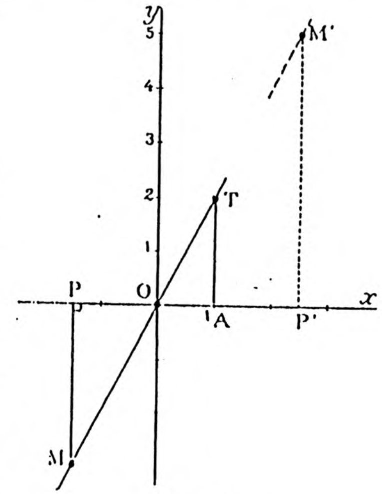


FIG. 21.

Les triangles rectangles OAT et OPM sont donc semblables et leurs angles en O sont égaux. En outre, x et y sont de même signe, de sorte que les points représentatifs ne peuvent être que dans l'angle yOx et son opposé par le sommet. OT et OM sont donc portés par la même droite.

Inversement, si M appartient à la droite OT, $\frac{PM}{PO} = \frac{AT}{AO} = 2$ et, d'après la remarque faite sur les signes, $\overline{PM} = +2\overline{OP}$, ou $y = 2x$.

Le raisonnement est général et conduit au théorème :

228. Théorème. — *Le graphique de $y = mx$ est une droite passant par l'origine.*

229. Théorème réciproque. — *Une droite quelconque passant par l'origine est représentée par une équation de la forme $y = mx$.*

Soit en effet Oz une telle droite (faire la fig.). Portons $\overline{OA} = +1$ sur Ox, et mesurons AT. Supposons que nous trouvions $\overline{AT} = +0{,}6$ ou $\frac{3}{5}$. D'après le théorème direct, la relation $y = \frac{3}{5}x$ est l'équation de la droite Oz.

230. Définition. — m s'appelle coefficient angulaire de la droite.

Pour $x = 1$, $y = m$. Donc : *Le coefficient angulaire d'une droite passant par l'origine est l'ordonnée du point qui a pour abscisse $+1$.*

REMARQUE. — Si l'unité de longueur est la même sur les deux axes, *le coefficient angulaire d'une droite* D *est la tangente de l'angle* (Ox, D).

θ_0. Si, dans un plan P, on choisit un repère affine, toute droite d de P admet une équation unique
- de la forme x = p si d est parallèle à l'axe des ordonnées
- de la forme y = mx + p sinon.

---

a) On démontre d'abord un résultat qui, en fait, ne suppose (même) pas la notion de droite :

> Soit Δ un ensemble (non vide) de parties du plan tel que, pour tout $\delta \in \Delta$, il existe un couple $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que l'on ait : $M(x,y) \in \delta \Leftrightarrow y = ax+b$. Alors, pour toute partie $\delta \in \Delta$ donnée, un tel couple (a,b) est unique.

Observons d'abord que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique point de δ dont x soit l'abscisse, à savoir le point $(x, ax+b)$. Si $y = a'x+b'$ est une (autre) équation de δ, on a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $ax+b = a'x+b'$. Pour $x = 0$ il vient $b' = b$; pour $x = 1$, on obtient $a+b = a'+b'$, et, par suite, $a' = a$. L'unicité de l'équation d'une partie $\delta \in \Delta$ est donc démontrée.

b) On suppose maintenant le résultat d'existence démontré : toute droite non parallèle à l'axe des ordonnées possède une équation de la forme $y = mx+p$. (D'après ce qui précède, cette équation est unique : mais nous ne ferons pas usage de ce résultat ici.) Démontrons alors la réciproque du résultat d'existence : toute équation $y = ax+b$ est l'équation d'une droite, *i.e.* l'ensemble $\delta = \{ M(x,y) \ / \ y = ax+b \}$ est une droite. Observons d'abord que $A(0,b)$ et $B(1,a+b)$ appartiennent à δ. Or on sait qu'*il existe une droite d et une seule passant par* A *et* B (puisque A ≠ B, ces deux points ayant des abscisses différentes). En outre, d'après le résultat d'existence supposé, d possède une équation $y = mx+p$. On en déduit que $(0,p) = (0,b)$, et donc que $b = p$, puis que $(1,m+p) = (1,a+b) = (1,a+p)$, et donc que $a = m$. Ainsi l'équation donnée n'est pas autre chose que l'équation de la droite d, et l'ensemble $\delta = d$ est donc une droite.

c) Il reste enfin à démontrer le résultat d'existence. Soit δ une droite. Si δ est parallèle à l'axe des ordonnées, elle admet clairement une équation unique de la forme $x = p$. Sinon, soit b l'ordonnée du point où elle coupe l'axe des ordonnées. Soit δ' la parallèle à δ passant par l'origine. On démontre d'abord que :

$$M(x,y) \in \delta \Leftrightarrow M'(x,y-b) \in \delta'.$$

Il reste alors à établir que δ' possède une équation de la forme $y = ax$. Soit A le point de δ' d'abscisse 1, et a son ordonnée : on note B(1,0) son projeté orthogonal sur l'axe des abscisses. Eliminant le cas trivial où δ' est l'axe des abscisses, on suppose d'abord $a > 0$. Soit $M(x,y)$ un point de δ' avec $x > 0$: on note $N(x,0)$ son projeté orthogonal sur l'axe des abscisses. Les triangles OAB et OMN sont alors en position de Thalès et on a $MN/AB = ON/OB$, soit $y/a = x/1$, ce qui donne $y = ax$. En observant ensuite que, si $x < 0$, alors $-x > 0$ et $-y > 0$, et que $M(x,y) \in \delta' \Leftrightarrow M'(-x,-y) \in \delta'$, on a, pour $x < 0$:

$$M(x,y) \in \delta' \Leftrightarrow M'(-x,-y) \in \delta' \Leftrightarrow -y = a(-x) \Leftrightarrow y = ax.$$

On procède de manière analogue lorsque $a < 0$. Comme l'équation précédente vaut aussi pour $x = 0$, on a finalement : $M(x,y) \in \delta' \Leftrightarrow y = ax$, où a est l'ordonnée du point de δ' d'abscisse 1. Il vient alors : $M(x,y) \in \delta \Leftrightarrow M'(x,y-b) \in \delta' \Leftrightarrow y-b = ax \Leftrightarrow y = ax+b$.

3.8. La démonstration de θ_0 donnée ci-dessus à l'aide du théorème de Thalès se place dans un cadre affine (même si le programme de Troisième enjoint de ne considérer que des repères *orthogonaux*). Mais on peut se placer aussi dans un cadre *métrique*, en adoptant alors un repère *orthonormal*. L'idée directrice peut être fournie par cette observation, due à un auteur déjà cité, à propos de la géométrie des Grecs (Mugler 1967, p. 20) :

> Le choix de la droite et du cercle comme fondement de l'édifice de la géométrie repose, d'abord, sur les propriétés géométriques de ces lignes. Elles représentent les lieux géométriques les plus simples : - la droite étant le lieu des points équidistants à deux points donnés ; - le cercle le lieu des points ayant une distance donnée à un point donné.

Exploitons le fait qu'une droite est la médiatrice de deux points. Soit d une droite donnée, et soit $A(a,b)$ et $A'(a',b')$ deux points distincts symétriques par rapport à d. Il vient :

$$\begin{aligned} M(x,y) \in d &\Leftrightarrow MA = MA' \\ &\Leftrightarrow MA^2 = MA'^2 \\ &\Leftrightarrow (x-a)^2+(y-b)^2 = (x-a')^2+(y-b')^2. \end{aligned}$$

On a $(x-u)^2+(y-v)^2 = x^2+y^2-2ux-2vy+u^2+v^2$. Il vient donc :

$$\begin{aligned} M(x,y) \in d &\Leftrightarrow -2ax-2by+a^2+b^2 = -2a'x-2b'y+a'^2+b'^2 \\ &\Leftrightarrow 2(b'-b)y = 2(a-a')x + (a'^2+b'^2-a^2-b^2) \end{aligned}$$

Si d est parallèle à l'axe des ordonnées, on a $b' = b$, avec $a' \neq a$ (sinon A et A' seraient confondus). Il vient ainsi :

$$M(x,y) \in d \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}(a'^2+b'^2-a^2-b^2)/(a'-a).$$

Si d n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées, on a $b' \neq b$ et il vient :

$$M(x,y) \in d \Leftrightarrow y = \frac{a-a'}{b'-b}x + \frac{1}{2}(a'^2+b'^2-a^2-b^2)/(b'-b).$$

On obtient donc, dans le premier cas une équation de la forme $x = p$, dans le second une équation de la forme $y = mx+p$, comme attendu.

3.9. On laissera ouvert, dans cette étude, le problème de l'adaptation didactique, pour une classe de troisième, des démonstrations proposées. Deux observations peuvent cependant être faite à propos de la démonstration « métrique » ci-dessus.

a) La situation mathématique considérée permet de préciser la notion d'*équation d'un ensemble de points du plan*. (La même technique de recherche d'équations pourrait d'ailleurs être appliquée au cercle : sur ce problème, voir par exemple Terracher, Vinrich & Delord 1989, p. 216.)

b) Cette démonstration conduit en outre à faire une place à un type de tâches mathématiques en général absent à ce niveau : deux points distincts A et B étant donnés par leurs coordonnées, déterminer l'équation réduite de la médiatrice de [AB].

DEUXIEME JOURNEE

Rappelons que la deuxième journée est consacrée aux *savoirs nouveaux* qui surgissent dans les nouveaux programmes de Troisième. Ont-ils toujours étaient absents ?

Si non (travail de la matinée) : qu'enseignait-on ? quel travail demandait-on aux élèves ? Pourquoi les a-t-on introduit ?

Si oui (travail de l'après midi) : Pourquoi les a-t-on introduit ? Que peut-on faire ?

Cette journée comporte trois moments :

1. Analyse de la rubrique du programme « Nombres entiers et rationnels »
   a. Objectifs de la rubrique « Nombres entiers et rationnels » des nouveaux programmes à travers la comparaison avec les anciens programmes (M-T. Carra)
   b. Quelques repères sur le concept de nombre (J. Cabanac)
2. Travail en groupes sur une série d'exercices sur le PGCD, extraits d'un manuel de 1948, date à laquelle l'algorithme d'Euclide était enseigné
3. Exposé de S. Cecconi sur les raisons de l'introduction des tableurs en Quatrième et en Troisième, suivi d'un travail individuel des stagiaires

1. Analyse de la rubrique du programme « Nombres entiers et rationnels »

a. « Objectifs de la rubrique 'Nombres entiers et rationnels' des nouveaux programmes à travers la comparaison avec les anciens programmes » par Marie-Thérèse Carra

Dans les programmes de la classe de 3ème applicables à la rentrée 1999 apparaissent des contenus nouveaux par rapport aux derniers programmes en vigueur, en particulier : « Paragraphe 4 : Nombres entiers et rationnels ».

Il faut remonter le temps jusqu'aux programmes de 1977-78 pour retrouver, en 5ème et 4ème des connaissances correspondant à ces contenus (voir plus loin dans cette partie).

En effet l'arithmétique a disparu des programmes de collège en 1980 ; à cette époque beaucoup de collègues ont eu « du mal à faire leur deuil » de cette disparition ; ils jugeaient, par exemple, que la décomposition en produit de facteurs premiers d'un entier était une technique formatrice pour la fréquentation des entiers, pour la compréhension de la multiplication et de la division, de leurs propriétés et pour l'entraînement au calcul rapide. Paradoxalement la réintroduction d'une partie de ces contenus provoque des réactions aussi hostiles que leur suppression.

A la suite de la parution de l'avant-projet en 1998 une consultation nationale a été organisée et des synthèses académiques ont été rédigées. En ce qui concerne cette rubrique, nous donnons, dans les pages suivantes :

- des extraits de l'avant-projet,
- des extraits représentatifs de la consultation nationale sur cet avant-projet
- et enfin les extraits du programme définitif.

• Extrait de l'avant projet

Contenus	Compétences exigibles	Commentaires
4-Nombres entiers et rationnels Diviseurs communs à deux entiers, PGCD. Algorithmes associés Fractions irréductibles	Connaître et utiliser la définition du PGCD de deux entiers, celle de deux entiers premiers entre eux. Obtenir le PGCD de deux entiers donnés. Savoir qu'une fraction est dite irréductible si son numérateur et son dénominateur sont premiers entre eux. Simplifier une fraction donnée pour la rendre irréductible.	Les activités proposées dans cette partie ne nécessitent pas la connaissance des nombres premiers. Sachant que la somme, la différence de deux multiples d'un entier sont elles-mêmes multiples de cet entier (conséquence de la distributivité), on peut établir qu'un diviseur commun à deux entiers divise aussi le reste de la division euclidienne de l'un par l'autre. Ainsi s'amorce l'algorithme d'Euclide, conduisant au plus grand commun diviseur comme dernier reste non nul. Des exemples numériques bien choisis justifient la démarche. Pour 429 et 156, voici comment cet algorithme conduit au PGCD 39 : 429=2*156+117 156=1*117+39 117=3*39. On pourra aussi remarquer sur des exemples qu'en divisant le produit de deux entiers par leur PGCD, on obtient leur plus petit commun multiple(PPCM). Le caractère général de ce résultat peut être signalé, mais sa démonstration est hors programme et il ne donne pas lieu à aucune compétence exigible. Les tableurs et les logiciels de calcul formel disposent d'instructions fournissant directement le PGCD. Avec un tableur, on peut aussi utiliser l'algorithme des différences successives pour obtenir le PGCD : on place les entiers que l'on se donne dans deux cases, par exemple A1 et B1 ; l'introduction , puis la recopie dans les cases inférieurs, des formules : « =MIN(A1,B1) » et « =MAX(A1,B1)-MIN(A1,B1) », qui désignent le plus petit des entiers et leur différence, finit par aboutir à 0 et au PGCD des entiers donnés. Un tableur ou un logiciel de calcul pourra également être utilisé pour simplifier les fractions, pour effectuer du calcul fractionnaire. Cette partie d'arithmétique permet une première synthèse sur les nombres, intéressante tant du point de vue de l'histoire des mathématiques que pour la culture générale des élèves. On rencontre au collège quelques nombres irrationnels comme π et racine de deux ; la démonstration de l'irrationalité de racine de deux peut être envisagée. Une telle étude pourra également être mise à profit pour bien distinguer le calcul exact et le calcul approché.

• Extraits de la consultation nationale (synthèses académiques, Mars 1998)

Nombres entiers et rationnels

C'est la partie la plus controversée du programme. Les prises de position sont opposées (demandes d'approfondissement ou demandes de suppression) mais peu d'enseignants semblent satisfaits de la rédaction actuelle. La majorité des professeurs s'accorde cependant sur le fait que c'est trop tard pour introduire cette notion et qu'il fallait y penser dès le programme de $5^{ème}$ ou $4^{ème}$.

Parmi ceux qui sont favorables voire satisfaits de cette nouveauté une grande majorité demande d'introduire aussi la notion de nombres premiers, de PPCM et trouve l'algorithme d'Euclide trop lourd et inopportun (risque de recette) par rapport à une décomposition en facteurs premiers connue en partie et beaucoup plus accessible par les élèves..

Un nombre non négligeable de professeurs estime que ce paragraphe alourdit inutilement le programme sans lien avec les autres parties et demande la suppression totale de cette partie.

Académie de Lyon

L'introduction du PGCD est une autre surprise ! Y- aurait-il des nostalgiques de l'arithmétique dans l'honorable commission de réflexion sur les programmes de mathématique ?

A notre avis, cette notion a plus de place en $4^{ème}$, tout comme l'irréductibilité des fractions. On ale sentiment que cette recherche du PGCD a été introduite pour donner un exemple d'utilisation d'un tableur. Mais enfin, vais - je utiliser le tableur de mon PC pour simplifier la fraction $\frac{156}{429}$ alors que je dispose de la touche SIMP de ma calculatrice qui sera bien plus efficace ? Conseiller une synthèse sur les nombres, c'est très bien. Mais cette synthèse peut être faite dès la prise en mains de la classe, en début d'année scolaire, puisque les élèves qui entrent en $3^{ème}$ ont déjà rencontré tous les types de nombres. C'est pourquoi ce paragraphe 4 devrait être n°1.

La démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ ne nous paraît pas à la portée d'un élève de $3^{ème}$. Il faut supprimer la phrase qui l'évoque dans les commentaires.

Académie de Montpellier

Les remarques les plus fréquentes portent sur le PGCD. Sa réintroduction et la méthode choisie pour le réintroduire semble poser un problème général de compréhension : la simplification des fractions est vue en classe de $6^{ème}$ et $5^{ème}$ sans que soit évoqué le PGCD. Il en est de même pour la notion de fraction irréductible.

S'il y avait persistance de la notion de PGCD dans le programme, certains collègues posent alors la question de réintroduction du PPCM dans les compétences exigibles.

La démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ semble, de l'avis de quelques collègues, vouloir amener les élèves à une maturation trop rapide du concept de nombre réel, alors que le concept de nombre rationnel n'a pas été défini. Il semble que les seules perspectives des élèves de collège à propos des nombres soient celles de décimal ou non décimal.

Académie de Strasbourg

Quelques applaudissements mais beaucoup d'inquiétudes et d'interrogations. Plusieurs équipes proposent la suppression de ce paragraphe. Nombreux sont ceux qui disent : si déjà on veut introduire cette notion, il aurait fallu le faire avant (en $4^{ème}$, plus nombreux encore en $5^{ème}$) et introduire aussi le PPCM.

Il semble bien qu'il y ait accord unanime pour la simplification des fractions (vers la fraction irréductible dans des cas raisonnables). Mais l'utilisation du PGCD pour y parvenir n'apparaît pas nécessaire. (Pour l'exemple proposé dans le commentaire : simplifier par 3 puis par 13 ; plus généralement, dans les exemples simples, la recherche des diviseurs communs est suffisante).

La recherche du PGCD par l'algorithme d'Euclide est considérée comme délicate et fortement contestée. Nombreux sont ceux qui préféreraient la recherche à partir de la décomposition en nombres premiers. Ils proposent cette démarche, en précisant bien qu'il ne s'agit pas de faire un tour approfondi de la notion de nombre premier.

Je crois que ce point de vue est à prendre sérieusement en considération. La recherche d'un PGCD par l'algorithme d'Euclide peut être présentée clairement. Je pense même qu'elle peut être comprise à ce niveau. Mais il faut bien reconnaître (même en faisant abstraction de nos habitudes anciennes) qu'elle procède d'un détour, qu'elle n'est pas directement liée à la notion de plus grand diviseur commun.

Par ailleurs, la notion de nombre premier est suffisamment importante pour qu'on s'y arrête un peu. Elle est intimement liée à la bonne représentation des nombres entiers et aux notions de diviseur, de PGCD, de fraction irréductible. Il est bien sûr hors de question de faire une étude des nombres premiers. Il est juste également que la recherche du PGCD ne nécessite pas la décomposition en nombres premiers (ni la notion de nombre premier). Il est dommage cependant que l'existence de ces nombres ne soit pas mentionnée et que le commentaire suggère de ne pas en parler.

La démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ est un passage fortement contesté. Plusieurs collègues proposent la suppression de « deux entiers premiers entre eux » et son remplacement par « sans diviseur commun autre que 1 ».

• Extrait du programme définitif

CONTENUS	COMPETENCES EXIGIBLES	COMMENTAIRES
4. Nombres entiers et rationnels Diviseurs communs à deux entiers Fractions irréductibles	Déterminer si deux entiers donnés sont premiers entre eux. Savoir qu'une fraction est dite irréductible si son numérateur et son dénominateur sont premiers entre eux. Simplifier une fraction donnée pour la rendre irréductible.	Cette partie d'arithmétique permet une première synthèse sur les nombres, intéressante tant du point de vue de l'histoire des mathématiques que pour la culture générale des élèves. Depuis la classe de cinquième, ls élèves ont pris l'habitude de simplifier les écritures fractionnaires : la factorisation du numérateur et du dénominateur se fait grâce aux critères de divisibilité et à la pratique du calcul mental. Reste à savoir si la fraction obtenue est irréductible ou non. On remarque que la somme et la différence de deux multiples d'un nombre entier sont eux-mêmes multiples de cet entier. On construit alors un algorithme, celui d'Euclide ou un autre, qui, donnant le PGCD de deux nombres entiers, permet de répondre à la question dans tous les cas. Les activités proposées ne nécessitent donc pas le recours aux nombres premiers. Les tableurs et les logiciels de calcul formel peuvent, sur ce sujet, être exploités avec profit. A côté des nombres rationnels, on rencontre au collège des nombres irrationnels comme π et $\sqrt{2}$. On pourra éventuellement démontrer l'irrationnalité de $\sqrt{2}$. Une telle étude peut également être mise à profit pour bien distinguer le calcul exact et le calcul approché.

Nous constatons que, dans le programme définitif, le paragraphe en question est maintenu mais des modifications y ont été apportées ; nous allons, dans un premier temps, noter ces modifications et les analyser.

Par rapport au texte de l'avant-projet

Dans la colonne « Contenus » on remarque la suppression du terme PGCD et des algorithmes associés.

Dans la colonne « Compétences exigibles » ont été supprimés :

« Connaître et utiliser la définition du PGCD de deux entiers »

« Obtenir le PGCD de deux entiers donnés »

La phrase « Connaître et utiliser la définition de deux entiers premiers entre eux » a été remplacé par : « Déterminer si deux nombres sont premiers enter eux »

Sur les fractions irréductibles rien n'a changé.

La colonne « Commentaires » a été remaniée de manière importante:

- disparition de l'exemple de la recherche du PGCD de 429 et156 en utilisant l'algorithme d'Euclide et des instructions à donner aux tableurs pour obtenir le PGCD en se basant sur le même algorithme et de leurs longs développements .

- la dernière partie portant sur la première synthèse sur les nombres a été scindée en deux : la première phrase a été placée en chapeau des nouveaux commentaires, donnant ainsi l'objectif principal du paragraphe et la deuxième phrase sur les exemples d'irrationnels, sur la démonstration de l'irrationalité de π, sur le calcul exact et approché est restée en fin de commentaires.

Ces nouveaux commentaires, débarrassés des exemples, précisent les objectifs et montrent la cohérence de cette rubrique : *faire une première synthèse sur les nombres, avec les connaissances nécessaires et suffisantes, comme savoir à partir de quel moment une fraction est irréductible.*

Pour mieux analyser cette nouvelle rubrique du programme, nous allons aussi la comparer avec les derniers programmes dans lesquels ces savoirs apparaissaient. On les retrouve, en effet, comme beaucoup d'entre nous s'en souviennent, dans les programmes de 5ème et 4ème de 1977 :

Programme (Arrêté du 17 mars 1977)

Classe de 5ème

II ARITHMETIQUE

Ensemble des multiples d'un entier naturel ; division euclidienne d'un entier naturel par un entier naturel.

Diviseurs d'un entier naturel ; nombres premiers.

Sur des exemples : pratique de la décomposition d'un entier naturel en un produit de nombres premiers et exercices sur les multiples communs et sur les diviseurs communs à deux ou plusieurs entiers naturels.

Programme (Arrêté du 16 novembre 1978)

Classe de 4ème

I CALCUL NUMERIQUE

Exemples introduisant la notion de fraction.

Révision des opérations sur les décimaux.

Pratique des opérations sur les rationnels, sur les réels.

Relation d'ordre ; valeur absolue ; exemples de calculs approchés.

Nous constatons que ce paragraphe, en 5ème, se dénommait arithmétique, qu'il fixait uniquement des contenus, et qu'il n'y avait ni de compétences exigibles, ni de commentaires ; les connaissances autour du PGCD étaient plus développées (diviseurs d'un entier, nombres premiers, décomposition en facteurs premiers, PGCD). Ces connaissances formaient un tout et constituaient la dernière étape, au collège, des connaissances sur les entiers. Elles n'avaient pas de liens avec les autres rubriques du programme de 5ème.

Il faut rechercher dans le programme de 4ème pour trouver des contenus en rapport avec savoir simplifier une fraction, savoir si une fraction est irréductible. Les connaissances acquises en 5ème et non utilisées à ce niveau deviennent utiles au niveau supérieur.

On peut ainsi prendre conscience des changements d'esprit des programmes : jusqu'en 1987 les programmes étaient construits sur les ensembles de nombres. A chaque niveau on introduisait un ensemble de nombres et on apprenait les techniques de calculs caractéristiques de ces ensembles. Actuellement on apprend à calculer avec les fractions dès la 6ème jusqu'en 4ème sans réflexion sur la structure des nombres. Le nouveau programme de 3ème demande de faire une première synthèse sur les nombres, ce qui nécessite un retour sur ces pratiques et pour cela de fournir les outils nécessaires. Dans cette situation, l'algorithme d'Euclide devient performant : il permet à la fois de déterminer si 2 nombres sont premiers entre eux (sans connaître nécessairement les nombres premiers) et d'autre part, peut jouer un rôle dans la découverte des nombres irrationnels, comme il l'a fait dans l'histoire des mathématiques.

b. « Quelques repères sur le concept de nombre » par Jacqueline Cabanac

Pour ces « repères » , c'est à Eliane Cousquer de l'IREM de Lille que j'ai emprunté les éléments historiques. Eliane Cousquer à écrit "L'histoire du nombre" (IREM de Lille) et participé à de nombreux et divers colloques (Inter IREM et autres)

Je ne suis pas historienne ; j'ai en ce sens beaucoup de difficultés à étudier les vieux textes même si je l'ai fait dans des universités d'été, mais c'est plutôt les problématiques des élèves qui m'intéressent.

Problématiques pour l'élève

Voici un dialogue lorsque j'ai posé la question suivante à ma classe de 4ème puis à ma 3ème :

P. : *Un nombre que l'on ne peut qu'approcher est il réellement un nombre ?* Par exemple : 0,3333333....ou celui que l'on va fabriquer ensemble : existe-t-il un nombre compris entre 2,5 et 2,6 ?
E. :-Ben...oui... 2,55
P. :D'accord. Et entre 2,55 et 2,56?
E. : il y en a plein !
P. : Par exemple ?
E. : 2,555! 2,556...2,557
P. : Et entre 2,555 et 2,556?
E. : Il y en a encore plein. On peut continuer cela longtemps.
P. : Oui et ces nombre que l'on peut construire, par exemple 2,5555555555......ou 2,555568512222222... ces nombres « qui ne finissent pas », est-ce que ce sont *vraiment* des nombres ? Vous allez prendre un petit papier afin d'écrire votre réponse et vos arguments.

Quelques réponses de mes élèves

Ce n'est pas un nombre car il est infinit et un nombre ne peut pas être infinit.

Marin (4°)

Oui, même si l'on ne peut pas le calculer ou l'approcher, un nombre sera toujours un nombre. (3°)

• Oui ~~[illegible]~~ mais on ne connaîtra jamais sa valeur exacte et on peut l'aditionner, le soustraire, le multiplier, ou le diviser avec d'autres nombres.

(3°)

Oui et Non, en termes mathématiques, c'est un ~~un~~ nombre car il se compose de chiffres, mais comme il n'a pas de valeur fixe c'en est pas vraiment un (3°)

Non, ce n'est pas un nombre car avec ce raisonnement, on ne pourra jamais trouver un nombre fixe.

Pierre

- oui, car on peut le calculer avec les autres. (4°)

Je ne sais pas

(3°)

Non, car comme ça, on pourra aller
jusqu'à l'infinie, et encore plus.
on ne trouvera jamais ce nombre,
même s'il existe. Si on ne peut que
l'approcher, on ne connaîtra jamais
sa valeur exacte. Fanny (4°)

Oui, c'est un nombre
car il est composé de chiffre
(3°)

Non, ce n'est pas un nombre
car il n'est pas entier,
c'est un decimaux relatif.
Laura (4°) C'est juste ?

Eymery Guillaume 4°

Non, car on ne peut que l'imaginer, mais ça
depends car si c'est le juste milieu, de ce nombre
, alors on peut le calculer.

Un Nombre est un Nombre. Alors un nombre
qu'on ne peut qu'approcher est un nombre

Non, on ne peut pas l'approché
car il y en a une infinité
~~et on~~ ce sera toujours un
nombre à peu près. Alexandre
(4°)

Voici maintenant à cette même question, quelques réponses de scientifiques d'autres temps

Stevin en 1585 , dans son traité « Arithmétique universelle » affirme :

> une racine est un nombre et qu'il n'y a aucuns nombres irrationnels, inexpliquables, ou sourds.

Arnauld-Nicole en 1662 dans « La logique ou l'art de penser » réfute Stevin et voici sa conclusion :

> Le même Stevin est plein de semblables disputes sur les définitions des mots comme quand il s'échauffe pour prouver que le nombre n'est point une quantité discrète;......que toute racine, de quelque nombre que ce soit, est un nombre. Ce qui fait voir qu'il n'a point compris proprement ce qu'était une définition de mots et qu'il a pris les définitions des mots, qui ne peuvent être contestées, pour les définitions des choses que l'on peut souvent contester avec raison.

Pascal vers 1657, dans « De l'esprit géométrique » déclare que :

> [...] l'unité se met au rang des nombres, et les fractions de même [...]

Newton vers 1707 dans « Arithmétique universelle » :

> On entend par nombre, moins une collection de plusieurs unités, qu'un rapport abstrait d'une quantité quelconque à une autre de même espèce, qu'on regarde comme l'unité. Le nombre est de trois espèces, l'entier, le fractionnaire et le sourd. L'entier est mesuré par l'unité; le fractionnaire par un sous multiple de l'unité; le sourd est incommensurable avec l'unité.

Dans l'encyclopédie de Diderot-d'Alembert(après 1750) on peut lire :

> les nombres commensurables sont proprement les seuls et vrais nombres.En effet, tout nombre renferme l'idée d'un rapport...et tout rapport réel entre deux quantités suppose une partie aliquote qui leur soit commune...La racine carrée de 2 n'est point un nombre proprement dit, c'est une quantité qui n'existe point, et qu'il est impossible de trouver. Les fractions même ne sont des nombres commensurables, que parce que ces fractions représentent proprement des entiers....(en prenant les parts pour véritable unité...)

Il est intéressant pour les élèves de voir que leurs arguments sont du même ordre que ceux des savants du siècle des lumières.

Problématique de l'enseignement

Je cite ici Eliane Cousquer :

> Mais est-on conscient que dans notre enseignement on approche des « choses » jamais définies, les nombres irrationnels ? Et même, lorsque l'on étudie la notion de racine carrée en troisième, dit-on à nos élèves, de manière explicite, que leur champ de connaissance s'enrichit de nouveaux nombres ?
> Est-on conscient qu'en collège on abandonné le processus de mesure de grandeurs par découpage et encadrement que les élèves ont pratiqué à l'école primaire où un nombre est associé à une grandeur (longueur, aire volume, angle, durée, coût, température, poids) or ces encadrements sont porteurs de sens pour l'avenir des études des mathématiques ou de physique. D'ailleurs, y a-t-il un enseignement de ces grandeurs ? Sont-ce des

concepts innés ?
Est-on conscient que l'on abandonne le processus de construction raisonné des nombres disponibles ? Tous les nombres seraient-ils donnés par la calculette ?

Le nouveau programme de troisième nous offrirait-il une opportunité ? Il me semble que à travers le nouveau programme nous invite à « *permettre une première synthèse sur les nombres, intéressante tant du point de vue de l'histoire des mathématiques que pour la culture générale des élèves"* ». Il y a là une invitation pour faire réfléchir nos élèves, non seulement sur l'histoire anecdotique des sciences mais aussi sur les difficultés de son élaboration.

Quelques jalons d'histoire

• Invention des décimaux par les Arabes :
Apparition des fractions décimales chez Al Uqlidisi (952).
Théorie des décimaux chez Al Samawal (1152)
Théorie des décimaux chez Al Kachi (« Clef de l'arithmétique » 1427).

Suite à ce travail, le calcul à l'aide de fractions décimales semble avoir été assez répandu en Turquie au quinzième siècle. C'est aussi chez Al Kachi que l'on trouve l'écriture des chiffres arabes symbolisation du nombre d'angles.

• Ré -invention des décimaux en Europe au seizième siècle :
Régiomontanus Borgi (1484)
Rudolf (1525)
Stévin (« La Disme » 1585)

• Amélioration des notations avec l'utilisation de la virgule date de Pitiscus (1612) et de Napier (dit Néper) en 1617.

• L'usage des tables de logarithmes de Néper (1561-1631) entraîne la familiarisation avec les décimaux.
Développement décimaux illimités avec John Marsh (1742).

Quant à l'algèbre, les arabes en furent les inventeurs pour la plus grande part; son développement en Europe avec les algébristes Italiens , une lente élaboration d'un symbolisme algébrique favorisent le développement de la notion de nombre réel .(Cousquer)

Mais que faire avec nos élèves ? Leur raconter, certes. Mais peut être leur faire découvrir un questionnement. Par exemple en 4ième, après les fractions, je leur ai présenté la situation paradoxale suivante (dite de Xenon) :

Voici un roseau ;

Je distribue à chaque élève 2 tiges de papier d'égale longueur

Ce roseau a la particularité de ne grandir que la nuit. Et chaque nuit il grandit de la moitié de ce qu'il avait grandi la veille. Demain, de combien aura-t-il grandi ? Et après-demain ? et dans 10 jours ? Quand arrivera-t-il à 3 fois sa longueur ? est-ce possible ?

Les élèves sont par groupes, découpent, collent l'agrandissement du roseau et tentent de répondre aux questions. Lorsque ils s'aperçoivent qu'il leur reste toujours une moitié de papier à découper et que le découpage devient impossible - vu la trop petite taille du papier - je leur demande d'imaginer la suite pour pouvoir répondre à toutes les questions. Ici les discussions en groupe sont animées car certains sont long à convaincre que le roseau ne dépassera pas son double (car si « *ça grandit, ça grandit indéfiniment !!"* ») malgré la présence du petit reste de papier.

> Maintenant on va écrire l'agrandissement des roseaux avec des fractions. Quel est l'agrandissement de demain?
> E. : un demi! -
> P. : Et après demain?
> E. : Un demi plus la moitié de un demi
> P. : C'est à dire ? il faut une seule fraction, faites l'addition !

Les élèves découvrent assez facilement la suite $2^n - 1 / 2^n$ et avec l'aide la calculatrice sont convaincus que ces fractions sont inférieures à 1 (le dénominateur supérieur au numérateur ne convint pas tout le monde......)

2. Travail en groupe sur le PGCD et l'algorithme d'Euclide et synthèse

Chaque stagiaire reçoit une série d'exercices sur le PGCD extraits d'un manuel de 1948[1], date à laquelle l'algorithme d'Euclide était enseigné. Les stagiaires se remettent dans les mêmes groupes que lors de la première journée pour :
Consigne du travail de groupe

a) Classer ces exercices selon les consignes ou selon les techniques de résolution.
b) Choisir quelques exercices qui vous semblent correspondre au programme, les résoudre. Argumenter votre choix.
c) Produire une feuille de synthèse par groupe que nous reproduirons pour chacun
d) Mise en commun.

Nous donnons ci-après les productions brutes des stagiaires, c'est à dire la reproduction de leur document.

[1] On trouvera ce document dans l'annexe 3.

Ex 85

187 = 121 × 1 + 66
121 = 66 × 1 + 55
66 = 55 × 1 + 11
55 = 11 × 5

pgdc (187 ; 121) = 11

245 = 138 × 1 + 107
138 = 107 × 1 + 31
107 = 31 × 3 + 14
31 = 14 × 2 + 3
14 = 3 × 4 + 2
3 = 2 × 1 + 1

pgdc (245 ; 138) = 1 ils sont premiers entre eux

Ex 87

Deux nombres pairs ne sont pas premiers entre eux
ils ont comme diviseur commun 2.

Ex 91

1) 1572 = 926 × 1 + 646
926 = 646 × 1 + 280
646 = 280 × 2 + 86
280 = 86 × 3 + 22
86 = 22 × 3 + 20
22 = 20 × 1 + 2
20 = 2 × 10

pgdc (926 ; 1572) = 2

$\frac{926}{1572} = \frac{463}{786}$ on est sûre que la fraction obtenue est irréductible.

Pour cet exercice, 2 groupes dans la classe
1er groupe : utilise cette méthode
2e groupe : essaie de simplifier avec les critères de divisibilité.

3) $\frac{2160}{3780} = \frac{216}{378} = \cancel{\frac{108}{189}}$ $\frac{2160}{3780} = \frac{216}{378} = \frac{4}{7}$

378 = 216 × 1 + 162
216 = 162 × 1 + 54
162 = 54 × 3

pgcd (378 ; 216) = 54

L'axiome d'Euclide ne semble pas indispensable pour cet exercice (critères de divisibilité)

Ex 96

300 = 225 × 1 + 75
225 = 75 × 3

pgcd (300 ; 225) = 75

diviseurs communs : 3 ; 5 ; 25 ; 75 ; 15

Ex 157

Déterminer si deux nombres sont premiers entre eux :

n° 84 • exercice type

n° 87 • revient à la définition d'un nombre pair.
prendre l'habitude de simplifier quand on voit des nombres pairs.

Simplifier des fractions :

a) Recherche du PGCD.
n° 63 - n° 66 - n° 67.

b) Simplification de fractions
n° 104 - n° 105 - 106 - 107 - 108
• Favoriser le calcul mental.

n° 121
• utilisation des produits et des puissances.

n° 154
• utilisation des expressions littérales.

n° 156
• utilisation de la factorisation.
Conditions sur le dénominateur et le diviseur (≠ 0)

Problèmes concrets

n° 161
• Utilisation de l'aire d'un rectangle

n° 162
• Bonne visualisation de la division.

n° 166

(groupe 3)

① a) Trouver le P.G.C.D.

b) Décomposition en produit de facteurs du 1° degré.

c) Simplifier les fractions.

d) Problèmes demandant la recherche du P.G.C.D.

---

② n° 70 Trouver le P.G.C.D de 2226 et 1986

Je divise 2226 par 1986, le quotient est 1 le reste.

— 1986 par 240 le quotient est 8 le reste 66

— 240 par 66 le quotient est 3 le reste 42

— 66 par 42 le quotient est 1 le reste 24

— 42 par 24 le quotient est 1 le reste 18

— 24 par 18 le quotient est 1 le reste 6

— 18 par 6 le quotient est 3 le reste 0

le P G C D est 6.

---

n° 68.

Je divise 54450 par 23850, q = 2 r = 6750

— 23850 par 6750, q = 3 r = 3600

— 6750 par 3600, q = 1 r = 3150

— 3600 par 3150, q = 1 r = 450

— 3150 par 450, q = 7 r = 0

P.G.C.D : 450

n° 91 Simplifier les fractions (en cherchant le PGCD)

$\frac{332}{748}$ on cherche le PGCD de 748

$748 = 332 \times 2 + 84$

$332 = 84 \times 3 + 80$

$84 = 80 \times 1 + 4$

$80 = 4 \times 20 + 0$

PGCD est 4

$\frac{332 : 4}{748 : 4} = \frac{83}{187}$. (Pour que le calcul du P.G.CD est un intérêt il faut bien choisir la fraction à simplifier). P2

(groupe 3)

n° 111

Simplifier $\frac{136}{445}$

Divisons 445 par 136 q = 3 r = 37

— 136 par 37 q = 3 r = 25

— 37 par 25 q = 1 r = 12

— 25 par 12 q = 2 r = 1

— 12 par 1 q = 12 r = 0

P.G.C.D est 1

136 et 445 sont premiers entre eux.

FR4

Recherche du P.G.C.D :

n° 63 et 64 : Recherche intuitive en listant les diviseurs de chaque nombre.

n° 73 : exemple d'utilisation de l'algorithme d'Euclide.

On peut remarquer que : $\frac{1840}{2520} = \underbrace{\frac{184}{252}}$

recherche le PGCD de on peut donc ces 2 nombres.

n° 87 : réflexion sur la divisibilité.

n° 92 : Etude de ces différents exemples et mise en évidence de résolution ≠ : - avec les critères de divisibilité
- avec l'algorithme d'Euclide

rappeler $\frac{187}{119}$ qui est un bon exemple où l'algorithme d'Euclide se justifie.

L'algorithme d'Euclide pose lot de questions et d'interrogations.

n° ~~175~~.

n° 167 concret et réaliste et réalisable.

EXERCICES ↓

1. PRÉREQUIS

- Tables de multiplication — n° 125 ; 126 ; 131 ; 132
- Caractères de divisibilité — n° 127 ; 128 ; 129

⚠ vocabulaire : divisible ; diviseur

2. DIVISEURS COMMUNS À DEUX ENTIERS

- Définition d'un diviseur commun — n° 96 ; 97 ; 103
- Définition de deux nombres premiers entre eux — n° 84 ; 87

3. FRACTIONS IRRÉDUCTIBLES

- Définition d'une fraction irréductible — n° 104 à 108 → "bricolage"
- Algorithme d'Euclide en activité — n° 112 à 118
  → Utilisation d'un tableur — n° 160 ; 167 ; 168 ; 173

ses enfants 90 poires et 75 noisettes.
Quel est le nbre des enfants ? Quelle est la part de chacun ?

2) Trouver les diviseurs de 24 et 60
Quel est le plus grand ? Ce nbre s'appelle le PGCD de 24 et 60
que signifie PGCD ?

3) Soit $a = \dfrac{2^3 \times 3^5 \times 5^2}{5^2 \times 2^2 \times 7}$. Simplifier
l'expression a. Par quel nbre a-t-on divisé le numérateur et le dénominateur ? Que représente ce nbre.

Décompose de la même façon $\dfrac{125}{325}$ et simplifier. Quel est le PGCD de 125 et 325 ? Quel est le PGCD des numérateur et dénominateur de la fraction obtenue après simplification ? On dira que les nbres 5 et 13 sont .... et la fraction $\dfrac{5}{13}$ est dite
....

Classification

* Technique

PGCD, nbs 1ers entre eux, div. communs
simplification de fractions
critères de divisibilité

* Réflexion

* Ecritures littérales

* pb, géométrie et vie courante

Choix d'exercices.

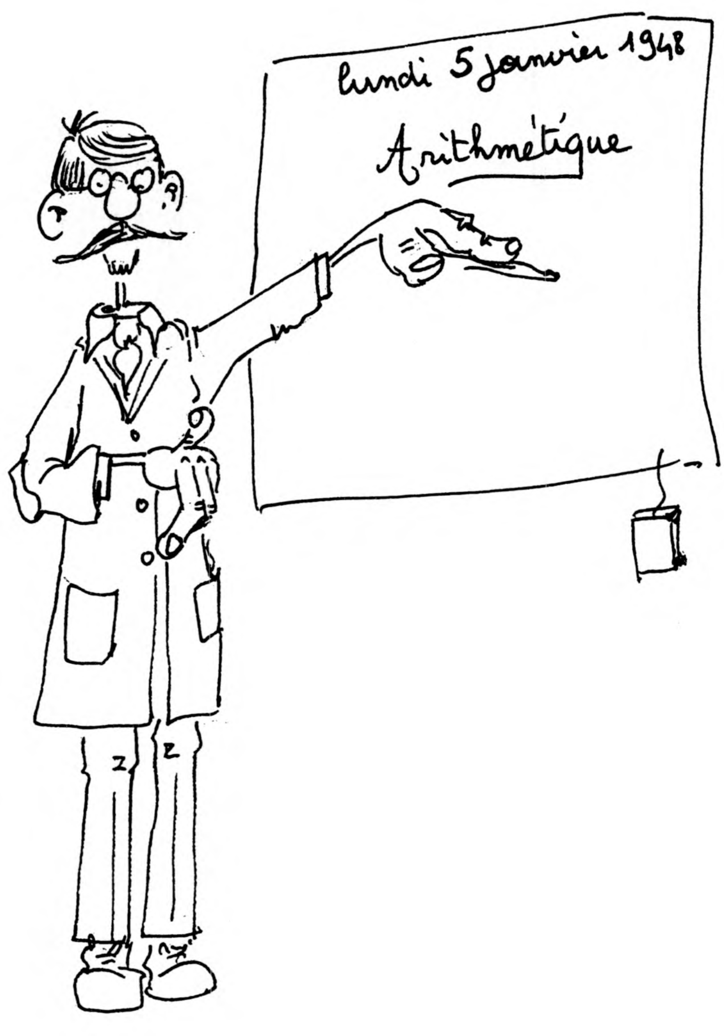
103 : pb ouvert, court
114 à 118 : simplification de fractions
Diviseurs communs autres que 2, 3, 5
157 : pb concret

171 : pb géométrique
185 : pratique et marrant

83 : à l'ordinateur
84 - 87

ANNEXE 3

- **Exercices extraits d'un manuel de 1948-49 (Ligel)**



EXERCICES ET PROBLÈMES

Trouver le p. g. c. d. des nombres suivants :

63. 8 et 12. 16 et 80.
64. 28 et 35. 80 et 256. 99 et 113.
65. 121 et 187. 138 et 245.
66. 168 et 720.
67. 168 et 462.
68. 54 450 et 23 850.
69. 272 et 288. 315 et 675 ; 144 et 504.
70. 309 et 993. 1 986 et 2 226.
71. 30, 45 et 105. 24, 60 et 108. 35, 63 et 133.
72. 504 et 684.
73. 1 840 et 2 520.
74. 33 390 et 58 800.

75. 315, 1 638 et 924.
76. 252, 693 et 1 890.
77. 2 520, 3 150 et 2 205.
78. 7 560, 20 160 et 24 192.

79. Trouver le plus grand commun diviseur des nombres suivants :
1° 128 et 192, 2° 240 et 160, 3° 180 et 224, 4° 900 et 7 290, 5° 24, 80 et 160. 6° 72, 216 et 128, 7° 90, 180 et 945. 8° 240, 1 350 et 1 008.

80. Trouver le p. g. c. d. des nombres suivants après les avoir décomposés en leurs facteurs premiers :
1° 54, 117, 225. 2° 92, 161, 506. 3° 33, 165, 198. 4° 85. 119, 187. 5° 30, 45, 105, 225. 6° 36, 90, 162, 270. 7° 48, 84, 231, 144. 8° 24, 60, 108, 168. 9° 42, 63, 133, 84.

81. Quel est le plus grand nombre par lequel on puisse diviser exactement les nombres 612, 2 040 et 8 976.

82. Trouver le p. g. c. d. de 45 864, 20 328, 12 040, 11 704.

83. Prouver que 3 740 et 15 561 sont premiers entre eux.

Parmi les nombres suivants, dire quels sont ceux qui sont :

84. premiers entre eux : 4 et 5 ; 8 et 12 ; 13 et 15.

85. premiers entre eux 2 à 2 : 6, 8 et 11 ; 5, 9 et 15.

86. premiers entre eux dans leur ensemble : 4, 8 et 12 ; 4, 9 et 15 ; 7, 8 et 15 ; 12, 15 et 60.

87. Deux nombres pairs sont-ils premiers entre eux ?

88. Deux nombres premiers entre eux sont-ils toujours des nombres premiers ? Donner des exemples.

89. Chercher le p. g. c. d. des nombres suivants par la méthode des divisions successives :
1° 9 009 et 8 613, 2° 12 264 et 1 932, 3° 5 040 et 3 600, 4° 50 050 et 12 012, 5° 9 072 et 306, 6° 10 400 et 7 800, 7° 9 405 et 6 720, 8° 81 000 et 70 200, 9° 45 360 et 2 448, 10° 25, 75, 80, 11° 124, 144 et 200, 12° 225, 250 et 300.

90. Utiliser la méthode dite, des divisions successives pour la recherche du p. g. c. d. des nombres 4 042 et 2 679.

Simplifiez les fractions suivantes en cherchant leur p. g. c. d. par la méthode des divisions successives.

91. 1° $\frac{926}{1\,572}$, 2° $\frac{332}{748}$, 3° $\frac{2\,160}{3\,780}$, 4° $\frac{15\,120}{30\,576}$.

92. 1° $\frac{7\,024}{10\,710}$, 2° $\frac{30\,024}{54\,378}$, 3° $\frac{10\,080}{60\,480}$, 4° $\frac{87\,318}{68\,607}$.

93. 1° $\frac{1\,880}{4\,200}$ 2° $\frac{5\,544}{38\,808}$. 3° $\frac{9\,702}{22\,050}$.

94. 1° $\frac{600}{1\,500}$. 2° $\frac{2\,646}{22\,050}$. 3° $\frac{10\,500}{15\,435}$.

95. Quels sont les diviseurs communs aux nombres suivants :
1° 420 et 720. 2° 900 et 375. 1° 72, 96 et 168. 2° 54, 90 et 126.

96. Former tous les diviseurs communs à 225 et 300.

Donner la liste des diviseurs communs aux nombres :

97. 36 et 48, 120 et 270, 2 100 et 2 940, 720 et 882.

98. 45 et 75, 350 et 750, 1 890 et 1 050, 462 et 1 078.

99. Trouver tous les diviseurs communs à 10 500, 15 400, 910.

100. Donner la liste des diviseurs communs aux nombres :
1° 1 890, 1 080 et 2 592, 2° 175, 250 et 350,

101. 1° 5 292, 5 760 et 6 552, 2° 25, 35 et 50, 3° 24, 32 et 36.

102. 1° 48, 72 et 96, 2° 644, 840 et 436, 3° 175, 275 et 300. 4° 640, 920 et 1 000.

103. Une maman partage exactement entre ses enfants 90 poires et 75 noisettes. Quel est le nombre des enfants.

Réduire les fractions suivantes à leur plus simple expression à l'aide du plus grand commun diviseur.

104. $\frac{5}{15}$. 105. $\frac{12}{18}$. 106. $\frac{24}{42}$. 107. $\frac{30}{48}$.
108. $\frac{36}{54}$. 109. $\frac{34}{136}$. 110. $\frac{75}{120}$. 111. $\frac{136}{445}$.
112. $\frac{96}{224}$. 113. $\frac{84}{147}$. 114. $\frac{288}{324}$. 115. $\frac{126}{702}$.
116. $\frac{888}{962}$. 117. $\frac{324}{540}$. 118. $\frac{1\,280}{6\,400}$.

Simplifier les fractions suivantes en cherchant le p. g. c. d. des 2 termes précédemment décomposés en leurs facteurs premiers :

119. $\frac{5\,203}{6\,149}$, $\frac{12\,012}{25\,025}$, $\frac{17\,226}{27\,027}$, $\frac{13\,440}{28\,215}$, $\frac{43\,659}{68\,607}$.

120. $\frac{60\,480}{91\,728}$, $\frac{64 \times 35 \times 77}{16 \times 14 \times 36}$, $\frac{18 \times 105 \times 23}{69 \times 17 \times 27}$, $\frac{108 \times 32 \times 4}{121 \times 68}$

121. Simplifier les fractions suivantes par le p. g. c. d. des 2 termes

$\frac{2^3 \times 3^5 \times 5^2}{2^2 \times 5^2 \times 7}$, $\frac{3^5 \times 5 \times 7^4 \times 11^3 \times 23}{2 \times 7^2 \times 11}$, $\frac{2^5 \times 5 \times 13^2 \times 19}{2^3 \times 13^4 \times 19}$

Rendre irréductibles les fractions suivantes en cherchant auparavant le p. g. c. d. des 2 termes par le moyen des facteurs premiers.

122. $\frac{125}{325}$, $\frac{150}{375}$, $\frac{120}{264}$, $\frac{252}{396}$, $\frac{926}{1\,572}$.

123. $\frac{332}{748}$, $\frac{2\,160}{3\,780}$, $\frac{3\,512}{3\,570}$, $\frac{15\,012}{18\,126}$, $\frac{5\,040}{20\,160}$.

124. Énoncer un caractère de divisibilité par 12, par 21, par 35, par 45.

125. Un nombre terminé par 5 peut-il être divisible par 12? par 18? Pourquoi ?

126. Un nombre impair peut-il être divisible par 6 ? Pourquoi ?

127. Le nombre 546 est-il divisible par 6 ? par 7 ? par 42 ?

128. Le nombre 84 est-il divisible par 4 ? par 6 ? par 24 ?

129. Un nombre divisible par deux autres est-il toujours divisible également par leur produit. Quelle condition faut-il alors ?

130. Le nombre 7 854 est divisible par 3 et par 6 ; l'est-il par 18 ? Il est aussi divisible par 3 et par 7 ; l'est-il par 21 ? A quelle condition un nombre divisible par deux autres est-il divisible par leur produit?

131. Peut-on dire à l'inspection du nombre 3 780 s'il est ou non divisible par 45 ? Justifier la réponse.

132. Sans faire la division, dire si les nombres suivants sont divisibles par 6 et justifier la réponse :

122, 411, 138, 444, 236, 963.

133. Même question pour 12 et pour les nombres :

324, 738, 1 557, 248, 972, 262, 636, 654.

134. Même question pour 18 et pour les nombres :

774, 856, 757, 828, 972, 135, 648, 516.

135. Même question pour 24 et pour les nombres :

5 136, 2 142, 6 280, 5 328, 5 428, 42 000, 28 000.

136. Peut-on dire à l'inspection du nombre 3 780 s'il est ou non divisible par 45 ? Justifier la réponse.

137. Trouver les nombres compris entre 100 et 400 qui sont divisibles à la fois par 4 et par 5.

138. Pourquoi tout nombre divisible à la fois par 9 et par 11, est-il divisible par 99 ?

139. Par quel nombre inférieur à 100 faut-il diviser 4 003 et 337 pour obtenir comme restes respectifs 43 et 37. Quels sont alors les quotients ?

140. Par quel nombre inférieur à 100 faut-il diviser 2 803 et 2 399 pour obtenir comme restes respectifs 31 et 47. Trouver les quotients.

141. Trouver le plus grand nombre qui divisant 2 456 et 1 828 donne respectivement pour restes 26 et 19 ?

142. Trouver une fraction égale à $\frac{2\,805}{5\,355}$ dont le p. g. c. d. des termes soit égal à 17 ?

143. Chercher une fraction égale à $\frac{6\,930}{12\,936}$ dont le p. g. c. d. des termes soit 11.

144. Trouver une fraction égale à $\frac{192}{300}$ dont le p. g. c. d. des termes soit égal à 13 ?

145. Former le p. g. c. d. des deux nombres 84 et 360. Prouver ensuite que le produit 84×360 est divisible par le carré de leur plus grand commun diviseur.

146. Trouver deux nombres qui aient comme p. g. c. d. 36. Le problème a-t-il plusieurs solutions ?

147. La somme de deux nombres est 81. Leur p. g. c. d. est 27. Quels sont ces nombres ?

148. Le p. g. c. d. de 2 nombres est 12. Les quotients successifs obtenus dans la recherche du p. g. c. d. sont 8, 7, 2 (méthode des divisions successives). Quels sont ces 2 nombres ?

149. Le p. g. c. d. de 2 nombres est 54, le plus grand est 378. Trouver le plus petit.

150. Trouver tous les nombres n tels qu'en divisant 519 et 371 par n, on obtienne respectivement 15 et 11 pour reste.

151. Trouver tous les nombres n tels qu'en divisant 289, 386 et 461 par n, les restes respectifs soient 1, 2, 5.

152. Quels sont les nombres par lesquels il faut diviser 89 et 77 pour obtenir des restes égaux ?

153. Trouver 2 nombres inférieurs à 200 connaissant leur produit 32 928 et leur p. g. c. d. 28.

154. Trouver le p. g. c. d. des expressions littérales suivantes :

1° a^5b et a^2b^3, 4° $6a^2b^3$, $9a^3b^2$ et $12a^2b^4$,

2° $6ab^2x$ et $12b^3x^3$, 5° $4xy^3z$, $6y^2z^2$ et $10xy^2z^3$,

3° $15x^3y^2$ et $20x^2y^3$, 6° $14xz^2$, $21x^2yz^2$ et $35xy^2z^3$.

155. Trouver tous les diviseurs communs à :

1° a^5b^2 et a^3b, 4° a^3b^2, a^4b^2 et a^2b,

2° a^3b^2c et $a^2b^3c^2$, 5° a^2b^2d, a^3d^2 et a^2bd^3,

3° $18x^3y^2z^2$ et $24x^3y^2$, 6° $15x^2y^2z^4$, $21xy^3z^3$ et $36y^2z^3$.

156. Rendre irréductibles les fractions littérales après avoir décomposé les 2 termes en un produit de facteurs :

1° $\frac{b+b^2}{a+ab}$, 4° $\frac{ax^2-a^3}{bx^2-a^2b}$, 7° $\frac{2a^2+4ab}{3ab+6b^2}$,

2° $\frac{2m+m^2}{2n+mn}$, 5° $\frac{mxy-nxy}{m-n}$, 8° $\frac{14x^5+7x^4y}{10x^4z+5x^3yz}$,

3° $\frac{m+mx}{m-mx}$, 6° $\frac{35xz-45yz}{7x-9y}$, 9° $\frac{39x^2y^3-36xy^3}{65x^3yz-60x^2yz}$,

157. Deux volumes ont l'un 160 pages, l'autre 224. Ils sont formés de fascicules qui ont tous un même nombre de pages supérieur à 30.

Calculer :

1° le nombre de pages de chaque fascicule.

2° le nombre de fascicules de chaque volume.

158. Trois pièces d'étoffe ont respectivement 180 m, 252 m et 324 m. On veut les partager en pièces d'égale longueur. Quelle devra être cette longueur commune pour que le nombre des pièces soit le plus petit possible ?

159. Une cafetière de 96 cl et une théière de 72 cl remplissent

exactement des tasses de même capacité. Quelle est la plus grande capacité que peuvent avoir ces tasses ?

160. Deux volumes ont l'un 192 pages, l'autre 240 pages. Ils sont formés de fascicules qui ont tous un même nombre de pages supérieur à 30. Trouver : 1° le nombre de pages de chaque fascicule ; 2° le nombre de fascicules de chaque volume.

161. On a fait carreler une salle rectangulaire de 4,20 m sur 2,24 m. Sachant que les carreaux employés ont un côté compris entre 10 cm et 25 cm. Calculer la longueur de leur côté et leur nombre.

162. Les marches de l'escalier d'une maison doivent être toutes égales. Le rez-de-chaussée a pour hauteur 3,15 m et l'étage 2,85 m. Quelle est la plus grande hauteur que l'on puisse donner aux marches ?

163. Une boîte a pour dimensions 18 cm, 24 cm et 36 cm. La garnir avec des cubes égaux.

164. On veut construire un escalier avec le moins de marches possible et tel que ses 3 parties respectivement de 3,36 m, 4,48 m et 5,28 m comprennent chacune un nombre entier de marches égales. Quel est le nombre total des marches ?

165. On considère tous les parallélépipèdes rectangles ayant pour volume 108 cm^3 et dont les dimensions sonts des nombres entiers de centimètres. Rechercher toutes les solutions.

166. On a planté des pommiers également espacés sur le pourtour d'un terrain triangulaire dont les côtés mesurent 144 m, 180 m et 240 m. Sachant qu'il y a un arbre à chaque sommet et que la distance de deux pommiers consécutifs est comprise entre 4 m et 10 m, calculer le nombre de pommiers plantés.

167. Des cars ayant un même nombre de places transportent séparément deux groupes de touristes qui comptent 168 hommes et 210 femmes. Le nombre des cars est le plus petit possible et toutes les places sont occupées. Combien de personnes transporte chacun des cars et quel est le nombre de cars ?

168. Deux pièces d'étoffe mesurent respectivement 150 m et 135 m. On veut les découper en coupons d'égale longueur. Quelle est la plus grande longueur possible pour chacun de ces coupons et combien de coupons chacune de ces pièces fournira-t-elle ?

169. On veut planter le long des bords d'une plate-bande rectangulaire des rosiers également espacés de manière que la distance d'un rosier au suivant soit au moins d'un mètre, mais moindre que 2 mètres et qu'il y ait un rosier à chaque coin. Les dimensions de la plate-bande sont : 14,84 m et 10,60 m. Nombre de rosiers?

170. Une propriété de forme rectangulaire a 300 m de large et 372 m de long. On veut planter des arbres sur le pourtour de façon à ce qu'il y ait des arbres aux quatre sommets du rectangle et que la distance de deux arbres voisins soit toujours la même. Sachant que les arbres doivent être éloignés d'au moins 10 m, quel est l'intervalle de deux arbres. Combien y a-t-il d'arbres plantés ?

171. On donne un cube de 30 cm d'arête. En combien de cubes égaux peut-on le diviser et donner la dimension de leurs arêtes. Quelle sera l'arête la plus grande de ces cubes et le nombre de ces cubes ?

172. Un ouvrier qualifié a été payé pour son travail comme spécialiste électricien comme suit : septembre, 9 240 f ; octobre, 10 560 f ; novembre, 11 880 f. Sachant que son salaire journalier n'a pas varié et qu'il a travaillé plus de 15 jours par mois, trouver le nombre de jours de travail effectués chaque mois,

173. Un ouvrier décolleteur a été payé pour 3 mois successifs : 11 550 f, 13 200 f et 14 850 f. Sachant que son salaire journalier n'a pas varié et qu'il a travaillé plus de 15 jours par mois, trouver le nombre de jours de travail effectués chaque mois.

174. Un terrain a la forme d'un rectangle de 29,68 m de long sur 21,20 m de large. On l'entoure de bornes également espacées. Une borne doit être placée à chaque coin et une au milieu de chaque côté du terrain. On demande le plus petit nombre de bornes qu'il faudra employer pour enclore le terrain.

175. Trois jardins ont respectivement pour surfaces : 2 075, 2 905 et 4 150 m^2. On veut les partager en lots de même surface et les plus grands possible. Quelle est la surface de chaque lot. Combien fera-t-on de lots dans chaque jardin ?

176. La classe de 4e compte 40 élèves et celle de 3e 36 élèves. On veut faire défiler les élèves des deux classes par rangs égaux. Combien d'élèves, au maximum, peut-on mettre par rang ?

177. On veut partager en coupons d'égale longueur quatre pièces d'étoffe mesurant respectivement 17,50 m, 28 m, 31,50 m et 42 m. Trouver la plus grande longueur possible de chaque coupon et le nombre total de coupons.

178. On donne un parallélépipède rectangle qu'on veut découper en cubes égaux. Les dimensions du parallélépipède sont : 324 cm, 276 cm, 96 cm. Quels cubes peut-on choisir. On se bornera aux cubes dont l'arête est un nombre entier de centimètres.

179. On donne un rectangle de 48 cm sur 12 cm. On propose de le découper en carrés égaux entre eux. Quel est le plus grand carré répondant à la question. Quelles sont les autres solutions ?

180. Un hall rectangulaire de 5,70 m sur 4,50 m doit être pavé avec des carreaux de forme carrée et dont le côté sera le plus grand possible. Calculez le côté de ces carreaux.

181. Un terrain mesure 252 m de long sur 120 m de large. On veut le diviser en petits jardins carrés, tous égaux. Indiquer le nombre de carrés formés qui corresponde à la donnée et avec la dimension de chacun d'eux. Quelle sera entre autres la dimension du plus grand ?

182. On veut planter des arbustes, à égale distance les uns des autres sur les quatre côtés, d'un terrain rectangulaire qui mesure 28 m et 32 m. Il faut un arbuste à chacun des coins. Quel est le plus grand intervalle qu'on puisse laisser entre les plants. Indiquer les autres intervalles, ayant au moins un mètre, qui répondent à la question.

183. On donne deux nombres : $A = 2^3 \times 5^2 \times 11 \times 17^2$; $B = 2^2 \times 5 \times 7^2 \times 13$. Former leur p. g. c. d. et leur p. p. c. m. sous forme de produits de facteurs. Former le produit $A \times B$ et le comparer au produit p. g. c. d. par le p. p. c. m. ; le résultat obtenu est-il général. Dans quel cas le p. p. c. m. de deux nombres est-il égal à leur produit ?

184. On donne un carré de 48 cm de côté. Le découper en carrés égaux. Quelles sont les solutions. Signaler en particulier les carrés dont le côté est un nombre entier de centimètres.

185. Deux règles d'égale longueur sont graduées l'une en 72 parties, l'autre en 126 parties. On fait coïncider leurs extrémités. Déterminer les traits de division qui coïncident. Faire le croquis.

186. On débite à la scie 2 barres de 9,10 m, 3 barres de 5,85 m et 8 barres de 6,50 m en barreaux égaux supérieurs à 0,50 m. Déterminer le nombre de barreaux et leur longueur (éviter tout déchet).

3. « L'outil informatique dans les nouveaux programmes. L'exemple des Tableurs » par Serge Cecconi

En quoi un chapitre sur les technologies nouvelles a-t-il sa place dans un stage sur les nouveaux programmes de troisième ?

Une lecture pertinente de ces nouveaux programmes encourage une utilisation des tableurs dans le cadre de l'enseignement des mathématiques en Quatrième et Troisième notamment. Ces recommandations et l'amorce d'une politique d'équipement des établissements officialisent l'utilisation des technologies nouvelles ce qui nous amène à préciser l'usage et les changements didactiques induits par ces nouveaux outils.

A. Ce qu'en disent les programmes

1-Programme de la classe de Cinquième (extraits)

A. Travaux géométriques
1. Prismes droits, cylindres de révolution.

[...] Les travaux de géométrie plane prennent toujours appui sur des figures, dessinées suivant les cas à main levée ou à l'aide des instruments de dessin et de mesure, y compris dans un **environnement informatique**..."
[...] **L'usage d'outils informatiques (logiciels de géométrie dans l'espace**) peut se révéler utile pour une meilleure visualisation des différentes représentations d'un objet. [...]

B. Travaux numériques
[...] Les travaux numériques prennent appui sur la pratique du calcul exact ou approché, sous différentes formes souvent complémentaires : le calcul mental, le calcul à la main (dans le cas de nombres courants et d'opérations techniquement simples), **l'emploi d'une calculatrice**. [...]

1. Enchaînement d'opérations sur les nombres entiers et décimaux positifs.
L'acquisition des priorités opératoires est le préalable à plusieurs apprentissages : compréhension et mise en pratique de règles. Le fait que **les calculatrices n'aient pas toutes les mêmes principes** de fonctionnement est une occasion à saisir. En effet, l'activité consistant à répertorier leurs diverses modalités de fonctionnement, et à les mettre en œuvre, est hautement formatrice. [...]
Toutes les activités numériques fourniront des occasions de pratiquer le calcul mental et **d'utiliser une calculatrice**. [...]

2-Programme de la classe de Quatrième (extraits)

B. Travaux numériques
[...]La pratique du calcul exact ou approché sous différentes formes complémentaires (calcul mental, calcul à la main, **calcul à la machine ou avec un**

ordinateur). [...]
C. Gestion de données, fonctions
Les notions essentielles relatives à cette rubrique ont été introduites ou approfondies en sixième et cinquième. En quatrième, ces notions seront fréquemment réinvesties dans les mêmes conditions que celles qui sont explicitées dans le programme de cinquième, avec une insistance particulière sur **l'utilisation des moyens de calcul moderne. {...]**

3-Programme de la classe de Troisième (extraits)

On poursuivra les études expérimentales (calculs numériques avec ou sans **calculatrice,** représentations à l'aide ou non d'instruments de dessin et de) en vue d'émettre des conjectures et de donner du sens aux définitions et aux théorèmes. On veillera, comme par le passé, à ce que les élèves ne confondent pas conjectures et théorèmes. [...]

L'utilisation d'un logiciel de construction géométrique peut permettre de créer des situations reliées au théorème de Thalès, notamment lors des activités d'approche de la propriété par la mise en évidence de la conservation des rapports. [...]
L'ensemble des activités proposées dans cette classe permet de faire fonctionner les acquis antérieurs et de les enrichir. Les activités de formation, qui ne peuvent se réduire à la mise en œuvre des compétences exigibles, seront aussi riches et diversifiées que possible. [...]

B Travaux numériques
La pratique du calcul exact ou approché sous différentes formes complémentaires (calcul mental, calcul à la main, **calcul à la machine ou avec un ordinateur**) a les mêmes objectifs que dans les classes antérieures [...]

4. Nombres entiers et rationnels
Depuis la classe de cinquième, les élèves ont pris l'habitude de simplifier les écritures fractionnaires : la factorisation du numérateur et du dénominateur se fait grâce aux critères de divisibilité et à la pratique du calcul mental. Reste à savoir si la fraction obtenue est irréductible ou non. On remarque que la somme et la différence de deux multiples d'un nombre entier sont eux-mêmes multiples de cet entier. On construit alors un algorithme, celui d'Euclide ou un autre, qui, donnant le PGCD de deux nombres entiers, permet de répondre à la question dans tous les cas. Les activités proposées ne nécessitent donc pas le recours aux nombres premiers. **Les tableurs et les logiciels de calcul formel peuvent**, sur ce sujet, être exploités avec profit. (...]

C. Organisation et gestion de données - Fonctions
3. Statistique
[...] **Les tableurs que l'on peut utiliser sur tous les types d'ordinateurs** permettent, notamment en liaison avec l'enseignement de la technologie, d'appliquer de manière rapide à des données statistiques les traitements étudiés. [...]

B. Ce qu'en disent les Enseignants

Ce que disent les enseignants [1] :

[...].Il apparaît une très grande inquiétude sur l'absence de moyens informatiques dans les établissements pour la mise en œuvre du programme. Par ailleurs la demande de formation dans ce domaine est forte. (IPR de Lyon mars 1998)
[...] Fonctions linéaire
-Curieusement, l'usage du tableur n'est pas évoqué pour construire un tableau de valeurs... (académie de Lyon Mars 1998)

Quelques collègues préfèreraient laisser aux professeurs de technologie l'utilisation des tableurs, sans doute plus par désarroi ou manque de formation que par conviction raisonnée. [...]
L'utilisation des tableurs est citée par 24 réponses (32 %).Les attentes des enseignants sont de nature diverses : désir de formation (8 réponses), dédoublement nécessaires (7 réponses), matériel utilisé de manière prioritaire par la technologie (3 réponses) [...]
Propositions d'allégement : Algorithme d'Euclide et tableur (fréquent)
(académie de Montpellier mars 1998)

[...] Absence de matériels informatiques utilisables et la nécessité de recevoir une formation pour l'utilisation de ces matériels " (académie Nancy-Metz Mars 1998)

L'utilisation des ordinateurs et des logiciels, demandée ou suggérée par le programme, est très souvent l'occasion d'exposer les difficultés matérielles ou l'absence de formation. Mais la plupart du temps, on sent nettement une acceptation de l'évolution proposée si celle-ci s'accompagne des moyens favorables. (académie de Strasbourg Mars 1998)

Trop de place est faite aux logiciels d'après certains ; à propos des tableurs - grapheurs est exprimé souvent l'impératif d'une formation des professeurs, de travaux en groupes avec les élèves et surtout de moyens en matériels disponibles (ils sont souvent insuffisants ou bien indisponibles) ; une salle équipée pour les Mathématiques est souhaitée. (académie de Limoges Mars 1998).

Suite à ces réactions, on peut faire deux types de remarques :

D'une part, les enseignants contrairement à ce que l'on a souvent coutume de dire ne sont pas opposés à une introduction de l'outil informatique dans leur classe, mais il demande massivement les moyens matériels et les moyens de formation, pour l'utilisation dans de bonnes conditions de l'outil informatique.

D'autre part, on peut prendre acte de la banalisation de l'utilisation des calculatrices et l'assimilation des logiciels de géométrie.

De fait ces trois outils sont liés et l'on ne peut pas traiter différemment les calculatrices : les logiciels de géométrie (Cabri ou géoplan) intègre un tableur.

[1] Extraits des synthèses académiques suite à la consultation nationale

C. En quoi l'utilisation des ordinateurs va t-il changer l'organisation de la classe de Mathématique

1- Les différentes possibilités d'organisation

L'ingénierie mise en place pour utiliser l'ordinateur en classe est un choix qui va modifier l'organisation du cours de Mathématique. Les dispositifs matériels mis en place le sont rarement à l'initiative du professeur : ils sont souvent une réalité locale à laquelle le professeur doit s'adapter. Plusieurs configurations existent.

a- La salle d'informatique

Une salle regroupe tous les ordinateurs et les met à la disposition des enseignants (pas seulement de Mathématique). Le développement de l'utilisation des ordinateurs, dans toutes les matières, conduit souvent à la saturation de cette salle.

Mais plaçons nous dans le cas idéal : la salle est libre et toutes les machines marchent (on a le droit de rêver !).

Le professeur doit prévoir une séance d'une heure pour un moment donné de la semaine.

Il n'est pas libre de l'unité temps ni de l'unité lieu, sa séance prévue sera peut-être en décalage par rapport à son travail et à sa progression. Elle peut apparaître aux élèves comme hors du cours de Mathématique habituel.

On peut également amener les élèves en salle d'informatique pour un travail spécifique ou de soutien.

b- Les ordinateurs sont dans la salle de cours

La gestion est plus simple : les contraintes de lieu et de temps disparaissent, l'ordinateur peut être utilisé à l'improviste, il peut être considéré comme un outil.

On n'est pas obligé de monter une séance d'une heure. On peut faire naviguer un groupe sur les ordinateurs un groupe sur un autre travail. Voir un ordinateur pour une équipe de quatre ou cinq élèves.

c- Un seul ordinateur par classe

On va utiliser cet ordinateur collectivement (ordinateur relié à une tablette rétroprojectable ou à un écran de télévision) L'utilisation est collective.

On peut utiliser l'ordinateur comme un imagiciel (espace, transformations....)

Mais on peut également l'utiliser pour mettre en œuvre un travail collectif (étude de figure, recherche, conjectures...)

d- La salle de Mathématique

Dans ce cadre la salle d'informatique a une partie occupée par les ordinateurs et une partie salle de cours, ce dispositif peut être complété d'un moyen collectif de travailler sur un ordinateur (tablette rétro-projectable, Télévision reliée à un ordinateur). On tend de plus en plus à équiper les salles d'informatiques de cette façon. C'est bien sûr l'idéal mais compte tenu de l'investissement financier d'un tel équipement, cette salle est collective à l'établissement et l'on retrouve les contraintes précédemment citées.

Quelle que soit l'organisation matérielle choisie on s'aperçoit que la contrainte matérielle face à laquelle se trouve le professeur, va l'amener à faire des choix didactiques, mais aussi à considérer le cours de Mathématique de façon différente.

2- Pourquoi utiliser les nouvelles technologies en classe de Mathématique ?

On peut considérer l'ordinateur comme un outil « pour faire moderne », ou parce qu'il faut bien changer sa façon d'enseigner... Considérations à rapprocher des dispositions dites modernes des bureaux dans les classes.

Actuellement on tend à préconiser une utilisation pour montrer plus que pour démontrer.

Un ordinateur ..... une possibilité de projeter l'écran ....

Utilisation d'un imagiciel :

Prisme

Transformations (symétrie ; rotations....)

Vecteurs..... etc....

Il me paraît coûteux en temps, en argent, et en investissement de se lancer dans l'aventure des technologies modernes à cette seule fin.

On obtient le même résultat avec un rétroprojecteur et des transparents ou une vidéo, le tout bien plus économiquement.

Il faut savoir que s'engager à utiliser un ordinateur en classe, c'est :

- s'engager à se former (investissement important en temps voir en argent)
- être conduit à bouleverser sa gestion de classe.
- être dépendant d'une technologie qui bien que moderne n'est jamais totalement fiable.
- se retrouver en position d'apprentissage face parfois à des élèves qui ne le sont plus.

Un tel engagement ne pourra être fait sur une séquence, de temps en temps, mais à long terme sur l'année. La décision n'est pas facile à prendre et il ne faut pas en mésestimer les difficultés. C'est un choix qui ne se fait pas à la légère.

Les changements didactiques sont de plusieurs ordres :

Modification de l'ingénierie liée à l'activité

Prévoir une activité avec ordinateur, c'est faire une analyse préalable plus précise qu'à l'ordinaire. L'élève doit avoir une tâche précise à effectuer, souvent la tâche sera donnée par écrit à chaque doublette. Une fois l'activité lancée toute intervention collective sera particulièrement mal aisée à faire passer et le professeur sera très vite mobilisé par des problèmes individuels et techniques.

Le professeur voit son statut modifié, la présence de la machine et le travail seul ou en doublette modifie profondément les rapports dans la classe et l'appropriation de certains concepts.

Modification de l'environnement d'apprentissage.

Modification de l'apprentissage : nouveau langage à acquérir.

La prise en main du logiciel peut masquer l'apprentissage du concept visé.

Les choix didactiques du logiciel ne seront pas innocents (Geoplan; SMAO ....) On pourra difficilement « zapper » d'un logiciel à un autre (Cabri / Géoplan)

Le professeur risque de se trouver le plus souvent face à des situations qu'il n'avait pas prévu.

Le Choix d'un logiciel induit un choix de l'apprentissage

Les logiciels reposent sur des choix didactiques (Geoplan; SMAO ....) Choisir tel ou tel type de logiciel induit que l'on connaisse les choix didactiques faits par les concepteurs. Très simplement, un prof voit très rapidement les différences fondamentales qu'il existe entre SMAO et Cabri par exemple. Le professeur introduira par conséquent avec Cabri géomètre (dessin/ figure) une nouvelle conception de la géométrie. Choisir d'enseigner certains concepts en utilisant un logiciel du type Tableur ou en géométrie Cabri ou Géoplan c'est faire une approche expérimentale, émettre des conjectures.

L'ordinateur un nouvel outil

Fabriquer de nouvelles générations d'élèves, possédant ces nouveaux outils (logiciels de géométrie, tableurs, calculatrice) et capables de s'en servir à bon escient.

L'étudiant de demain devra être capable :

de se servir d'un traitement de texte
d'un logiciel de géométrie
d'un tableur

Les programmes de technologie n'ayant souvent en charge que l'ergonomie liée à ces outils, il nous revient l'apprentissage mathématique lié à ces objets.

D. Un tableur comment ça marche ?

• *La fonction primitive d'un tableur : Calculer*

Les tableurs sont des logiciels qui permettent d'organiser et de traiter des données sous forme de tableaux.

Chaque case peut être repérée horizontalement par des lettres et verticalement par des nombres.

Dans les cases, on peut écrire des nombres ou des noms.

Mais on peut également calculer.

	A	B	C	D
1	12			12 + 5
2		5		

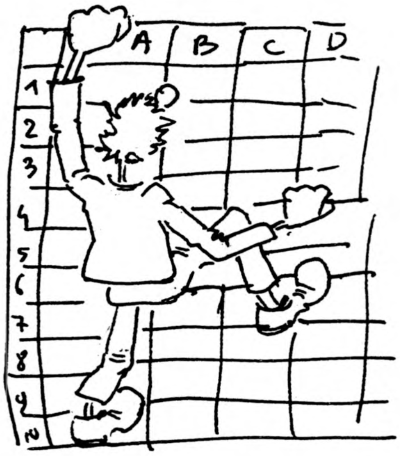
On peut faire faire à la machine tous les calculs possibles:

on désigne une **cellule cible** dans l'exemple ci-dessus la case D1

les cellules concernées ici la case A1 et B2

Il faut indiquer à la machine qu'il s'agit d'un calcul on commence tout calcul par le signe =.

	A	B	C	D
1		Contrôle 1	Contrôles 2	
2	Pierre	12	15	
3	Gaston	5	7	
4	Jacque	18	12,6	
5				

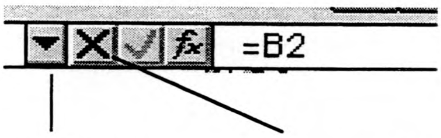


=B2+B3+B4

	A	B	C
1		Contrôle 1	Contrôles 2
2	Pierre	12	15
3	Gaston	5	7
4	Jacque	18	12,6
5			
6		=B2+B3+B4	
7			
8			

Je me déplace dans les différentes cellules que je veux combiner.

Signe = puis je place le curseur dans la cellule B2 je frappe + sur le clavier etc......



annulation validation

On peut dans un premier temps utiliser et faire utiliser le tableur comme une « super-calculatrice ».

Les activités qui suivent amèneront les élèves à s'approprier ce nouvel outil, et permettront de régler les différents problèmes liés à l'ergonomie du logiciel.

• *Activités élèves liées à cette fonction : Les carrés magiques*[2]

objectifs

Appropriation de l'outil : utiliser les fonctions calculatoires du logiciel.

Mathématique : selon la classe et le choix de l'activité.

Opération à trou

Initiation à la résolution d'équations.

Calculs avec les relatifs.

- Première phase

On demande aux élèves de fabriquer ce type modèle avec le tableur.

Objectif : apprendre à se servir du tableur : fonction opératoire , voir utilisation des cases d'insertion, repèrage dans un tableau.

On constate que le résultat de la case F1 est le même que celui de la case A7..

A7 =B7+C7+D7+E7

Feuille de calcul1

	A	B	C	D	E	F
1						-8
2						
3		9	-6,5	-2,5	1,9	1,9
4		-10,4	0	-2,5	8	-4,9
5		3,1	-3,1	5	-10	-5
6						
7	-8	1,7	-9,6	0	-0,1	
8						

[2] Cette activité a été fabriquée par B.Capponi et a été publiée dans "petit x"

- Deuxième phase

Il faut trouver les nombres manquant.

Carré 2 et 3.

Ce qui revient aux opérations à trou avec validation par la machine.

Voir à poser et résoudre une équation .L'élève va souvent essayer de trouver le nombre manquant par essais successifs.

3-Des cases vides avec l'addition

					0
	15	5,2	-20	9,8	
	-1,5	x	-20	4	5
	y	-10	u	2,7	
	-2,5	-2,5	-2,5	-2,5	
	2,5				

si vous introduisez :une lettre dans votre tableau le tableur va afficher ce type de message:

	A	B	C	D	E	F
1						#VALEUR!
2						
3		9	-6,5	-2,5	1,9	1,9
4		-10,4	0	x	8	#VALEUR!
5		3,1	-3,1	5	-10	-5
6						
7	#VALEUR!	1,7	-9,6	#VALEUR!	-0,1	
8						

un blanc est par contre considéré par le tableur comme la valeur zéro.

	A	B	C	D	E	F
1						-5,5
2						
3		9	-6,5	-2,5	1,9	1,9
4		-10,4	0		8	-2,4
5		3,1	-3,1	5	-10	-5
6						
7	-5,5	1,7	-9,6	2,5	-0,1	
8						

Troisième phase

On demande aux élèves d'utiliser la machine pour fabriquer un carré magique qui fonctionne de la même manière.

Extension et modification de l'activité

On peut adapter ce type d'activité en utilisant d'autre support.

Voir pour cela des activités concues par Bernard Capponi et Philippe Clarou, et parue dans « petit x » (Numéros spéciaux).

Carrés magiques

1

Ceci est un carré magique : c'est-à-dire que la somme des nombres en ligne en colonne et en diagonale est la même.

Tu appelleras cette somme S.

- Exprime S en fonction de a et b.

- Complète toutes les cases du carré.

a		b	a+3
	a+5	a+6	a+8
	b-4	a+10	a+4
		a+1	

Toutes ces activités vont permettre aux élèves (et au professeur) de mieux se familiariser avec ce nouvel outil.

Ci-après d'autres activités qu'on peut ranger dans la même famille quant à leur utilisation par un tableur, c'est à dire que seules les fonctions calculatoires du tableur sont utilisées. Cependant les objectifs sont différents, d'un point de vue mathématique. Je rappelle que toutes ces activités se trouvent dans les numéros spéciaux « petit x » que l'on peut se procurer à l'IREM de Grenoble.

Itinéraires

x et y désignent des nombres.

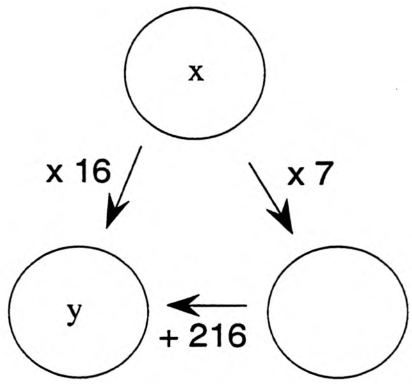
Pour aller de x à y tu peux suivre deux itinéraires différents :

-ou bien multiplier x par 16

-ou bien multiplier x par 7 et ajouter 216 au résultat

Le schéma résume cette situation. Ecris une égalité qui montre que les deux itinéraires donnent le même résultat.

• Trouve x.



Carrés magiques classiques

1	8		
		3	6
7	2		
		5	4

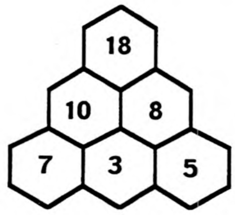
Fabriquer un convertisseur Franc-Euro

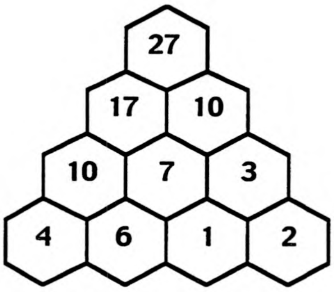
C5 =B5/6,57

	A	B	C
1	Francs	Euros	
2		0	
3			
4		Euro	Francs
5			0

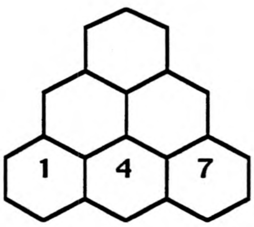
Pyramides

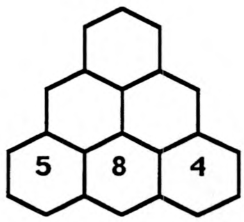
Voici deux pyramides. On les a construites en mettant dans chaque case la somme des deux nombres en-dessous.

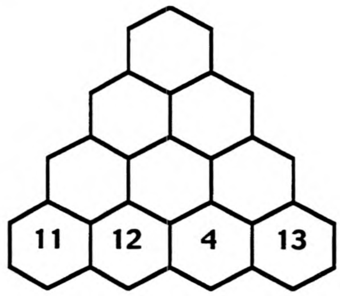




Complète de la même façon les trois pyramides suivantes :

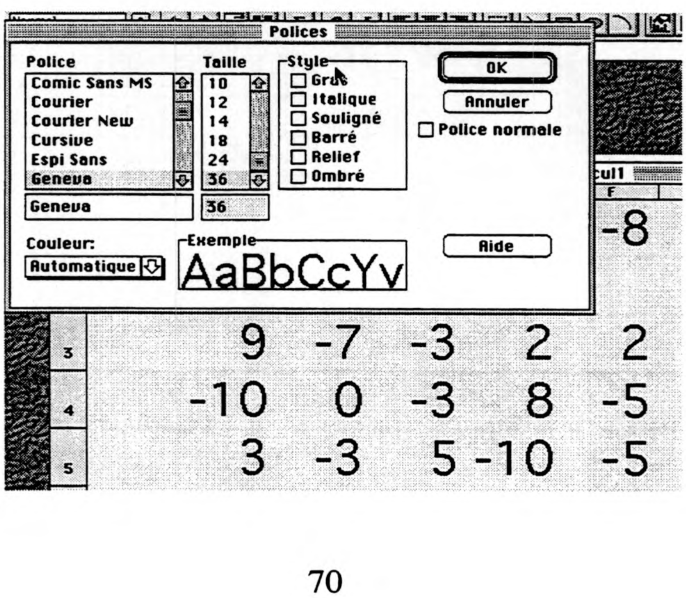






Correction Collective

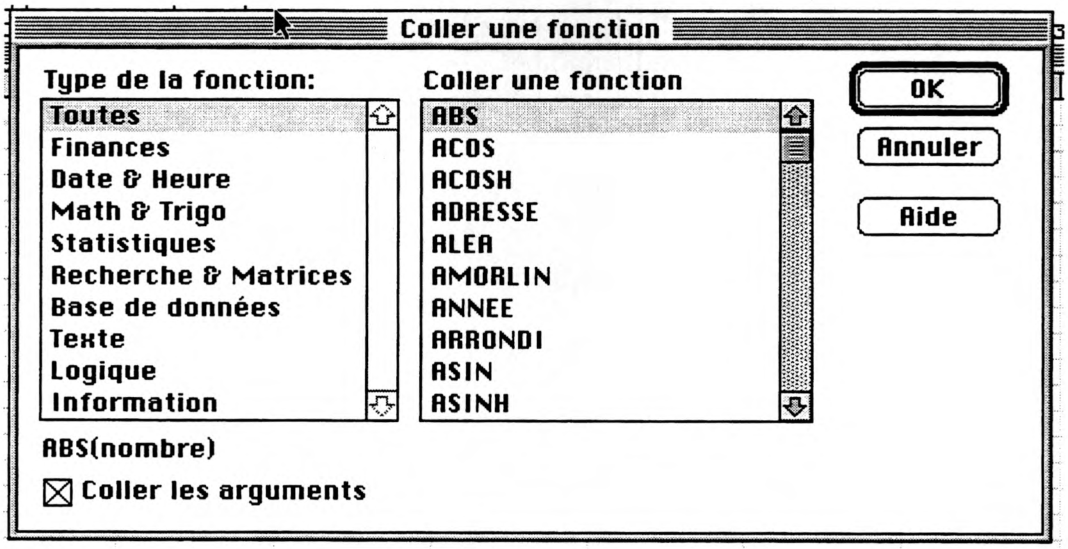
Si on possède une machine commune à toute la classe on peut corriger avec une tablette rétroprojectable, voire un ordinateur collectif (écran 15 ou 17 pouces) en augmentant la taille des nombres :



Les Fonctions préenregistrées

Une fois le logiciel pris en main, on peut utiliser des fonctions toutes préalablement programmées dans le logiciel, ces fonctions sont de trois types : les fonctions statistiques, les fonctions mathématiques et les fonctions logiques.

Nous ne parlerons dans ce document que des deux premières, vous laissant découvrir les joies des troisièmes dans un stage ultérieur.



• *Fonctions statistiques*

« Trouver la moyenne entre plusieurs notes »

On tape simplement : =moyenne (premier nombre de la suite: dernier nombre de la suite)

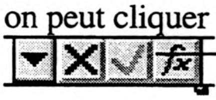
2 possibilités :

- Moyenne (nombre1 ; nombre1 ; nombre2 ; nombre3 ; nombre4)
- Moyenne (nombre1 : dernier nombre)

Il faudra pour chaque fonction , chercher exactement la procédure a effectuer en se servant de l'aide souvent explicite fournie par le logiciel.

	A	B	C
1		Contrôle 1	Contrôles 2
2	Pierre	12	15
3	Gaston	5	7
4	Jacque	18	12,6
5			
6		=moyenne(B2:B4)	
7			

on peut cliquer directement sur



appelle les fonctions préenregistrées.

Les fonctions les plus utiles dans un premier temps sont :

Fonctions statistiques

ECARTYPE(nombre1;nombre2;...)

Evalue l'écart-type d'une population en se basant sur un échantillon de cette population.

MAX(nombre1;nombre2;...)

Donne le plus grand nombre de la liste d'arguments.

MIN(nombre1;nombre2;...)

Renvoie la valeur minimale des nombres.

MOYENNE(nombre1;nombre2;...)

Renvoie la moyenne des nombres.

Fonctions mathématiques

SOMME(nombre1;nombre2;...)

Calcule la somme des arguments.

idem avec produit ....

ENT(nombre)

Arrondit un nombre à l'entier immédiatement inférieur.

ABS(nombre)

Renvoie la valeur absolue d'un nombre.

Fonctions logiques

SI(test_logique;valeur_si_vrai;valeur_si_faux)

Spécifie un test logique à effectuer.

Nous donnons quelques activités pour les élèves liées aux fonctions préenregistrées.

Carnet de notes

objectifs

Appropriation de l'outil : utiliser les fonctions préenregistrées du logiciel.
Fonction recopie
Mathématique : selon la classe et le choix de l'activité.
Statistique

Cette activité peut être adaptée à la classe mais elle doit essentiellement permettre aux enseignants de prendre en main le logiciel.

Consigne :

Fabriquer un carnet de notes qui vous donne la moyenne par contrôle, la moyenne des élèves et la moyenne générale de la classe, la moyenne pour chaque élève, l'écart –type, la note maximu, sachant que le contrôle 3 compte triple.

On impose la présentation suivante :

Noms	Contrôle 1	Contrôle 2	Contrôle 3	Contrôle 4		Moyenne
	12 sept 98	13 sept 98				
Paul	12	2	15	11		
Pierre	10	12	9,5	4,5		
Allegre	7	15	3	2		
Jacques	18	17	11	9		
Moyenne						
Maximum						
Minimum						
écart-type						
médiane						

A travers des activités similaires on pourra amener les élèves à acquérir les notions statistiques faisant actuellement partie du programme.

Extrait du programme :

Exemples conduisant à lire, à établir des tableaux, des graphiques.	Classes, effectifs d'une distribution statistique. Fréquences. Diagrammes à barres, diagrammes circulaires.	Effectifs cumulés. Fréquences cumulées. Moyennes. Initiation à l'usage de tableurs-grapheurs.	Approche de la comparaison de séries statistiques.

Réveillon

Par cette activité, on veut faire rencontrer le problème des références relatives et absolues.

En effet, on va obtenir un tableau de ce type

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1											
2	Bourgeois	1		190	49			239	210,2		
3	Pacret	2	176	85	147	247		655	-205,8		
4	Durand	3	112	270	112			494	-44,8		
5	Martin	4	175	64	43	176		458	-8,8		
6	Pelligini	5	324	76				400	49,2		
7											
8											
9								total		2246	
10								part:		449,2	

en case H1 : somme (C1: G1) avec recopie sur la colonne H
en case J9 : somme (H1 : H6)
en case J10 : J9/B6

En I2 : H2 - J10

Puis recopie sur la colonne pour obtenir J10-H2; puis J10-H3;puis J10-H4 .....

si on procède ainsi on constate

239	210,2	
655	-655	
494	-494	
458	-458	
400	-400	
	total	2246
	part:	449,2

en allant chercher dans les cellules on constate l'effet de la recopie.

J10-H2

J11-H3

J12-H4

En fait le logiciel a recopié une configuration géographique des cellules.

Soustraction d'une cellule de la colonne J et d'une cellule de la colonne J : les cellules sont séparées par 8 lignes

On considère cette recopie comme relative pour lui faire recopier les cellules de façon absolue. On désigne les cellules de la façon suivante :

J10 - H2

E. Le tableur en classe de Mathématique

a - Statistiques

Nouveau programme Troisième

CONTENUS	COMPETENCES EXIGIBLES
3. Statistique	
Caractéristiques de position d'une série statistique.	Une série statistique étant donnée (sous forme de liste ou de tableau, ou par une représentation graphique), proposer une valeur médiane de cette série et en donner la signification.
Approche de caractéristiques de dispersion d'une série statistique.	Une série statistique étant donnée, déterminer son étendue ou celle d'une partie donnée de cette série.
Initiation à l'utilisation de tableurs-grapheurs en statistique	

COMMENTAIRES
Il s'agit essentiellement d'une part, de faire acquérir aux élèves les premiers outils de comparaison de séries statistiques, d'autre part de les habituer à avoir une attitude critique face aux informations de nature statistique. On repère, en utilisant effectifs ou fréquences cumulés à partir de quelle valeur du caractère on peut être assuré que la moitié de l'effectif est englobée. Les exemples ne devront soulever aucune difficulté au sujet de la détermination de la valeur de la médiane. L'étude de séries statistiques ayant même moyenne permettra l'approche de la notion de dispersion avant toute introduction d'indice de dispersion. On introduira l'étendue de la série, et l'étendue de la partie de la série obtenue après élimination de valeurs extrêmes. On pourra ainsi aborder la comparaison de deux séries en calculant quelques caractéristiques de position et de dispersion, ou en interprétant des représentations graphiques données. -Les tableurs que l'on que peut utiliser sur tous les types d'ordinateurs permettent, notamment en liaison avec l'enseignement de la technologie, d'appliquer de manière rapide à des données statistiques les traitements étudiés.

Quatrième

CONTENUS	COMPETENCES EXIGIBLES
3. Statistique	
Effectifs cumulés, fréquences cumulées.	Calculer des effectifs cumulés, des fréquences cumulées.
Moyennes pondérées.	·Calculer la moyenne d'une série statistique.
Initiation à l'utilisation de tableurs-grapheurs en statistique	Calculer une valeur approchée de la moyenne d'une série statistique regroupée en classes d'intervalles

L'utilisation du tableur en classe ne doit pas être seulement un gadget nouveau « pour faire moderne », il doit permettre de donner aux élève un nouvel outil.

L'initiation au tableur se fait normalement dans le cours de technologie en classe de cinquième. En mathématique on va l'utiliser de feux façons différentes en ce qui concerne les séries statistiques. Pour faciliter l'utilisation des activités, ces dernières ont été rassemblées dans des annexes.

Fabriquer un modèle.

C'est le cas de l'activité Brevet. (voir fiche d'activité)

On prend le support des notes car il va permettre un investissement important de la part des élèves. C'est également en réponse aux multiples questionnement dans la classe : « M'sieur j'ai 9 de moyenne, je passe ? » « M'sieur on arrondit... » etc

L'activité présentera un sens pour l'élève et on peut espérer qu'ils seront plus impliqués que si on tente une activité sur l'élevage des escargots de Bourgogne en pays Sahélien....

On peut également travailler sur des données utilisées par les collègues d'histoire-géographie ou de SVT.

L'activité Brevet doit permettre aux élèves de comparer les moyennes obtenues par en ajoutant toutes les notes et en faisant la moyenne des moyennes.

On peut étendre cette activité en classe par une explication algébrique.

$$\left(\frac{d+e+f+g+h+i+j+k+l+m}{10}+\frac{2a+2b+2c}{6}\right)*\frac{1}{2}=\frac{d+e+f+g+h+i+j+k+l+m+2a+2b+}{16}$$

Le modèle fabriqué par l'élève lui permet de faire des simulations et de mieux comprendre comment on calcule le brevet, voir les choix qui ont été fait par cette méthode de calcul.

Etude exploratoire

Les notes de Julie Fiche d'activité 4

A travers cette activité on cherche à faire découvrir les notions statistiques au programme.

On pourrait comparer cette approche à celle qui en géométrie nous font utiliser Cabri-géomètre pour faire découvrir une notion nouvelle.

L'avantage du tableur va permettre de travailler sur les données chiffrées sans qu'auparavant on demande un travail calculatoire à l'élève, qui n'est pas l'objectif de ces activités. Pour reprendre la comparaison avec la géométrie Cabri permet à l'élève qui possède des difficultés de réalisation des objets géométriques de travailler sur ces objets.

La validation n'est pas faite par le professeur mais par la machine.

La rapîdité et la facilité d'emploi permet les essais multiples.

Pratiquement tous les exercices proposés dans le chapitre statistique des nouveaux livres de quatrième peuvent vous permettre de fabriquer des activités simples permettant l'utilisation du tableur.

b - Arithmétique -

On a constaté le retour des activités d'arithmétiques dans les nouveaux programmes, ces activités étant souvent source de calcul et d'algorithme intéressant, l'utilisation des tableurs est particulièrement intéressant

ce que dit le nouveau de programme de Troisième :

4. Nombres entiers et rationnels Diviseurs communs à deux entiers Fractions irréductibles	Déterminer si deux entiers donnés sont premiers entre eux. Savoir qu'une fraction est dite irréductible si son numérateur et son dénominateur sont premiers entre eux. Simplifier une fraction donnée pour la rendre irréductible.

Commentaires

Cette partie d'arithmétique permet une première synthèse sur les nombres, intéressante tant du point de vue de l'histoire des mathématiques que pour la culture générale des élèves.

Depuis la classe de cinquième, ls élèves ont pris l'habitude de simplifier les écritures fractionnaires : la factorisation du numérateur et du dénominateur se fait grâce aux critères de divisibilité et à la pratique du calcul mental. Reste à savoir si la fraction obtenue est irréductible ou non. On remarque que la somme et la différence de deux multiples d'un nombre entier sont eux-mêmes multiples de cet entier. On construit alors un algorithme, celui d'Euclide ou un autre, qui, donnant le PGCD de deux nombres entiers, permet de répondre à la question dans tous les cas. Les activités proposées ne nécessitent donc pas le recours aux nombres premiers. Les tableurs et les logiciels de calcul formel peuvent, sur ce sujet, être exploités avec profit.
A côté des nombres rationnels, on rencontre au collège des nombres irrationnels comme π et $\sqrt{2}$. On pourra éventuellement démontrer l'irrationalité de $\sqrt{2}$. Une telle étude peut également être mise à profit pour bien distinguer le calcul.

Fiche d'activité : PPCM et PGCD

c- Algébrisation

Plusieurs activités du même type où le tableur incite l'élève à fabriquer une formule, un algorithme de calcul afin de résoudre un problème qu'il ne peut mener expérimentalement jusqu'au bout.

La démarche est toujours la même :
.expérimentalement les élèves trouve des réponses sur un petit nombre d'essais.
.Il remplisse des tableaux de nombres
.il essaie de généraliser en trouvant une formule.
Ce type d'activité peut également être une approche de situations non proportionnelles.

Un exemple d'activité est « les escaliers ».

Voir fiche activité 6
T1: $(m^2+m)/2$ T2: m^2 T3: $2\ m^2$ -m
Pour le nombre de marches : case A3 : A2+1 et recopie.

	A	B	C	D
1	marches	T1	T2	T3
2	1	1	1	1
3	2	3	4	6
4	3	6	9	15
5	4	10	16	28
6	5	15	25	45
7	6	21	36	66
8	7	28	49	91
9	8	36	64	120
10	9	45	81	153
11	10	55	100	190
12	11	66	121	231
13	12	78	144	276
14	13	91	169	325
15	14	105	196	378
16	15	120	225	435

Cette activité permet selon le niveau de classe de travailler sur le parenthèsage et sur les équivalence de formule.

Cette activité a été faite dans ma classe collectivement.

On peut ensuite prévoir une activité du type:

Trouver le nombre de diagonales d'un polygone à n côtés.

Ou en cinquième: somme des angles d'un polygone à n côtés.

Dans ce dernier cas le travail expérimental peut se faire en utilisant Cabri-géomètre

d- Equations

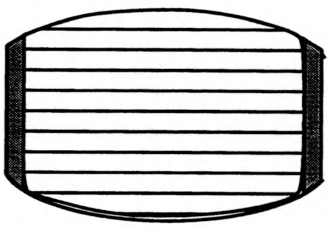
Il s'agit pour ces activités de donner du sens au concept d'équation. On donne aux élèves le moyen de résoudre des équations par essais successifs ou par utilisation de la méthode de fausse position. Pour cela, les élèves sont placés dans des conditions où la résolution mathématique est hors de leur portée : par exemple on peut donner aux élèves des formules assez complexes, et leur demander de répondre à certaines questions par utilisation du tableur.

Exemple d'activité

Trouver le volume d'un tonneau connaissant les diamètres la longueur, puis les différents diamètres connaissant le volume et la longueur par exemple.

TONNEAU (d'après 4e collection Pythagore, éditions Hatier)

Voici quelques procédés de calcul du volume intérieur d'un tonneau :



(1) Formule de Kepler : $V = \frac{\pi L}{12}(2D^2 + d^2)$

(2) Formule de l'An II : $V = \frac{\pi L}{36}(2D + d)^2$

(3) Formule de Dez : $V = \pi L \left(\frac{5D + 3d}{16}\right)^2$

(4) $V = \frac{\pi L}{36}(5D^2 + 4d^2)$

(5) $V = \frac{\pi L}{12}(D^2 + d^2 + Dd)$

(6) $V = 0{,}8\,L\,D\,d$

(7) $V = 1{,}0453\,L\,(0{,}4\,D^2 + 0{,}2\,D\,d + 0{,}15\,d^2)$

Nous avons mesuré deux tonneaux :

une barrique de 220 litres environ : L = 80 cm, d = 50 cm, D = 65 cm

une demi-barrique de 120 litres environ : L = 66 cm, d = 41 cm, D = 53 cm.

Comparer les résultats obtenus en utilisant les 7 formules.

Par une sage progression on peut ensuite déstabiliser cette méthode de tests successifs. Pour des raisons d'économie de manipulation et de calculs, les élèves seront amenés à gérer algébriquement la résolution des équations proposées. Je laisse à un prochain stage un travail pertinent à mener sur ce sujet....

Dans le même ordre d'idée, on peut concevoir de fabriquer avec un tableur un outil de calcul formel capable de résoudre des équations simples. Il est évident qu'il existe des logiciels de calcul formel conçus pour cela mais l'intérêt de l'activité réside dans la fabrication d'algorithme de résolution.... Pour ce chapitre aussi suite au prochain numéro.

e- Fonctions

Activités machines

Ces activités ont été pratiquées en classe en utilisant la calculatrice TI92 avec tablette rétro projectable.

On donne aux élèves des séries numériques et on leur demande d'utiliser le tableur pour fabriquer des machines "qui marchent de la même manière".

On peut également pré-enregistrer ces tableaux et les donner aux élèves sous forme de boite noire.

x	y
0	-18
2	-9
4	0
6	9
8	18
10	27
12	36
14	45
16	54
18	63
20	72
22	81
24	90

Puis on demande aux élèves :

1) Peut-on trouver l'image de 80 ?
2) Quel est l'antécédent de 250 ?
3) Existe-t-il un nombre qui soit sa propre image ?

(Voir aussi la fiche d'activité 7 en annexe 4)

Commentaires sur la fiche 8 « Pavage »

Cette activité oblige l'élève à changer plusieurs fois de cadre et à utiliser à la fois un logiciel de géométrie et le tableur. Attention cette activité assez longue peut être prévu dans le cadre d'un club Math par exemple.

On pourra également dans cette partie utiliser les fonctionnalités graphiques des tableurs. Je ne la traiterai pas dans ce document, mais je vous donne encore une fois rendez-vous dans un prochain stage où on examinera plus particulièrement toutes les activités rendues possibles par l'utilisation de l'ordinateur en classe de Mathématique.

ANNEXE 4

• **Fiches d'activités 1 à 9**

Fiche d'activités 1

1- Utiliser le tableur pour compléter le tableau suivant :

1-Des additions

9	-6,5	-2,5	1,9	
-10,4	0	-2,5	8	
3,1	-3,1	5	-10	

Que constatez-vous ?

Les deux tableaux suivant fonctionnent de la même manière, peux-tu trouver une ou plusieurs valeurs pour remplacer le x .Utilise le tableur et explique ta stratégie.

8	3,4	-2,7	1,8	
2,1	-7,1	5	x	
-5,4	-2,3	-4,8	-12	
-8,5				

3-Des cases vides avec l'addition

				0
15	5,2	-20	9,8	
-1,5	x	-20	4	5
y	-10	u	2,7	
-2,5	-2,5	-2,5	-2,5	
	2,5			

Expliquez votre stratégie.

Fabriquer deux tableaux qui fonctionnent de la même manière que les tableaux précédent

				-12

multiplication

				- 2

Fiche d'activités 2

1.Carnet de notes

Fabriquer un programme de carnet de notes.
Qui donnera les renseignements présents sur le tableau suivant.

Noms	Contrôle 1	Contrôle 2	Contrôle 3	Contrôle 4		Moyenne
	12 sept 98	13 sept 98				
Paul	12	2	15	11		
Pierre	10	12	9,5	4,5		
Allegre	7	15	3	2		
Jacques	18	17	11	9		
Moyenne						
Maximum						
Minimum						
écart-type						
médiane						

2. Réveillon

Petit problème qu'on doit pouvoir résoudre avec un tableur.Le réveillon.

Comme chaque année nous organisons le réveillon à plusieurs couples. Chaque couple se charge d'un achat et en fin de soirée nous équilibrons les comptes.
Fabriquer un programme permettant de connaitre la somme que chacun doit à qui.
Votre programme doit pouvoir être généralisable et donc utilisable pendant de nombreuses années.
En 1998 nous sommes 5 couples : Bourgeois, Pacret, Durand, Martin et Pelligrini
Les Bourgeois ont achetés; 2 bouteilles de Champagne à 95F l'une,divers 49F
Les Pacrets ont achetés les huitres 176 F , la dinde 247F 3 bouteilles de vin 85F Divers 147F
Durant ont achetés le fromage 112F 3 Bouteilles de champagne 270F 1 cognac 112F
Les Martin ont achetés Bûche 175F, Vins 2 bouteilles 64F, boissons diverses 43F;Divers 176F
Pelligini ont achetés des langoustes 324F divers 76F

exemple :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1		nb						Tot Payé	doit	
2	Bourgeois	1						0	0	
3	Pacret	2						0	0	
4	Durand	3						0	0	
5	Martin	4						0	0	
6	Pelligini	5						0	0	
7										
8										
9									total	0
10									part:	0

Colonne B : nombre des participants.
Comptage automatique en utilisant la fonction recopie.
Colonnes C à G : détail des dépenses.
Colonne H : Dépense pour chaque couple.
Colonne I : Balance ce que doivent certains couples ou ce qui leur est du.

Fiche d'activités 3

1. Brevet .

Faire fabriquer le modèle suivant aux élèves avec le tableur.
Chaque élève rempli la colonne C 3 à C12 en fonction de ses notes de quatrième.
D3 à D12 en fonction de ses notes actuelles.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Contôle continu						
2		Coef	Quatrième	Troisième	Moyenne		
3	Français	1					
4	Maths	1					
5	Langue vivante 1	1					
6	Sciences Physiques	1					
7	Sciences Naturelles	1					
8	EPS	1					
9	Arts plastique	1					
10	Musique	1					
11	Techno	1					
12	Options	1					
13							
14	moyenne						
15							
16	Examen						
17	Français	2					
18	Math	2				Moyenne	
19	Histoire Géo	2					
20						Moy.Générale	
21	moyenne						
22							

C14 : moyenne des notes de quatrième D14 : moyenne des notes de troisième
E3;E4;..... Moyenne par matière de quatrième et troisième
F12 : Moyenne des moyennes par matière
F14 : Moyenne de C14 et D14

Compare F12 et F14. Que constates-tu ? Est-ce que ce résultat te parait normal ?

C21 : Moyenne de l'examen
G20 : Moyenne contrôle continu et examen.
En G18 faire la moyenne pondérée de toutes les notes.

Comparer G18 et G20 Que constates-tu ? Est-ce que ce résultat te parait normal ?

Utilise ton modèle pour faire une prévision sur l'obtension de ton brevet.

Fiche d'activités 4

Julie a utilisé un tableur pour faire ses moyennes

	A	B	C	D	E
1		1°Trim	2°trim		
2					
3		12			
4		11			
5		1			
6		11			
7		10			
8		12	14		
9		10,5	13		
10		13	5		
11		12,5	17		
12		12			
13		11,5			
14		0			
15		12			
16		8			
17		2			
18					
19					
20	moyenne				
21	médiane				
22					
23				moyenne1	
24				moyenne2	

en B20 : moyenne du premier trimestre en C20 : la moyenne du deuxième trimestre
en B21 : la médiane des notes du premier trimestre : =mediane (B3: B17)
en C21 : la médiane des notes du deuxième trimestre ; =mediane (C3: C17)

Le contenu de la cellule B20 est-il le même que celui de la cellule B21 ?

note le contenu de la case C20 :
C21 :

Remplace le 5 de julie obtenu au deuxième trimestre par un 0 .
Que constates-tu ?

Remplace le 17 de julie obtenu au deuxième trimestre par un 19 .
Que constates-tu ?

Peux-tu donner une différence entre la moyenne et la médiane ?

Calcule la moyenne de Julie de deux façons différentes:

Moyenne1 : moyenne des moyennes obtenues au 1°trimestre et au deuxième trimestre.

Moyenne2 : Moyenne de toutes les notes ajoutées.

Que constate-t-on ? Pouvait-on prévoir ce résultat ?
Peut-on l'expliquer ?

Fiche d'activités 5

1.PPCM

Additionner les fractions suivantes :

$\frac{5}{6}+\frac{2}{3}$ $\qquad$ $\frac{7}{2}+\frac{3}{5}$

Pour additionner deux fractions il faut les réduire au même dénominateur.
Réduire les fractions suivantes au même dénominateur en essayant de trouver le dénominateur commun qui soit le plus petit possible.

$\frac{5}{6}$ et $\frac{7}{10}$; $\frac{1}{8}$ et $\frac{1}{12}$; $\frac{3}{50}$ et $\frac{7}{20}$

On va essayer de fabriquer une machine qui doit nous permettre de trouver très rapidement le plus petit multiple commun à deux nombres.

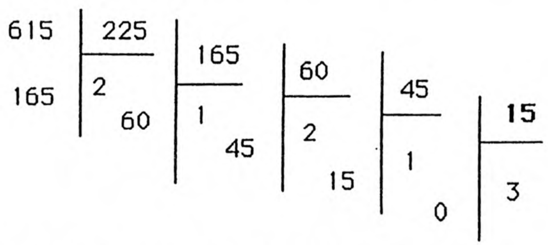
Ecrire tous les multiples de 12 :
Ecrire tous les multiples de 8

noter le plus petit multiple commun.

Utilise le tableur pour faire ce travail.

2.PGCD

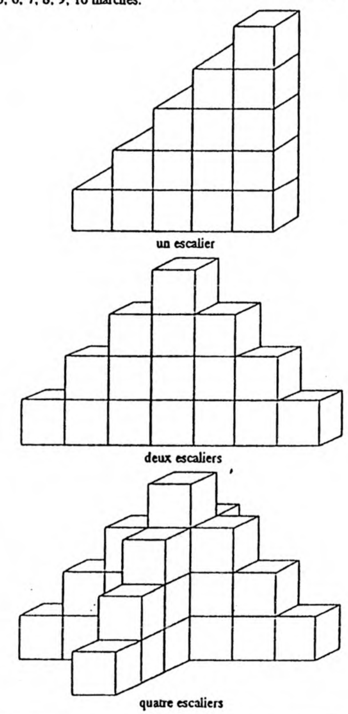
Problème chercher le PGCD de deux nombres 615 et 225
Utiliser le tableur et reproduire cet



Utiliser le tableur pour réaliser cet algorythme.

Fiche d'activités 6

Voici trois types d'escaliers construits avec des cubes.
Combien de cubes faudra-t-il pour construire des escaliers de chaque type à 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 marches.



Compter les cubes de chaque type et compléter le tableau suivant :

marches	Type1	Type2	Type3
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
100			

Si on connait le nombre de marches quel calcul fais-tu pour trouver le nombre de cube pour fabriquer un escalier du type 1. Explique ton calcul.

Si on connait le nombre de marches quel calcul fais-tu pour trouver le nombre de cube pour fabriquer un escalier du type 2. Explique ton calcul.

Si on connait le nombre de marches quel calcul fais-tu pour trouver le nombre de cube pour fabriquer un escalier du type 3. Explique ton calcul.

En utilisant le tableur essai de trouver un calcul pour nous permettre de trouver , une réponse pour chaque type si on nous donne le nombre de marches

	A	B	C	D
1	marches	T1	T2	T3
2	1			
3	2			
4	3			
5				

Fiche d'activités 7

Ma machine a la possibilité de transformer un nombre en un autre.

J'ai relevé dans le tableau ci-dessous quelques essais que nous avons effectué.

Fabrique avec un tableur une machine qui marche de la même manière.

	A	B	C	D	E	F
1	nombre que l'on rentre	7	3	2	8	6
2	nombre obtenu	35	15	10	40	30
3						

Feux-tu en utilisant le tableur , dire le nombre qui sera donné par la machine si je rentre:

le nombre 4,5 :

le nombre 1200 :

Le nombre : $\frac{3}{7}$

	A	B	C	D	E	F
1	nombre que l'on rentre	7	3	2	8	6
2	nombre obtenu	23	11	8	26	20
3						

Feux-tu en utilisant le tableur , dire le nombre qui sera donné par la machine si je rentre:

le nombre 4,5 :

le nombre 1200 :

Le nombre : $\frac{3}{7}$

Je prends l'avion pour New-York et à l'aéroport on annonce une température au sol de 3 2 **degrés.** Je m'interroge parce que je vois de la neige sur la piste.

Je me rappelle alors que les anglo-saxons utilisent un système de mesure différent du nôtre pour les températures.

Leur unité de mesure est le degré Fahrenheit noté F

Je trouve dans un journal, à la page de la météo le tableau suivant qui donne la correspondance entre ces 2 unités de mesure:

F°	-4	5	14	23	32	41	50	59	68	77	86	95	104	113	122
C°	-20	-15	-10	-5	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50

En fonction de cette correspondance peux-tu compléter le tableau ci-dessous.

C°	-30	-25	0	2,5	60	100
F°						

Pourrait-on connaissant la température en degré Celsius connaitre la correspondance en degré Farhenheit.

Fiche d'activités 8 : Pavage

Cette fiche n'est pas une fiche d'activité à donner comme telle aux élèves.

Le problème est là encore apparemment simple.

Peut-on paver le plan avec n'importe quel polygone régulier

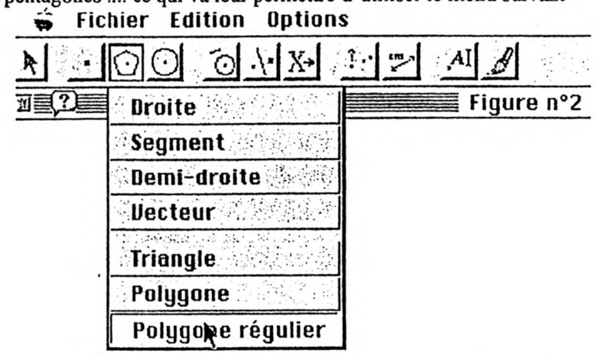
Après avoir défini ce que l'on entend par polygone régulier.

On laisse chercher les élèves en groupe, pour donner une réponse à priori à cette question.

Intuitivement les élèves pensent qu'on peut paver le plan avec n'importe quel polygone.

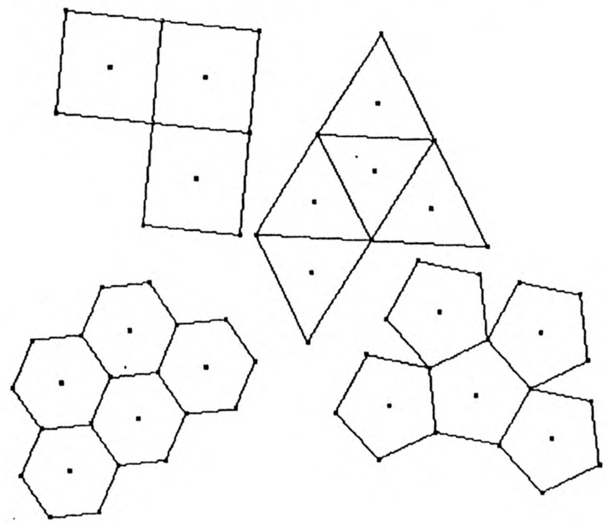
On laisse les élèves travailler en doublette, sur un ordinateur.

Ils vont devoir en utilisant le menu suivant essayer de paver le plan avec des carrés, des triangles isocèles, des pentagones .... ce qui va leur permettre d'utiliser le menu suivant

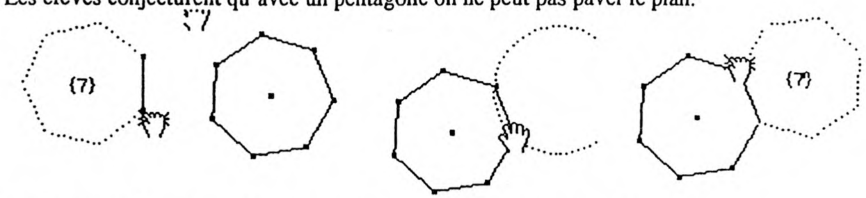


Ce qui n'est pas sans poser des problèmes, car les élèves ne sont pas habitués à fabriquer des polygones réguliers à partir du centre du polygone.

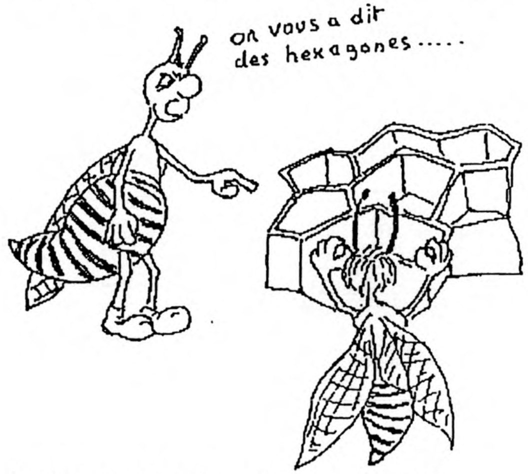
Très rapidement ils vont réaliser les constructions suivantes et conjecturer .



Pour chaque polygone, il faut créer un centre par symétrie axiale d'un précédent centre par rapport à un côté, donner le rayon du polygone , ce centre et un sommet.
Les élèves conjecturent qu'avec un pentagone on ne peut pas paver le plan.



Les élèves conjecturent qu'avec un pentagone on ne peut pas paver le plan.



On se pose alors collectivement ou en groupe la question suivante :

Pourquoi ne peut-on pas paver le plan avec n'importe quel polygone ? Quelle caractéristique doit avoir le polygone pour qu'il puisse paver le plan .

On amènera les élèves à voir qu'il faut que l'angle caractéristique de chaque polygone doit être un diviseur de 360°.

D'où la nouvelle question :

Peut-on déterminer la mesure de l'angle caractéristique d'un polygone en fonction du nombre de côtés du polygone.

En utilisant expérimentalement Cabri-géomètre on demande aux élèves de compléter le tableau suivant et de répondre aux questions:

En vous servant de Cabri géomètre essayer de compléter le tableau suivant :
On considérera des polygones réguliers c'est à dire dont tous les côtés sont égaux.

Nombre de côtés du polygone	Somme des angles	Mesure d'un angle
3		
4		
5		
6		
7		
8		

Peux-tu donner la somme des angles d'un polygone régulier de 100 côtés ? Peux-tu donner la mesure d'un angle d'un polygone régulier de 100 côtés ? Peux-tu donner la somme des angles d'un polygone régulier de n côtés ? Peux-tu donner la mesure d'un angle d'un polygone régulier de n côtés ?

Phase d'algébrisation

Peux-tu donner la somme des angles d'un polygone régulier de n côtés ? $180(n-2)$ Peux-tu donner la mesure d'un angle d'un polygone régulier de n côtés ? $\frac{180(n-2)}{n}$

Il faut dont que :

$$\frac{360}{\frac{180(n-2)}{n}} = K$$

avec K entier.
On peut ensuite soit travailler avec la TI92, en trouvant les différentes valeurs de K en fonction de n
On peut également faire travailler les élèves avec exel en faisant varier la valeur de n.

Cette activité est intéressante car elle oblige les élèves à naviguer dans plusieurs cadres. Géométrie, Algèbre Elle amène les élèves à utiliser les outils informatiques comme des outils. L'informatique n'ai pas une fin en soi, on l'utilise en fonction des besoins qu'on rencontre. Chaque logiciel possède ses spécificités, il faut les connaitre pour en faire bon usage.

Mercredi 16 Décembre 1998 et Jeudi 17 Décembre 1998
Collège Olympique
38000 - Grenoble –
Mercredi 10 février 1999 et Jeudi 11 février 1999
au Collège Charles de Gaule
07 Guilherand Granges
Mercredi 7 Avril 1999 et Jeudi 8 Avril 1999
au Collège Garibaldi
73100 - Aix les Bains

Avec la participation active de

Medalin Valérie	ClG Jacques Brel	Beaurepaire
Alfonso Danielle		
Julliard Elisabeth	CLG Gière	Grenoble
Rey Danielle	CLG Plan Menu	Coublevie
El Qabli Mohammed	CLG Lamartine	Cremieu
Pellison Chantal	CLG Lamartine	Cremieu
Garnier Marie Alice	CLG Vercors	Grenoble
Paulin Florence	CLG Vercors	Grenoble
Joly Dominique	CLG Olympique	Grenoble
Mounier Gilles	CLG Olympique	Grenoble
Reyx Christiane	CLG Olympique	Grenobl
Tourtet Geneviève	CLG Les trois Saules	La Mure d'Isère
Demortière Michèle	CLG Le Vergeron	Moirans
Milesi Danielle	CLG Marcel Chene	Pontcharra
Fresier Marie-jo	CLG du Gresivaudant	St Ismier
Gallet Geneviève	CLG Les Allinges	St Quentin-Fallavier
Luyton Marie-Françoise	CLG Condorcet	Tullins
Mignardot Sylvie	CLG Condorcet	Tullins
Freydiere Anne-marie	CLG Jean Prevost	Villard de Lans
Coron Marie Anne	CLG La Garenne	Voiron
De Sainte Maresville	CLG La Garenne	Voiron
Gamby Annick	CLG La Garenne	Voiron
Guerre-Chaley Catherine	CLG Le Vergeron	Moirans
Grange Eric	CLG LA Lombardière	Annonay
Chassagne Danielle	CLG Jacques Brel	Beaurepaire
Vial Anne Marie	CLG Jacques Brel	Beaurepaire
Janon Claudine	CLG A.Mercoyrol	Cruas
Klein Francine	CLG Charles de Gaule	Guilherand Granges
Rony Denise	CLG Heyrieux	Heyrieux
Germain Thérèze	CLG	Heyrieux
Berthet Marie Jose	CLG Robert Doisneau	L'Isle d'Abeau
Basset Georges	CLGJongkind	La Côte St Andre
Terme Marie	CLG La Segalière	Largentière
Roure Daniel	CLG Leonce Vieljeux	Les Vans
Haute Michel	CLG Daniel Faucher	Loriol sur Drôme
Paravy MClaire	CLG Daniel Faucher	Loriol Sur Drôme
Joux Robert	CLG Jean Macé	Portes les Valence

Brunet Marie Noelle	CLG Claude Débussy	Romans sur Isere
Mollier SABET Henri	CLG Claude Débussy	Romans-sur-Isère
Clot Nadine	CLG B Malossane	St Jean de Royans
Vellay Agnes	CLG B Malossane	St Jean en Royans
Fontaine Roger	CLG Paul Valériy	VALENCE
Hassan Azzam	CLG DE L'isle	Vienne
Morin Jacques	CLG de L'Isle	Vienne
Gest Maryse	CLG René Cassin	Villefontaine
Lienard Marie-Agne	CLG Servenoble	Villefontaine
Rascol Jean Louis	CLG Servenoble	Villefontaine
Rascol Marie Hélène	CLG Servenoble	Villefontaine
Gimenez Geneviève	CLGCaribaddi	Aix les Bains
Girardet Sylvie	CLGCaribaddi	Aix les Bains
Hiblot Jean Claude	CLGCaribaddi	Aix les Bains
Malod Jean Paul	CLGCaribaddi	Aix les Bains
Mosset Monique	CLGCaribaddi	Aix les Bains
Carriere Nicole	CLG de Cluse	Cluses
Lablanche Esther	CLG de Cluse	Cluses
Marduel Colette	CLG de Cluse	Cluses
Marouze Beatrice	CLG de Cluse	Cluses
Quelfennec Josiane	CLG de Cluse	Cluses
Salmon Jean Christophe	CLG de Cluse	Cluses
Callies Dominique	CLGBeauregard	Cran Gevrier
Ekoue Martine	CLG Le Calloud	La Tour du Pin
Emery Michel	CLG Le Calloud	La Tour du Pin
Jadeau Sylvette	CLG Le Calloud	La Tour du Pin
Molliere Denis	CLG Le Calloud	La Tour du Pin
Nguyen Brigitte	CLG Le Calloud	La Tour du Pin
Vernier Michel	CLG Le Calloud	La Tour du Pin
Romascheff Albert	CLG Jean Rostand	Moutiers
Delullier Joseph	CLGDe Reigniers	Reignier
Cochet Françoise	CLG Les Aravis	Thones
David Laurence	CLG Les Aravis	Thones
Faure Nicole	CLG Les Aravis	Thones