UNIVERSITE JOSEPH FOURIER
GRENOBLE 1

irem
Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques
de Grenoble

Situation adidactique

Document du Stage

Didactique des Maths de la 4° à la 2nde

St Jorioz 6 et 7 février 1997

Annie Bessot Marie Thérèse Carra
Serge Cecconi

Avec les stagiaires plus ou moins consentants...

Vincent Bernard	Collège Jean Monnet 74410 St Jorioz
Dominique Calliès	Collège Beauregard 74960 Cran-Gevrier
Marie-Paule Crovella	Collège Jean Monnet 74410 St Jorioz
Joseph Frison-Roche	Collège Beauregard 74960 Cran-Gevrier
Jean Michel Labaille	Collège Jean Monnet 74410 St Jorioz
Gilberte Lecocq	Collège R.Blanchard 74008 Annecy
Charles Martin	Lycée Charles Beaudelaire 74960 Cran-Gevrier
Mireille Michel	Collège Beauregard 74960 Cran-Gevrier
Lucienne Petit	Collège Beauregard 74960 Cran-Gevrier

Sommaire

Premier jour

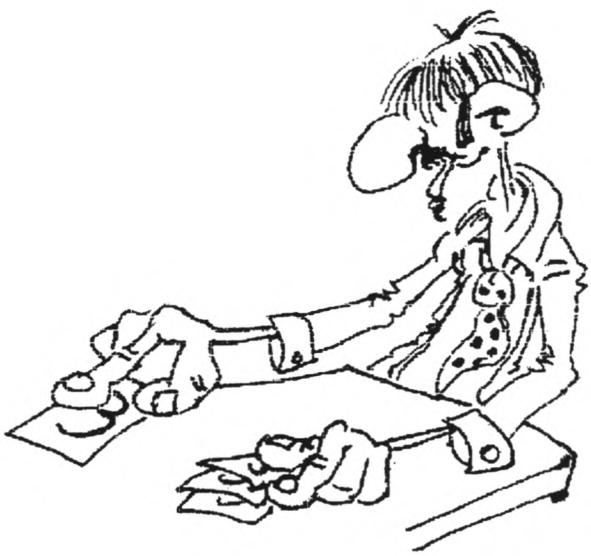
Second jour

Premier jour - Matin... Et l'Irem créa le stage ...
« LE COMPTE EST BON »
D'après J.Briand et M-H.Salin, Bordeaux 992-93

Phase 1 (consigne)

Les stagiaires sont équi-répartis par groupe de n.

Consigne
Vous êtes par groupe. Chaque groupe constitue une équipe.
Je vais vous proposer un nombre entier. Chacun d'entre vous écrira sur une feuille de papier un nombre entier inférieur ou égale à 9. La somme des nombres de chaque équipe doit être égale au nombre que j'ai proposé.
Dès que je vous propose un nombre, vous n'avez plus la possibilité de parler entre vous.



Phase 2 (Phase d'action)

L'animateur propose un nombre et gère la demande de concertation.(il ne donne pas au le départ, l'autorisation de se concerter : les membres de l'équipe doivent "revendiquer" la concertation (pour décider comment ils joueront),afin de décider d'une stratégie).

Pour chaque nombre proposé, il recueille les résultats, *sans noter le nombre de chaque équipier, mais en écrivant au tableau le résultat de l'addition de chaque équipe*.

Dès que tous les groupes répondent juste, la phase d'action est arrêtée.

Groupe	1	2	3
1° set	R	E	R
2° set	R	R	R

Phase 3 (Phase de formulation : phase d'écriture de message)

Consigne
Chaque équipe va se mettre d'accord sur une rédaction de sa stratégie de façon à ce qu'une autre équipe puisse, après lecture du message, utiliser cette stratégie.

Voir en annexe 1 les messages produits par les groupes à St Jorioz

Phase 4 (Phase de validation : réception des messages et de mise à l'épreuve)
Si des erreurs ont été relevées, il appartient d'en connaître l'origine (message, interprétation, etc.).
Du point de vue gestion, les messages du groupe Gi seront donnés au groupe Gi+1.
Supposons que G1 est passé son message à G2, *les autres groupes vont proposer des nombres afin de découvrir la stratégie utilisée par le groupe lecteur G2.*
Dès que les autres groupes ont soit trouvé soit une erreur soit découvert la stratégie, on passe à l'analyse d'un autre message.
Tous les groupes deviennent tour à tour meneur de jeu, joueur avec une autre stratégie (message reçu) et observateur de l'effet de sa stratégie et de sa formulation.

Phase 5

Cette phase est abordée si la phase 4 ne nécessite pas de retour à la formulation des stratégies.

> *Consigne*
> Si nous jouions tous ensemble (une seule équipe) quelle stratégie décideriez vous de mettre en oeuvre ?

Questions sur l'activité

Pour chacune des phases que vous venez de vivre :
- quel est le rôle de l'animateur ?
- quel est le rôle des stagiaires ?
- quelles sont les caractéristiques de chacune des phases ?

Quelles sont les intérêts et les problèmes posés par cette activité ?

Chaque groupe prépare un transparent pour rendre public aux autres groupes son analyse.

Voir en annexe 2 les transparents obtenus lors du stage de St Jorioz

ANNEXE 1

Groupe 1

1 - Chacun effectue la division du nombre par 3 avec une décimale au moins.
2 - il y a trois joueurs
. le premier choisit comme nombre le quotient entier par défaut.
. le deuxième le quotient entier par excès.
. le troisième l'arrondi à l'unité.

stratégie du groupe 1 trouvée par le groupe 3

$x = 3q + r$ division euclidienne de x par 3
si $r = 0$ $x = q + q + q$
si $r = 1$ $x = q + (q+1) + q$
si $r = 2$ $x = q + (q+1) + (q+1)$

Groupe 2

Soit x le nombre (notre stratégie ne convient que jusqu'à $x = 19$
On décide d'un ordre de jeu.

. le premier joueur met la partie entière de $\frac{x}{2}$.

. le second calcule la partie entière de la moitié du reste appelée y. Il enlève 1 à y et affiche ce nombre.

. le troisième affiche $y + 1$.

stratégie du groupe 2 trouvée par le groupe 1

Soit N le nombre donné
le premier fait $N = 2n + r = n + (n+r)$ et donne n.

le deuxième fait $E\left(\frac{n+r}{2}\right) - 1$

le troisième fait $E\left(\frac{n+r}{2}\right) + 1$

correction proposée : le 2° fait $E\left(\frac{n+r}{2}\right)$

le 3° $E\left(\frac{n+r}{2}\right) + 1$

amélioration

Pour 3 joueurs au plus. Soit x le nombre donné maximum 27.
On effectue la division euclidienne par 3
- Si $x = 3k$ alors A;B;C mettent k
- Si $x = 3k + 1$ alors A met k; B met k; C met $k + 1$
- Si $x = 3k + 2$ alors A met k; B met k+1; C met $k + 1$

si plus de joueurs D;E;.... mettent 0 si $x \leq 27$

Groupe 3

x : nombre proposé.
$x = 3q + r$
division euclidienne de x par 3

$$x = \underset{\text{joueur1}}{q} + \underset{\text{joueur 2}}{q} + \underset{\text{joueur 3}}{(q+r)}$$

on garde son N° à chaque partie

stratégie du groupe 3 trouvée par le groupe 2

Un ordre de jeu est établi. Soit x le nombre donné.

Les joueurs 1 et 2 mettent $E\left(\frac{x}{3}\right)$

si $\frac{x}{3}$ est un entier $+ \frac{1}{3}$ alors le joueur 3 met $E\left(\frac{x}{3}\right) + 1$

si $\frac{x}{3}$ est un entier $+ \frac{2}{3}$ alors le joueur 3 met $E\left(\frac{x}{3}\right) + 2$

Autres stratégies trouvées dans le cas de groupes à 4 joueurs.

Groupe 1

4 personnes numérotées P1 ; P2 ; P3 ; P4 nombres choisis

Nombre divisé par 4. Quotient : q entier Reste : r entier (0; 1; 2 ou 3)

Si r=0 -> P1 = P2 = P3 = P4 = q

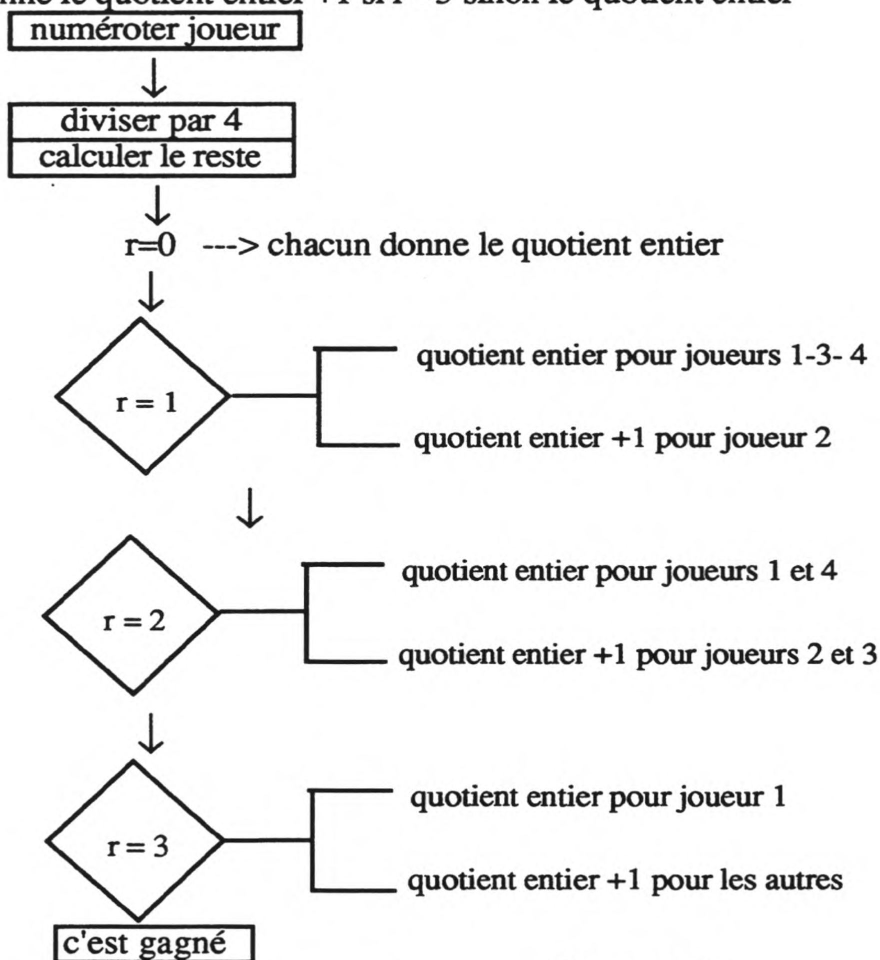
Si r=0 -> $\begin{cases} P1=q+1 \\ P2=P3=P4=q \end{cases}$

si r=2 -> $\begin{cases} P1=P2=q+1 \\ P3=P4=q \end{cases}$

si r=2 -> $\begin{cases} P1=P2=P3=q+1 \\ P4=q \end{cases}$

Groupe 2

Diviser le nombre par 4 (nombre de participants) et calculer le reste r.
le 1er du groupe donne le quotient entier
le 2ème du groupe donne le quotient entier +1 si $r \neq 0$ sinon le quotient entier
le 3ème du groupe donne le quotient entier +1 si $r \geq 2$ sinon le quotient entier
le 4ième du groupe donne le quotient entier +1 si r =3 sinon le quotient entier



Groupe 3

Chaque joueur est numéroté de 1 à 4. n donné
Chaque joueur effectue la division euclidienne de n par 4.n = 4xq +r
si r = 0, chaque joueur écrit q
si r=1 le joueur 1 affiche q +1, les autres q+1
si r = 2, les joueurs 1 et 2 affichent q+1, les autres q
si r = 3, les joueurs 1, 2 et 3 affichent q+1, le dernier q.

ANNEXE 2

Groupe 1

Rôle de l'animateur

Donner le nombre de joueurs par groupes
Donner la règle du jeu avec un exemple
Rappeler plusieurs fois qu'on ne doit pas communiquer par groupe.
Nous laisser entendre qu'on pourrait trouver une stratégie par groupe.
Donner quelques nombres à trouver
Demander d'appliquer, puis de découvrir la stratégie d'un autre groupe.

Rôle des stagiaires

Comprendre la règle et réaliser qu'on peut trouver une stratégie et qu'on a le droit de la définir ensemble.
Rechercher et mettre en oeuvre cette stratégie.(Pour 3 joueurs)
Étendre la stratégie trouvée à 4 joueurs.
Rédiger cette stratégie pour la transmettre à un autre groupe.
Appliquer la stratégie du groupe 3 pour que le groupe 2 la découvre.
Découvrir la stratégie du groupe 2.
Modifier la stratégie(erronée) du groupe 2.
Énoncer une règle à n joueurs.

Groupe 2

Phases	Rôle de l'animateur	Rôle des joueurs	Caractéristiques
Présentation	Présentation vague à quel niveau ? But du jeu ?	Surprises et acceptation du jeu.	Effervescence
Premières réactions	Observation et réponses vagues (encore) Volonté d'écourter ?	Perplexité (but du jeu ?) Recherche rapide d'une stratégie.	Phase courte
Jeu	Affichage des nombres Grille de résultats avec Échecs et réussites	Remise en cause de la stratégie et prise de conscience de ses défauts.	Réflexion Confrontation aux réussites des autres.
Recherche d'autres stratégies	Organisation	Trouver une autre stratégie. Proposer des nombres	Échange Meilleur compréhension.
Stratégie commune et essai	Mise en place	Accord rapide sur la stratégie commune.	Unanimité.
Premier bilan	Commentaires et recul par rapport à l'activité.	Écoute et réactions.	Reprise de la casquette "Prof."

Groupe 3

Phases du jeu	Animateur	Joueurs
Mise en place	Énoncé peu précis. Volontaires ??	Mauvaise compréhension. Regret du manque d'un coup d'essai.
Partie active	Donne des nombres. Choix pertinent des nombres	Mise en évidence de la nécessité de la stratégie. Mise en place. Essai Vérifications.
Étude comparative des stratégies		Changement de rôle.
		Compréhension communication. Mise en forme à partir de l'idée de départ. Difficultés pour entrer dans la stratégie de l'autre
Stratégie commune		

Premier jour - Après midi
Éléments de didactique des mathématiques (Annie Bessot, *IREM de Grenoble)*

L'enseignant se distingue de l'élève en ce qu'il est "supposé savoir", mais aussi en ce qu'il est "supposé capable" d'anticiper sur ce que l'élève va avoir à apprendre. De plus le système didactique a une caractéristique particulière, celle d'avoir pour finalité de disparaître: si l'enseignant réussit dans sa mission, il doit pouvoir se retirer, et l'élève doit pouvoir maintenir sa relation au savoir hors de sa présence.

- La transposition didactique

> "Un savoir n'existe pas "in vacuo" dans un vide social : tout savoir apparaît, à un moment donné, dans une société donnée, comme ancré dans une ou des institutions. " (Y.Chevallard, 1989)

D'où les propositions :

- tout savoir est savoir d'une institution,
- un même objet de savoir peut vivre dans des institutions différentes
- pour qu'un savoir puisse vivre dans une institution, il faut qu'il se soumette à un certain nombre de contraintes, ce qui implique notamment qu'il se modifie, sinon il ne peut pas se maintenir dans l'institution.

Ce jeu des savoirs dans les institutions amène à distinguer plusieurs types de manipulation relatives aux savoirs :

- production
- utilisation
- enseignement
- *manipulation transpositive permettant à un savoir le passage d'une institution dans une autre institution :* l'institution de transposition est une institution cachée, non visible qu'Y.Chevallard appelle "noosphère".

On parlera de *transposition didactique* quand l'institution cible est une institution d'enseignement. Y.Chevallard appelle "noosphère" l'institution de transposition qui "manipule le savoir" pour le faire vivre dans une institution d'enseignement de ce savoir.

La didactique des savoirs est l'étude systématique des situations dans lesquelles un individu cherche à modifier volontairement le rapport au savoir d'un autre.

Regardons maintenant le cas particulier des transpositions didactiques.

La théorie de la transposition didactique met en évidence deux points fondamentaux:

- le problème de la légitimation des objets de savoir enseignés
- l'apparition systématique d'un écart entre un savoir enseigné et les références qui le légitiment, écart dû à des contraintes pesant sur le fonctionnement du système d'enseignement.

• *Premier chaînon* (institution productrice) : -> objet de savoir

Dans nos sociétés modernes, les institutions productrices de savoirs scientifiques occupent une place dominante par rapport aux autres institutions : *elles sont la source de légitimation la plus stable pour l'enseignement le plus exposé*, l'enseignement général, qui est l'enseignement où la société expose ses savoirs fondamentaux. Pour les enseignements professionnels, moins exposés à la critique de l'ensemble de la société, les savoirs peuvent trouver leur légitimation ailleurs que dans un savoir savant, dans les pratiques professionnelles proches par exemple.

L'existence d'un objet de "savoir savant" suppose déjà toute une élaboration. On peut le considérer comme un produit d'une institution. Cette activité scientifique est une activité humaine, qui comme telle, s'inscrit dans une histoire personnelle, celle du chercheur. Au cours de son activité, le chercheur élabore des connaissances, dont certaines lui paraissent suffisamment nouvelles et intéressantes pour être communiquées à la communauté mathématique. Le chercheur donne alors à ces connaissances une forme aussi générale que possible, selon les règles discursives en cours dans la communauté scientifique. Cette transformation des connaissances est une partie très importante de l'activité mathématique.

> "Un chercheur, pour communiquer aux autres chercheurs ce qu'il pense avoir trouvé, le transforme :
> - il supprime tout d'abord tout ce que l'on pourrait appeler l'enfance de sa recherche : les réflexions inutiles, les erreurs, les cheminements tortueux, trop longs, voire menant à des impasses. Il supprime également tout ce qui relève de l'ordre des motivations personnelles ou du soubassement idéologique de la science tel qu'il le perçoit. Nous désignerons l'ensemble de ces suppressions par le mot de *dépersonnalisation.*
> - Il supprime ensuite l'histoire antérieure (tâtonnement, fausses pistes) qui a conduit à cette recherche, il la détache éventuellement du problème particulier qu'il voulait résoudre et recherche la contexte le plus général dans lequel le résultat est vrai. C'est ce que nous désignerons par le mot de *décontextualisation.* " (G.Arsac, 1989)

Effet positif de ce travail : il rend le savoir public, donc utilisable et vérifiable par n'importe qui, tout au moins par tous les membres de la communauté scientifiques.

Effet négatif de ce travail : il fait disparaître partiellement ou totalement le contexte de la découverte qui devient mystérieuse, privée de sens.

Cette perte de sens n'existe pas pour les chercheurs contemporains et du même domaine que l'auteur de la publication qui eux, connaissent le dessous des cartes, et la position exacte de la découverte dans le réseau des problèmes qui leur sont familiers, car ils ont accès à d'autres niveaux de communication.

• *Deuxième chaînon* (noosphère) : Objet de savoir -> objet à enseigner

C'est l'existence assez facilement vérifiable d'écarts qui permet d'argumenter de l'existence d'institutions où le travail de transformation des savoirs s'effectue. Le fait que ces institutions n'aient pas de visibilité sociale permanente les rend difficiles à saisir : on retrouve ici le fait que la transposition didactique est un modèle, une théorie.

Ce n'est pas l'enseignant qui transforme directement, de sa propre initiative, un savoir "savant" en objet d'enseignement.

> "Citons ici les résultats d'un sondage réalisé en juin 1984 auprès d'un échantillon de 182 professeurs de mathématiques de la classe de 3ème.
> Question : "*Quelles sont vos sources bibliographiques?*"
> Pour répondre à cette question, les enseignants avaient le choix entre plusieurs possibilités, nous extrayons quelques unes d'entre elles particulièrement significatives pour notre propos :
> - manuels d'enseignement du premier cycle; fréquemment: 78%; rarement ou jamais: 6%
> - manuels d'enseignement supérieur; fréquemment: 1%; rarement ou jamais: 84%. " (G.Arsac, 1989)

Le système d'enseignement est un système ouvert, c'est à dire qu'il a des relations avec l'environnement social (parents, chercheurs, institutions utilisatrices) ; son fonctionnement doit être compatible avec cet environnement. Pour qu'un savoir soit scolarisable, c'est à dire susceptible de devenir un objet à enseigner, il faut qu'il puisse respecter un certains nombres de contraintes. Voici la liste donnée par Y.Chevallard (1985):

> "- la désyncrétisation du savoir *[c'est à dire la possibilité de délimiter des savoirs partiels pouvant s'exprimer dans un discours autonome]*
> - la dépersonnalisation du savoir
> - la programmabilité de l'acquisition du savoir
> - la publicité du savoir
> - le contrôle social des apprentissages. "

• *Troisième chaînon* (institution d'enseignement) : Objet à enseigner -> objet enseigné

C'est à ce niveau qu'intervient l'enseignant : la transposition didactique se continue à l'intérieur même du système didactique..

- Contrat didactique / Situation adidactique

• *Contrat didactique*

Ce que chacun a le droit de faire ou de ne pas faire à propos d'un savoir repose sur un ensemble de règles explicites mais surtout implicites. G.Brousseau a appelé contrat didactique l'ensemble de règles qui partage et limite les responsabilités de chacun, élèves et professeur, vis à vis d'un savoir mathématique enseigné.

Il avait proposé ce concept en 1978 puis en 1980 pour expliquer l'échec d'élèves de l'école élémentaire *réussissant dans toutes les disciplines enseignées sauf en mathématiques* (échec électif en mathématiques) : les échecs électifs proviendraient non pas d'une inaptitude des élèves à apprendre mais de contrats didactiques spécifiques à tels ou tels savoirs mathématiques empêchant certains élèves d'entrer dans un processus d'apprentissage de ces savoirs.

> "Au cours d'une séance ayant pour objet l'enseignement à un élève d'une connaissance déterminée *(situation didactique)*, l'élève interprète la situation qui lui est présentée, les questions qui lui sont posées, les informations qui lui sont fournies, les contraintes qui lui sont imposées, en fonction de ce que le maître reproduit, consciemment ou non, de façon répétitive dans sa pratique de l'enseignement. Nous nous intéressons plus particulièrement à ce qui, dans ces habitudes, est spécifique des connaissances enseignées" (G.Brousseau, 1980)

Phénomènes analysables comme effets du contrat didactique

Injonction paradoxale pour l'enseignant :

> "[...] tout ce qu'il [l'enseignant] entreprend pour faire produire par l'élève les comportements qu'il attend, tend à priver *ce* dernier des conditions nécessaires à la compréhension et à l'apprentissage de la notion visée : si le maître dit ce qu'il veut, il ne peut plus l'obtenir
>
> L'élève n'ayant eu à effectuer ni choix, ni essais de méthodes, ni modification de ses propres connaissances ou de ses convictions n'a pas donné la preuve de l'appropriation visée. Il n'en a donné que l'illusion. " (G. Brousseau, 1986, p.66)

Effet Topaze : l'enseignant doit négocier les conditions de production de la réponse de l'élève. Il essaie de faire en sorte que le sens de la réponse soit le plus riche possible. En cas d'échec, il ajoute des informations réductrices du sens, jusqu'à accepter des conditions qui provoquent la réponse de l'élève sans que ce dernier ait pu investir le moindre sens.

Topaze de Marcel Pagnol : "des moutonsses étai-hunt réunisse..."

L'effet Jourdain est une forme de l'effet Topaze : l'enseignant accepte de reconnaître comme indice du savoir une production ou un comportement d'élève qui ne sont en fait que des réponses ayant des causes banales.

Injonction paradoxale pour l'élève :

> "s'il accepte que [...] le maître lui enseigne les résultats, il ne les établit pas lui-même et donc il ne les apprend pas[...]. Si, au contraire, il refuse toute information de la part du maître, alors, la relation didactique est rompue. Apprendre, implique, pour lui, qu'il accepte la relation didactique mais qu'il la considère comme provisoire et s'efforce de la rejeter. " (G.Brousseau, 1986, p.66)

• *Situation adidactique* (enseignement/apprentissage)

Le projet de l'élève est d'apprendre. Une conception courante suppose un lien de simple transfert de l'enseignement vers l'apprentissage: l'élève enregistre ce qui est communiqué par l'enseignant avec peut être quelques pertes d'informations. De nombreux travaux ont montré le caractère erroné de ce point de vue.

La compréhension de la situation didactique et en particulier l'apprentissage de l'élève nécessite de compléter le triangle élève - enseignant - savoir par un quatrième élément: le milieu.

Hypothèse psychologique (apprentissage par adaptation) :

Le sujet apprend en s'adaptant (assimilation et accommodation) à un milieu qui est producteur de contradictions, de difficultés, de déséquilibres.
Cette hypothèse se réfère à la théorie psychogénétique piagétienne.

EXEMPLE DE SITUATION NON DIDACTIQUE D'APPRENTISSAGE : LE VÉLO
(d'après G.Brousseau, 1988)

Situation 1 : vélo à 4 roues, une à l'avant et trois en arrière

> "avec ces petites roues, l'enfant apprend à pédaler et à tourner le guidon suivant le modèle implicite suivant :
>
> • je veux aller à droite, je tourne le guidon vers la droite ;
>
> • je veux aller à gauche, je tourne le guidon vers la gauche.
>
> D -> D
>
> G -> G" (G.Brousseau, p.62)

Situation 2 : vélo à deux roues (on enlève les deux petites roues de l'arrière)

> "[...] l'enfant veut aller tout droit mais le vélo penche à droite, et donc se dirige vers la droite, l'enfant veut donc revenir vers la gauche et tourne son guidon vers la gauche suivant le modèle implicite acquis. Il tourne le guidon vers la gauche et ... tombe !
>
> Pour garder l'équilibre {...] il doit d'abord tourner le guidon du côté où il penche pour obtenir une poussée qui le redresse, suivant donc un schéma inversé (momentané) mais indispensable.
>
> G -> D
>
> D -> G
>
> Le changement de schème est caractéristique de l'apprentissage."

Hypothèse didactique
Un milieu sans intentions didactiques (c'est à dire non volontairement organisé pour enseigner un savoir) est insuffisant à induire chez un sujet toutes les connaissances que la société souhaite qu'il acquière.

L'enseignant doit donc provoquer chez les élèves les adaptations souhaitées par un choix judicieux des situations qu'il lui propose.

> "L'enseignant n'a pas pour mission d'obtenir des élèves qu'ils apprennent, mais bien de faire en sorte qu'ils puissent apprendre. Il a pour tâche, non la prise en charge de l'apprentissage - ce qui demeure hors de son pouvoir - mais la prise en charge de la création des conditions de possibilité de l'apprentissage." (Y.Chevallard, 1986)

Nous dirons alors que le sens d'une connaissance pour l'élève provient essentiellement des situations où la connaissance intervient ou est intervenue comme adaptations pertinentes.

L'enseignant va chercher à proposer une situation *dans laquelle ce qu'on fait, a un caractère de nécessité par rapport à des obligations qui ne sont ni arbitraires, ni didactiques, mais de l'ordre du savoir*. Il faut que l'enseignant parvienne à ce que l'élève enlève de la situation les présupposés didactiques, que la résolution du problème devienne pour l'élève indépendante du désir de l'enseignant : la dévolution que cherche à faire l'enseignant pour que l'élève apprenne est donc celle d'une *situation non didactique* (analogue à la situation du vélo)·

Il y a des phases adidactiques dans tout enseignement, en général hors du contrôle de l'enseignant. Y.Chevallard a introduit la notion de *temps didactique* pour désigner le décalage entre le temps de l'enseignement et le temps de l'apprentissage : il y a dans l'enseignement une fiction d'un temps didactique homogène. Dans sa thèse (1992), A.Mercier montre que l'introduction officielle d'objets de savoir nouveau modifie le rapport à des objet déjà là, naturalisés, transparents. Il y a alors dévolution à l'élève d'une responsabilité par rapport à ces objets de savoirs naturalisés : en tant qu'objets anciens, il a la responsabilité de les savoir. C'est une phase adidactique pour ces objets anciens (anciens par rapport au temps de leur enseignement).

Quelles sont les conditions pour qu'une situation puisse être vécue comme adidactique ?

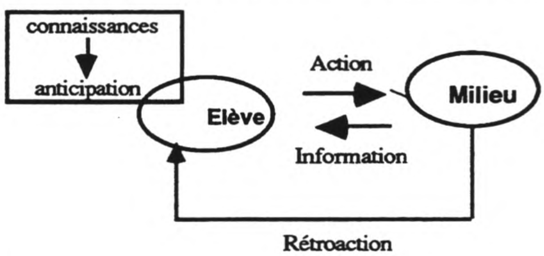
Il faut au minimum les conditions suivantes:

- l'élève peut envisager une réponse mais cette réponse initiale *(procédure de base qui est relative aux savoirs et connaissances antérieurs)* n'est pas celle que l'on veut enseigner : si la réponse était déjà connue, ce ne serait pas une situation d'apprentissage. Sans stratégie de base l'élève ne comprend pas le jeu, même si la consigne est claire.
- cette procédure de base doit se révéler très vite insuffisante ou inefficace pour que l'élève soit contraint de faire des accommodations, des modifications de son système de connaissance. Il y a incertitude de l'élève quant aux décisions à prendre ;
- la connaissance visée est *a priori* requise pour passer de la stratégie de base à la stratégie optimale
- il existe un milieu pour la validation : le milieu permet des rétroactions
- le "jeu" est *répétable.*

> "L'apprentissage va consister à changer de stratégies et à changer les connaissances qui leur sont associées. " (Brousseau, 1988, p.61)

• Rétroaction : influence du milieu sur l'élève, reçue par l'élève comme une sanction, positive ou négative, relative à son action et qui lui permet d'ajuster cette action, d'accepter ou de rejeter une hypothèse, de choisir entre plusieurs solutions.

• Schéma général des interactions de l'élève et du milieu dans une situation adidactique :



- Situation fondamentale

Les choix des situations qui sont nécessaires à tout projet d'enseigner un savoir se font contre d'autres choix possibles, rarement explicités. Or la signification du savoir pour l'élève dépend en grande partie de ces décisions à propos du savoir (découpage et organisation du savoir, problèmes posés, mises en scène...). Le processus de choix commence dès le niveau de la noosphère qui produit les programmes et les manuels et continuent quand l'enseignant élabore sa leçon et quand il enseigne.

La notion de *situation fondamentale* désigne une famille de situations *non didactiques*, la plus large possible, spécifiques des fonctionnements du savoir visé, et donc caractéristique de significations possibles de ce savoir.

Elle est fondamentale:

1- par rapport à la connaissance: la situation est telle que la connaissance apparaisse sous une forme choisie, comme la solution, ou comme le moyen d'établir la stratégie optimale.

2- par rapport à l'activité d'enseignement: la situation doit permettre de représenter le plus possible de "situations observées dans les classes, même les moins satisfaisantes, dès lors qu'elles parviennent à faire apprendre à des élèves une forme de savoir visé....Elles seront obtenues par le choix de certaines variables caractéristiques de cette situation."

Elle permet donc une analyse des significations a priori possibles du savoir enseigné, des significations présentes ou absentes dans un système d'enseignement.

• *Notion de variables didactiques* (G.Brousseau)

"Un champ de problèmes peut être engendré à partir d'une situation par la modification des valeurs de certaines variables qui, à leur tour, font changer les caractéristiques des stratégies de solution (coût, validité, complexité...etc.)

[...] Seules les modifications qui affectent la hiérarchie des stratégies sont à considérer (variables pertinentes) et parmi les variables pertinentes, celles que peut manipuler un professeur sont particulièrement intéressantes : ce sont les *variables didactiques*. "

"Ces variables sont pertinentes à un âge donné dans la mesure où elles commandent des comportements différents. Ce seront des variables didactiques dans la mesure où en agissant sur elles, on pourra provoquer des adaptations et des régulations : des apprentissages. "

• *Notion de saut informationnel* (G.Brousseau)

"Le saut informationnel consiste, après avoir trouvé une situation fondamentale faisant "fonctionner" une notion, à choisir d'abord les valeurs de ses variables de telle manière que les connaissances antérieures des élèves permettent d'élaborer des stratégies efficaces...puis, sans modifier les règles du jeu, à changer les valeurs des variables de façon à rendre beaucoup plus grande la complexité de la tâche à accomplir. De nouvelles stratégies doivent être établies qui demandent la construction de nouvelles connaissances. "

Exemple : Le jeu de la course à n

D'après G.Brousseau, 1978, Étude locale des processus d'acquisition en situations scolaires, *Enseignement élémentaire des mathématiques n°18*, éd. IREM de Bordeaux

Jeu 1. **"La course à 20"**

Règle du jeu

Le jeu comporte deux adversaires qui disent un nombre tour à tour. Il s'agit pour chacun des adversaires de réussir à dire 20 le premier.

Le premier qui joue a le droit de dire 1 ou 2. On ne peut dire un nombre que s'il s'obtient en ajoutant 1 ou 2 au nombre que l'adversaire vient de dire.

Faire quelques parties et formuler une stratégie gagnante (c'est à dire qui permette de gagner quoi que fasse l'adversaire).

Réponse : gagne celui qui joue le premier en disant 2, puis 5, 8, 11, 14, 17, 20 (qu'il peut dire quoique dise l'adversaire)

Commentaire : très vite on "sait" que celui qui dit 17 a gagné : la course à 20 devient la course à 17. On peut donc réitérer le raisonnement. En fait la suite gagnante se trouve "en descendant" : 20, 17, 14 etc.

• **Les jeux suivants se jouent avec les mêmes équipes d'adversaires.**

Jeu 2. **"La course à 38"**

Il s'agit de réussir à dire 38 le premier. Celui qui commence à jouer a le droit de dire un entier *non nul* inférieur ou égal à 4. On ne peut dire un nombre que s'il s'obtient en ajoutant un nombre inférieur ou égal à 4 au nombre que l'adversaire vient de dire.

Formuler une stratégie gagnante

Pour arriver à dire 38 le premier quel nombre faut-il dire juste avant ?

(Raisonnement analogue au 17 de la course à 20) Si je dis 37, mon adversaire peut ajouter 1 et dire 38 ; si je dis 36, mon adversaire peut ajouter 2 et dire 38 ; si je dis 35, mon adversaire peut ajouter 3 et dire 38 ; si je dis 34, mon adversaire peut ajouter 4 et dire 38 ; si je dit 33, quoiqu'ajoute mon adversaire - 1, 2, 3 ou 4, j 'ajouterais le complément à 5 : 1+4, 2+3, : je dirais donc 38 le premier.

Stratégie gagnante : gagne celui qui joue le premier en disant 3. Suite gagnante : 38, 33, 28, 23, 18, 13, 8, 3

Jeu 3. **"La course à 56"**

Il s'agit de réussir à dire 56 le premier. Le premier qui joue a le droit de dire un entier non nul inférieur ou égal à 6. On ne peut dire un nombre que s'il s'obtient en ajoutant un nombre inférieur ou égal à 6 au nombre que l'adversaire vient de dire.
Pouvez-vous gagner en utilisant la stratégie que vous avez proposée après le jeu 2?

Réponse : Non, **gagne celui qui joue le second** en disant 7 que l'on ne peut jamais dire le 1er !
Suite gagnante : 56, 49, 42, 35, 28, 21, 14, 7, 0

Jeu 4. "La course à 5929"

Il s'agit de réussir à dire 5929 le premier Le premier qui joue a le droit de dire un entier non nul inférieur ou égal à 2. On ne peut dire un nombre que s'il s'obtient en ajoutant un nombre inférieur ou égal à 2 au nombre que l'adversaire vient de dire.

Réponse : **le jeu se transforme en : qui gagne ? faut-il commencer ou jouer en 2nd ? en disant quel nombre ?**
Si on commence à raisonner comme dans les jeux précédents, on cherche le dernier nombre que l'on doit dire pour dire le premier 5929. Ce dernier nombre est 5926 qui est à la "bonne" distance de 5929, c'est à dire à la distance 3 : si mon adversaire ajoute 1, j'ajoute 2 (et je dis le premier 5929) - s'il ajoute 2, j'ajoute 1 (et je dis encore le premier 5929). Le jeu de la course à 5929, devient le jeu à 5926.
5929, 5926, 5923 ... : cette liste s'obtient par soustractions réitérées de 3.
Il devient très coûteux de trouver toute la suite gagnante : par économie, on ne va chercher que quelques uns des entiers de la liste gagnante pour arriver le plus rapidement possible à l'entier le plus petit. Si on soustrait à 5929, 1000 fois 3 on obtient un entier de la liste : 2929. Pour trouver un entier de la liste plus petit que 1000, on peut soustraire à 2929, 800 fois 3 par exemple et on obtient 529. Ainsi de suite juqu'à 1.
exemple : $5929 - 3 \times 1000-3 \times 800-3 \times 100-3 \times 70--3 \times 6 = 1$
D'où la réponse : gagne celui qui joue le premier en disant 1

Une situation générale des jeux de la course à n

> Le jeu comporte deux adversaires qui disent un nombre tour à tour. Il s'agit pour chacun des adversaires de réussir à dire **n** le premier.
> Le premier qui joue a le droit de dire un entier non nul inférieur à **p**. On ne peut dire un nombre que s'il s'obtient en ajoutant un entier non nul inférieur à **p** au nombre que l'adversaire vient de dire.
> [n et p sont des entiers naturels avec n > p]

Cette situation génère les 4 jeux décrit ci-dessus en donnant des valeurs aux variables n et p.

- Quel savoir mathématique fournit un outil de résolution économique et optimal pour les jeux de la course à n ?

la division euclidienne de n par l'entier (p+1) : $n = (p+1) \times q+r$ avec $0 \leq r \leq (p+1)$
Le "sens" de cette division (dans les jeux de la course à n) est la soustraction réitérée de (p+1) à n : le nombre de soustractions réitérées pour arriver au plus petit entier est le quotient de cette division, le plus petit entier auquel on arrive, est le reste. Le nombre (p+1) que l'on soustrait de façon réitérée est le diviseur.
Pour le jeu 1, la division de 20 par 3 donne comme reste 2 et pour arriver à 2 il faut soustraire 6 fois 3.
Pour le jeu 4, la division de 5929 par 3 donne 1 et le nombre de soustraction de 3 est 1000+800+100+70+6, c'est à dire 1976.

- Quelles peuvent être des variables didactiques du problème de la course à n pour un apprentissage de ce savoir mathématique ?

V1 : n multiple de (p+1) ou non
Si n n'est pas multiple de (p+1) il faut commencer - la suite gagnante est une suite arithmétique de raison (p+1) et de premier terme le reste.
Si n est multiple de (p+1), il ne faut pas commencer - la suite gagnante est une suite géométrique de raison (p+1)
[passage des jeux 1, 2 au jeu 3]

V2 (taille de n relativement à p) : n petit par rapport à p / n grand par rapport à p
Si n est petit par rapport à p, l'écriture de **tous** les entiers de la suite gagnante est possible : la stratégie de

soustraction réitérée de (p+1) est une stratégie optimale concurrente à la division euclidienne qui ne donne pas la liste !!
Si n est très grand relativement à p, la stratégie de soustractions réitérées devient très coûteuse (d'autant plus que n est grand par rapport à p). On ne peut alors atteindre que quelques uns des entiers de la suite gagnante. Le jeu change alors de nature : pour gagner, faut-il commencer ou jouer en 2nd ? en disant quel nombre ?
La stratégie des soustractions réitérées doit s'adapter et se transformer en une stratégie qui permet de (re)trouver le sens de la division euclidienne (on cherche à soustraire à n le multiple de (p+1) le plus grand possible)
[passage des jeux 1, 2, 3 au jeu 4 : on a là un exemple de saut informationnel]

Conclusion : le jeu de la course à n comme situation fondamentale

Si on modélise les jeux de la course à n par une situation générale, on obtient une situation fondamentale de la division euclidienne dont le sens est celui de la soustraction réitérée.

Description d'un scénario de "la course à n"

Scène 1

La maîtresse explique la règle du jeu et commence une partie au tableau contre un enfant, puis cède sa place à un autre enfant, les deux enfants terminent la partie.

Scène 2

Les enfants jouent le jeu par groupe de deux. Ils jouent plusieurs parties. Les nombres joués sont écrits, chaque joueur utilisant une colonne d'une feuille commune aux adversaires.

Scène 3

La classe est répartie en deux équipes adverses. Le jeu se déroulera au tableau entre deux champions désignés au hasard par la maîtresse. Avant chaque partie un temps est accordé pour la concertation à l'intérieur des équipes. Les équipes jouent plusieurs parties. Les champions sont désignés à chaque partie, après le temps de concertation.

Scène 4

La classe est toujours séparée en deux équipes La maîtresse demande d'énoncer des propositions, découvertes qu'ils ont faites et qui leur ont permis de gagner. Chaque proposition d'une équipe est examinée par l'équipe adverse, elle est acceptée comme vraie ou bien rejetée comme fausse. Les découvertes acceptées sont inscrites au tableau au bénéfice des équipes qui les ont énoncées.

Éléments de corrigé

D'après G.Brousseau, 1978, C.Margolinas, 1989 et A.Bessot, 1994

Scène 1

La maîtresse commence une partie contre un enfant. Le fait de pratiquer le jeu en même temps que de donner la consigne a pour but d'assurer que les règles intériorisées par l'enfant, sont bien les mêmes que celles données par la maîtresse: l'action réduit l'ambiguïté du message en introduisant des *rétroactions*. Mais la maîtresse se retire pour laisser la place à un enfant. Le jeu complet d'un enfant contre la maîtresse aurait pour effet d'empêcher la dévolution du problème: quand l'enfant joue contre la maîtresse, *qui sait jouer*, ce qu'il cherche à savoir, dès qu'il a compris les règles, c'est *comment elle joue,* et pas comment on peut gagner en raisonnant. Ainsi c'est pour permettre le processus de dévolution que la maîtresse se retire comme adversaire. Malgré ce retrait, pendant tout le jeu, et en particulier pendant le déroulement des scènes 2 et 3, la maîtresse reste responsable des règles du jeu, et en dernier recours, juge si on a triché ou non.

Scène 2

C'est une situation typique d'une *situation d'action.* Les élèves jouent 2 à 2, l'un *contre* l'autre.

Chaque élève est devant un milieu: la suite des nombres joués jusque là. Dès que son partenaire a joué, il doit prendre une décision et agir sur le milieu en proposant à son tour un nombre. L'enjeu est de gagner. Au bout de quelques coups la sanction survient: la partie est gagnée ou perdue. La *procédure de base* est de savoir ajouter 1 ou 2 à un nombre inférieur à 20, le choix des nombres à ajouter (1 ou 2) se faisant au hasard. Au fur et à mesure que l'enfant joue de nouvelles parties, il va développer des stratégies, c'est à dire *des raisons de jouer un nombre plutôt qu'un autre.* L'élève construit une représentation de la situation qui lui sert de modèle pour prendre des décisions.

> Nous appelons modèle implicite l'ensemble des relations ou des règles selon lesquelles l'élève prend ses décisions sans être capable d'en avoir conscience et a fortiori de les formuler (ce qui ne veut pas dire qu'une règle d'action apparaît toujours sans qu'on soit capable de la formuler). (G.Brousseau, 1978)

Le milieu est donc composé à la fois, dans chaque partie de deux suites de nombres joués par les adversaires, mais aussi, dans l'ensemble des parties, du jeu de la course à 20 lui-même. Les enfants ont les moyens de savoir s'ils ont gagné sans que la maîtresse intervienne et personne ne statue sur le fait que quelqu'un a une meilleur stratégie qu'un autre.

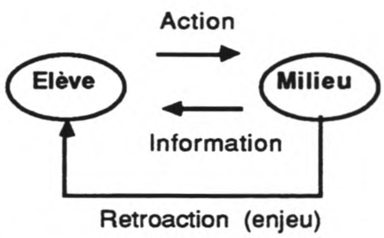
Situations d'action

• Conditions:

- qu'il existe une procédure de base insuffisante
- qu'il y ait incertitude de l'élève quant aux décisions à prendre
- que le milieu permette des rétroactions
- que le jeu soit répétable
- que la connaissance visée soit logiquement requise pour passer de la stratégie de base à la stratégie optimale

• Les interactions avec le "milieu":

L'élève exprime ses choix et ses décisions par des actions sur le milieu, sans aucun codage linguistique significatif.



• Rétroaction: influence du milieu sur l'élève.

Cette influence est reçue par l'élève comme une sanction, positive ou négative, relative à son action et qui lui permet d'ajuster cette action, d'accepter ou de rejeter une hypothèse, de choisir entre plusieurs solutions.

Scène 3

Cette situation a les caractéristiques d'une *situation de formulation.*

Cette scène comporte deux phases:

- phase a.

L'élève champion est au tableau et joue: il est dans la situation précédente d'action. L'élève qui n'est pas au tableau recueille toute l'information en regardant ce qu'écrivent les deux champions mais *il ne peut ni agir, ni intervenir*.

- phase b.

Les élèves discutent au sein de chaque équipe. Le milieu est constitué de l'ensemble des parties jouées et en particulier de la dernière partie écrite au tableau. Pour gagner, il ne suffit pas qu'un élève sache jouer (c'est à dire qu'il ait un modèle implicite) mais il doit indiquer à ses coéquipiers quelles stratégies il propose: il est conduit à anticiper c'est à dire à prendre conscience des stratégies qu'il utiliseraient, *son seul moyen d'action étant de formuler ses stratégies.* La formulation explicite des connaissances est d'autant plus contrainte qu'aucun élève n'est certain d'être désigné comme champion (choix au hasard).

Les élèves sont donc dans des positions *dissymétriques* par rapport à l'action.

Le milieu est beaucoup plus complexe que dans la scène 2. Il est constitué pour une part des partenaires de l'équipe considérés en tant que récepteurs des formulations (ils comprennent ou ne comprennent pas), et pour une autre part du jeu des deux champions dans son ensemble (ils ont gagné ou perdu).

Dans une telle situation c'est la valeur *informative* des propositions qui compte et non leur valeur de vérité. Des phases de validation peuvent apparaître (discussion spontanées sur la validité des stratégies) mais elles apparaissent ici comme un moyen pour l'action.

Situations de formulation

• Conditions:

- qu'il y ait nécessité de communication entres élèves coopérants
- que les positions des élèves soient dissymétriques sur le plan :
  des moyens d'actions sur le milieu
  ou des informations
- que le milieu permettent des rétroactions:
  avec le milieu pour l'action (R1)
  avec le récepteur du message (R2)

• Les interactions avec le "milieu":

L'élève agit en émettant un message supposé changer l'incertitude du récepteur et en général l'état du milieu

Scène 4

Cette situation a les caractéristiques d'une *situation de validation.*

> Faire des mathématiques ne consiste pas seulement à recevoir, apprendre et émettre des messages mathématiques corrects et pertinents. Énoncer un théorème, ce n'est pas communiquer une information, c'est toujours affirmer que ce que l'on dit est vrai dans un certain système [...] Nous considérons que faire des mathématiques est d'abord pour l'enfant une activité sociale et non pas seulement individuelle. Le passage de la pensée naturelle à l'usage d'une pensée logique comme celle qui régit les raisonnements mathématiques s'accompagne de la construction, du rejet, de la reprise de différents moyens de preuve: rhétorique, pragmatique, sémantique ou syntaxique. (G.Brousseau, 1978)

Dans une situation de validation l'élève doit faire des *déclarations* soumises au jugement de l'interlocuteur qui ne peut pas être comme dans la scène 3 un simple récepteur. Cet interlocuteur doit pouvoir protester, refuser une raison qu'il juge fausse, réfuter, prouver à son tour: ils doivent être tous les deux dans des positions *symétriques,* tant du point de vue de l'information que des moyens de rétroaction. Aussi, la discussion maître - élève est très défavorable même lorsque le maître pratique un dialogue raffiné pour effacer son autorité.

Si l'on veut éviter que l'art du discours et l'autorité l'emporte sur la consistance, la logique, l'efficacité des preuves, on ne peut pas laisser la discussion se libérer des rapports avec la situation, à laquelle renvoie le discours des enfants et qui lui donne un sens.

L'enjeu implicite de ce type de situation est la mise en place de règles de débat; ces règles ayant un statut de notion paramathématique, on peut prévoir que le rôle maître ne pourra se limiter au rôle d'arbitre. C'est donc une situation particulièrement difficile à négocier.

Situations de validation

• Conditions:

- qu'il y ait nécessité de communication entres élèves s'opposant (proposant et opposant)
- que les positions des élèves soient symétriques sur le plan:
  des moyens d'actions sur le milieu,
  des informations
- que le milieu permettent des rétroactions:
  avec le milieu pour l'action - messages (R1)
  avec le jugement de l'interlocuteur (R2)

• Les interactions avec le " milieu":

Les messages échangés sont des assertions, théorèmes, des démonstrations, émis et reçus comme tels.

INDICATIONS BIBLIOGRAPHIQUES

• Didactique des mathématiques

Arsac G. et al (1989). *La transposition didactique en mathématiques, en physique, en biologie,* éd. IREM de Lyon et LIRDIS

Brousseau G. (1978). Étude locale des processus d'acquisitions scolaires, *Enseignement élémentaire des mathématiques n°18,* éd. IREM de Bordeaux

Brousseau G. (1988). Didactique fondamentale, in *Didactique des mathématiques et formation des maîtres à l'école élémentaire,* Actes de l'université d'été, Publication de l'I.R.E.M. de Bordeaux

Brousseau G. (1989). Utilité et intérêt de la didactique pour un professeur de collège, *Revue "petit x"*, n°21, I.R.E.M. de Grenoble

Chevallard Y. (1985). *La transposition didactique - du savoir savant au savoir enseigné,* éd. La Pensée Sauvage, Grenoble. (1991 : 2ème édition)

Duroux A. (1983). La valeur absolue; difficultés majeures pour une notion mineure. *Revue "petit x"*, n°3, I.R.E.M. de Grenoble

Mercier A. (1992). La biographie didactique d'un élève et les contraintes temporelles de l'enseignement, Recherche en Didactique de Mathématiques, vol.15/1, éd. La Pensée Sauvage, Grenoble

• Calcul algébrique

Arcavi A. et al (1990). L'algèbre avant la lettre, *Petit x*, n° 24

Aubrée M. (1985). Étude de modèles erronés utilisés par les élèves du premier cycle en algèbre : un essai thérapeutique, *Petit x*, n° 8

Capponi B., Clarou P., (1984) Éléments pour l'élaboration d'activités de calcul algébrique en 1er cycle, *Petit x*, n° 5

Chevallard Y. (1984). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège, première partie, *Petit x*, n° 5, (1989). deuxième partie, *Petit x*, n° 19

Sainfort A. (1988). Mémoire sur une inconnue, *Petit x*, n° 16

• Proportionnalité

Bodin A. (1987). La proportionnalité en classe de 6ième, *Petit x*, n° 13,

Galai M-C. et al (1989). Analyse de deux situations-problèmes autour de la proportionnalité, *Petit x*, n° 22

Michonneau J., Pfaff, N., (1990) La proportionnalité en géométrie : le théorème de Thalès, *Petit x*, n° 23, pp. 41-59.

• Notion de fonction

Groupe "Lycée" de l'Irem de Clermont-Ferrand, (1993) Introduction à la notion de fonction en 2nde, *Repères-Irem*, n° 10.

René de Cotret, S., (1988). Une étude sur les représentations graphiques du mouvement comme moyen d'accéder au concepts de fonction ou de variable dépendante ? *Petit x*, n°17

Bulletin Inter-Irem-Premier Cycle (1992) *Des chiffres et des lettres*

Bulletin inter-Irem-Second Cycle (1993) *Mathématique en seconde : énoncés et scénarios*

Second jour - Matin

Document 1 : Questionnaire enseignants

niveaux quatrième / troisième/ seconde

Établissement :

Niveau d'enseignement : 4° 3° 2° [entourer la(es) bonne(s) réponse(s)]

Question 1

a) Donnez l'énoncé d'un exercice courant sur les fonctions au niveau de la quatrième / troisième / seconde (selon vos classes).

b) Donnez la solution que vous attendez d'un bon élève de quatrième / troisième / seconde (selon vos classes) à cet exercice courant :

Question 2

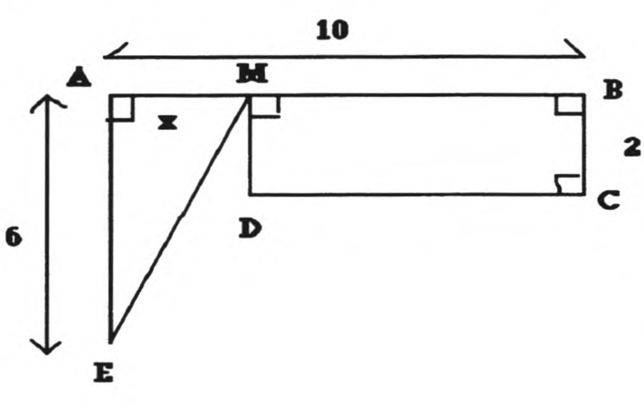
Estimez le nombre d'heures de cours et le nombre de devoirs à la maison que vous consacrez à l'étude des fonctions au niveau quatrième / troisième / seconde (selon vos classes) :

Question 3

Utilisez-vous couramment un manuel au niveau quatrième / troisième / seconde (selon vos classes) ? Si oui, lequel :

Réponse Questionnaire enseignants

Établissement : *Collège Beauregard*
Niveau d'enseignement : 3°



1°- Exprimer Y1 aire de AEM en fonction de x .
2° - Même question avec Y2 aire de MDCB
3°- Représentation graphique dans le même repère.
4° - Lire les coordonnées approximatives du point d'intersection.
Quels renseignements nous donnent ces coordonnées pour les aires de AEM et MDCB ?

livres utilisé : TRANSMATH 4° et 3°

Établissement :*Collège Beauregard*
Niveau d'enseignement : 3°

L'unité de longueur est le cm.
ABC est un triangle isocèle de sommet A tel que : AB = AC = x et BC = 6 .
On note P(x) le périmètre du triangle ABC et A(x)l'aire du carré dont le périmètre a même mesure que celui du triangle ABC.

1 - Déterminer :
   a) P(x)
   b) A(x)

2 - P et A sont-elles des applications affines ?

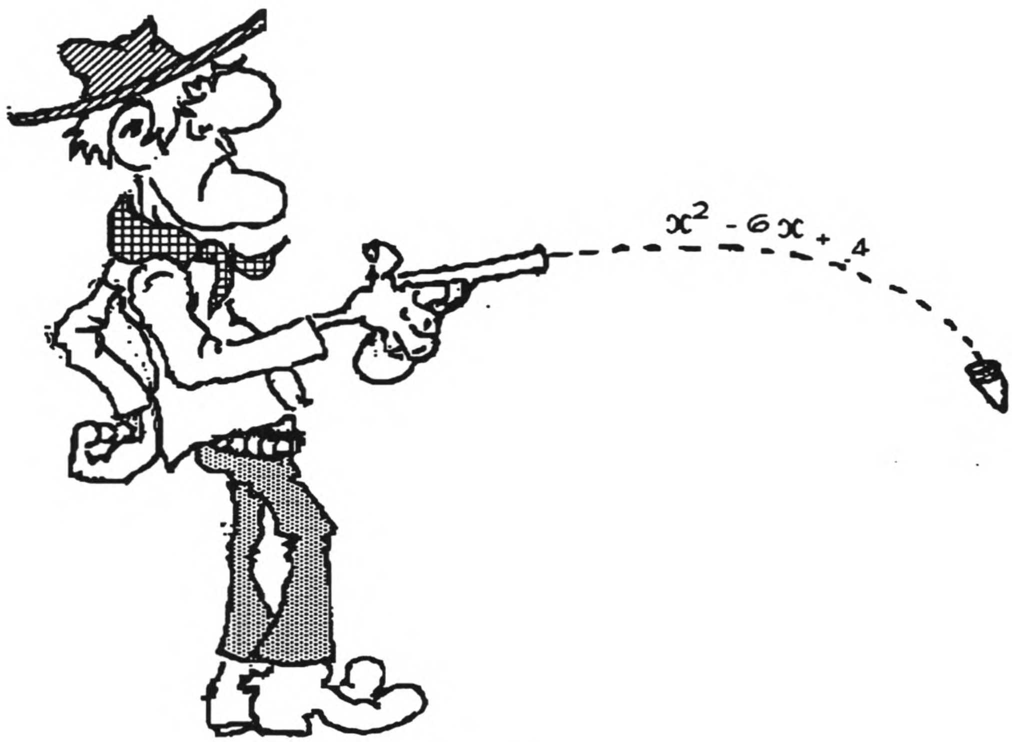
livres utilisés : Belin

Estimez le nombre d'heures de cours et le nombre de devoirs à la maison que vous consacrez à l'étude des fonctions :
5 à 6 heures de cours 3 devoirs maison.

Établissement :*Lycée Beaudelaire*
Niveau d'enseignement : 2°

On considère la fonction f définie sur R par $f(x) = x^2 - 6x + 4$

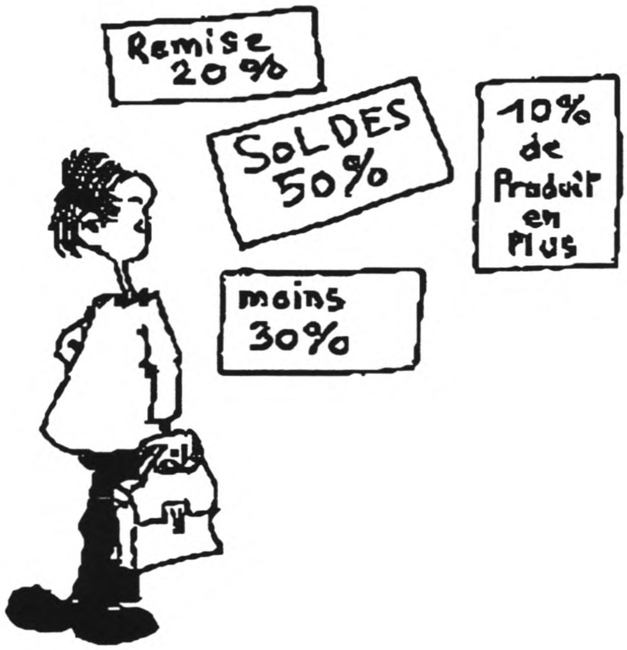
1) a) Déterminer les images par f de $\frac{5}{2}$ et $(1-\sqrt{2})$
   b) Déterminer les antécédents par f de 4 et -5
2) Etudier la parité de f.
3) a- Etant donné deux réels a et b, écrire sous forme factorisée f(a)-f(b).
   b- Déterminer le sens de variation de f sur $-\infty$; 3 [3 ; $+\infty$ [
   c - Dresser le tableau de variation de f.
4) Représenter le graphe f sur [-1;7] puis résoudre graphiquement dans R :
$f(1) = -4$
$f(x) \geq 4$
$f(x) < 0$



Établissement :*Collège Beauregard*
Niveau d'enseignement : 4°

Au moment des soldes , une boutique de vêtements affiche 30% de réduction sur les prix.
1 - Combien paie-t-on un vêtement qui coûtait 210 F avant les soldes ?
2 - Combie coûtait un vêtement payé 280 F après réduction ?
3 - Si on appelle x, le prix en franc, avant les soldes et y le prix en franc après réduction, exprimer y en fonction de x.
4 - Retrouver en utilisant la réponse du 3 les réponses aux questions 1 et 2.

livres utilisés : Belin
Estimez le nombre d'heures de cours et le nombre de devoirs à la maison que vous consacrez à l'étude des fonctions : 5 heures de cours 1 devoir maison.



Établissement :*Collège Jean Monnet*
Niveau d'enseignement : 4°

Une voiture consomme 8 litre d'essence au 100 km.
a) On désigne par y le nombre de litres d'essence sur une distance de x Km , exprimer y en fonction de x.
b) Représenter graphiquement l'application linéaire qui à x associe y, pour x compris entre 0 et 500 (bien choisir les unités sur chaque axe.)
c) Utiliser le graphique pour déterminer une valeur approchée:
- du nombre de litres d'essence nécessaire pour faire 340 km
- de la distance que cette voiture peut parcourir avec 17 l d'essence.

d) Controler par le calcul les résultats des questions précédentes.

livres utilisés : Pythagore 4° (hatier)
Mathématiques 4° (hachette) Terracher Livre des élèves.

Estimez le nombre d'heures de cours et le nombre de devoirs à la maison que vous consacrez à l'étude des fonctions :
5 heures de cours 1 devoir maison.
Si on doit étudier des problèmes avec mouvements uniformes de un ou plusieurs mobiles 2 semaines.

Document 2

Merci de proposer les deux exercices suivants en devoir individuel dans votre (vos) classe(s) à deux moments différents de votre enseignement.

---

exercice 1. Une société de location de voitures propose, pour un modèle donné de voiture et pour une journée de location, un versement de 400F auquel s'ajoute 1,50F par kilomètre parcouru .

a) Complète le tableau suivant :

Nombre de km parcourus	100	150	200	350
Prix de la location, en Francs				

b) Si on désigne par x le nombre de kilomètres parcourus en une journée, exprime, en fonction de x, le prix payé à la société de location.

Exercice 2. Dans ma ville, le prix à payer pour une course de taxi s'obtient en additionnant deux nombres :

- la prise en charge, fixe, qui ne dépend pas du nombre de kilomètres parcourus,
- le prix des kilomètres parcourus, proportionnel au nombre de kilomètres.

J'ai payé 32 F pour une course de 10 km et 47 F pour une course de 16 km.
Exprime le prix y (en francs) d'une course en fonction de la distance x (en kilomètres).

Analyse préalable de l'exercice 2

- **Procédure P0** :

Méthode arithmétique
Raisonnement : Pour 6 km on paye 15 F de plus, donc on paye par km 15F divisé par 6, donc 2,5F par km.

Calcul : 47 - 32 = 15F
16-10= 6km
15 :6 = 2,5
32-2,5x10 =7

- Les autres procédures ont en commun l'écriture d'un sytème :

$$\begin{cases} 10a + b = 32 \\ 16a + b = 47 \end{cases}$$

Résolution du système :

- **Procédure P1** : méthode de la fausse position (enseigné autrefois avant l'algèbre)

on prend
a = 2 par exemple d'où : 10x2+b=32 donc b = 12
16x2+12 = 44 donc a = 2 pas assez grand
a = 3 même raisonnement on trouve b = 2
d'où 16x3+2 = 50 trop grand
on essaie a = 2,5 et ça marche !!

- **Procédure P2** : par combinaison

- **Procèdure P3** : par substitution

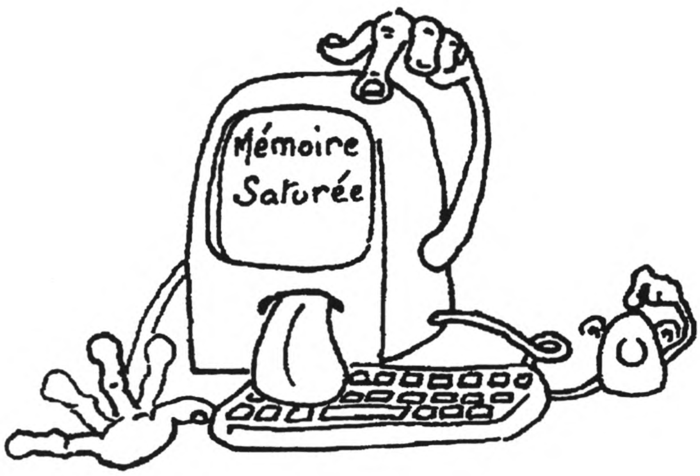
Résultats des classes de Quatrième

Exercice 1

	Tableau	Exact	Faux		Non Rep.	Σ
Formule			**P**	**NP**		
Exact		69,5 %				69,5%
Faux	**P**					
	Non P	9,5%				9,5%
N R		17,6%				17,6%
Σ		2,3%	1%			3,3%
Σ		99%	1%			100%

Exercice 2

		Système Posé				Autre		N.R.	Σ
	P0	Seul	P1	P2	P3	prop.	n.pro		
Juste	10 %					4,2 %			15 %
Juste mais Incomplet	3 %								3 %
Faux						32 %	7,5 %	44 %	82 %



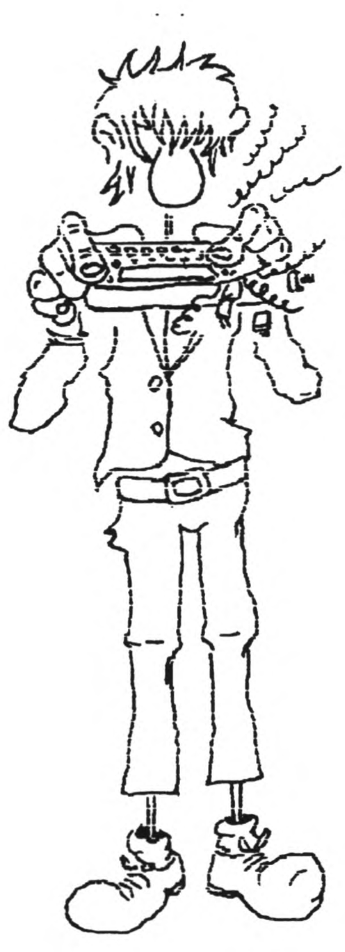
Résultats des classes de Troisième

Exercice 1

	Tableau	Exact	Faux		Non Rep.	Σ
Formule			P	NP		
Exact		46 %		5,4 %		51,35 %
Faux	P	4,5 %	2,7 %			7,2 %
	Non P	14,4 %	0,9 %	4,3 %		15,8 %
N R		15,3 %	0,9 %	5,4 %		21,6 %
Σ						
Σ		80 %	4,5 %	15,3 %		100%

Exercice 2

		Système Posé				Autre		N.R.	Σ
	P0	Seul	P1	P2	P3	prop.	n.pro		
Juste									0%
Juste mais Incomplet	7,14%	7,14%			4,8%	2,4%	14,3%		35,8%
Faux					4,8%	9,5%	28,6%	21,4%	64,3%



Analyse d'items de l'évaluation EVAPM

Cette présentation suit l'ordre chronologique de notre travail.

1ère étape

Un manuel peut être utilisé par l'enseignant comme un recueil d'exercices : ces exercices lorsqu'ils sont suffisamment nombreux pour former un "type" représentent une espèce de norme pour le travail de l'élève.

Nous avons choisi d'examiner de ce point de vue les exercices proposés dans le chapitre "Fonctions - Généralités" du manuel "Fractales" 2nde (édition 94). Nous avons abouti à une première typologie *a posteriori* :

- a) Utilisation de la représentation graphique
  - a_1 : exploitation d'une représentation graphique
  - a_2 : résolution graphique d'équations
- b) Détermination d'une fonction
  - b_1 : d'après des couples de nombres et/ou la nature de la fonction
  - b_2 : d'après un graphique
  - b_3 : d'après un texte
- c) Recherche de l'intervalle de définition
  - c_1 : à partir d'un graphique
  - c_2 : à partir d'une formule
- d) Détermination d'images ou d'antécédents
  - d_1 : d'après un graphique
  - d_2 : d'après une formule
  - d_3 : d'après un texte
- e) Tracé de la courbe représentative de la fonction
  - e_1 : à partir d'une formule
  - e_2 : à partir de couples de nombres fournis
  - e_3 : à partir des propriétés (explicites ou non) de la fonction
  - e_4 : à partir d'un texte
- f) Utilisation de la calculatrice

2ème étape

Le travail précédent visait à classer les exercices rencontrés dans des manuels de seconde en fonction du travail attendu de l'élève. Nous avons décidé d'élargir notre recueil d'exercices et pour cela nous nous sommes intéressés à l'évaluation EVAPM 4ème, 3ème, 2nde et spécialement aux items correspondants aux objectifs des programmes nationaux sur la notion de fonction. Cette élargissement nous a conduit à une remise en cause de la typologie précédente et à un classement plus systématique, dans un tableau, à partir de critères *a priori* séparant et croisant :

- les données de l'énoncé (en colonne)
- les questions posées et la nature des réponses à donner (en ligne)

Une case représente un type a priori d'exercices : seule une case non vide (et bien remplie) est un type selon le point de vue de la première étape.

Vous trouverez le tableau du classement des items EVAPM 3ième concernant la notion de fonction dans l'annexe.

Ce tableau est forcément simplificateur, mais il constitue un outil *provisoire* d'exploration qui permet de poser des questions comparatives intra niveau et inter niveaux sur les types d'items :

Y-a-t-il des cases vides dans le tableau ? Sont-elles les mêmes dans deux niveaux successifs (en particulier 3ième-2nde) ?

Où sont les items les plus réussis ? les moins réussis ? Quels sont les changements remarquables, les stabilités d'un niveau à l'autre ?

Y a-t il des cases non homogènes du point de vue des réussites ?

Nous donnons ci-après un exemple de traitement de ces questions à partir de l'Evaluation EVAPM 3ième.

En regardant le tableau 3ième, il est remarquable de constater que trois cases ont des effectifs supérieurs à 9 :

case (F, 4) : données "texte d'arithmétique élémentaire" et questions portant sur des formules "sans grandeurs"

case (F, 6) : données et questions dans le même registre : "texte d'arithmétique élémentaire"

case (B, 6) : données "graphiques avec grandeurs" et questions "texte d'arithmétique élémentaire".

Les items les moins réussis en 3ème se situent sur la ligne 4 ce qui montre que quelle que soit la nature des données, l'objectif "savoir déterminer une application affine ou linéaire " n'est pas atteint ;

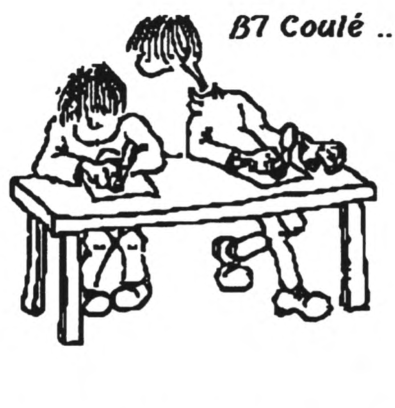
Choix d'items semblables dans la question posée mais dont les réussites sont différentes (cases non homogènes) :

Par exemple dans la case (F, 4):

item PI6 : 74%de réussite ;

items PII4 et PII5 : respectivement 29% et 18% de réussite ;

items PII6 et PII7 : respectivement 18% et 14% de réussite .



Voir en annexe le texte des items.

En regardant le contenu de ces items, une différence évidente se dégage : dans l'item le plus réussi un tableau de valeurs est donné, alors qu'il est est absent dans les deux autres. Quel est le rôle de la présence du tableau de valeurs pour expliquer la réussite ? Comment et quand apprend-on à organiser des données dans un tableau de valeurs ?

En 4ème les tableaux sont à compléter, il y a rarement des tableaux à construire ; en 3ème une nouvelle tache de l'élève est exigée : "construire un tableau de valeurs". Les taux de réussite reflètent la familiarité ou la non familiarité de ces taches pour les élèves : l'item PI5 (89%de réussite) peut être rattaché aux pratiques mis en place en 4ième "compléter un tableau", alors que dans l'item PII8 (47% de réussite) l'élève doit construire un tableau.

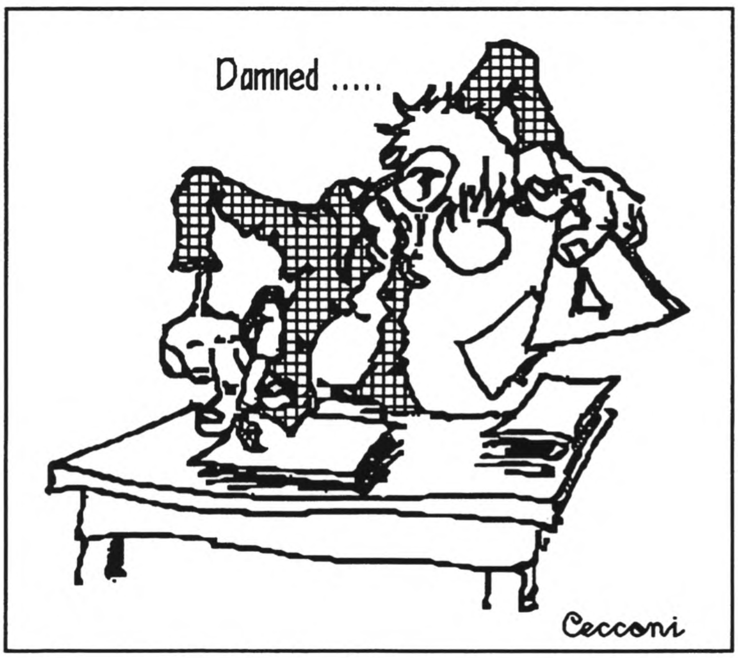
L'enquête EVAPM montre que les énoncés des items en 3ième et en 2nde portent sur des données différentes.

Notre relevé (voir le tableau en annexe 1) permet de mettre en évidence que les 2 colonnes les plus remplies en troisième concernent des énoncés dont les données sont des "graphiques" avec "grandeurs" et des textes d'arithmétique élémentaire (colonnes B et F), alors que dans le tableau des items EVAPM 2nde n'y figure presqu'aucun Item.

En troisième, avec des "grandeurs" la réussite est plus importante que "sans grandeurs". Que se passerait-il en seconde si on posait aux élèves des exercices de type "troisième" ? La question reste ouverte comme le montrent les reprises d'item peu réussis en 3ième.

Exemple d'évolution positive :
L'item PI-19 en 3ième devient l'item C35-36 en 2nde : le taux de réussite de la 3ème à la 2nde passe de 28% à 53% de réussite.

Exemple de stabilité :
L'item PII4-5 en 3ième devient l'item E20-21 en 2nde : le taux de réussite de la 3ème à la 2nde passe de 18% à 19%. (Voir en annexe le texte des items.)



ANNEXE
APMEP Evaluation en fin de troisième 1990

Thème : Proportionnalité et situations affines I

ITEM 19. Un produit coutant x Francs augmente de 8 % .
Quel est, en fonction de x, le nouveau prix y de ce produit ?

ITEMS 5-6. Une société de location de voitures propose, pour un modèle donné de voiture et pour une journée de location, un versement de 400F auquel s'ajoute 1,50F par kilomètre parcouru .
a) Complète le tableau suivant :

Nombre de km parcourus	100	150	200	350
Prix de la location, en Francs				

b) Si on désigne par x le nombre de kilomètres parcourus en une journée, exprime, en fonction de x, le prix payé à la société de location.

Thème : Proportionnalité et situations affines II

ITEMS 8-9. Un confiseur chocolatier vend des chocolats à 220 F le kilogramme et, quelle que soit la quantité de chocolats vendus, prend 7 Francs pour l'emballage.
a) Construis un tableau donnant le prix, emballage compris, de : 0,200 kg ; 0,375 kg et 0,500 kg de chocolats .
b) Exprime le prix y (en francs), en fonction du poids x (en kilogrammes) de chocolats.

ITEMS 4-5. Dans ma ville, le prix à payer pour une course de taxi s'obtient en additionnant deux nombres :
- la prise en charge, fixe, qui ne dépend pas du nombre de kilomètres parcourus,
- le prix des kilomètres parcourus, proportionnel au nombre de kilomètres.

J'ai payé 32 F pour une course de 10 km et 47 F pour une course de 16 km.
Exprime le prix y (en francs) d'une course en fonction de la distance x (en kilomètres).

ITEMS 6-7. On observe un engin inconnu s'élever dans le ciel.
On ne l'a pas vu partir, mais on a pu constater que :
- Au bout de 2 minutes de temps, il se trouve à une altitude de 3 km .
- Au bout de 8 minutes de temps, il se trouve à une altitude de 6 km .

On sait de plus que dans l'intervalle de temps étudié (2 min - 8 min), l'altitude est une fonction affine du temps.
Exprime, dans cet intervalle de temps, l'altitude y en fonction du temps t (y en km et t en minutes).

Tableau de classement des items EVAPM troisième concernant la notion de fonction

Registre des Données →		graphique (repère)		algèbre élémentaire		arithmétique élémentaire	
Registre des Réponses ↓		sans unités A	avec unités B	tableau C	formule D	tableau E	texte F
graphique	sans unité 1				PI9, 49% PI10, 50% PII22, 57%		
	avec unité 2						PI15, 54% PI16, 75% PII11, 76% PII12, 05%
algèbre élémentaire	tableau 3			PI3, 82% PI4, 78%	PI3, 82% PI4, 78%		
	formule 4	PI22, 31%	PI7, 21% PI8, 14%	PII1, 25% PII2, 21% PII3, 19%	PI1, 27% PI2, 21%	*PI6, 74%* PII10, 34%	*PI6, 74%* PII10, 34% *PI19, 29%* *PII4, 29%* *PII5, 18%* *PII6, 18%* *PII7, 14%* PII18, 08% PII23, 37% PII24, 42%
arithmétique élémentaire	tableau 5					*PI5, 89%*	*PI5, 89%* *PII8, 47%* *PII9, 62%*
	texte 6		PI11, 47% PI12, 45% PI13, 40% PI17, 49% PII13, 80% PII14, 47% PII15, 75% PII16, 80% PII17, 82%				PI14, 90% PI18, 19% PI20, 06% PI21, 20% PI23, 10% PI24, 22% PI25, 30% PI26, 09% PII19, 18% PII20, 06% PII21, 20% PII25, 11% PII26, 08%

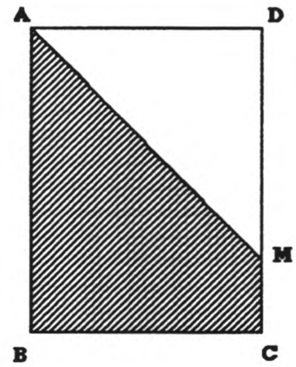
Légende du codage des items dans les cases :

P pour proportionnalité et situation affine
Chiffre romain I ou II : numéro du questionnaire
Chiffre arabe : numéro de l'item dans le questionnaire
Pourcentage de réussite

Quelques situations **Groupe 1**

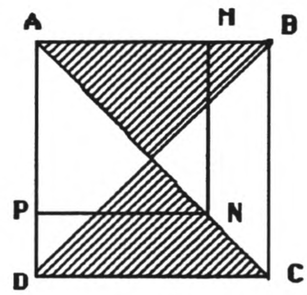
Balayage

M étant le seul point mobile qui se déplace.dans le sens inverse des aiguilles d'une montre en partant du point A, sur le poutour du rectangle **ABCD.** Evaluer l'aire balayée par le segment **[AM]** en fonction du trajet de **A** à **M** le long du rectangle **ABCD.**



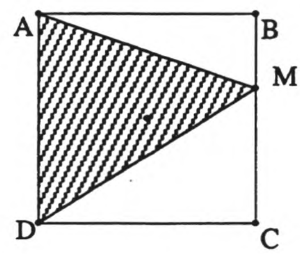
Carré hachuré

ABCD est un carré.
Evaluer l'aire hachurée dans le carré **AMNP** en fonction de **AM.**



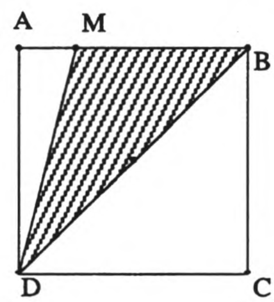
Aire du triangle AMD

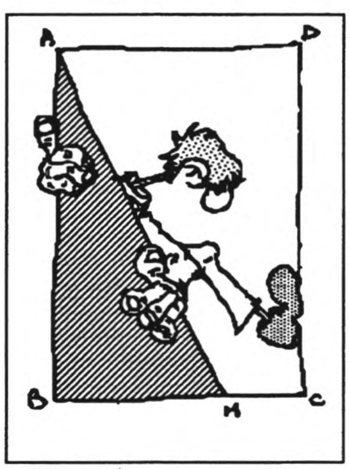
Evaluer l'aire du triangle **AMD** en fonction du trajet de A à M le long du carré **ABDC.**



Aire du triangle DMB

M étant le seul point mobile sur le bord du carré, évaluer l'aire du triangle **DMB** en fonction du trajet de **A** à **M** le long du carré **ABDC**.

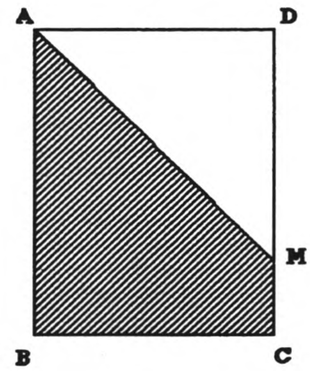




Glisse pas très bien ce point M ....

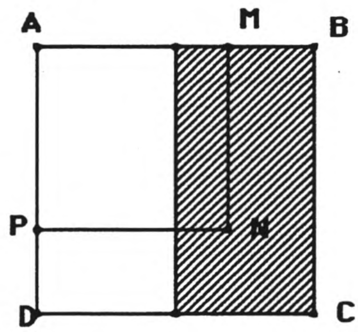
Balayage

M étant le seul point mobile qui se déplace.dans le sens inverse des aiguilles d'une montre en partant du point A, sur le poutour du rectangle **ABCD.** Evaluer l'aire balayée par le segment **[AM]** en fonction du trajet de **A** à **M** le long du rectangle **ABCD.**



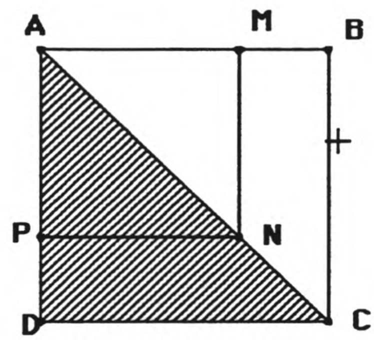
Carré hachuré 1

ABCD est un carré.
La moitié du carré est hachurée
Evaluer l'aire hachurée dans le carré **AMNP** en fonction de **AM.**



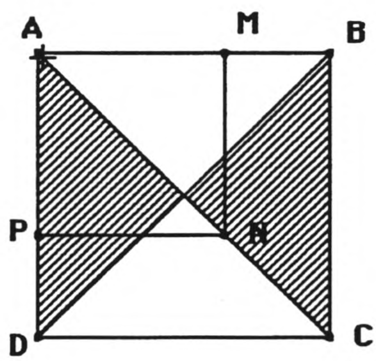
Carré hachuré 3

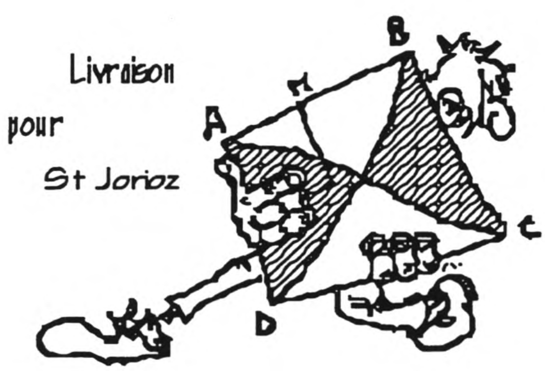
ABCD est un carré.
Evaluer l'aire hachurée dans le carré **AMNP** en fonction de **AM.**



Carré hachuré 4

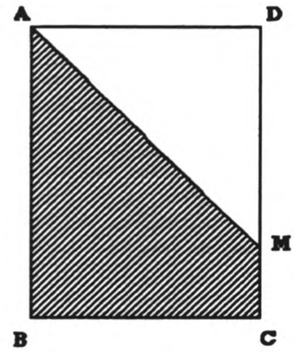
ABCD est un carré.
Evaluer l'aire hachurée dans le carré **AMNP** en fonction de **AM.**





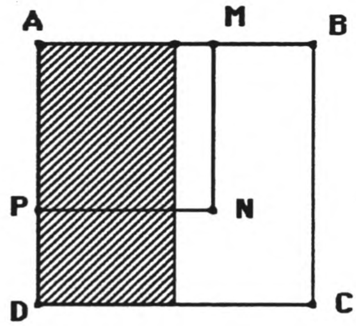
Balayage

M étant le seul point mobile qui se déplace.dans le sens inverse des aiguilles d'une montre en partant du point A, sur le poutour du rectangle **ABCD.** Evaluer l'aire balayée par le segment **[AM]** en fonction du trajet de **A** à **M** le long du rectangle **ABCD.**



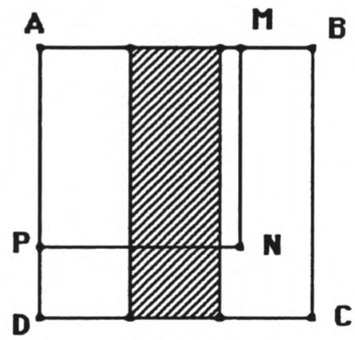
Carré hachuré 2

ABCD est un carré.
La moitié du carré est hachurée
Evaluer l'aire hachurée dans le carré **AMNP**
en fonction de **AM.**



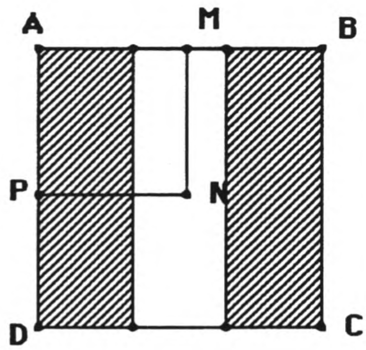
Carré hachuré 8

ABCD est un carré.
Evaluer l'aire hachurée dans le carré **AMNP**
en fonction de **AM.**



Carré hachuré 9

ABCD est un carré.
Evaluer l'aire hachurée dans le carré **AMNP**
en fonction de **AM.**



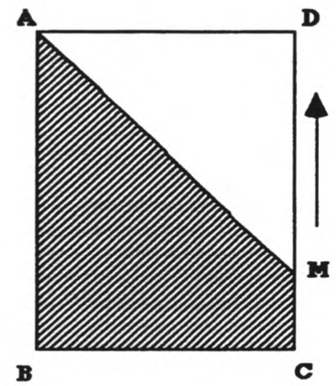
••• les solutions des groupes

Balayage

on note x la longueur AM parcourue sur le rectangle ABCD

Si $0 \leq x \leq AB$ $A(x) = 0$

Si $AB \leq x \leq AB+BC$ $\qquad A(x) = \dfrac{(x - AB) \times AB}{2}$



Si $AB+BC \leq x \leq 2AB+BC$

• Groupe1: $A(x) = AB \times BC - \dfrac{BC \times (p - x - BC)}{2}$

(p=2AB+2AC)

• Groupe2 :

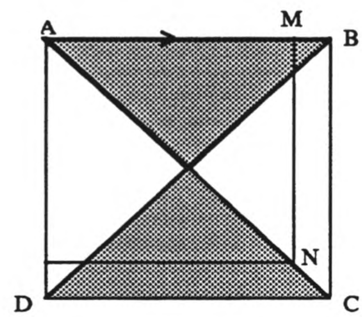
$A(x) = \dfrac{AB + (x - AB - BC)}{2} \times BC = \dfrac{(x - BC) \times BC}{2}$

• Groupe 3

$A = \dfrac{(x - BC) \times BC}{2}$

Si $2AB+BC \leq x \leq p$ $\quad A(x) = AB \times BC$

Carré hachuré



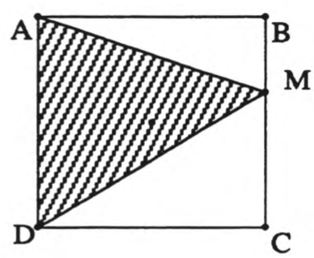
$x = AM$

Si $0 \leq x \leq \dfrac{AB}{2}$ $\qquad A(x) = \dfrac{x^2}{2}$ /

/ donc $0 \leq x \leq AB$ $A(x) = \dfrac{x^2}{2}$

Si $\dfrac{AB}{2} \leq x \leq AB$ $\quad A(x) = \dfrac{x^2}{2}$ /

Aire du triangle AMD



x est la longueur du trajet de A à M le long des côtés du carré dans le sens ABCD.

- Si $0 \leq x \leq AB$ $\qquad A(x) = \dfrac{xAB}{2}$

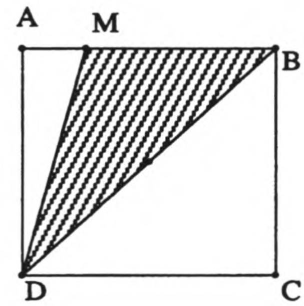
- Si $AB \leq x \leq 2AB$ $\quad A(x) = \dfrac{AB^2}{2}$

- Si $2AB \leq x \leq 3AB$ $\quad A(x) = \dfrac{AB(3AB - x)}{2}$

- Si $3AB \leq x \leq 4AB$ $\quad A(x) = 0$

Aire du triangle DMB

x est la longueur du trajet de A à M le long des côtés du carré dans le sens ABCD.



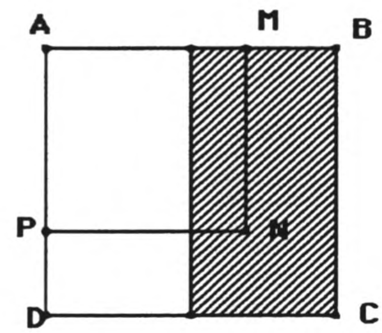
- Si $0 \leq x \leq AB$ $\quad A(x) = \dfrac{AB^2}{2} - \dfrac{xAB}{2}$

- Si $AB \leq x \leq 2AB$ $\quad A(x) = \dfrac{AB^2}{2} - \dfrac{(2AB - x)AB}{2}$

- Si $2AB \leq x \leq 3AB$ $\quad A(x) = \dfrac{AB^2}{2} - \dfrac{(x - 2AB)AB}{2}$

- Si $3AB \leq x \leq 4AB$ $\quad A(x) = \dfrac{AB^2}{2} - \dfrac{(4AB - x)AB}{2}$

Carré hachuré 1

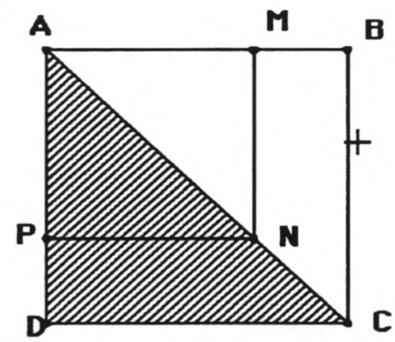


$x = AM$

si $0 \leq x \leq \dfrac{AB}{2}$ $\quad A(x) = 0$

si $\dfrac{AB}{2} \leq x \leq AB$ $\quad A(x) = x - (x - \dfrac{AB}{2})$

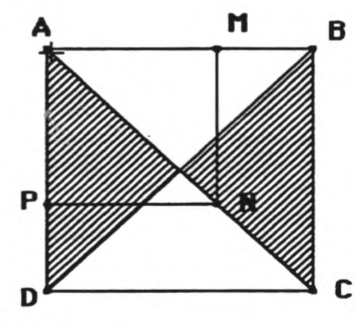
Carré hachuré 3



$AM = x$

$0 \leq x \leq AB \quad A(x) = \dfrac{x^2}{2}$

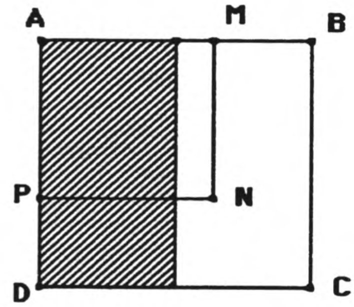
Carré hachuré 4



$x = AM$

$0 \leq x \leq AB \quad A(x) = \dfrac{x^2}{2}$

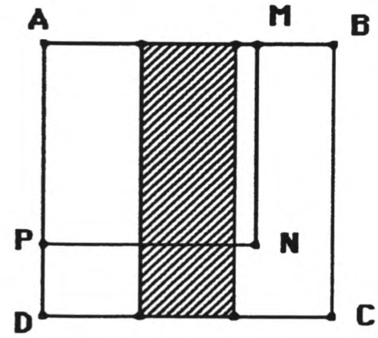
Carré hachuré 2



si $0 \leq x \leq \frac{AB}{2}$ $\quad A = x^2$

si $\frac{AB}{2} \leq x \leq AB$ $\quad A = x^2 - x \times (x - \frac{AB}{2}) = \frac{AB}{2} x$

Carré hachuré 8

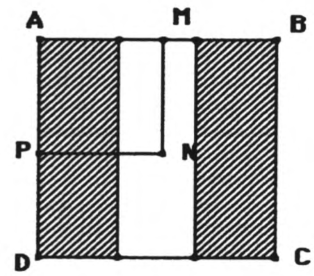


si $x \leq \frac{AB}{3}$ $\quad A = 0$

si $\frac{AB}{3} \leq x \leq \frac{2AB}{3}$ $\quad A = x^2 - \frac{AB}{3} x$

si $2\frac{AB}{3} \leq x$ $\quad A = \frac{AB}{3}\ x$

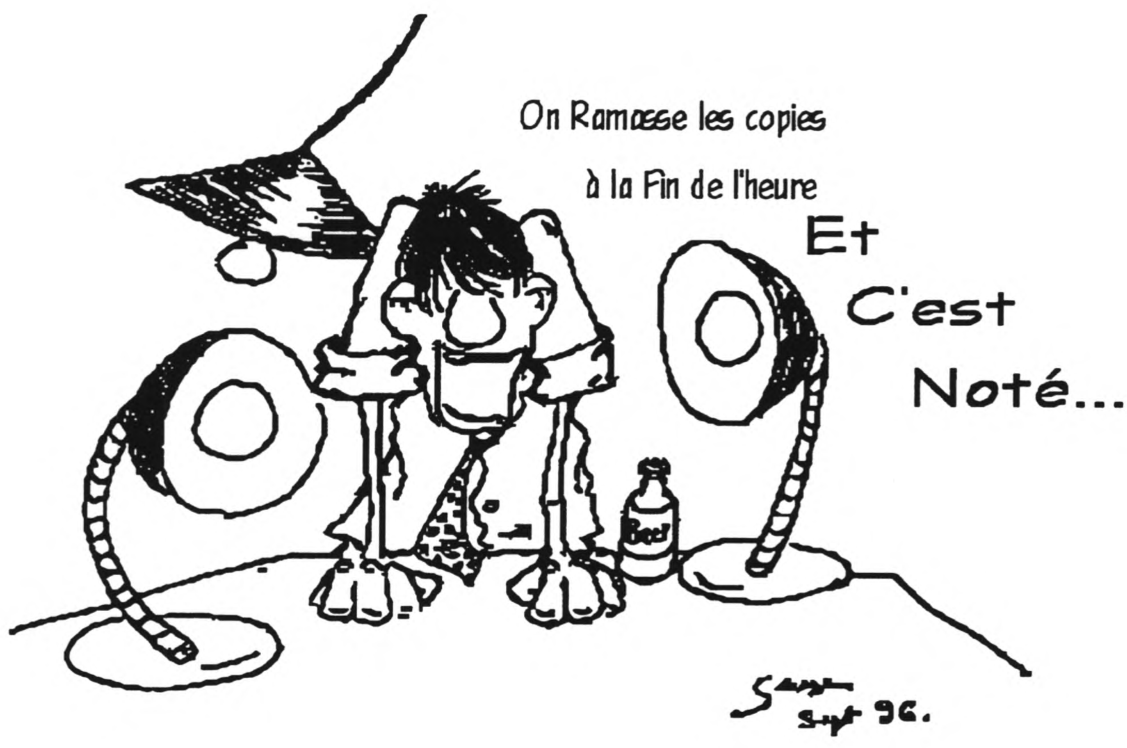
Carré hachuré 9



si $x \leq \frac{AB}{3}$ $\quad A = x^2$

si $\frac{AB}{3} \leq x \leq \frac{2AB}{3}$ $\quad A = \frac{AB}{3}\ x$

si $2\frac{AB}{3} \leq x$ $\quad A = x^2 - \frac{AB}{3}\ x$



Les scénarios élaborés à l'issu du stage

Les enseignants du Collège J Monnet, Saint Jorioz

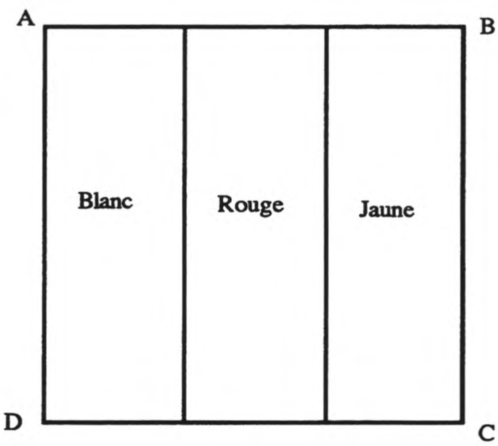
Scène I : ABCD est un carré de 15 cm de côté.
I et J sont sur [AB], AI = 5 cm et AJ = 10 cm.
K et l sont sur [DC], DK = 5 cm et DL = 10 cm.
1°) Colorier le rectangle IJKL.
2°) Placer le point M sur [AB], P sur [AD] tels que AMNP soit un carré. Calculer l'aire coloriée contenue dans le carré AMNP.

Scène II : Les élèves se lancent dans leur dessin. Des réponses différentes sont données.
Qu'est ce qui expliquent ces différences ?
2 cas devraient apparaître: $A = 0$ et $A \neq 0$.
-> Le résultat dépend de la "taille" de AMNP.(aire puis côté)
-> Cela dépend donc de la position de M sur le segment [AB].

Scène III: L'animateur demande une organisation des résultats un rangement par exemple, vers l'aire coloriée la plus grande; et demande de découvrir la formule.

Scène IV: Généralisation, on reprend le calcul avec
$AB = a$; $AI = DK = a/3$;
$AJ = DL = 2a/3$

Les enseignants du Collège Beauregard



ABCD est un carré de tissu de 21 cm de côté, formé de 3 bandes rectangulaires ,de même largeur et de couleurs différentes comme indiqué sur le dessin ci-contre.

Dans ce tissu on veut découper un mouchoir carré AMNP, M étant un point de [AB].

1ère étape: • Est-il possible d'obtenir un mouchoir d'une seule couleur ? de 2 couleurs différentes ? de 3 couleurs différentes ?
•Dans chaque cas possible, faire un dessin où apparaîtront les carrés ABCD et AMNP .

2ème étape: • But : Trouve l'aire A(x) de la bande rouge du mouchoir en fonction de la longueur x (en cm) du côté de ce mouchoir.
• Par oral : - Faire le lien entre les dessins et ce que l'on cherche. (Insister sur la comparaison des 2 derniers dessins)
- Trouver le lien entre le nombre de couleur et l'encadrement de x.
•Calcul de A(x)

3ème étape : • Utilisation des résultats (en activité dirigée)
- Calculer A(x) pour différentes valeurs de x.
- Étude de la nature de la fonction x -> A(x) ?
-Représentation graphique de A.
-Trouver A(x) lorsque le côté du carré est a.

Les enseignants du Collège R. Blanchard et du lycée Baudelaire

I Présentation :

- Dessin de la feuille du CNAM (carré de 12 cm de côté)
- But: voir comment l'aire varie quand M se déplace
- On appelle A l'aire de la surface hachurée à l'intérieur du carré AMNP

II Activité par groupes :

- Dessin carré partagé en 3 bandes

Questions: * sur le dessin ci-contre, construire chacun des carrés correspondant aux valeurs entières de x . Dans chaque cas colorier en rouge la surface correspondant à A.
* Peut-on dire que A est proportionnelle à x ?

Rédiger la réponse que l'un de vous présentera à la classe.

-> présentation, mise en commun

III De nouveau en groupes :

Exprimer l'aire A en fonction de x (on distinguera plusieurs cas)

-> Mise en commun et correction

IV Représentation graphique:

Dans un repère, on représente x en abscisse (unité le cm) et A en ordonnée (unité 2 mm pour 1 cm^2) représenter graphiquement l'aire A en fonction de x.

-> Conclusion selon le niveau.

Quelques réflexions à propos de......

Fonctions et équations

On constate dans l'enseignement une dissociation équations-fonctions et une introduction préalable des équations.
Pourquoi ce choix ? Quels pourraient être d'autres choix de curricula possibles ? Pourquoi ne pas introduire la notion de fonction avant celle d'équations ?
On peut avancer deux raisons possibles à la séparation "fonctions" / "équations" :
1 - f est réduite dans le premier cycle aux fonctions linéaires et affines
2 - le travail algébrique est un outil préalable pour résoudre $f(x) = a$

Une équation est --elle une égalité ?
L'équation $3n+2 = 5$ est réussie dès la sixième par substitution : $3\text{x}1+2 = 5$; il n'y a pas le travail algébrique habituel qui serait :

$$3x+2 = 5$$
$$3x = 5 - 2$$
$$3x = 3$$
$$x = 1$$

L'opération de substitution caractériserait l'égalité et donc en particulier les équations comme égalité à trou.
Résoudre une égalité à trous consisterait à chercher par "tâtonnement" un nombre qui pourrait "combler le trou" : je pense un nombre, je calcule, jusqu'à ce que je trouve le nombre (bien sûr on pourrait selon les problèmes envisager des règles qui permettent de prendre des décisions sur le choix des nombres : cf. : procédure P1 dans l'exercice 2 du questionnaire)
Il y a des équations qui ne sont pas seulement des "égalités à trous" [dans leur fonctionnement en situation].
Deux statuts pour une équation :
expression à trou
expression fonctionnelle
La notion d'équation comme expression fonctionnelle exige que x prenne un statut de variable et la notion de variable est une nécessité de la notion de fonction.
Un exercice courant qui est une tâche très difficile pour l'élève [même s'il sait ce qu'on attend de lui] consiste à demander à l'élève d'écrire une formule, un tableau de nombres étant donné, même si c'est la relation $y = ax$ qui traduis la relation entre les nombres du tableau.
Voir EVAPM 3° :
Questionnaire proportionnalité I Item 22: 31% de réussite.
Questionnaire proportionnalité II Item 22 et 23 :10% et 22% de réussite.

Statut des lettres

D'après Boujaddi, M., (1996). *Algèbre et Généralisation en classe de seconde : "à chacun sa vérité"*, mémoire professionnel, IUFM de Grenoble.

Le calcul littéral est sous-tendu par trois problématiques différentes auxquelles on peut associer trois statuts des lettres :

• *Statut d'inconnue*

Dans la mise en équation d'un problème, on désigne un nombre inconnu par une lettre et on manipule cette lettre comme un nombre, comme si ce nombre était connu. Les lettres sont pensées comme des nombres précis désignés provisoirement par ces lettres de façon que notre ignorance initiale ne nous empêche pas de les faire participer au calcul.

• *Statut d'indéterminée*

à la mise en équation du problème succède un enchaînement nécessaire d'opérations élémentaires sur les expressions littérales. Les lettres prennent alors un statut d'indéterminées, au sens où elles n'ont plus besoin pour ces manipulations de représenter un nombre. Il s'agit d'établir des "identités", des "formules", dans lesquelles la substitution de valeur numériques constituent une phase secondaire, extérieure en quelque sorte au calcul.

• *Statut de variable*

on ne considère plus une lettre comme définie par la valeur d'un nombre inconnue, mais comme définie par son appartenance à un ensemble connu de nombres.

Factorisation au collège [1]

Le professeur attendra d'un élève du collège placé devant la question "Factorise $16x^2 - 4$" qu'il reconnaisse là l'occasion de mettre en oeuvre la règle de factorisation $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ et réponde $16x^2 - 4 = (4x-2)(4x+2)$, et que devant la question "Factorise $4x^2 - 36x$ l'élève reconnaisse une factorisation simple: $4x^2 - 36x = 4x(x-9)$.
Les réponses toutes correctes $16x^2 - 4 = 2(8x^2 - 2)$ ou $16x^2 - 4 = 3(\frac{16}{3}x^2 - \frac{4}{3})$ ou $16x^2 - 4 = 16x^2(1 - \frac{1}{4x^2})$ $x \neq 0$ [2] seront éliminées ou n'auront pas l'occasion d'apparaître, *non pas parce que ne satisfaisant pas une condition mathématique préalablement formulée* [3], *mais comme un acte déviant par rapport à un code de conduites.*

> Le pouvoir de l'enseignant dans sa classe, ça n'est pas d'*interdire* (plus précisément : d'interdire de manière *directe*) la réponse $16x^2 - 4 = 2(8x^2 - 2)$, mais bien de *produire* la réponse $16x^2 - 4 = (4x+2)(4x-2)$. Son pouvoir consiste moins à désigner les «mauvaises réponses», qu'à susciter *la* bonne réponse - qui désigne implicitement les autre réponses comme mauvaises.(Chevallard, 1985)

L'existence de règles implicites structurant fortement la conduite des élèves et celle de l'enseignant, modifie le statut de l'erreur : une erreur sera une réponse recevable et fausse. L'erreur surgit donc comme une faute sur le fond d'un modèle respectant le code de conduite : la réponse $16x^2 - 4 = 3(\frac{16}{3}x^2 - \frac{4}{3})$ est vraie, mais n'est pas recevable, la réponse $16x^2 - 3 = (4x-3)(4x+1)$ est erronée, c'est à dire *recevable et fausse*.
Ce que nous avons montré à propos de la factorisation n'est pas un cas pathologique vis à vis de l'enseignement d'un savoir, nous l'avons utilisé pour mettre en évidence un mécanisme général intervenant dans la communication didactique des savoirs. L'étude du contrat didactique relatif à un savoir permet de tracer les limites de la signification du savoir enseigné pour l'élève.

---

1 d'après Tonnelle J. (1979)
2 qui sera une réponse adéquate en seconde au moment de l'apprentissage des limites des fonctions polynômes.
3 comme factoriser dans Z[X] (ensemble des polynômes à coefficients entiers)