irem
de Grenoble

UNIVERSITE JOSEPH FOURIER
SCIENCES, TECHNOLOGIE, MEDECINE
GRENOBLE 1

GeoIrem

Ateliers géométriques avec Maple V

<u>par le groupe calcul formel</u>

IREM de Grenoble

Jean-Pierre DOURIS
Jacques MARTINIE
Paul PERRET
Joël PINCHINAT

Sommaire

Qu'est-ce que GeoIrem ?

Une librairie MAPLE V pour faire de la géométrie, avec pour objectifs :

- **créer** des objets géométriques (libres ou fixes) avec des **fonctions de constructions** dont les noms sont ceux de la géométrie élémentaire traditionnelle sans les accents (Point, Droite, Triangle, Vecteur, Milieu, Mediatrice, Cercle, Angle, Bissectrice, Intersection, Homothétie, Rotation, ...) et **dessiner** ceux qui sont instanciés
- **démontrer** formellement des théorèmes par les moyens habituels de la géométrie avec des **fonctions d'extraction** (Vecteur_directeur, Centre, Rayon, Equation, Determinant, Produit_scalaire, Norme, Cosinus, ..) et des **fonctions logiques** (Etre_egaux, Etre_un_point_de, Etre_concourants, Etre_orthogonaux, Etre_tangents...)

Avertissement : *GeoIrem n'est pas commercialisé, c'est simplement la publication de résultats d'une recherche encore inachevée, conduite à l'IREM de Grenoble depuis 1994. Le groupe calcul formel espère que ce produit aidera professeurs et élèves à aimer faire des mathématiques, et à retrouver une curiosité scientifique et le goût de la démonstration « purement » géométrique là où le logiciel aura réussi à démontrer le théorème par des calculs qu'on ne pourrait pas faire à la main parce que souvent trop longs ou fastidieux. Nous attendons impatiemment vos remarques et suggestions pour améliorer GeoIrem.*

Contenu de la librairie

Quelques ateliers de géométrie

IREM de Grenoble
Groupe calcul formel
1997

Objets géométriques

Généralités

Les objets de la librairie GeoIrem sont tous constitués de plusieurs champs :

- leur forme,
- des champs numériques nécessaires aux calculs, parfois redondants,
- des attributs divers : couleur, nom, style de trait.

Chaque objet dispose d'une fonction de création. Les informations indispensables à la création, par exemple l'abscisse et l'ordonnée d'un point, peuvent être formelles.

Toutes les informations mémorisées sont accessibles grâce à des fonctions d'extraction.

Les attributs sont facultatifs et peuvent être donnés, à n'importe quel moment, aux diverses variables.

Point

forme : point

abscisse et ordonnée : deux réels

Vecteur

forme : vecteur

abscisse et ordonnée : deux réels

Droite

forme : droite

coefficients : a, b, c : réels

Segment

forme : segment

liste_des_sommets : une liste de 2 points

Demi-droite

forme : demi_droite

sommet : un point

vecteur : un vecteur

Cercle

forme : cercle

centre : un point

rayon : un nombre réel positif

Arc

forme : arc

cercle : un cercle

angle_origine : une mesure d'angle

angle : une mesure de l'arc

Figure

forme : figure

liste_des_objets : une liste d'objets géométriques

Triangle

forme : triangle

liste_des_sommets : une liste de 3 points

Quadrilatère

forme : quadrilatère

liste_des_sommets : une liste de 4 points

Polygone

forme : polygone

liste_des_sommets : une liste de points

Angle

forme : angle

mesure : une mesure réelle

Courbe

forme : courbe

x, y : deux fonctions coordonnées

intervalle : un intervalle où varie le paramètre.

IREM de Grenoble
Groupe calcul formel
1997

Fonctions usuelles

Toutes les primitives de l'unité GeoIrem ont des noms qui commencent par une majuscule ; ils ne contiennent qu'une seule majuscule, pas d'espace et aucun accent.

Généralités

Les fonctions usuelles de l'unité GeoIrem sont désignées par des noms les plus signifiants possibles.

Ils sont donc parfois très longs. Ils peuvent, bien sûr, être abrégés au bon vouloir de l'utilisateur par une simple affectation.
Ainsi, Produit_scalaire := Ps permet d'utiliser le nom Ps aussi bien que Produit_scalaire

Une même fonction peut souvent être appelée de plusieurs façons, notamment avec des paramètres de formes différentes ou en nombres différents ; par exemple : Cercle(A, 2) ; Cercle(A, B) ; Cercle(A, B, C) ;
On a tenu compte du fait que dans beaucoup de cas, l'ordre des paramètres peut être indifférent ; par exemple : Cercle(A, 2) ; Cercle(2, A) ;

NB : quand une lettre S est utilisée comme paramètre, elle désigne la **séquence** des objets paramètres-données

Fonctions dont le résultat est un nombre

Abscisse(Objet)
  Données : un point, un vecteur ou une courbe paramétrée
  Résultat : l'abscisse ou la fonction abscisse
Ordonnee(Objet)
  Données : un point, un vecteur ou une courbe paramétrée
  Résultat : l'ordonnée ou la fonction ordonnée
Ps_(V1, V2)
Produit_scalaire(V1,V2)
  Données : deux vecteurs
  Résultat : le produit-scalaire
Norme(V)
  Données : un vecteur
  Résultat : la norme du vecteur
Distance(P1,P2)
  Données : deux points ou un point et une droite
  Résultat : la distance
Determinant(V1,V2)
  Données : deux vecteurs
  Résultat : le déterminant
Rayon(Objet)
  Données : un cercle ou un arc ou un polygone inscriptible
  Résultat : le rayon du cercle
Longueur(Objet)
  Données : un cercle ou un arc ou un segment
  Résultat : la longueur

Mesure(Objet)
Données : un angle ou un arc ou un nombre
Résultat : la détermination principale
Mesure_angle_origine(A)
Données : un arc
Résultat : la mesure de l'angle polaire correspondant à l'origine de l'arc
Mesure_angle_extremite(A)
Données : un arc
Résultat : la mesure de l'angle polaire correspondant à l'extrémité de l'arc
Cos(S) Sin(S) Tan(S)
Données : un nombre ou un angle,
ou bien deux vecteurs ou deux demi-droites
Résultat : le cosinus, le sinus, la tangente de l'angle correspondant
Nombre_de_sommets(Poly)
Données : un polygone
Résultat : le nombre de sommets
Nombre_d_objets(F)
Données : une figure
Résultat : le nombre d'objets de la figure
Rapport(A)
Données : une application affine usuelle
Résultat : le rapport d(M'N')/d(MN)

Fonctions dont le résultat est une liste de réels

Coefficients(Objet)
Données : une droite ou une conique ou une application affine
Résultat : la liste des coefficients.
Coordonnees(Objet)
Données : un point ou un vecteur ou une courbe paramétrée
Résultat : la liste des coordonnées.
Coordonnees_barycentriques(R,P)
Données : un repère affine et un point
Résultat : la liste des coordonnées barycentriques de P dans R

Fonctions dont le résultat est un point

Point*(x, y : réel) résultat poinT*

Point(a, b) est le point de coordonnées (a, b)

Point*(p : poinT, v : vecteuR) résultat poinT*

Point(A, V) est le point B tel que (A, B) représente le vecteur V.

Barycentre(S)
Données : une séquence de couples [point, nombre]
Résultat : le barycentre de la famille, s'il existe
Centre(Objet)
Données : un cercle ou un arc, un triangle, un polygone inscriptible
Résultat : le centre du cercle
Extremite(Objet)
Données : un segment ou un arc
Résultat : l'extrémité

Isobarycentre(S)
Données : une séquence de points, un segment, un triangle, un quadrilatère ou un polygone
Résultat : l'isobarycentre de la famille de points

Milieu (S)
Données : deux points ou un segment ou un arc
Résultat : le milieu

Origine(Objet)
Données : un segment ou un arc ou une demi-droite
Résultat : l'origine

Sommet(i,Poly)
Données : un nombre entier positif et un polygone (segment, triangle, quadrilatère...)
Résultat : le sommet numéro i de Poly

Pied_de_hauteur(i,T)
Données : un nombre entier positif et un triangle
Résultat : le pied de la hauteur issue du sommet i du triangle T

Orthocentre(T)
Données : un triangle
Résultat : l'orthocentre

Centre_de_gravite(T)
Données : un triangle
Résultat : le centre de gravité

Centre_du_cercle_circonscrit(T)
Données : un triangle
Résultat : le centre du ...

Centre_du_cercle_inscrit(T)
Données : un triangle
Résultat : le centre du ...

Centre_du_cercle_exinscrit(i,T)
Données : un nombre entier positif et un triangle
Résultat : le centre du cercle exinscrit face au sommet i du triangle T

Centre_application_affine(A)
Données : une application affine usuelle
Résultat : le centre lorsqu'il existe

Invariant(A)
Données : une application affine usuelle
Résultat : le centre, la droite des invariants ou l'ensemble vide

Image(A)
Données : une application affine usuelle
Résultat : l'ensemble des images(point, droite ou plan)

Image(A, Objet)
Données : une application affine usuelle et un objet géométrique
Résultat : l'image de OO par A

Fonctions dont le résultat est une liste de points

Liste_des_sommets(Poly)
Données : un polygone (segment, triangle, quadrilatère...)
Résultat : la liste des sommets du polygone

Fonctions dont le résultat est un vecteur

Vecteur*(x, y : réel) résultat vecteuR*

Vecteur(a, b) est le vecteur de coordonnées (a, b)

Vecteur*(p1, p2 : poinT) résultat vecteuR*

Vecteur(A, B) est le vecteur représenté par (A, B).

Addition(S)
Données : une séquence de vecteurs (au moins 2)
Résultat : le vecteur somme

Multiplication_par_un_reel(k, V) alias Mul(k, V)
Données : un réel et un vecteur
Résultat : le vecteur k.V

Oppose (V)
Données : un vecteur
Résultat : le vecteur opposé

Normer(V)
Données : un vecteur
Résultat : un vecteur normé colinéaire à V

Vecteur_orthogonal(V)
Données : un vecteur (de coordonnées (a, b))
Résultat : le vecteur (de coordonnées (b, -a))

Vecteur_tangent(Objet,M)
Données : un arc, un cercle ou une courbe, et un point
Résultat : un vecteur directeur de la tangente en M à Objet

Vecteur_application_affine(A)
Données : une translation
Résultat : son vecteur

Direction(A)
Données : une application affine projection, une symétrie ou une affinité
Résultat : un vecteur directeur de la direction

Fonctions dont le résultat est une droite

Droite*(a, b, c : réel) résultat droitE*

Droite(a, b, c) est la droite d'équation ax + by + c = 0

Droite*(p1, p2 : poinT) résultat droitE*

Droite(A, B) est la droite (AB)

Droite*(p : poinT, v : vecteuR) résultat droitE*

Droite(A, V) est la droite passant par A et dirigée par le vecteur V

Mediatrice(S)
Données : deux points, un segment,
ou un polygone et un nombre entier positif i
Résultat : la médiatrice (numéro i dans le cas d'un polygone)

Hauteur(i,T)
Données : un nombre entier positif et un triangle
Résultat : la hauteur numéro i du triangle T

Mediane(i,T)
Données : un nombre entier positif et un triangle
Résultat : la médiane numéro i

Bissectrice(S)
Données : un nombre entier positif et un triangle,
ou deux demi-droites
Résultat : la bissectrice (numéro i dans le cas du triangle)

Bissectrice_exterieure(i,T)
Données : un nombre entier positif et un triangle
Résultat : la bissectrice extérieure numéro i du triangle T

Parallele(P, Objet)
Données : un point et un objet (droite, demi-droite ou segment)
Résultat : la parallèle à Objet contenant P

Perpendiculaire(P,Objet)
Données : un point et un objet (droite, demi-droite ou segment)
Résultat : la perpendiculaire à Objet passant par P

Tangente(Objet,P)
Données : un arc ou un cercle ou une courbe, et un point
Résultat : la tangente en P à Objet

Axe_radical(C1, C2)
Données : deux cercles
Résultat : l'axe radical de C1 et C2

Fonctions dont le résultat est un segment

Segment*(p1, p2 : poinT) résultat segmenT*

Segment(A, B) est le segment [A, B]

Fonctions dont le résultat est une demi-droite

Demi_droite*(p : poinT, v : vecteuR) résultat demi_droitE*

Demi_droite(A, V) est la demi-droite d'origine A dirigée par le vecteur V

Demi_droite*(p1, p2 : poinT) résultat demi_droitE*

Demi_droite(A, B) est la demi-droite d'origine A contenant B

Fonctions dont le résultat est un cercle

Cercle*(p : point, r : réel) résultat cerclE*

Cercle(A, 2) est le cercle de centre A et de rayon 2

Cercle*(p1, p2 : point) résultat cerclE*

Cercle(A, B) est le cercle de diamètre [A,B]

Cercle*(p1, p2, p3 : point) résultat cerclE*

Cercle(A, B, C), où A, B et C ne sont pas alignés, est le cercle circonscrit au triangle ABC

Cercle_inscrit(T)
Données : un triangle
Résultat : le cercle inscrit dans le triangle T

Cercle_exinscrit(i,T)
Données : un nombre entier positif et un triangle
Résultat : le cercle exinscrit face au sommet numéro i du triangle T

Cercle_circonscrit(T)
Données : un triangle
Résultat : le cercle circonscrit au triangle T

Cercle_d_Euler(T)
Données : un triangle
Résultat : le cercle d'Euler du triangle T

Fonctions dont le résultat est un arc

Arc*(c : cerclE, α, θ : réel) résultat arC*

Arc(C, α, θ) est l'arc porté par le cercle C, d'origine le point d'abscisse curviligne α, de mesure θ

Arc*(p : poinT, r, α, θ : réel) résultat arC*

Arc(A, r, α, θ) est l'arc porté par le cercle C(A, r), d'origine le point d'abscisse curviligne α, de mesure θ

Arc_capable(Theta,A,B)
Données : un nombre et deux points
Résultat : l'arc capable de mesure thêta construit sur le segment [AB]

Fonctions dont le résultat est un angle

Angle(x : réel)

Angle(x) est l'angle de mesure x

Angle(c, s : réel)

Angle(c, s) est l'angle de cosinus c et de sinus s ; l'ordre d'écriture est ici important.

Angle(a : arC)

Angle(a) est l'angle de mesure Mesure(a)

Angle(v1, v2 : vecteuR)

Angle(v1, v2) est l'angle des vecteurs v1 et v2

Angle(d1, d2 : demi_droitE)

Angle(d1, d2) est l'angle des demi-droites d1 et d2

Angle(d1, d2 : droitE)

Angle(d1, d2) est l'angle des droites d1 et d2

Angle(s1, s2 : segmenT)

Angle(Segment(A, B), Segment(C, D)) est l'angle des droites (AB) et (CD)

Angle_polaire(Objet)
Données : un vecteur ou une demi-droite
Résultat : l'angle polaire de Objet
Angle_application_affine(A)
Données : une rotation ou une similitude directe
Résultat : l'angle de A

Fonctions dont le résultat est une figure

Figure*(s : séquence d'objets) résultat figurE*

Triangle*(p1, p2, p3 : poinT) résultat trianglE*

Triangle(A, B, C) est le triangle ABC

Quadrilatere*(p1, p2, p3, p4 : poinT) résultat quadrilaterE*

Polygone*(s: séquence de points) résultat polygonE*

Polygone(A, B, C, D, E) est le polygone ABCDE

Courbe*(x, y : fonctions, I : intervalle) résultat courbE*

x et y sont deux fonctions numériques d'une variable réelle t (fonction abscisse et fonction ordonnée), I est un intervalle réel : c'est l'intervalle que parcourt le paramètre t

Intersection(O1, O2)
Données : deux objets géométriques (pouvant être des figures)
Résultat : la figure intersection des deux objets qui peut être un seul objet.

Ajouter(Objet,F)
Données : un objet géométrique et une figure
Résultat : la figure F complétée avec l'objet Objet

Retrancher(F,Objet)
Données : un objet géométrique et une figure
Résultat : la figure F privée de Objet

Objet(i, F)
Données : un nombre entier positif et une figure
Résultat : l'objet numéro i de F

Liste_des_objets(F)
Données : une figure
Résultat : la liste des objets de la figure F

Fonctions dont le résultat est une chaîne

Equation(Objet)
Données : un cercle ou une droite
Résultat : une équation de Objet

Forme(Objet)
Données : un objet
Résultat : la forme de Objet

Nature(A)
Données : une application affine
Résultat : la nature de A

Fonctions logiques

Les fonctions logiques de l'unité GeoIrem ont pour résultats des objets logiques à 4 états : vrai, faux, vraisemblablement, vraisemblablement pas.

Et_(S)
Données : une séquence d'objets logiques
Résultat : la valeur logique de la conjonction de ces objets logiques

Non_(B)
Données : un booléen
Résultat : la valeur logique de la négation de B

Ou_ (S)
Données : une séquence d'objets logiques
Résultat : la valeur logique de la disjonction de ces objets logiques

Etre_nul(E)
Données : une expression
Résultat : la valeur logique de E = 0

Etre_egaux(O1,O2)
Données : deux objets
Résultat : la valeur logique de O1 = O2

Etre_element(O1,O2)
Données : deux objets
Résultat : la valeur logique de $O1 \in O2$

Etre_colineaires(S)
Données : une séquence de vecteurs
Résultat : la valeur logique de la colinéarité de vecteurs

Etre_alignes(S)
Données : une séquence de points (au moins 3)
Résultat : la valeur logique de l'alignement des points

Etre_cocycliques(S)
Données : une séquence de points (au moins 3)
Résultat : la valeur logique de l'énoncé « les points sont cocycliques »

Etre_paralleles(S)
Données : des droites, demi-droites ou segments (au moins 2)
Résultat : la valeur logique du parallèlisme des droites supports

Etre_orthogonaux(O1,O2)
Données : deux vecteurs, droites, demi-droites ou segments
Résultat : la valeur logique de l'orthogonalité des directions de O1 et O2

Etre_concourantes(S)
Données : une séquence de droites
Résultat : la valeur logique de l'énoncé « les droites sont concourantes »

Etre_tangents(O1,O2)
Données : une droite et un cercle ou deux cercles
Résultat : la valeur logique de ...

Etre_bijective(A)
Données : une application affine
Résultat : la valeur logique de ...

Etre_isometrie(A)
Données : une application affine
Résultat : la valeur logique de ...

Etre_deplacement(A)
Données : une application affine
Résultat : la valeur logique de ...

Etre_antideplacement(A)
Données : une application affine
Résultat : la valeur logique de ...

Fonctions dont le résultat est une application affine

Attention l'ordre d'écriture des paramètres est souvent important

Application_affine(a, b, c, d, e, f)
Données : six réels
Résultat : l'application affine telle que $x' = ax + by + c$ et $y' = dx + ey + f$

Reciproque(A)
Données : une application affine bijective
Résultat : la réciproque de A

Composition(S)
Données : un séquence d'application affines
Résultat : l'application affine obtenue par composition

Projection(D,V)
Données : une droite et un vecteur non nul
Résultat : la projection sur D selon la direction V

Affinite(D,V,k)
Données : une droite, un vecteur non nul et un réel
Résultat : l'affinité de base D, de direction V et de rapport k

Symetrie_oblique(D,V)
Données : une droite et un vecteur non nul
Résultat : la symétrie de base D et de direction V
Projection_orthogonale(D)
Données : une droite
Résultat : la projection orthogonale sur D
Affinite_orthogonale(D,k)
Données : une droite et un réel
Résultat : l'affinité orthogonale de base D et de rapport k
Symetrie_orthogonale(D) alias Reflexion(D)
Données : une droite
Résultat : la symétrie orthogonale d'axe D
Translation(V)
Données : un vecteur
Résultat : la translation de vecteur V
Homothetie(P,k)
Données : un point et un nombre réel non nul
Résultat : l'homothétie de centre P et de rapport k
Rotation(P, Theta)
Données : un point et un nombre réel
Résultat : la rotation de centre P et d'angle Theta
Symetrie_centrale(P)
Données : un point
Résultat : la symétrie de centre P
Similitude_directe(P, k, alpha)
Données : un point et deux nombres réels
Résultat : la similitude directe de centre P de rapport k et d'angle alpha
Similitude_directe(a, b)
Données : deux complexes
Résultat : la similitude directe telle que z' = a z + b
Similitude_indirecte(P, k, V)
Données : un point, un nombre réel et un vecteur
Résultat : la similitude indirecte de centre P, de rapport k et de vecteur V
Similitude_indirecte(a, b)
Données : deux complexes
Résultat : la similitude indirecte telle que $z' = a * \overline{z} + b$

Actions

Quelques rares actions pour dessiner ou animer.

Les constantes GeoIrem :

Pour le cadrage :

Variables :	Xmin,	Xmax,	Ymin,	Ymax.
Valeurs par défaut	-1	1	-1	1

Couleurs :

Aigue_marine (aquamarine), Noir (black), Bleu (blue), Marine (navy), Corail (coral), Cyan (cyan), Brun (brown), Or (gold), Vert (green), Gris (grey), Kaki (khaki), Magenta (magenta), Marron (maroon), Orange (orange), Rose (pink), Rouge (red), Sienne (sienna), Turquoise (turquoise), Violet (violet), Blanc (white), Jaune (yellow)

Colorier(Objet, Couleur)
Données : un objet géométrique et une couleur
Etat final : la couleur Couleur est attribuée à Objet

Nommer(Objet, Nom)
Données : un objet géométrique et une chaîne
Etat final : Objet est nommé Nom

Nommer(Objet,Nom,Deltax,Deltay)
Données : un objet géométrique, une chaîne Nom et deux nombres
Etat final : Nom attribué à Objet sera dessiné avec un décalage relatif de Deltax, Deltay

Epaissir(Objet,e)
Données : un objet géométrique et un nombre
Etat final : l'épaisseur e est attribuée à Objet

Definir_style(Objet, styl) alias Dst(Objet, styl)
Données : un objet géométrique et un nombre
Etat final : le style de ligne styl est attribué à Objet

Cadrage(xmin,ymin,xmax,ymax)
Données : une séquence de 4 nombres avec xmin < xmax et ymin < ymax
Etat final : le dessin respectera le cadrage ainsi défini

Cadrage_auto()
Données : aucune
Etat final : le cadrage sera réalisé pour contenir tous les objets bornés et une partie des autres

Dessiner(F, titre)
Données : une figure ou un objet dessinable ou une liste d'objets dessinables et une chaîne
Etat final : Le dessin est réalisé bien cadré, et tous les objets de F sont munis de leurs attributs couleur, nom, style de ligne et épaisseur

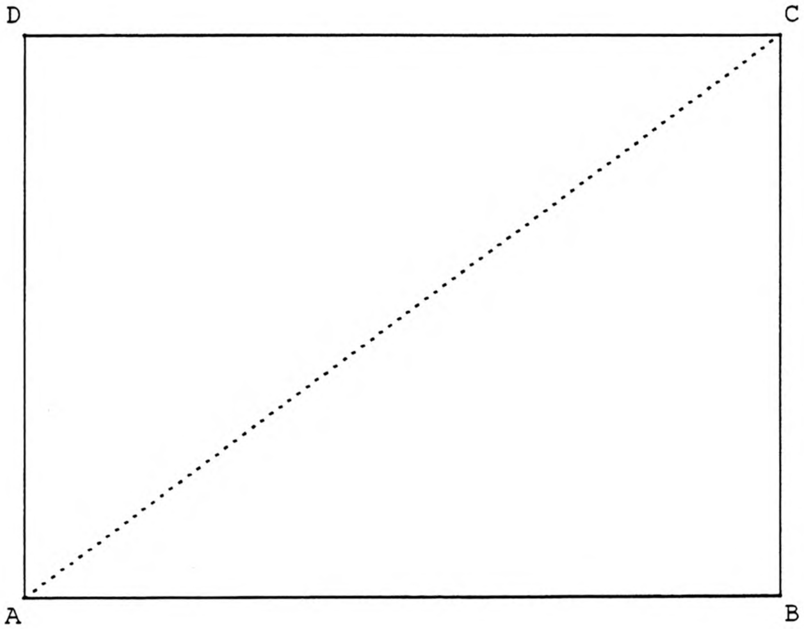
Animer(F, titre)
Données : une figure ou un objet dessinable ou une liste d'objets dessinables et une chaîne
Etat final : L'animation est réalisée bien cadrée, et tous les objets de F sont munis de leurs attributs couleur, nom, style de ligne et épaisseur

IREM de Grenoble
Groupe Calcul Formel
1996

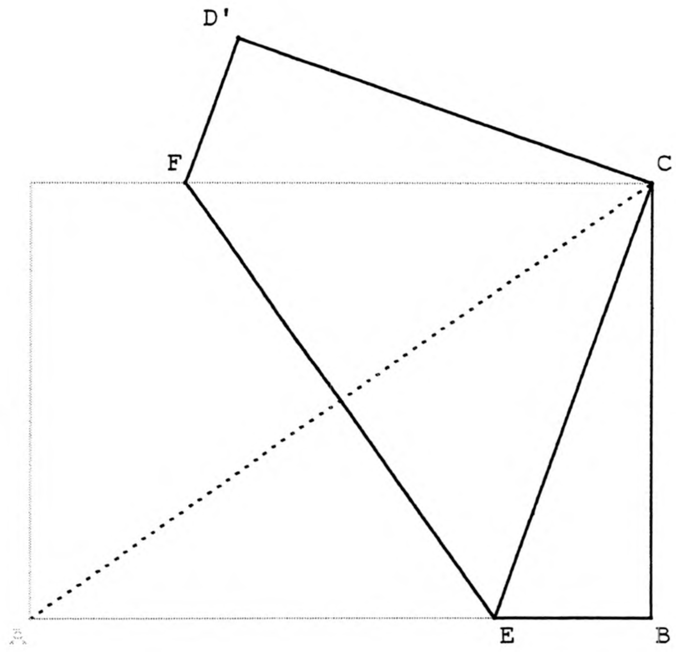
Pliages et pentagones

TP n°1 (niveau classe de seconde)

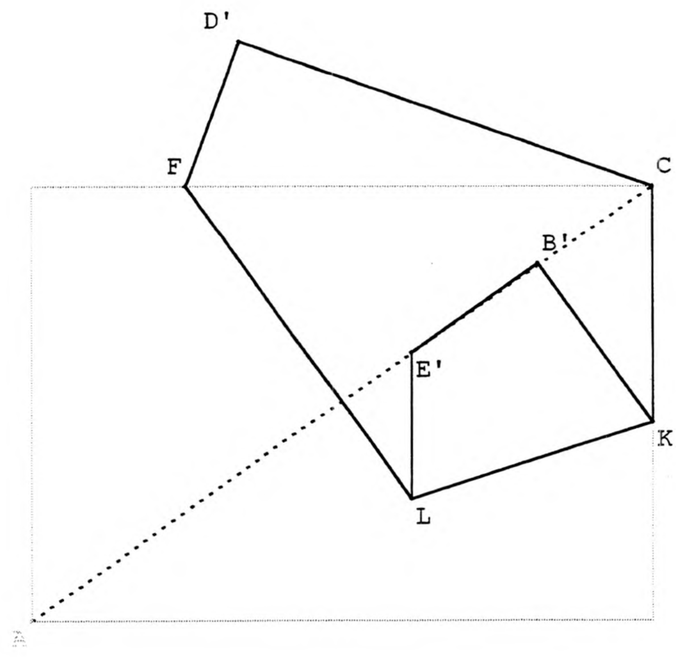
1) On prend une feuille de papier A4 (21x29,7), formant un rectangle ABCD dont on trace la diagonale [AC].



2) On plie la feuille en amenant A sur C ; D va en D’, le pli est [EF], E sur [AB], F sur [CD].

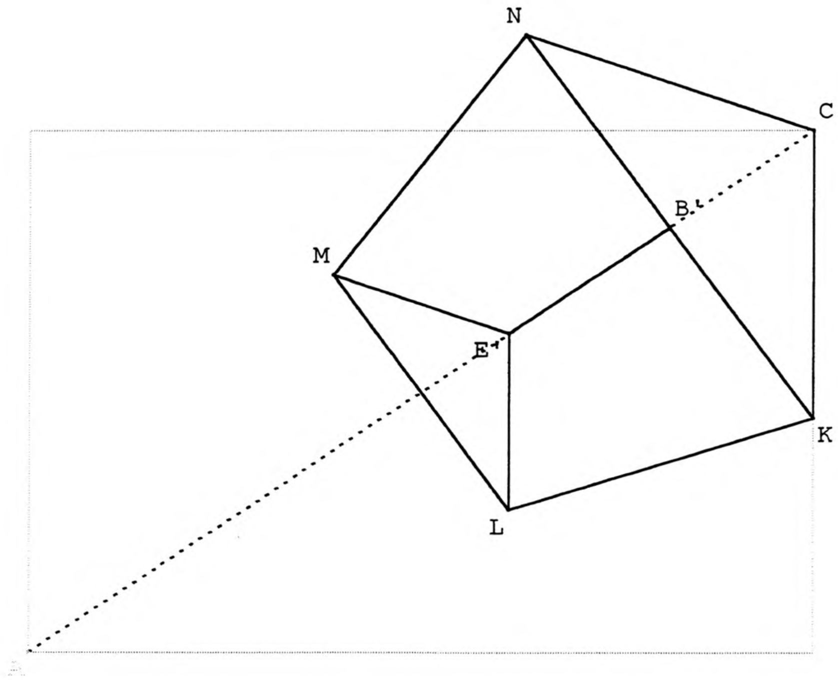


3) On plie de nouveau la feuille de telle sorte que [BE] vienne coïncider avec la diagonale [AC] ; B va en B’, E en E’, le pli est [KL], K sur [BC], L sur [EF].



4) On plie encore de telle sorte que [FD’] vienne coïncider avec la diagonale [AC] ; D’ va en B’, F en E’, le pli est [MN], M sur [FL], N sur [CD’].

On obtient ainsi le pentagone KLMNC.



Question : ce pentagone est-il régulier ?

On obtient facilement la réponse par calcul en utilisant GeoIrem.
Voir la feuille Maple V en annexe 1.
Ce pentagone n’est pas régulier, toutefois il semble que les longueurs CK et LM soient égales.
Ceci n’a rien d’évident sur les résultats flottants ; on peut le <u>démontrer</u> avec GeoIrem en obligeant MAPLE à calculer formellement en remplaçant a:=29.7 par a:=297/10.
Voir la feuille Maple V en annexe 2.
On peut aussi bien sûr le démontrer assez facilement sans calcul.

TP n°2 (niveau classe de Première S)

On veut modifier les dimensions de la feuille de papier de façon que le pentagone soit régulier.
La feuille étant rectangulaire de longueur a et de largeur b, on s’intéresse au rapport r=b/a.
On refait les calculs avec GeoIrem pour trouver r, puis en prenant b=21 on calcule a ; on constate qu’il suffit de couper un tout petit morceau de la feuille pour que le pentagone ait ses 5 côtés de même longueur. Mais est-il pour autant régulier ?
GeoIrem démontre, en calculant les angles, que le pentagone obtenu est bien régulier.
Voir la feuille Maple V en annexe 3.

NB : Nous sommes intéressés par une démonstration « purement » géométrique de ce dernier résultat.

IREM de Grenoble
Groupe calcul formel
1996

Pentagone régulier ?

Annexe 1
Où l'on calcule approximativement

```
> restart;read `geometri.m`;
> a:=29.7;b:=21;
> #a:=297/10;b:=21;
```

$$a := 29.7$$

$$b := 21$$

```
> A:=Point(0,0);B:=Point(a,0);C:=Point(a,b);
```

$$A := poinT$$

$$B := poinT$$

$$C := poinT$$

```
> Med:=Mediatrice(A,C);
```

$$Med := droitE$$

```
> B1:=Bissectrice(Demi_droite(A,B),Demi_droite(A,C));
```

$$B1 := droitE$$

```
> K:=Intersection(B1,Droite(B,C));
```

$$K := poinT$$

```
> L:=Intersection(B1,Med);
```

$$L := poinT$$

```
> s:=Reflexion(Droite(A,C));
```

$$s := application\_affinE$$

```
> M:=Image(L,s);
```

$$M := poinT$$

```
> N:=Image(K,s);
```

$$N := poinT$$

```
> c1:=Distance(C,K);
```

$$c1 := 11.56062704$$

```
> c2:=Distance(K,L);
```

$$c2 := 12.08033045$$

```
> c3:=Distance(L,M);
```

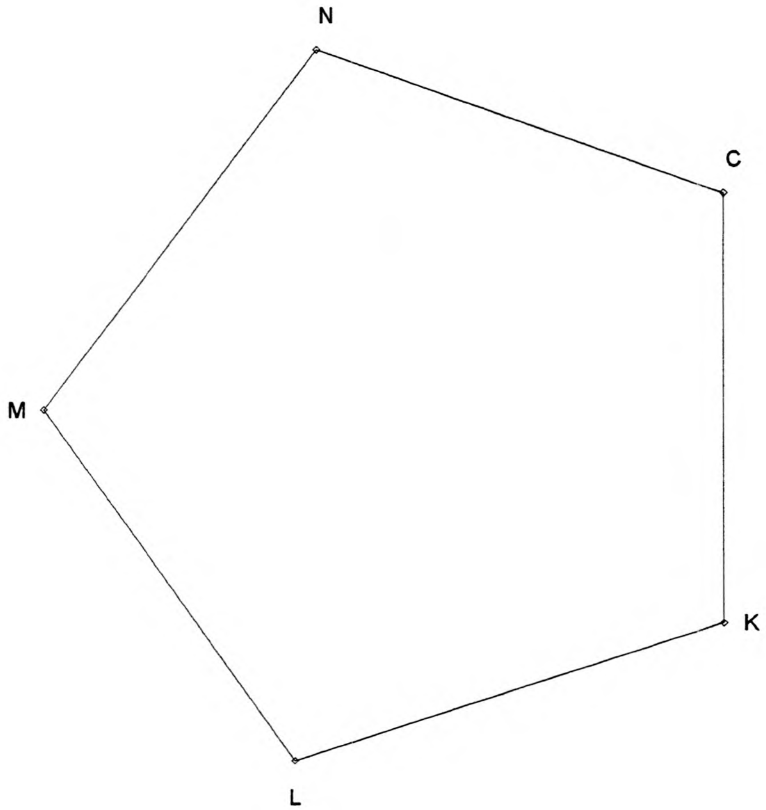
$$c3 := 11.56062703$$

Le pentagone n'est donc pas régulier ; dessinons-le pour voir.

```
> P:=Polygone(K,L,M,N,C);
```

$$P := polygonE$$

```
> Fig:=Figure(P,K,L,M,N,C):
  Nommer(K,'K',0.7,0):Nommer(L,'L',0,-1):Nommer(M,'M',-0.7,0):Nommer(N,'N'):Nommer(C,'C')
  : Colorier(Fig,Noir):
> Dessiner(Fig) ;
```



IREM de Grenoble
Groupe calcul formel
1996

Pentagone régulier ?

Annexe 2
Où l'on calcule exactement

```
> restart;read `geometri.m`;
> # a:=29.7;b:=21;
> a:=297/10;b:=21;
```

$$a := \frac{297}{10}$$

$$b := 21$$

```
> A:=Point(0,0):B:=Point(a,0):C:=Point(a,b):
> Med:=Mediatrice(A,C);
```

$$Med := droitE$$

```
> B1:=Bissectrice(Demi_droite(A,B),Demi_droite(A,C));
```

$$B1 := droitE$$

```
> K:=Intersection(B1,Droite(B,C));
```

$$K := poinT$$

```
> L:=Intersection(B1,Med);
```

$$L := poinT$$

```
> s:=Reflexion(Droite(A,C));
```

$$s := application\_affinE$$

```
> M:=Image(L,s);
```

$$M := poinT$$

```
> N:=Image(K,s);
```

$$N := poinT$$

```
> c1:=Distance(C,K);
```

$$c1 := \frac{308721}{14701 + 99\sqrt{14701}}$$

```
> c3:=Distance(L,M);
```

$$c3 := 21\,\frac{\sqrt{14701}}{\sqrt{14701} + 99}$$

```
> c1-c3:simplify(");
```

$$0$$

C'est bien !

IREM de Grenoble
Groupe calcul formel
1996

Pentagone régulier ?

Annexe 3
Où l'on démontre

```
> restart;read `geometri.m`;
> A:=Point(0,0):B:=Point(a,0):C:=Point(a,b):a:=1:
> Med:=Mediatrice(A,C);
```

$$Med := droitE$$

```
> B1:=Bissectrice(Demi_droite(A,B),Demi_droite(A,C));
```

$$B1 := droitE$$

```
> K:=Intersection(B1,Droite(B,C));
```

$$K := poinT$$

```
> L:=Intersection(B1,Med);
```

$$L := poinT$$

```
> s:=Reflexion(Droite(A,C));
```

$$s := application\_affinE$$

```
> M:=Image(L,s);
```

$$M := poinT$$

```
> N:=Image(K,s);
```

$$N := poinT$$

```
> c1:=Distance(C,K);
```

$$c1 := \sqrt{\frac{b^2\,(1+b^2)}{(\sqrt{1+b^2}+1)^2}}$$

```
> c2:=Distance(K,L);
```

$$c2 := \frac{1}{2}\sqrt{2}\,\sqrt{\frac{(-\sqrt{1+b^2}-1+b^2\sqrt{1+b^2}-b^2)^2}{(\sqrt{1+b^2}+1)^2\,(b^2+\sqrt{1+b^2}+1)}}$$

```
> c3:=Distance(L,M);
```

$$c3 := \sqrt{\frac{b^2\,(1+b^2)^2}{(b^2+\sqrt{1+b^2}+1)^2}}$$

```
> Sol:=solve(c1=c2,b);
```

$$Sol := \sqrt{5-2\sqrt{5}},\ -\sqrt{5-2\sqrt{5}}$$

```
> r:=1/Sol[1];# r=a/b
```

$$r := \frac{1}{\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}}$$

```
> a:=21*r;evalf(a,4);b:=21;
  # revenons à notre feuille de papier
```

$$a := \frac{21}{\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}}$$

$$28.90$$

$$b := 21$$

Avec les valeurs obtenues pour a et b, on est sûr que les côtés ont la même longueur ; avant d'affirmer que le pentagone est bien régulier, il nous reste à vérifier que l'angle KCL mesure bien 3*Pi/5.

```
> A:=Point(0,0):B:=Point(a,0):C:=Point(a,b):
> Med:=Mediatrice(A,C);
```

$$Med := droitE$$

```
> B1:=Bissectrice(Demi_droite(A,B),Demi_droite(A,C));
```

$$B1 := droitE$$

```
> K:=Intersection(B1,Droite(B,C));
```

$$K := poinT$$

```
> L:=Intersection(B1,Med);
```

$$L := poinT$$

```
> c1:=Distance(C,K);
```

$$c1 := -\frac{21}{5} \frac{(\sqrt{5} - 1)(-5 + 2\sqrt{5})}{\sqrt{5} - 2}$$

```
> COS:=Cos(Angle(Vecteur(K,C),Vecteur(K,L))):factor(COS);
```

$$-\frac{1}{4}\sqrt{5} + \frac{1}{4}$$

```
> cos(3*Pi/5);
```

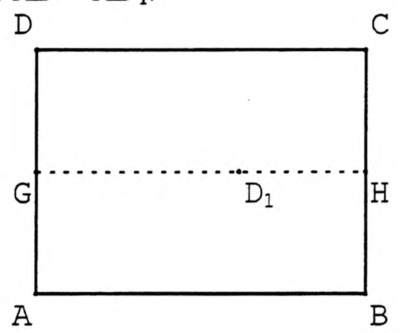
$$-\frac{1}{4}\sqrt{5} + \frac{1}{4}$$

Le pentagone est régulier. Ouf !

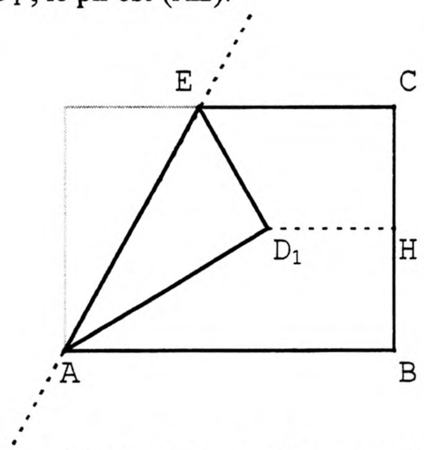
IREM de Grenoble
Groupe Calcul Formel
1996

Pliages et triangle équilatéral

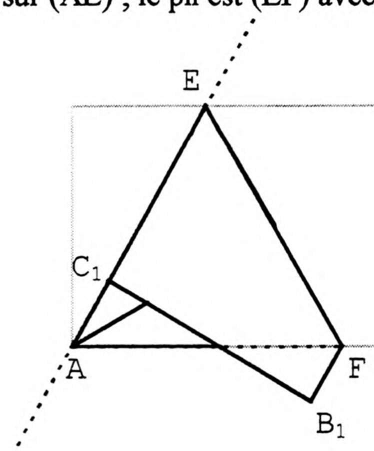
1) On prend une feuille de papier A4 (21×29,7), formant un rectangle ABCD, on trace l'axe (GH) et on construit le point D1 de [GH] tel que $AD = AD_1$.



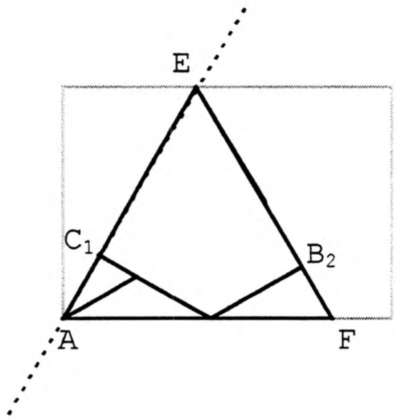
2) On plie de façon à mettre D sur D_1 ; le pli est (AE).



3) On plie de façon à mettre C en C_1 sur (AE) ; le pli est (EF) avec F sur (AB).



4) Le triangle AEF est-il équilatéral ?



Il n'est pas interdit d'utiliser GeoIrem, mais …

IREM de Grenoble
Groupe Calcul Formel

Pentagone et polynôme du second degré

1997

```
> restart ; read `geometri.m`;
```

"Construction" des solutions d'une équation du second degré

s et p sont deux nombres donnés

```
> P:=Point(0, p) :
> A:=Point(0, 1) :
> D1 := Mediatrice(A,P) :
> D2 := Droite(1, 0, -s/2) :
> O1 := Intersection(D1, D2) :
> C:=Cercle(O1, Distance(O1, A)) :
> Ax:=Droite(Point(0,0),Point(1,0)) : Ay:=Droite(Point(0,0),Point(0,1)) :
> sol := Intersection(C, Ax) :
> S1 := Objet(1, sol) :  S2 := Objet(2, sol) :
> x1 := Abscisse(S1) :  x2 := Abscisse(S2) :
> som := x1 + x2 : prod := expand(x1*x2) :
> print(`x1 + x2 = `.som) ; print(`x1x2 = `.prod) ;
```

$$x1 + x2 = s$$

$$x1x2 = p$$

x1 et x2 ont pour somme s et pour produit p ;
nous venons d'en faire une démonstration formelle.

Un exemple pour illustrer.
On sait que cos(2*Pi/5) et cos(4*Pi/5) sont les solutions de l'équation 4x^2 + 2x - 1 = 0.

```
> a:=4 : b:=2 : c:=-1 : solve(a*x^2 + b*x +c = 0, x) ;
```

$$\frac{1}{4}\sqrt{5}-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{5}$$

```
> s := -b/a ; p := c/a ;
```

$$s := \frac{-1}{2}$$

$$p := \frac{-1}{4}$$

```
> A:=Point(0, 1) : Nommer(A, 'A') : Colorier(A, Rouge) :
  P:=Point(0, p) : Nommer(P, 'P') : Colorier(P, Rouge) :
> D1 := Mediatrice(A,P) :
> D2 := Droite(1, 0, -s/2) :
> O1 := Intersection(D1, D2) : Nommer(O1, 'O1') :
> C:=Cercle(O1, Distance(O1, A)) : Colorier(C, Bleu) :
> Ax:=Droite(Point(0,0),Point(1,0)) : Ay:=Droite(Point(0,0),Point(0,1)) :
```

```
> sol := Intersection(C, Ax) :
> S1 := Objet(1, sol) :  S2 := Objet(2, sol) :
  x1 := Abscisse(S1) :
  if evalf(x1) > 0 then x2 := Abscisse(S2)  else x2 := x1 : x1 := Abscisse(S1) : fi :
> x1 ; x2 ; x1 + x2 ; expand(x1*x2) ;
```

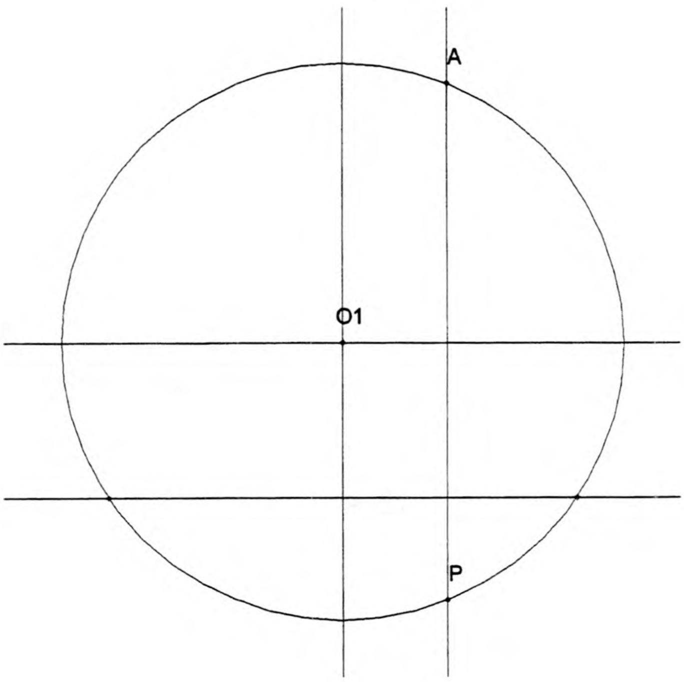
$$\frac{1}{4}\sqrt{5}-\frac{1}{4}$$

$$-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{5}$$

$$\frac{-1}{2}$$

$$\frac{-1}{4}$$

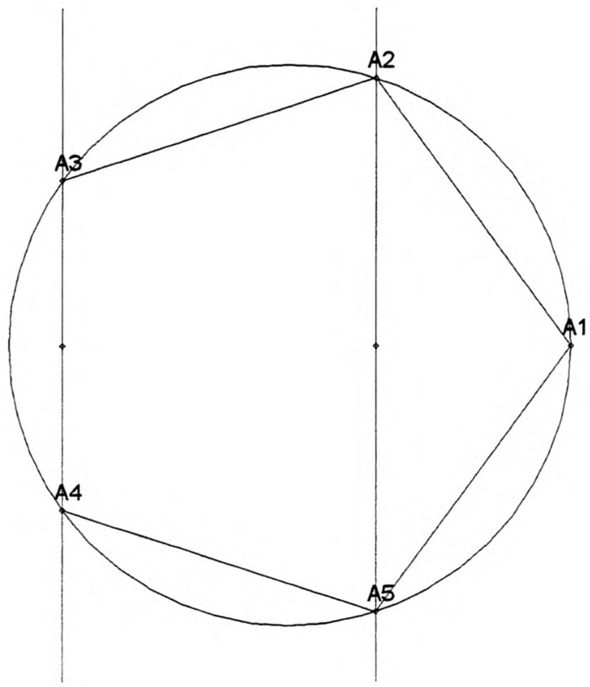
```
> Nommer(S1, 'S1') :  Nommer(S2, 'S2') : Colorier(Ax, Vert) : Colorier(Ay, Vert):
> F1 := Figure(C, A, P, D1, D2, Ax, Ay, S1, S2, O1) :
  Colorier(F1,Noir):
> Dessiner(F1) ;
```



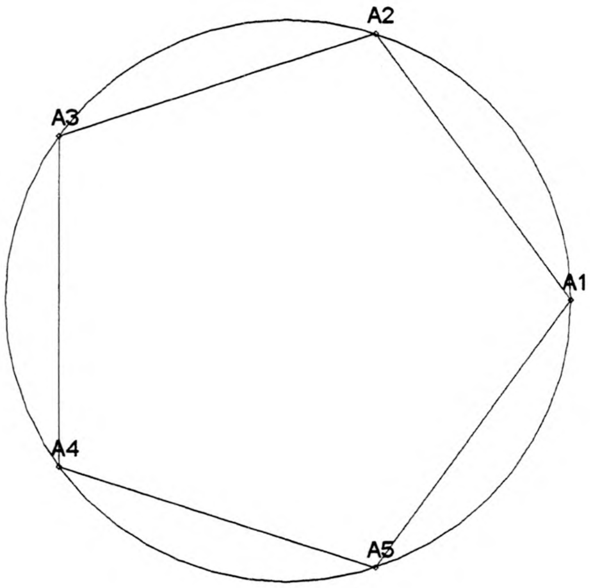
Une construction du pentagone régulier

```
> A1 := Point(1, 0) : Nommer(A1, 'A1') :
> Ct:=Cercle(Point(0,0), 1) : Colorier(Ct, Noir) :
> D3 := Droite(1, 0, -x1) : D4 := Droite(1, 0, -x2) :
> i3 := Intersection(Ct, D3) : i4 := Intersection(Ct, D4) :
> A2 := Objet(1, i3) :
  if evalf(Abscisse(A2))>0 then A5 := Objet(2,i3) else A5 := A2 : A2 := Objet(2,i3) fi :
```

```
Nommer(A2, 'A2') : Nommer(A5, 'A5') :
> A3 := Objet(1, i4) :
if evalf(Ordonnee(A3))>0 then A4 := Objet(2,i4) else A4 := A3 : A3 := Objet(2,i4) fi :
Nommer(A4, 'A4') : Nommer(A3, 'A3') :
> Penta := Polygone(A1, A2, A3, A4, A5) : Colorier(Penta, Vert) :
> F2 := Figure(Ct,  D3, D4, S1, S2, A1, A2, A3, A4, A5, Penta) :
Colorier(F2,Noir):
Dessiner(F2) ;
```




```
> F3 := Figure(Ct, A1, A2, A3, A4, A5, Penta) :
Colorier(F3,Noir):
Dessiner(F3) ;
```


A2
A3
A1
A4
A5

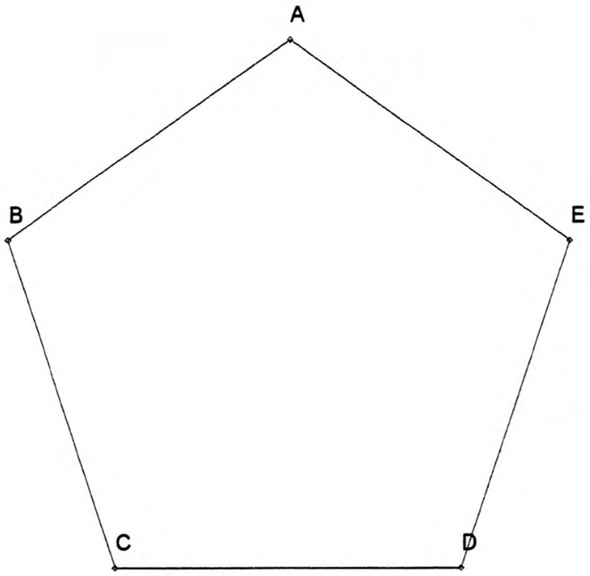
[>

IREM de Grenoble
Groupe Calcul Formel

Pentagone de Dürer

1997

```
> restart;read `geometri.m` ;
> C := Point(-1, 0) : Nommer(C, 'C') :
  DD := Point(1, 0) : Nommer(DD, 'D') :
> C1 := Cercle(C, 2) : C2 := Cercle(DD, 2) :
> inter := Intersection(C1, C2) :
> J := Objet(1, inter) :
  if evalf(Ordonnee(J))>0 then J := Objet(2, inter) fi :
> Delta := Mediatrice(C, DD) :
> C3 := Cercle(J, 2) :
> inter := Intersection(C1, C3) :
> R := Objet(1, inter) :
  if evalf(Ordonnee(R))=0 then R := Objet(2, inter) fi :
> inter := Intersection(Delta, C3) :
> S := Objet(1, inter) :
  if evalf(Ordonnee(S))<0 then S := Objet(2, inter) fi :
> D2 := Droite(R, S) :
> inter := Intersection(C2, D2) :
> E := Objet(1, inter) :
  if evalf(Ordonnee(E))<0 then E := Objet(2, inter) fi :
> B := Image(Reflexion(Delta), E) :
> C4 := Cercle(B, 2) : C5 := Cercle(E, 2) :
> inter := Intersection(C4, C5) :
> A := Objet(1, inter) : Aa := Objet(2, inter) :
  if evalf(Ordonnee(A))<evalf(Ordonnee(Aa)) then A := Aa fi :
> P := Polygone(A, B ,C, DD, E) :
  Colorier(P, Noir) :Nommer(A,'A'):Nommer(B,'B'):Nommer(C,'C'):
  Nommer(DD,'D'):Nommer(E,'E'):
> Fi:= Figure(P,A,B,C,DD,E) :
  Colorier(Fi,Noir):
> Dessiner(Fi) ;
```



\> interface(labelling=false) :

\> d1 := Distance(A, C) ; d2 := Distance(B, DD) ;

$$dl := \frac{1}{2}\left(28 - 4\sqrt{3} + 8\sqrt{-4+6\sqrt{3}} + 6\sqrt{16 - 4\sqrt{3} + 2\sqrt{-4+6\sqrt{3}} - 2\sqrt{3}\sqrt{-4+6\sqrt{3}}}\right.$$
$$- 4\sqrt{3}\sqrt{-4+6\sqrt{3}} - 2\sqrt{3}\sqrt{16 - 4\sqrt{3} + 2\sqrt{-4+6\sqrt{3}} - 2\sqrt{3}\sqrt{-4+6\sqrt{3}}}$$
$$\left. + 2\sqrt{-4+6\sqrt{3}}\sqrt{16 - 4\sqrt{3} + 2\sqrt{-4+6\sqrt{3}} - 2\sqrt{3}\sqrt{-4+6\sqrt{3}}}\right)^{1/2}$$

$$d2 := \sqrt{2 + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{-4+6\sqrt{3}}}$$

\> evalf(d1) ; evalf(d2) ;

3.216212655

3.243563346

\>

IREM de Grenoble
Groupe Calcul Formel

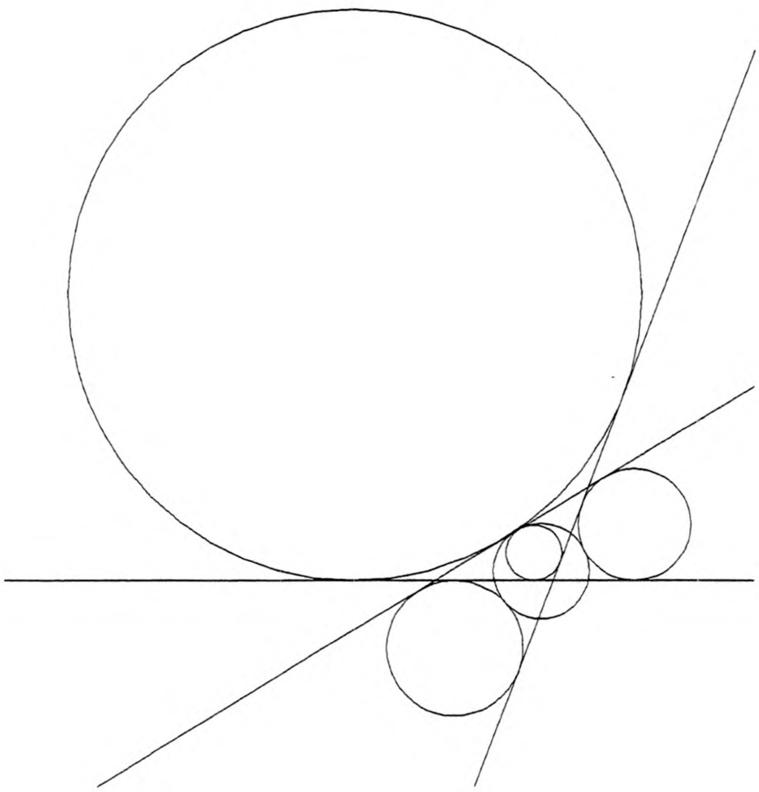
Le théorème de Feuerbach

1995

Dans un triangle, le cercle d'Euler est tangent au cercle inscrit ainsi qu'aux 3 cercles exinscrits.

```
> read `geometri.m`;
> A:=Point(xA,yA):B:=Point(xB,yB):C:=Point(xC,yC):
  xA:=0:yA:=0:xB:=10:yB:=0:xC:=13:yC:=8:
> T:=Triangle(A,B,C):
> Euler:=Cercle_d_Euler(T):
> CI:=Cercle_inscrit(T):
> CEX1:=Cercle_exinscrit1(T):
> CEX2:=Cercle_exinscrit2(T):
> CEX3:=Cercle_exinscrit3(T):
> Colorier(Euler,Vert):Colorier(CEX1,Bleu):Colorier(CEX2,Noir):Colorier(CEX3,Orange):
> F:=Figure(Droite(A,B),Droite(B,C),Droite(C,A),Euler,CI,CEX1,CEX2,CEX3):
  Colorier(F,Noir): # Noir pour impression monochrome
> Dessiner(F,`Le théorème de Feuerbach`);
```

Le théorème de Feuerbach



```
> xC:='xC':yC:='yC':
  T:=Triangle(A,B,C):
  Euler:=Cercle_d_Euler(T):
  CI:=Cercle_inscrit(T):
  CEX1:=Cercle_exinscrit1(T):
> Etre_tangents(CI,Euler);
```

true

```
> Etre_tangents(CEX1,Euler);
```

true

```
>
```

IREM de Grenoble
Groupe calcul formel
1995

Les trissectrices d'un triangle et le théorème de MORLEY

Soit (Ox,Oy) un angle de mesure principale thêta.
Les trissectrices de cet angle sont les deux droites qui "partagent" cet angle en 3 angles "égaux".
Si thêta est positif, nous appellerons 1ère trissectrice (resp 2ème trissectrice) la trissectrice T telle que l'angle (Ox,T) a pour mesure thêta/3 (resp 2*thêta/3).

Théorème de MORLEY

Soit ABC un triangle.
Notons TA1 la première trissectrice de l'angle A, TA2 la seconde.
De même TB1 et TB2 les trissectrices de B et TC1,TC2 celles de C.
TA1 et TB2 se coupent en R ,TB1 et TC2 en Q, TC1 et TA2 en P.
Le triangle PQR, apppelé triangle de MORLEY, est équilatéral.

```
> read `geometri.m`;
```

Commençons par faire un dessin.

```
> xA:=0:yA:=0:xB:=10:yB:=-2:xC:=11:yC:=6:
> Flotter():
> A:=Point(xA,yA):
> B:=Point(xB,yB):
> C:=Point(xC,yC):
> T:=Triangle(A,B,C):
> Angle_polaire_de_TA_1:=Modulo2pi(Mesure(Angle_polaire(Vecteur(A,B)))+Mesure(Vecteur(
  A,B),Vecteur(A,C))/3);
```

Angle_polaire_de_TA_1 := .0348518659

```
> Angle_polaire_de_TA_2:=Modulo2pi(Mesure(Angle_polaire(Vecteur(A,B)))+2*Mesure(Vecteur
  (A,B),Vecteur(A,C))/3);
```

Angle_polaire_de_TA_2 := .2670992933

```
> Angle_polaire_de_TB_1:=Modulo2pi(Mesure(Angle_polaire(Vecteur(B,C)))+Mesure(Vecteur(B
  ,C),Vecteur(B,A))/3);
```

Angle_polaire_de_TB_1 := 1.945693253

```
> Angle_polaire_de_TB_2:=Modulo2pi(Mesure(Angle_polaire(Vecteur(B,C)))+2*Mesure(Vecteur
  (B,C),Vecteur(B,A))/3);
```

Angle_polaire_de_TB_2 := 2.444945173

```
> Angle_polaire_de_TC_1:=Modulo2pi(Mesure(Angle_polaire(Vecteur(C,A)))+Mesure(Vecteur(C
```

```
,A),Vecteur(C,B))/3);
```

$$Angle\_polaire\_de\_TC\_1 := 3.956637581 - 2\pi$$

```
> Angle_polaire_de_TC_2:=Modulo2pi(Mesure(Angle_polaire(Vecteur(C,A)))+2*Mesure(Vecteur
(C,A),Vecteur(C,B))/3);
```

$$Angle\_polaire\_de\_TC\_2 := 4.272335784 - 2\pi$$

```
> TA1:=Droite(A,Vecteur(cos(Angle_polaire_de_TA_1),sin(Angle_polaire_de_TA_1))):
> TA2:=Droite(A,Vecteur(cos(Angle_polaire_de_TA_2),sin(Angle_polaire_de_TA_2))):
> TB1:=Droite(B,Vecteur(cos(Angle_polaire_de_TB_1),sin(Angle_polaire_de_TB_1))):
> TB2:=Droite(B,Vecteur(cos(Angle_polaire_de_TB_2),sin(Angle_polaire_de_TB_2))):
> TC1:=Droite(C,Vecteur(cos(Angle_polaire_de_TC_1),sin(Angle_polaire_de_TC_1))):
> TC2:=Droite(C,Vecteur(cos(Angle_polaire_de_TC_2),sin(Angle_polaire_de_TC_2))):
> P:=Intersection(TB1,TC2);
```

$$P := poinT$$

```
> Q:=Intersection(TC1,TA2);
```

$$Q := poinT$$

```
> R:=Intersection(TA1,TB2);
```

$$R := poinT$$

```
> Nommer(A,'A',-0.35,0):Nommer(B,'B',0,-0.35):Nommer(C,'C',0,0.35):Nommer(P,'P',0.35,0):No
mmer(Q,'Q',-0.25,0.25):Nommer(R,'R',-0.25,-0.25):
> Triangle_de_Morley:=Triangle(P,Q,R);
```

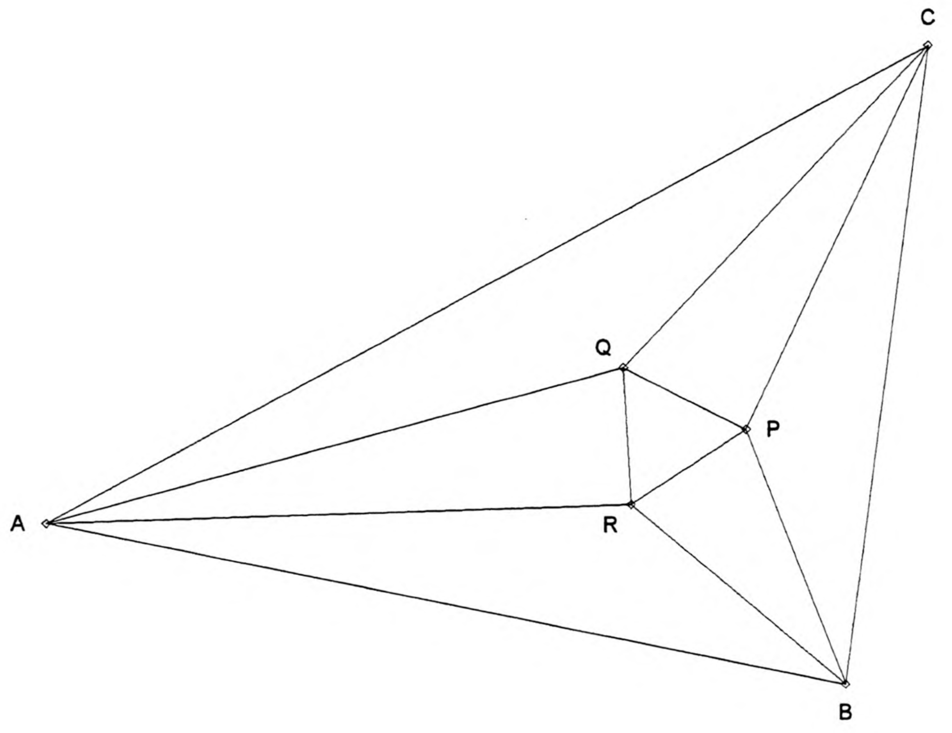
$$Triangle\_de\_Morley := trianglE$$

```
> Colorier(T,Noir):
> Colorier(Triangle_de_Morley,Rouge):
> Fig:=Figure(T,Segment(A,R),Segment(B,R),Segment(B,P),Segment(C,P),Segment(C,Q),Segmen
t(A,Q),Triangle_de_Morley,A,B,C,P,Q,R);
Colorier(Fig,Noir) : # Noir pour impression
```

$$Fig := figurE$$

```
> Dessiner(Fig,`Le triangle de MORLEY`);
```

Le triangle de MORLEY



> Distance(P,Q);

1.719368116

> Distance(Q,R);

1.719368091

> Distance(R,P);

1.719368075

Par ce calcul en virgule flottante on voit bien que le triangle PQR est équilatéral. Démontrons cette propriété à l'aide de la géométrie analytique de MAPLE.

MAPLE a des difficultés avec la trigonométrie, nous ne pouvons pas, comme dans l'exemple numérique, nous donner 3 points quelconques, car diviser des angles par 3 semble insurmontable.

Pour pallier ces difficultés, on va se donner A en (0,0) et B en (1,0), puis prendre comme mesure de l'angle A, 3a et comme mesure de l'angle B, 3b. Ainsi, les seuls paramètres seront a et b. L'angle C mesure alors Pi-3a-3b.

Nous utiliserons aussi la fonction simplify(Exp,trig) qui a l'avantage de renvoyer l'expression Exp sous forme canonique. C'est à dire avec les sinus à la puissance 1 au maximun, et les cosinus à une puissance quelconque.

```
> a:='a':b:='b':
> Ne_pas_flotter():
> A:=Point(0,0);
```

$$A := poinT$$

```
> B:=Point(1,0);
```

$$B := poinT$$

```
> DB:=Droite(A,Vecteur(expand(cos(3*a)),expand(sin(3*a))));
```

$$DB := droitE$$

```
> DA:=Droite(B,Vecteur(expand(cos(Pi-3*b)),expand(sin(Pi-3*b))));
```

$$DA := droitE$$

```
> C:=Intersection(DB,DA);
```

$$C := poinT$$

```
> Trissectrice_1_A:=Droite(A,Vecteur(cos(a),sin(a)));
```

$$Trissectrice\_1\_A := droitE$$

```
> Trissectrice_2_A:=Droite(A,Vecteur(expand(cos(2*a)),expand(sin(2*a))));
```

$$Trissectrice\_2\_A := droitE$$

```
> Trissectrice_1_B:=Droite(B,Vecteur(expand(cos(Pi-2*b)),expand(sin(Pi-2*b))));
```

$$Trissectrice\_1\_B := droitE$$

```
> Trissectrice_2_B:=Droite(B,Vecteur(expand(cos(Pi-b)),expand(sin(Pi-b))));
```

$$Trissectrice\_2\_B := droitE$$

```
> Trissectrice_1_C:=Droite(C,Vecteur(expand(cos(4*Pi/3+2*a-b)),expand(sin(4*Pi/3+2*a-b))));
```

$$Trissectrice\_1\_C := droitE$$

```
> Trissectrice_2_C:=Droite(C,Vecteur(expand(cos(5*Pi/3+a-2*b)),expand(sin(5*Pi/3+a-2*b))));
```

$$Trissectrice\_2\_C := droitE$$

```
> R:=Intersection(Trissectrice_1_A,Trissectrice_2_B);
```

$$R := poinT$$

```
> Q:=Intersection(Trissectrice_1_C,Trissectrice_2_A);
```

$$Q := poinT$$

```
> P:=Intersection(Trissectrice_1_B,Trissectrice_2_C);
```

$$P := poinT$$

Ayant les 3 points P,Q et R on peut comparer les distances PQ, QR et RP.

```
> D1:=Distance(P,Q):
> D2:=Distance(Q,R):
> D3:=Distance(R,P):
> Etre_nul(D1-D2);
```

vraisemblablement

```
> Etre_nul(D2-D3);
```

true

> Etre_nul(D3-D1);

vraisemblablement

Maple trouve que D2=D3. Par contre il ne trouve pas que D1=D2 ni que D3=D1.

Cependant il nous répond qu'elles sont "vraisemblablement" égales. Cela signifie que, lors d'essais avec des valeurs au hasard des paramètres (ici : a et b) il trouve des valeurs très voisines.

Pour le démontrer, il va falloir utiliser simplify(expr,trig) en élevant au carré, car une distance est souvent exprimée avec un radical.

```
> DD1:=simplify(D1*D1,trig):
> DD2:=simplify(D2*D2,trig):
> DD3:=simplify(D3*D3,trig):
> Delta12:=simplify(DD1-DD2,trig);
```

$$\Delta 12 := 0$$

```
> Delta23:=simplify(DD2-DD3,trig);
```

$$\Delta 23 := 0$$

```
> Delta31:=simplify(DD3-DD1,trig);
```

$$\Delta 31 := 0$$

Ceci démontre que D1=D2, D2=D3 puis que D3=D1. Ainsi PQR est bien équilatéral.

Voici les calculs que MAPLE a effectué pour démontrer ce résultat.

Le point C :

```
> Abscisse(C);
```

$$\cos(a)\sin(b)\left(16\cos(a)^2\cos(b)^2-4\cos(a)^2-12\cos(b)^2+3\right) \Big/ \Big(16\sin(a)\cos(a)^2\cos(b)^3-12\sin(a)\cos(a)^2\cos(b)-4\sin(a)\cos(b)^3+3\sin(a)\cos(b) + 16\cos(a)^3\sin(b)\cos(b)^2-4\cos(a)^3\sin(b)-12\cos(a)\sin(b)\cos(b)^2+3\cos(a)\sin(b) \Big)$$

```
> Ordonnee(C);
```

$$\sin(b)\sin(a)\left(16\cos(a)^2\cos(b)^2-4\cos(a)^2-4\cos(b)^2+1\right) \Big/ \Big(16\sin(a)\cos(a)^2\cos(b)^3 - 12\sin(a)\cos(a)^2\cos(b)-4\sin(a)\cos(b)^3+3\sin(a)\cos(b)+16\cos(a)^3\sin(b)\cos(b)^2 - 4\cos(a)^3\sin(b)-12\cos(a)\sin(b)\cos(b)^2+3\cos(a)\sin(b)\Big)$$

La 1ère trissectrice de A :

```
> Equation(Trissectrice_1_A);
```

$$\sin(a)\,x-\cos(a)\,y=0$$

La 2ème trissectrice de A :

> Equation(Trissectrice_2_A);

$$2\sin(a)\cos(a)\,x + (1 - 2\cos(a)^2)\,y = 0$$

La 1ère trissectrice de B :

> Equation(Trissectrice_1_B);

$$2\sin(b)\cos(b)\,x + (2\cos(b)^2 - 1)\,y - 2\sin(b)\cos(b) = 0$$

La 2ème trissectrice de B :

> Equation(Trissectrice_2_B);

$$\sin(b)\,x + \cos(b)\,y - \sin(b) = 0$$

La première trissectrice de C :

> Equation(Trissectrice_1_C);

$$\begin{aligned}
&\Big(-\sqrt{3}\cos(a)^2\cos(b) + \frac{1}{2}\sqrt{3}\cos(b) - \sqrt{3}\sin(b)\sin(a)\cos(a) - \cos(b)\sin(a)\cos(a)\\
&\quad + \sin(b)\cos(a)^2 - \frac{1}{2}\sin(b)\Big)x + \Big(\cos(a)^2\cos(b) - \frac{1}{2}\cos(b) + \sin(b)\sin(a)\cos(a)\\
&\quad - \sqrt{3}\cos(b)\sin(a)\cos(a) + \sqrt{3}\sin(b)\cos(a)^2 - \frac{1}{2}\sqrt{3}\sin(b)\Big)y - \frac{1}{2}(\\
&\quad -56\sin(b)\sin(a)\sqrt{3}\cos(b)^4\cos(a) - 3\sqrt{3}\sin(b)\sin(a)\cos(a)\\
&\quad + 24\sin(b)\sin(a)\sqrt{3}\cos(b)^2\cos(a) + 32\cos(a)^4\cos(b)^5\sqrt{3} + 68\sqrt{3}\cos(b)^3\cos(a)^2\\
&\quad - 40\cos(a)^4\cos(b)^3\sqrt{3} - 88\cos(b)^5\sqrt{3}\cos(a)^2 + 32\sin(b)\sin(a)\sqrt{3}\cos(b)^6\cos(a)\\
&\quad + 32\sin(b)\sin(a)\sqrt{3}\cos(b)^4\cos(a)^3 - 24\sin(b)\sin(a)\sqrt{3}\cos(a)^3\cos(b)^2\\
&\quad - 40\sin(a)\cos(a)\cos(b)^5 + 32\sin(a)\cos(a)\cos(b)^7 + 8\sqrt{3}\cos(b)\cos(a)^4\\
&\quad + 8\sin(a)\cos(a)\cos(b)^3 - 8\sin(a)\cos(a)^3\cos(b) + 40\sin(a)\cos(a)^3\cos(b)^3\\
&\quad + 4\sin(b)\cos(a)^4 - 32\sin(a)\cos(a)^3\cos(b)^5 - 16\sin(b)\cos(b)^4 + 32\cos(b)^7\sqrt{3}\cos(a)^2\\
&\quad - 19\sqrt{3}\cos(b)^3 + 32\sqrt{3}\cos(b)^5 + 3\sin(b)\cos(b)^2 - 12\sqrt{3}\cos(a)^2\cos(b)\\
&\quad + 3\sqrt{3}\cos(b) - 16\sqrt{3}\cos(b)^7 - 3\sin(b)\cos(a)^2 + 8\sin(b)\cos(b)^4\cos(a)^2\\
&\quad - 32\sin(b)\cos(b)^6\cos(a)^2 + 12\sin(b)\cos(a)^2\cos(b)^2 + 16\sin(b)\cos(b)^6\\
&\quad + 32\sin(b)\cos(a)^4\cos(b)^4 - 24\sin(b)\cos(a)^4\cos(b)^2 + 4\sin(b)\sin(a)\sqrt{3}\cos(a)^3) \Big/ (\\
&\quad 9\cos(a)^2 - 24\cos(a)^4 + 16\cos(a)^6 - 9\cos(b)^2 + 24\cos(b)^4 - 16\cos(b)^6) = 0
\end{aligned}$$

La 2ème trissectrice de C :

> Equation(Trissectrice_2_C);

$$\left(-\sqrt{3}\cos(b)^2\cos(a)+\frac{1}{2}\sqrt{3}\cos(a)-\sqrt{3}\sin(b)\sin(a)\cos(b)+\sin(a)\cos(b)^2-\frac{1}{2}\sin(a)\right.$$
$$\left.-\cos(b)\cos(a)\sin(b)\right)x+\left(-\cos(a)\cos(b)^2-\sqrt{3}\cos(b)^2\sin(a)\right.$$
$$\left.+\sqrt{3}\cos(b)\cos(a)\sin(b)-\sin(b)\sin(a)\cos(b)+\frac{1}{2}\cos(a)+\frac{1}{2}\sqrt{3}\sin(a)\right)y-\frac{1}{2}($$
$$-38\sin(a)\cos(b)^4+64\sin(a)\cos(b)^6+50\sqrt{3}\cos(b)^4\cos(a)+8\sqrt{3}\cos(a)^5$$
$$-32\sin(a)\cos(b)^8+8\sin(a)\cos(a)^4+3\sqrt{3}\cos(a)+32\cos(a)\cos(b)^8\sqrt{3}$$
$$-64\cos(a)\cos(b)^6\sqrt{3}-10\sqrt{3}\cos(a)^3-6\sin(a)\cos(a)^2+30\sin(a)\cos(a)^2\cos(b)^2$$
$$+10\cos(a)\sin(b)\cos(b)^3+8\cos(a)^5\cos(b)\sin(b)-3\sqrt{3}\sin(b)\sin(a)\cos(b)$$
$$+6\sin(a)\cos(b)^2-10\cos(a)^3\cos(b)\sin(b)+22\sin(b)\sin(a)\sqrt{3}\cos(b)^3$$
$$+32\sin(b)\sin(a)\sqrt{3}\cos(b)^7-48\sin(b)\sin(a)\sqrt{3}\cos(b)^5$$
$$+32\sin(b)\sin(a)\sqrt{3}\cos(b)^3\cos(a)^4+6\sin(b)\sin(a)\sqrt{3}\cos(a)^2\cos(b)$$
$$-8\sin(b)\sin(a)\sqrt{3}\cos(b)\cos(a)^4-24\sin(b)\sin(a)\sqrt{3}\cos(b)^3\cos(a)^2$$
$$+32\sin(b)\cos(a)\cos(b)^7+50\sqrt{3}\cos(b)^2\cos(a)^3-40\cos(a)^5\cos(b)^2\sqrt{3}$$
$$+40\cos(a)^3\cos(b)^3\sin(b)-48\cos(a)\sin(b)\cos(b)^5-32\cos(a)^5\cos(b)^3\sin(b)$$
$$-24\sin(a)\cos(b)^4\cos(a)^2-40\sqrt{3}\cos(b)^4\cos(a)^3+32\cos(a)^5\cos(b)^4\sqrt{3}$$
$$-40\sin(a)\cos(a)^4\cos(b)^2+32\sin(a)\cos(a)^4\cos(b)^4-21\sqrt{3}\cos(b)^2\cos(a))\Big/($$
$$9\cos(a)^2-24\cos(a)^4+16\cos(a)^6-9\cos(b)^2+24\cos(b)^4-16\cos(b)^6)=0$$

Le point R :

> Abscisse(R);

$$\frac{\cos(a)\sin(b)}{\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)}$$

> Ordonnee(R);

$$\frac{\sin(b)\sin(a)}{\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)}$$

Le point Q :

> Abscisse(Q);

$$-(16\cos(b)^6-28\cos(b)^4-3\cos(a)^2+3\sqrt{3}\cos(b)\sin(b)$$
$$-9\cos(a)\sin(b)\sin(a)\cos(b)-8\cos(a)^6+10\cos(a)^4+78\cos(a)^4\cos(b)^2$$
$$+64\cos(a)^4\cos(b)^6-64\cos(b)^6\cos(a)^2+124\cos(b)^4\cos(a)^2+32\cos(a)^6\cos(b)^4$$
$$-24\cos(a)^6\cos(b)^2-152\cos(a)^4\cos(b)^4-3\cos(a)\sin(a)\sqrt{3}-57\cos(a)^2\cos(b)^2$$
$$-8\sin(a)\sqrt{3}\cos(a)^5+40\sin(a)\sqrt{3}\cos(b)^4\cos(a)^3-32\sin(a)\sqrt{3}\cos(b)^4\cos(a)^5$$

$+ 12\cos(b)^2 + 22\sin(b)\sin(a)\cos(a)^3\cos(b) + 44\sin(b)\sin(a)\cos(a)\cos(b)^3$
$- 50\sin(a)\sqrt{3}\cos(a)^3\cos(b)^2 - 104\sin(b)\sin(a)\cos(a)^3\cos(b)^3$
$+ 28\sqrt{3}\cos(b)^3\sin(b)\cos(a)^2 - 56\sqrt{3}\cos(b)^3\sin(b)\cos(a)^4$
$+ 32\sqrt{3}\cos(b)^3\sin(b)\cos(a)^6 - 24\sqrt{3}\cos(b)\sin(b)\cos(a)^6$
$+ 42\sqrt{3}\cos(b)\sin(b)\cos(a)^4 - 21\sqrt{3}\cos(b)\sin(b)\cos(a)^2 - 4\sqrt{3}\cos(b)^3\sin(b)$
$- 32\sin(a)\cos(a)\cos(b)^5\sin(b) + 64\sin(a)\cos(a)^3\cos(b)^5\sin(b)$
$- 8\sin(a)\cos(a)^5\cos(b)\sin(b) + 32\sin(a)\cos(a)^5\cos(b)^3\sin(b)$
$+ 40\sin(a)\sqrt{3}\cos(a)^5\cos(b)^2 + 15\sin(a)\sqrt{3}\cos(b)^2\cos(a)$
$- 12\sin(a)\sqrt{3}\cos(b)^4\cos(a) + 10\sin(a)\sqrt{3}\cos(a)^3) \big/ ($
$9\cos(a)^2 - 24\cos(a)^4 + 16\cos(a)^6 - 9\cos(b)^2 + 24\cos(b)^4 - 16\cos(b)^6)$

> Ordonnee(Q);

$-2\,(28\sin(a)\cos(b)^4 - 16\sin(a)\cos(b)^6 + 12\sqrt{3}\cos(b)^4\cos(a) + 4\sqrt{3}\cos(a)^5$
$- 4\sin(a)\cos(a)^4 + 3\sqrt{3}\cos(a) - 7\sqrt{3}\cos(a)^3 + 3\sin(a)\cos(a)^2$
$+ 33\sin(a)\cos(a)^2\cos(b)^2 + 9\cos(b)\cos(a)\sin(b) - 44\cos(a)\sin(b)\cos(b)^3$
$+ 4\cos(a)^5\cos(b)\sin(b) - 3\sqrt{3}\sin(b)\sin(a)\cos(b) - 12\sin(a)\cos(b)^2$
$- 13\cos(a)^3\cos(b)\sin(b) + 4\sin(b)\sin(a)\sqrt{3}\cos(b)^3$
$+ 16\sin(b)\sin(a)\sqrt{3}\cos(b)^3\cos(a)^4 + 15\sin(b)\sin(a)\sqrt{3}\cos(a)^2\cos(b)$
$- 12\sin(b)\sin(a)\sqrt{3}\cos(b)\cos(a)^4 - 20\sin(b)\sin(a)\sqrt{3}\cos(b)^3\cos(a)^2$
$+ 32\sin(a)\cos(a)^2\cos(b)^6 + 35\sqrt{3}\cos(b)^2\cos(a)^3 - 20\cos(a)^5\cos(b)^2\sqrt{3}$
$- 32\cos(a)^3\sin(b)\cos(b)^5 + 60\cos(a)^3\cos(b)^3\sin(b) + 32\cos(a)\sin(b)\cos(b)^5$
$- 16\cos(a)^5\cos(b)^3\sin(b) - 68\sin(a)\cos(b)^4\cos(a)^2 - 28\sqrt{3}\cos(b)^4\cos(a)^3$
$+ 16\cos(a)^5\cos(b)^4\sqrt{3} - 12\sin(a)\cos(a)^4\cos(b)^2 + 16\sin(a)\cos(a)^4\cos(b)^4$
$- 15\sqrt{3}\cos(b)^2\cos(a))\cos(a) \big/ ($
$9\cos(a)^2 - 24\cos(a)^4 + 16\cos(a)^6 - 9\cos(b)^2 + 24\cos(b)^4 - 16\cos(b)^6)$

Le point P :

> Abscisse(P);

$-\,(8\cos(b)^6 - 14\cos(b)^4 + 3\cos(a)^2 - 3\sqrt{3}\cos(b)\sin(b) - 9\cos(a)\sin(b)\sin(a)\cos(b)$
$- 4\cos(a)^4 + 124\cos(a)^4\cos(b)^2 + 32\cos(a)^4\cos(b)^6 - 24\cos(b)^6\cos(a)^2$
$+ 78\cos(b)^4\cos(a)^2 + 64\cos(a)^6\cos(b)^4 - 64\cos(a)^6\cos(b)^2 - 152\cos(a)^4\cos(b)^4$
$+ 3\cos(a)\sin(a)\sqrt{3} - 57\cos(a)^2\cos(b)^2 - 8\sqrt{3}\cos(b)^5\sin(b)$
$- 56\sin(a)\sqrt{3}\cos(b)^4\cos(a)^3 + 6\cos(b)^2 + 44\sin(b)\sin(a)\cos(a)^3\cos(b)$
$+ 22\sin(b)\sin(a)\cos(a)\cos(b)^3 + 28\sin(a)\sqrt{3}\cos(a)^3\cos(b)^2$
$- 104\sin(b)\sin(a)\cos(a)^3\cos(b)^3 - 50\sqrt{3}\cos(b)^3\sin(b)\cos(a)^2$
$+ 40\sqrt{3}\cos(b)^3\sin(b)\cos(a)^4 - 12\sqrt{3}\cos(b)\sin(b)\cos(a)^4$

$$+ 15\sqrt{3}\cos(b)\sin(b)\cos(a)^2 + 10\sqrt{3}\cos(b)^3\sin(b) - 8\sin(a)\cos(a)\cos(b)^5\sin(b)$$
$$+ 32\sin(a)\cos(a)^3\cos(b)^5\sin(b) - 32\sin(a)\cos(a)^5\cos(b)\sin(b)$$
$$+ 64\sin(a)\cos(a)^5\cos(b)^3\sin(b) + 40\cos(b)^5\cos(a)^2\sqrt{3}\sin(b)$$
$$- 32\cos(b)^5\sin(b)\sqrt{3}\cos(a)^4 - 21\sin(a)\sqrt{3}\cos(b)^2\cos(a)$$
$$+ 42\sin(a)\sqrt{3}\cos(b)^4\cos(a) + 32\sqrt{3}\cos(b)^6\cos(a)^3\sin(a) - 4\sin(a)\sqrt{3}\cos(a)^3$$
$$- 24\sqrt{3}\cos(b)^6\cos(a)\sin(a)) \Big/ ($$
$$9\cos(a)^2 - 24\cos(a)^4 + 16\cos(a)^6 - 9\cos(b)^2 + 24\cos(b)^4 - 16\cos(b)^6)$$

> Ordonnee(P);

$$-2(-12\sin(b)\sin(a)\sqrt{3}\cos(b)^4\cos(a) - 3\sqrt{3}\sin(b)\sin(a)\cos(a) - 16\sin(b)\cos(a)^6$$
$$+ 15\sin(b)\sin(a)\sqrt{3}\cos(b)^2\cos(a) + 16\cos(a)^4\cos(b)^5\sqrt{3} + 35\sqrt{3}\cos(b)^3\cos(a)^2$$
$$- 28\cos(a)^4\cos(b)^3\sqrt{3} - 20\cos(b)^5\sqrt{3}\cos(a)^2 + 16\sin(b)\sin(a)\sqrt{3}\cos(b)^4\cos(a)^3$$
$$- 20\sin(b)\sin(a)\sqrt{3}\cos(a)^3\cos(b)^2 + 4\sin(a)\cos(a)\cos(b)^5 + 12\sqrt{3}\cos(b)\cos(a)^4$$
$$- 13\sin(a)\cos(a)\cos(b)^3 - 44\sin(a)\cos(a)^3\cos(b) + 60\sin(a)\cos(a)^3\cos(b)^3$$
$$+ 28\sin(b)\cos(a)^4 - 16\sin(a)\cos(a)^3\cos(b)^5 - 4\sin(b)\cos(b)^4 - 7\sqrt{3}\cos(b)^3$$
$$+ 32\sin(b)\cos(b)^2\cos(a)^6 - 32\cos(a)^5\cos(b)^3\sin(a) + 32\cos(a)^5\cos(b)\sin(a)$$
$$+ 4\sqrt{3}\cos(b)^5 + 3\sin(b)\cos(b)^2 - 15\sqrt{3}\cos(a)^2\cos(b) + 3\sqrt{3}\cos(b)$$
$$- 12\sin(b)\cos(a)^2 + 9\cos(b)\sin(a)\cos(a) - 12\sin(b)\cos(b)^4\cos(a)^2$$
$$+ 33\sin(b)\cos(a)^2\cos(b)^2 + 16\sin(b)\cos(a)^4\cos(b)^4 - 68\sin(b)\cos(a)^4\cos(b)^2$$
$$+ 4\sin(b)\sin(a)\sqrt{3}\cos(a)^3)\cos(b) \Big/ ($$
$$-9\cos(a)^2 + 24\cos(a)^4 - 16\cos(a)^6 + 9\cos(b)^2 - 24\cos(b)^4 + 16\cos(b)^6)$$

La distance PQ :

> D1;

$$2(-\sin(b)^2(-256\cos(a)^8\cos(b)^2 - 32\cos(b)^7\sqrt{3}\sin(b)$$
$$+ 256\cos(a)^8\cos(b)^3\sqrt{3}\sin(b) + 256\cos(a)^8\cos(b)^4 - 32\cos(a)^7\sin(a)\sqrt{3}$$
$$- 256\cos(a)^7\cos(b)^4\sin(a)\sqrt{3} + 256\cos(b)^8\cos(a)^3\sin(a)\sqrt{3}$$
$$+ 256\cos(a)^7\cos(b)^2\sin(a)\sqrt{3} + 256\cos(b)^7\cos(a)^2\sqrt{3}\sin(b)$$
$$- 256\cos(b)^7\sin(b)\sqrt{3}\cos(a)^4 - 128\cos(b)^8\sin(a)\sqrt{3}\cos(a) - 96\cos(b)^6 + 90\cos(b)^4$$
$$- 256\cos(b)^8\cos(a)^2 - 128\sqrt{3}\cos(b)\sin(b)\cos(a)^8 - 27\cos(a)^2$$
$$- 128\cos(a)^7\sin(a)\cos(b)\sin(b) + 256\cos(b)^7\cos(a)^3\sin(b)\sin(a)$$
$$+ 1024\cos(a)^5\sin(a)\cos(b)^5\sin(b) + 256\sin(a)\cos(a)^7\cos(b)^3\sin(b)$$
$$- 128\cos(b)^7\sin(b)\sin(a)\cos(a) + 54\cos(a)\sin(b)\sin(a)\cos(b) + 256\cos(b)^8\cos(a)^4$$
$$+ 1024\cos(a)^6\cos(b)^6 - 96\cos(a)^6 + 90\cos(a)^4 - 1248\cos(a)^4\cos(b)^2$$
$$- 2048\cos(a)^4\cos(b)^6 + 1088\cos(b)^6\cos(a)^2 - 1248\cos(b)^4\cos(a)^2$$
$$- 2048\cos(a)^6\cos(b)^4 + 1088\cos(a)^6\cos(b)^2 + 32\cos(a)^8 + 2944\cos(a)^4\cos(b)^4$$

$$+450\cos(a)^2\cos(b)^2+48\sqrt{3}\cos(b)^5\sin(b)+48\sin(a)\sqrt{3}\cos(a)^5+32\cos(b)^8$$
$$+160\sin(a)\sqrt{3}\cos(b)^4\cos(a)^3+384\sin(a)\sqrt{3}\cos(b)^4\cos(a)^5-27\cos(b)^2$$
$$-288\sin(b)\sin(a)\cos(a)^3\cos(b)-288\sin(b)\sin(a)\cos(a)\cos(b)^3$$
$$+96\sin(a)\sqrt{3}\cos(a)^3\cos(b)^2+1344\sin(b)\sin(a)\cos(a)^3\cos(b)^3$$
$$+96\sqrt{3}\cos(b)^3\sin(b)\cos(a)^2+160\sqrt{3}\cos(b)^3\sin(b)\cos(a)^4$$
$$-512\sqrt{3}\cos(b)^3\sin(b)\cos(a)^6+256\sqrt{3}\cos(b)\sin(b)\cos(a)^6$$
$$-144\sqrt{3}\cos(b)\sin(b)\cos(a)^4+18\sqrt{3}\cos(b)\sin(b)\cos(a)^2-18\sqrt{3}\cos(b)^3\sin(b)$$
$$+384\sin(a)\cos(a)\cos(b)^5\sin(b)-1408\sin(a)\cos(a)^3\cos(b)^5\sin(b)$$
$$+384\sin(a)\cos(a)^5\cos(b)\sin(b)-1408\sin(a)\cos(a)^5\cos(b)^3\sin(b)$$
$$-384\cos(b)^5\cos(a)^2\sqrt{3}\sin(b)+384\cos(b)^5\sin(b)\sqrt{3}\cos(a)^4$$
$$-384\sin(a)\sqrt{3}\cos(a)^5\cos(b)^2+18\sin(a)\sqrt{3}\cos(b)^2\cos(a)$$
$$-144\sin(a)\sqrt{3}\cos(b)^4\cos(a)-512\sqrt{3}\cos(b)^6\cos(a)^3\sin(a)-18\sin(a)\sqrt{3}\cos(a)^3$$
$$+256\sqrt{3}\cos(b)^6\cos(a)\sin(a))\sin(a)^2\Big/$$
$$(-9\cos(a)^2+24\cos(a)^4-16\cos(a)^6+9\cos(b)^2-24\cos(b)^4+16\cos(b)^6)^2)^{1/2}$$

La distance QR :

> D2;

$$2\,(-\sin(a)^2\sin(b)^2(-32\cos(b)^6+96\cos(b)^4-90\cos(a)^2+18\sqrt{3}\cos(b)\sin(b)$$
$$+108\cos(a)\sin(b)\sin(a)\cos(b)+27-32\cos(a)^6+96\cos(a)^4-352\cos(a)^4\cos(b)^2$$
$$+64\cos(b)^6\cos(a)^2-352\cos(b)^4\cos(a)^2+64\cos(a)^6\cos(b)^2+256\cos(a)^4\cos(b)^4$$
$$+18\cos(a)\sin(a)\sqrt{3}+372\cos(a)^2\cos(b)^2+32\sqrt{3}\cos(b)^5\sin(b)$$
$$+32\sin(a)\sqrt{3}\cos(a)^5-90\cos(b)^2-192\sin(b)\sin(a)\cos(a)^3\cos(b)$$
$$-192\sin(b)\sin(a)\cos(a)\cos(b)^3+64\sin(a)\sqrt{3}\cos(a)^3\cos(b)^2$$
$$+256\sin(b)\sin(a)\cos(a)^3\cos(b)^3+64\sqrt{3}\cos(b)^3\sin(b)\cos(a)^2$$
$$+64\sqrt{3}\cos(b)\sin(b)\cos(a)^6-96\sqrt{3}\cos(b)\sin(b)\cos(a)^4$$
$$+12\sqrt{3}\cos(b)\sin(b)\cos(a)^2-48\sqrt{3}\cos(b)^3\sin(b)+64\sin(a)\cos(a)\cos(b)^5\sin(b)$$
$$+64\sin(a)\cos(a)^5\cos(b)\sin(b)-64\cos(b)^5\cos(a)^2\sqrt{3}\sin(b)$$
$$-64\sin(a)\sqrt{3}\cos(a)^5\cos(b)^2+12\sin(a)\sqrt{3}\cos(b)^2\cos(a)$$
$$-96\sin(a)\sqrt{3}\cos(b)^4\cos(a)-48\sin(a)\sqrt{3}\cos(a)^3+64\sqrt{3}\cos(b)^6\cos(a)\sin(a))\Big/($$
$$(-\cos(a)^2-\cos(b)^2+2\cos(a)^2\cos(b)^2-2\cos(a)\sin(b)\sin(a)\cos(b))$$
$$(9-24\cos(a)^2+16\cos(a)^4-24\cos(b)^2+16\cos(a)^2\cos(b)^2+16\cos(b)^4)^2))^{1/2}$$

La distance RP :

> D3;

$$
2\,(-\sin(a)^2 \sin(b)^2 (-32 \cos(b)^6 + 96 \cos(b)^4 - 90 \cos(a)^2 + 18 \sqrt{3} \cos(b) \sin(b)
+ 108 \cos(a) \sin(b) \sin(a) \cos(b) + 27 - 32 \cos(a)^6 + 96 \cos(a)^4 - 352 \cos(a)^4 \cos(b)^2
+ 64 \cos(b)^6 \cos(a)^2 - 352 \cos(b)^4 \cos(a)^2 + 64 \cos(a)^6 \cos(b)^2 + 256 \cos(a)^4 \cos(b)^4
+ 18 \cos(a) \sin(a) \sqrt{3} + 372 \cos(a)^2 \cos(b)^2 + 32 \sqrt{3} \cos(b)^5 \sin(b)
+ 32 \sin(a) \sqrt{3} \cos(a)^5 - 90 \cos(b)^2 - 192 \sin(b) \sin(a) \cos(a)^3 \cos(b)
- 192 \sin(b) \sin(a) \cos(a) \cos(b)^3 + 64 \sin(a) \sqrt{3} \cos(a)^3 \cos(b)^2
+ 256 \sin(b) \sin(a) \cos(a)^3 \cos(b)^3 + 64 \sqrt{3} \cos(b)^3 \sin(b) \cos(a)^2
+ 64 \sqrt{3} \cos(b) \sin(b) \cos(a)^6 - 96 \sqrt{3} \cos(b) \sin(b) \cos(a)^4
+ 12 \sqrt{3} \cos(b) \sin(b) \cos(a)^2 - 48 \sqrt{3} \cos(b)^3 \sin(b) + 64 \sin(a) \cos(a) \cos(b)^5 \sin(b)
+ 64 \sin(a) \cos(a)^5 \cos(b) \sin(b) - 64 \cos(b)^5 \cos(a)^2 \sqrt{3} \sin(b)
- 64 \sin(a) \sqrt{3} \cos(a)^5 \cos(b)^2 + 12 \sin(a) \sqrt{3} \cos(b)^2 \cos(a)
- 96 \sin(a) \sqrt{3} \cos(b)^4 \cos(a) - 48 \sin(a) \sqrt{3} \cos(a)^3 + 64 \sqrt{3} \cos(b)^6 \cos(a) \sin(a)) \Big/ (
(-\cos(a)^2 - \cos(b)^2 + 2 \cos(a)^2 \cos(b)^2 - 2 \cos(a) \sin(b) \sin(a) \cos(b))
(9 - 24 \cos(a)^2 + 16 \cos(a)^4 - 24 \cos(b)^2 + 16 \cos(a)^2 \cos(b)^2 + 16 \cos(b)^4)^2)^{1/2}
$$

>

IREM de Grenoble
Groupe Calcul Formel

Théorème de Pascal

1996

Les côtés "opposés" d'un hexagone inscrit dans un cercle, se coupent deux à deux, en trois points alignés.

```
> restart : read `geometri.m`:
> A:=Point(cos(0),sin(0)):B:=Point(cos(t1),sin(t1)):
  C:=Point(cos(t2),sin(t2)):D_:=Point(cos(t3),sin(t3)):
  E:=Point(cos(t4),sin(t4)):F:=Point(cos(t5),sin(t5)):
> P:=Intersection(Droite(A,F),Droite(C,D_)):Coordonnees(P);
```

$$\left[(\cos(t3)\sin(t2) - \cos(t2)\sin(t3) - \cos(t5)\cos(t3)\sin(t2) + \cos(t5)\cos(t2)\sin(t3) + \sin(t5)\cos(t2) - \sin(t5)\cos(t3)) / (\sin(t5)\cos(t2) - \sin(t5)\cos(t3) - \sin(t3) + \sin(t2) + \cos(t5)\sin(t3) - \cos(t5)\sin(t2)), \frac{\sin(t5)\,(-\sin(t3) + \sin(t2) - \cos(t3)\sin(t2) + \cos(t2)\sin(t3))}{\sin(t5)\cos(t2) - \sin(t5)\cos(t3) - \sin(t3) + \sin(t2) + \cos(t5)\sin(t3) - \cos(t5)\sin(t2)} \right]$$

```
> Q:=Intersection(Droite(E,F),Droite(B,C)):Coordonnees(Q);
```

$$[(-\cos(t4)\cos(t2)\sin(t1) + \cos(t4)\cos(t1)\sin(t2) + \cos(t5)\cos(t2)\sin(t1) - \cos(t5)\cos(t1)\sin(t2) + \cos(t5)\sin(t4)\cos(t1) - \cos(t5)\sin(t4)\cos(t2) - \cos(t4)\sin(t5)\cos(t1) + \cos(t4)\sin(t5)\cos(t2)) / (-\sin(t5)\cos(t1) + \sin(t5)\cos(t2) + \sin(t4)\cos(t1) - \sin(t4)\cos(t2) + \cos(t4)\sin(t2) - \cos(t4)\sin(t1) - \cos(t5)\sin(t2) + \cos(t5)\sin(t1)), (-\cos(t5)\sin(t2)\sin(t4) + \cos(t5)\sin(t4)\sin(t1) + \cos(t4)\sin(t5)\sin(t2) - \sin(t5)\cos(t4)\sin(t1) + \sin(t5)\cos(t2)\sin(t1) - \cos(t1)\sin(t2)\sin(t5) - \sin(t4)\cos(t2)\sin(t1) + \sin(t4)\cos(t1)\sin(t2)) / (-\sin(t5)\cos(t1) + \sin(t5)\cos(t2) + \sin(t4)\cos(t1) - \sin(t4)\cos(t2) + \cos(t4)\sin(t2) - \cos(t4)\sin(t1) - \cos(t5)\sin(t2) + \cos(t5)\sin(t1))]$$

```
> R:=Intersection(Droite(D_,E),Droite(A,B)):Coordonnees(R);
```

$$\left[(-\sin(t1)\cos(t3) + \cos(t4)\sin(t1) - \cos(t4)\sin(t3) + \cos(t4)\sin(t3)\cos(t1) + \cos(t3)\sin(t4) - \cos(t3)\sin(t4)\cos(t1)) / (\sin(t4) - \sin(t4)\cos(t1) - \sin(t3) + \sin(t3)\cos(t1) - \sin(t1)\cos(t3) + \cos(t4)\sin(t1)), \frac{\sin(t1)\,(\cos(t4)\sin(t3) - \cos(t3)\sin(t4) + \sin(t4) - \sin(t3))}{\sin(t4) - \sin(t4)\cos(t1) - \sin(t3) + \sin(t3)\cos(t1) - \sin(t1)\cos(t3) + \cos(t4)\sin(t1)} \right]$$

```
> Etre_alignes(P,Q,R); # c'est très long formellement !
> t1:=Pi/3:t2:=5*Pi/6:t3:=4*Pi/3:t4:=-Pi/3:t5:=11*Pi/6:
```

On reconstruit les objets pour dessiner

```
> A:=Point(cos(0),sin(0)):B:=Point(cos(t1),sin(t1)):
  C:=Point(cos(t2),sin(t2)):D_:=Point(cos(t3),sin(t3)):
```

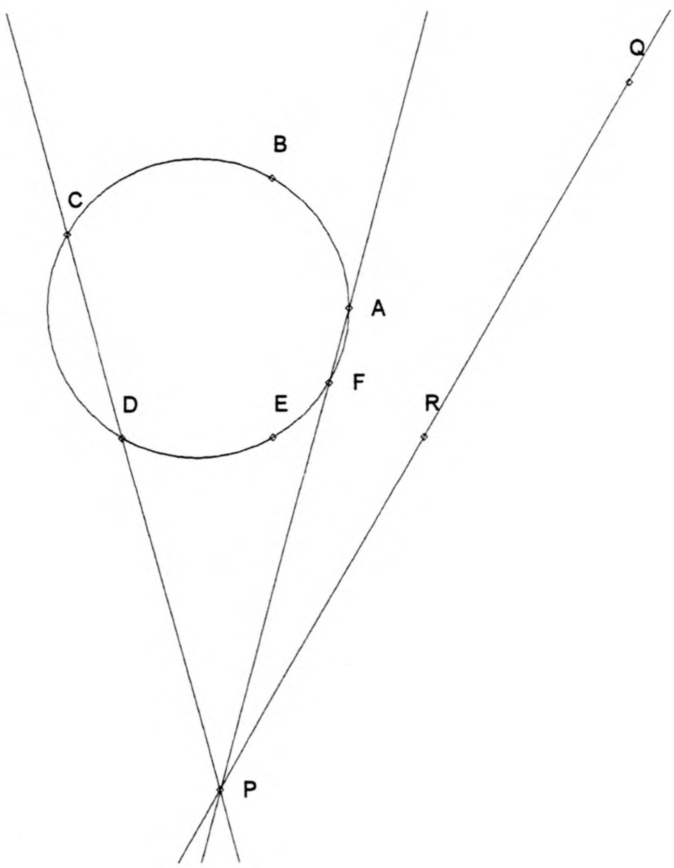
```
E:=Point(cos(t4),sin(t4)):F:=Point(cos(t5),sin(t5)):
> P:=Intersection(Droite(A,F),Droite(C,D_)):
> Q:=Intersection(Droite(E,F),Droite(B,C)):
> R:=Intersection(Droite(D_,E),Droite(A,B)):
> evalf(Coordonnees(P));
  evalf(Coordonnees(Q));
  evalf(Coordonnees(R));
```

$$[.1339745970, -3.232050806]$$

$$[2.866025403, 1.500000000]$$

$$[1.500000000, -.8660254040]$$

```
> Fig:=Figure(Cercle(Point_origine,1),A,B,C,D_,E,F,P,Q,R,Droite(A,F),Droite(C,D_),Droite(P,Q)
  ):
  Nommer(A,'A',0.2,0):Nommer(B,'B'):Nommer(C,'C'):
  Nommer(D_,'D'):Nommer(E,'E'):Nommer(F,'F',0.2,0):
  Nommer(P,'P',0.2,0):Nommer(Q,'Q'):Nommer(R,'R'):
  Colorier(Fig,Noir):Dessiner(Fig);
```



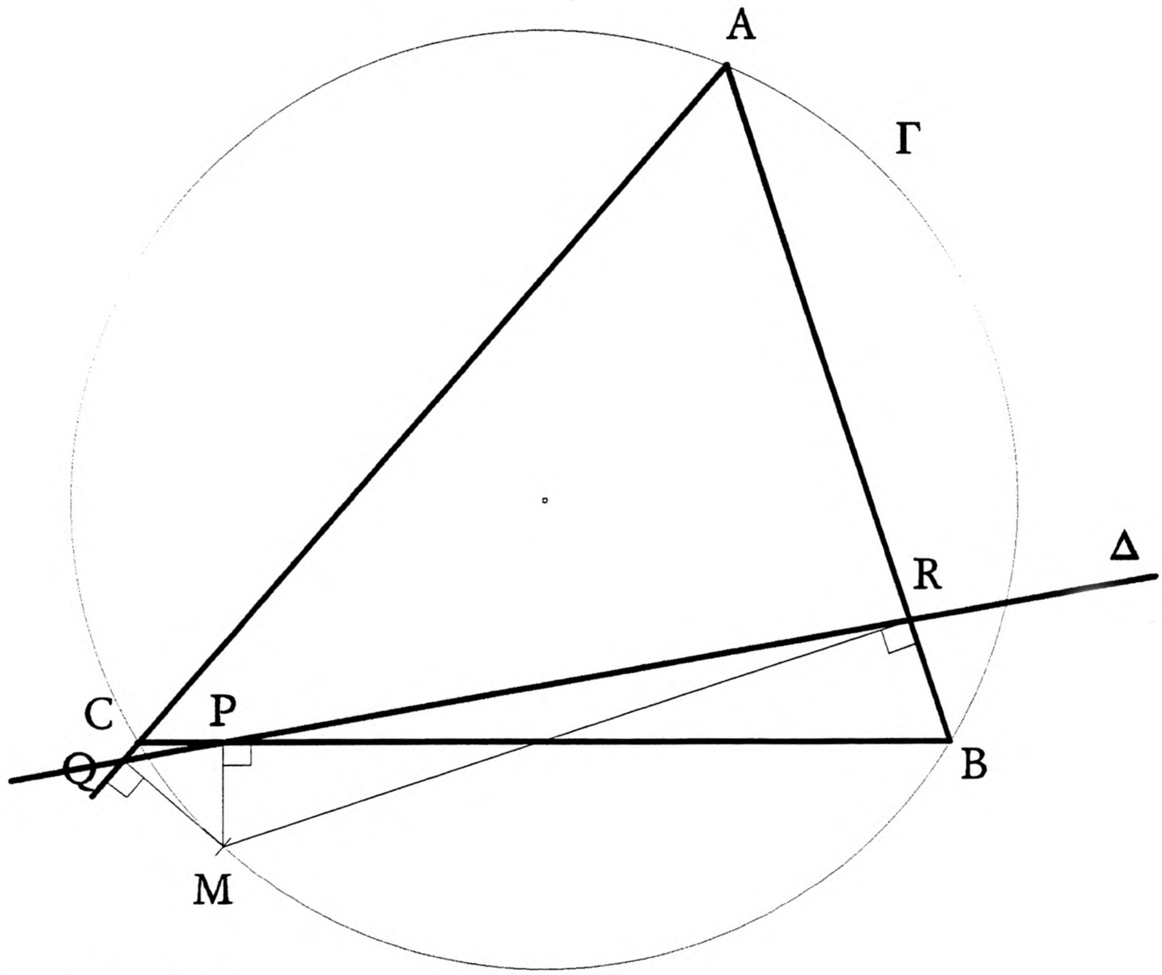

```
>
```

IREM de Grenoble
Groupe calcul formel

Théorème de Simson

1996

Les projections orthogonales d'un point du cercle circonscrit à un triangle sur les côtés de ce triangle sont alignés.
Réciproquement, si les projections orthogonales d'un point sur les côtés d'un triangle sont trois points alignés, alors le point est sur le cercle circonscrit à ce triangle.




```
> restart ; read `geometri.m`;
> A:=Point(xA,yA):B:=Point(xB,yB):C:=Point(xC,yC):
> Gamma:=Cercle(A,B,C):
> M:=Point(x,y):
> P:=Image(Projection_orthogonale(Droite(B,C)),M);
```

$$P := poinT$$

```
> Q:=Image(Projection_orthogonale(Droite(C,A)),M);
```

$$Q := poinT$$

```
> R:=Image(Projection_orthogonale(Droite(A,B)),M);
```

$$R := poinT$$

La condition d'alignement de P, Q, R se traduit par la nullité d'un déterminant.
La condition d'appartenance de M à Γ se traduit par une équation.
Si ce déterminant et le premier membre de cette équation ont un facteur commun, ils sont biens nuls simultanément si et seulement ce facteur est nul.
Ce qui prouve que ces deux conditions sont équivalentes.

```
> D1:=Determinant(Vecteur(P,Q),Vecteur(P,R));
```

$$
\begin{aligned}
D1 := (&-y^2\, yA^3\, xC^3 - 6\, x^2\, xC^2\, yB\, xB\, yA^2 - 6\, y^2\, xB\, yB\, yA^2\, xC^2 + xA^3\, yB^4\, y \\
&- 4\, yC\, yA^3\, xC\, x\, xA\, yB - 3\, yC\, x^2\, xC^2\, yB^2\, xB - xB^3\, yA^4\, y - yB^3\, xC\, xA^4 - yB^4\, xC^3\, y \\
&+ y^2\, xC^3\, yB^3 + yA^3\, xC^4\, x + x^2\, xB^3\, yA^3 - yA\, x\, xB^2\, yB^2\, xC^2 + yC\, xB^3\, yA^4 + y^2\, xB^3\, yA^3 \\
&- xC^4\, yB^3\, x + x^2\, xC^3\, yB^3 - yA\, x\, xB^2\, xA^2\, yB^2 - 6\, yA\, x^2\, xA\, xC\, xB\, yB^2 - 6\, yA\, y^2\, xA\, xC\, xB\, yB^2 \\
&- y^2\, xA^3\, yB^3 - 2\, yA\, y\, xB^3\, yB\, xC^2 - yC^4\, xA^3\, y - x^2\, xC^3\, yA^3 + yA^4\, xC^3\, y - yA^4\, xC^3\, yB \\
&- x^2\, xA^3\, yB^3 + 6\, yC\, y^2\, xA\, yB\, yA\, xB^2 - x\, xB^4\, yA^3 - 4\, yC\, y\, xB\, yB^3\, xA\, xC + x\, xA^4\, yB^3 \\
&- 2\, xB\, y\, yB^3\, yA\, xC^2 + 6\, y^2\, yA\, xA\, yB^2\, xC^2 + 2\, y\, yA^3\, xA\, yB\, xB^2 + 6\, y^2\, yA^2\, xA\, yB\, xC\, xB \\
&- 2\, y\, yA\, xA^2\, xB\, yB^3 + 3\, y^2\, yA\, xA^2\, yB^2\, xB - 3\, y^2\, xA\, yB^3\, xC^2 - 3\, y^2\, xA\, yB\, yA^2\, xB^2 \\
&- xB^2\, y\, xC^3\, yB^2 + 3\, xB^2\, y\, xC^2\, yB^2\, xA + 4\, xB\, y\, yB\, yA^3\, xC^2 + 3\, xC^2\, yB^3\, x\, yA^2 \\
&+ 2\, x\, xB^3\, xA\, yB\, yA^2 + 2\, xB\, yB\, xC^2\, yA^4 - 2\, yA\, xC^3\, x\, xB\, yB^2 + 2\, xA^2\, x\, xB\, yA\, yB^2\, xC \\
&+ 2\, xB\, y\, yB^2\, xA^3\, xC + 2\, yA^3\, xB\, xA\, xC\, yB^2 + 2\, xA^3\, xB\, yA\, yB^2\, xC + 4\, yA^3\, xC\, x\, xB\, yB^2 \\
&- yC^3\, xA^4\, x + yC^3\, xA^4\, xB + yC^3\, x^2\, xA^3 + 6\, yC\, y\, xA\, yA\, xC^2\, xB^2 + 3\, yC\, y^2\, xA\, yA^2\, xC^2 \\
&+ 3\, yC\, y^2\, xA\, yA^2\, xB^2 - 2\, yC\, y\, xA\, yA\, xB^4 + 6\, yC\, y^2\, xA\, xC\, xB\, yB^2 - yC\, x\, xA^2\, xB^2\, yA^2 \\
&+ 2\, yC\, x\, xA\, xC\, xB^2\, yA^2 + 4\, yC\, x\, xA^3\, xC\, yB^2 + yC\, x\, xC^2\, yB^2\, xA^2 + yC\, x\, xB^2\, xA^2\, yB^2 \\
&+ 2\, yC\, x\, xA^3\, xB\, yB^2 + 4\, yC\, x\, xA^3\, xB\, yA\, yB - 3\, yC\, x^2\, xA^2\, xB\, yB^2 + 6\, yC\, x^2\, xA\, xC\, xB\, yB^2 \\
&- 2\, yC\, x\, xC^2\, yB^2\, xB\, xA - 2\, yC\, x\, xA^2\, xC\, xB\, yB^2 - 2\, yC\, xA\, yB\, y\, yA^2\, xB^2 - 4\, yC\, xA\, yB\, x\, xB^3\, yA \\
&- 4\, yC\, xA\, yB^3\, x\, xB\, yA - 6\, yC\, yA^2\, xC\, x\, xB\, yB^2 + 2\, yC\, yA^2\, xC\, y\, yB\, xB^2 - 4\, yC\, yA^2\, xC\, x\, xB^3 \\
&- 2\, yC\, yA\, xA^3\, yB\, xB^2 - 2\, yC\, yA\, xC\, y\, yB^2\, xA^2 - 4\, yC\, yA^3\, xC\, y\, xB^2 - 2\, yC\, yA\, xC^2\, y\, xB\, yB^2 \\
&- 6\, yC\, xA^2\, xC^2\, y\, yB\, xB - 3\, yC\, y^2\, xB\, yB^2\, xA^2 - 3\, yC\, y^2\, xB\, yB^2\, xC^2 - 4\, yC\, y\, xB^3\, yA\, xC^2 \\
&- 3\, yC\, y^2\, xB\, yA^2\, xC^2 + 2\, yC\, y\, xB^4\, xC\, yA + 6\, yC\, y^2\, xB\, yB\, yA\, xC^2 - 2\, yC\, xA\, yB^2\, y\, yA\, xB^2 \\
&- 2\, yC\, xA\, yB^4\, x\, xC - 2\, yC\, xC^3\, yB^2\, xB\, xA + 2\, yC\, y\, xB^3\, yB\, xC^2 - 2\, yC\, yA\, xC^2\, x\, yB^3 \\
&- 2\, yC\, xB^2\, yA^3\, xA\, yB - 6\, yC\, x^2\, xA^2\, xC\, yB^2 + 3\, yC\, x^2\, xC^2\, yB^2\, xA + 2\, yC\, yB^2\, xC\, xA^2\, xB^2 \\
&+ 2\, yC\, xB\, yA^3\, y\, xC^2 - 2\, yC\, xB^2\, yA^2\, xC\, yB^2 + 4\, yC\, xC^3\, yB\, y\, xA\, xB + 4\, yC\, xC\, yB\, x\, xB^3\, yA \\
&- 2\, yC\, xC^3\, yB\, y\, xA^2 - 2\, yC\, xC^3\, yB\, y\, xB^2 - 2\, yC\, y\, xB\, yB\, xC^2\, yA^2 - 4\, yC\, yA\, xA^3\, x\, xC\, yB \\
&+ 4\, yC\, yA^3\, xA\, x\, xB\, yB + yC\, yA^2\, xA^2\, xC^2\, xB + 6\, yC\, x^2\, xC^2\, yB\, xB\, yA + 3\, yC\, x^2\, xA\, xC^2\, yA^2 \\
&- 6\, yC\, x^2\, xA\, xC\, xB\, yA^2 - 2\, yC^2\, yA^3\, xC\, xA\, xB - 3\, yC^2\, y^2\, yA\, xC\, xA^2 - 3\, yC^2\, y^2\, yA\, xC\, xB^2 \\
&+ 6\, yC^2\, y^2\, yA\, xC\, xA\, xB + yC^2\, xA\, yB^2\, y\, xB^2 + 6\, yC^2\, y^2\, xA^2\, yB\, xB - 2\, yC^2\, xA^2\, xC^2\, xB\, yB \\
&+ 3\, yC^2\, x^2\, xA^2\, xC\, yB - 3\, yC^2\, x^2\, xA^2\, xC\, yA + yC^2\, yB^2\, xC\, y\, xA^2 - yC^2\, xB\, yA^2\, y\, xA^2 \\
&+ yC^2\, xB^2\, x\, yA\, xC^2 + yC^2\, xA^2\, x\, yA\, xC^2 - 2\, yC^2\, xA\, x\, yA\, xC^2\, xB - 3\, yC^2\, x^2\, xB^2\, xA\, yB \\
&+ 2\, yC^2\, yA\, xA^3\, x\, xC - 2\, yC^2\, yA^3\, xA\, x\, xB - 2\, yC^2\, yA\, xA^3\, xC\, xB + 6\, yC^2\, x^2\, xA^2\, xB\, yB
\end{aligned}
$$

$$+3\,yC^2\,x^2\,xA^2\,xB\,yA-6\,yC^2\,x^2\,xA\,xC\,xB\,yB+6\,yC^2\,x^2\,xA\,xC\,xB\,yA+2\,yC^2\,xA\,x\,xB\,yB\,xC^2$$
$$+6\,yC^2\,xB\,x\,xC\,yB\,yA^2-yC^2\,xB^2\,x\,yB\,xC^2+yC\,yA^2\,xA^2\,xB^3+yC\,xA^2\,yB^4\,x$$
$$-3\,yC\,y^2\,xB^3\,yA^2+yC\,xB\,xA^4\,yB^2+2\,yC\,xB^3\,yA^3\,y+yC\,yA^4\,xC^2\,xB+3\,yC\,x^2\,xA^3\,yB^2$$
$$+2\,yC\,xC\,yB^2\,xA^4-yC\,xB^2\,yA^4\,x-yC\,yA^4\,xC^2\,x-3\,yC\,x^2\,xB^3\,yA^2+yC\,xC^2\,yB^4\,x$$
$$+3\,yC\,x\,xB^4\,yA^2-2\,yC\,yA^4\,xC\,xB^2+4\,yC\,y\,xC\,yB^3\,xA^2+2\,yC\,y\,xB\,yB^3\,xA^2-2\,yC\,y\,xA^3\,yB^3$$
$$-3\,yC\,x\,xA^4\,yB^2+2\,yC\,xB\,y\,yB^3\,xC^2-2\,yC\,xB\,yA\,xC^2\,yB^3-2\,yC\,xA\,y\,yB^3\,xC^2$$
$$-6\,yC\,y\,yA\,xC\,xB^2\,xA^2+3\,yC\,y^2\,xA^3\,yB^2-2\,yC\,y\,yA\,xA^3\,xB^2-6\,yC\,y^2\,yA\,xA^2\,yB\,xB$$
$$-6\,yC\,y^2\,xC\,yB^2\,xA^2-6\,yC\,yA\,x^2\,xC\,xB^2\,yB+2\,yC\,yA\,xB^2\,y\,xC\,yB^2+2\,yC\,yA\,xA^2\,x\,yB^3$$
$$-6\,yC\,yA\,y^2\,xC\,yB\,xB^2+4\,yC\,yA\,xB\,x\,xC\,yB^3+2\,yC\,yA^3\,xC^2\,x\,yB+2\,yC\,yA\,xA^3\,xC^2\,yB$$
$$+4\,yC\,yA\,xA^3\,xC\,xB\,y+6\,yC\,y^2\,yA\,xC\,yB\,xA^2-6\,yC\,x^2\,xA^2\,yB\,xB\,yA+2\,yC\,xB\,xA^4\,y\,yB$$
$$+2\,yC\,xB\,yA^2\,y\,yB\,xA^2-2\,yC\,xB^2\,yA^3\,x\,yB+6\,yC\,y\,xB^2\,xC\,yB\,xA^2+yC\,x\,xB^2\,yB^2\,xC^2$$
$$-2\,yC\,x\,xB^2\,yB^2\,xA\,xC+3\,yC\,x\,xB^2\,yB^2\,yA^2+3\,yC\,x^2\,xB^2\,yA^2\,xA-2\,yC\,y\,xC\,xA^4\,yB$$
$$+6\,yC\,x^2\,xB^2\,yA\,xA\,yB-6\,yC\,x^2\,xC^2\,yB\,yA\,xA+6\,yC\,x^2\,xA^2\,xC\,yA\,yB$$
$$+6\,yC\,yA^2\,xC\,x\,xA\,yB^2+2\,yC\,yA^2\,xC^3\,x\,xB+6\,yC\,x^2\,xB^2\,xC\,yA^2+4\,yC\,xA\,xC^3\,x\,yA\,yB$$
$$-2\,yC\,xA\,xC^3\,x\,yB^2+2\,yC\,yA\,xC^3\,y\,xA^2+2\,yC\,yA\,xC^3\,y\,xB^2-4\,yC\,yA\,xC^3\,y\,xA\,xB$$
$$+2\,yC\,y\,xA^2\,xB\,yA\,yB^2-4\,yC\,y\,xA\,xB^3\,xC\,yB-6\,yC\,y^2\,xA\,yB\,yA\,xC^2+2\,yC\,y\,xA^2\,xB^3\,yB$$
$$+4\,yC\,y\,xA^2\,xB^3\,yA-4\,yC\,y\,xA^3\,yB\,xB^2+yC\,yA^2\,xA^2\,xB\,yB^2-yC\,yA^2\,xC^2\,x\,xB^2$$
$$-3\,yC\,yA^2\,xA^2\,x\,yB^2-yC\,yA^2\,xA^2\,x\,xC^2+2\,yC\,yA^2\,xA^2\,x\,xC\,xB+2\,yC\,yA^2\,xA\,x\,xC^2\,xB$$
$$+4\,yC\,yA^3\,xA\,y\,xC\,xB-6\,yC\,y^2\,xA\,yA^2\,xC\,xB+2\,yC\,xB\,xC^3\,x\,yB^2-4\,yC\,xC^3\,yB\,x\,yA\,xB$$
$$+6\,yC\,y^2\,xB^2\,yA^2\,xC-2\,yC\,xA\,xC^3\,x\,yA^2+4\,yC\,xA^3\,xC^2\,y\,yB-2\,yC\,yA^2\,xC\,y\,yB\,xA^2$$
$$+2\,yC\,yA^4\,xC\,x\,xB-2\,yC\,yA\,xA^3\,xC^2\,y-3\,yC\,x^2\,xC^2\,xB\,yA^2+2\,yC\,yA^2\,xC\,xA^2\,yB^2$$
$$-2\,yC\,yA^2\,xC\,xA^2\,xB^2-2\,yC\,yA^3\,xA\,y\,xC^2-2\,yC\,yA^3\,xA\,y\,xB^2-2\,yC\,yA^2\,xA\,x\,xB^3$$
$$+2\,yC\,yA^3\,xA\,yB\,xC^2+2\,yC\,y\,xA\,yB\,xC^2\,yA^2+3\,yC\,y^2\,xA\,yB^2\,xC^2-yB^4\,xC^2\,x\,yA$$
$$+xB^2\,yA^4\,x\,yB-xB^2\,yA^4\,xC\,yB+3\,x^2\,xC^2\,yA^3\,xB+3\,y^2\,yA^3\,xC^2\,xB+2\,yB^2\,xC\,xA^3\,x\,yA$$
$$+2\,yA^2\,xA^2\,xB\,yB\,xC^2+yC^3\,x\,xB^4-yA\,xA^2\,x\,xC^2\,yB^2-yC^3\,y^2\,xB^3+yA^2\,xA^2\,yB^3\,x$$
$$+yA\,xA^2\,xC\,xB^2\,yB^2-5\,xA^2\,yC^2\,xB^2\,yB\,xC-5\,xA^2\,yC^2\,xB\,yA\,yB^2-4\,xA^2\,yC^2\,xB^3\,yA$$
$$-2\,xC^2\,yC\,yB\,xB^3\,yA-4\,xA\,xC\,yC^2\,xB^3\,yA+xA\,xC^2\,yC^2\,xB^2\,yB-xA\,xC^2\,yC\,yB^2\,xB^2$$
$$+4\,xA^2\,yC^3\,xB\,yB^2+2\,xA^2\,xC\,yC\,yB^4+3\,xA^2\,yC^3\,xB^3+4\,xA^3\,yC^2\,yB\,xB^2+3\,xA^3\,yC^2\,yB^3$$
$$+2\,xA\,xC\,yC^2\,yB^3\,xB-4\,xA^2\,xC\,yC^2\,yB^3-2\,xA\,xC\,yC^3\,xB\,yB^2+xA\,xC^2\,yC^2\,yB^3$$
$$-xC^2\,yC\,yB^4\,xA-2\,yA\,xA^3\,xC^2\,yB^2-2\,xB\,yA^3\,x\,xA\,yB^2-4\,y\,xC\,yA^3\,xA\,xB\,yB$$
$$-3\,x^2\,xB^2\,yA^3\,xC-3\,x^2\,xB^2\,yA^2\,xA\,yB+3\,yA\,xC^4\,x\,yB^2+2\,y\,yA^3\,xA\,yB\,xC^2$$
$$+3\,y^2\,xC\,yB^3\,xA^2+4\,yA^2\,xC^3\,x\,xB\,yB+3\,x^2\,xB^2\,xC\,yB\,yA^2+3\,x^2\,xC^2\,yB^2\,xB\,yA$$
$$-xA^2\,yB^4\,x\,yA+3\,yB^2\,xC^3\,y\,xA^2+2\,x\,xA\,xC^3\,yB\,yA^2-yA^2\,xC\,xB^2\,xA^2\,yB-xA\,xC^4\,y\,yA^2$$
$$+2\,yA^3\,xC\,x\,xA\,yB^2-2\,yA^3\,xC^3\,x\,xB+2\,xA\,yB^4\,x\,yA\,xC-3\,yA^2\,xC^4\,x\,yB+yA^4\,xC^2\,x\,yB$$
$$-2\,yA^4\,xC\,x\,xB\,yB-3\,yA^3\,xC^2\,x\,yB^2-2\,yA^3\,xA\,yB^2\,xC^2-3\,xC^2\,yA^3\,xB^3$$

$$+ 5\, xC^2\, yA^2\, xB\, yB^2\, yC - 3\, xC^3\, yA^2\, yB^3 + 4\, xC^2\, yA^2\, xB^3\, yC - 2\, xA^2\, yC^2\, yB\, xB^3 + xA^3\, yC^4\, yB$$
$$- 3\, xA^3\, yC^3\, xB^2 + xA^2\, xC\, yB^4\, yA - 4\, xA^2\, xC\, yC\, yB^3\, yA + 4\, xA^2\, xC^3\, yB^2\, yA$$
$$- 5\, xA^2\, xC^2\, yB^2\, yA\, xB + 2\, xA^2\, yC\, yB\, xB^3\, yA + 2\, xA^2\, yC\, yB^3\, xB\, yA - 4\, xC^3\, yA^2\, xB^2\, yB$$
$$- 4\, xC^2\, yA^3\, xB\, yB^2 - xA^3\, yC\, yB^2\, xB^2 - xA^3\, yC\, yB^4 - 2\, xA^2\, yC^2\, yB^3\, xB + 5\, xC^2\, yA^2\, xA\, yB\, xB^2$$
$$+ 4\, xC^2\, yA^2\, xA\, yB^3 + 4\, yA\, xA\, xC^3\, xB\, yB^2 - 2\, xC^2\, yB^4\, yA\, xA - xB^3\, yC^2\, yA\, xC^2$$
$$+ xB^4\, yC^2\, yA\, xC - xB^2\, yC^3\, xA\, yB^2 + xB^2\, yC^4\, xA\, yB - xB^4\, yC^3\, xA + 2\, xB^2\, yC^2\, yA\, xA\, yB^2$$
$$+ 4\, xC^2\, yB^3\, yA\, xA\, yC - 2\, xC^2\, yB^2\, yA\, xA\, yC^2 - 2\, xC^4\, yB^2\, yA\, xA - 2\, xC^2\, yB^2\, yA\, xA\, xB^2$$
$$- xC^4\, yB^2\, yA\, xB + xC^3\, yB^2\, yA\, xB^2 + 3\, xA^3\, xC^2\, yB^3 - xA^2\, xC^2\, yC^2\, yA\, xB$$
$$+ 5\, xA^2\, xC\, yC^2\, yA\, xB^2 + 2\, xA^2\, xC\, yC^3\, yB^2 + 5\, xA^2\, xC\, yC^2\, yA\, yB^2 - 2\, xA^2\, xC^3\, yC\, yB\, yA$$
$$+ 2\, xC^3\, yC\, yB\, yA\, xB^2 + 2\, xA\, xC\, yC^3\, xB\, yA^2 + 5\, xC^2\, yB^2\, xB\, yC\, xA^2 - 5\, xB^2\, yC^2\, xC\, yB\, yA^2$$
$$- 2\, xB^2\, yC^3\, xC\, yA^2 - xB^3\, yC^4\, yA + 3\, xB^3\, yC^3\, yA^2 + xB^2\, yC^2\, yA\, xC\, yB^2 - 3\, xC^3\, yB^3\, xA^2$$
$$+ xC^4\, yB^3\, xA + 2\, xC^2\, yB^3\, xB\, yA^2 + 2\, xC^3\, yB^2\, yC\, xA^2 - xC^2\, yB^2\, xB\, yC^2\, yA + xC^3\, yB^4\, yA$$
$$+ 4\, xB^3\, yA^2\, xA\, yC\, xC - xC^4\, yA^3\, xB + 3\, xC^3\, yA^3\, xB^2 - 5\, xC^2\, yA^2\, xA\, yC\, xB^2$$
$$- 2\, xC^3\, yA^2\, yC\, xB^2 + 3\, xC^3\, yA^3\, yB^2 - 2\, xA\, xC\, yB^3\, xB\, yA^2 - 2\, xA^2\, yC^4\, xB\, yB - xA^2\, yC^4\, xB\, yA$$
$$- 5\, xA\, xC^2\, yC\, yB^2\, yA^2 - 4\, xA^3\, xC^2\, yC\, yB^2 - 4\, xA^3\, xC\, yC\, yB^2\, xB + xA\, xC^2\, yC^2\, yB\, yA^2$$
$$+ xA^3\, xC^2\, yC^2\, yB + 4\, xA^3\, xC\, yC^2\, xB\, yB + 2\, xB^4\, yC^2\, yA\, xA - 2\, xA^2\, xC\, yC^3\, yA\, yB$$
$$- 3\, xA^3\, yC^3\, yB^2 + 2\, xB^3\, yA^2\, yB\, xC^2 + 4\, xA^2\, yC^3\, yB\, xB\, yA + 2\, xC^4\, yA^2\, xB\, yB$$
$$+ 2\, xC^3\, yA^2\, xA\, yC\, xB + xC^4\, yA^2\, yB\, xA - xC^2\, yA^3\, xB\, yC^2 - 2\, xC\, xB^3\, yA^2\, xA\, yB$$
$$- 4\, xC^2\, xB\, yA^3\, yC\, yB - 4\, xB^2\, yC^3\, yA^2\, xA + 4\, xB^2\, yC^2\, yA^3\, xC - 4\, xC^3\, xB\, yA^2\, yB\, xA$$
$$+ 4\, xB^2\, yA^3\, xC\, yC\, yB + xB^4\, yA^3\, xC - xB^2\, yA^2\, xA\, yC\, yB^2 + 5\, xB^2\, yA^2\, xA\, yC^2\, yB$$
$$- xB^4\, yA^2\, xA\, yC - 2\, xB^4\, yA^2\, yC\, xC - 4\, xB^2\, yC^3\, yA\, xA\, yB + 2\, xB^2\, yC^4\, yA\, xA$$
$$+ 2\, xB^2\, yC^2\, yA\, xA\, xC^2 - 3\, xB^3\, yA^3\, yC^2 + xB^2\, yA^3\, xC\, yB^2 - 3\, y^2\, xA^2\, yA\, xC\, yB^2$$
$$+ x\, xB^2\, yA^2\, xA^2\, yB + xA\, xB^4\, y\, yA^2 - 3\, xA^3\, xC^2\, y\, yB^2 - xA\, xC^4\, y\, yB^2 + 3\, yA^2\, xC^2\, xB^3\, y$$
$$+ yA^2\, xC\, y\, yB^2\, xA^2 + 3\, yA^4\, xC\, y\, xB^2 + 2\, yA^3\, xC\, x\, xB^3 + yA^2\, xC^2\, y\, xB\, yB^2 + xA^3\, xB^2\, y\, yB^2$$
$$- yA^2\, xC\, xB^4\, y - 2\, yA^2\, xC\, xB^3\, y\, xA - 3\, yA^2\, xC^2\, xB\, y\, xA^2 + 3\, yA^2\, xC\, xB^2\, y\, xA^2$$
$$- 4\, y\, yA\, xC^3\, xA^2\, yB + x\, xA^2\, yB\, xC^2\, yA^2 + 3\, x^2\, xA^2\, xB\, yA\, yB^2 - 2\, yB^2\, xC^3\, y\, xA\, xB$$
$$+ 2\, yA^2\, xC^3\, y\, xA\, xB + yA^2\, xC^3\, y\, xA^2 - yA^2\, xC^3\, xA^2\, yB + 2\, x\, xA\, xC\, yB^2\, xB^2\, yA$$
$$+ 2\, x\, xA\, xC^3\, yB^3 + 2\, x\, xA\, xC^2\, xB\, yA\, yB^2 - 2\, x\, xA\, xC\, yB\, xB^2\, yA^2 - 2\, x\, xA^3\, xC\, yB^3$$
$$- 4\, x\, xA\, xC^3\, yA\, yB^2 - 3\, yA^2\, xC^3\, y\, xB^2 + x\, xB^2\, yB\, xC^2\, yA^2 - 2\, x\, xA^3\, xB\, yA\, yB^2$$
$$+ 3\, x^2\, xA^2\, xC\, yB^3 - 3\, x^2\, xA\, xC^2\, yB^3 - 4\, yA^2\, xC\, x\, xA\, yB^3 - 3\, y^2\, yA^2\, xC^2\, xA\, yB$$
$$- yA^2\, xC\, xA^2\, yB^3 - 2\, yA^3\, xC^3\, y\, yB - 2\, yA^3\, xC\, y\, yB\, xB^2 + 2\, y\, yA\, xA^3\, xB^2\, yB$$
$$- 4\, y\, yA\, xA^3\, xC\, xB\, yB - 3\, y^2\, yA\, xC^3\, yB^2 - 3\, y^2\, yA^3\, xC\, xB^2 + 2\, y\, yA\, xC^3\, yB^3$$
$$+ 3\, y^2\, yA\, xC^2\, xB\, yB^2 + 2\, y\, yA\, xC\, yB^3\, xA^2 + 6\, y\, yA\, xC^2\, xB\, xA^2\, yB + 3\, xA\, yB^4\, y\, xC^2$$
$$- xA\, yB^2\, y\, yA^2\, xC^2 + xA\, yB^2\, y\, yA^2\, xB^2 + 2\, xA\, xC^4\, y\, yB\, yA - 6\, xA\, xB^2\, y\, yB\, yA\, xC^2$$
$$+ 4\, xA\, xB^3\, y\, yB\, yA\, xC + xB\, xC^4\, y\, yA^2 - 4\, xA\, yB^3\, y\, yA\, xC^2 + 4\, xA\, yB^3\, y\, yA\, xC\, xB$$

$$
\begin{aligned}
&- 2 xB^3 xA^2 y yB yA - 2 xB xC^4 y yB yA - 2 x xC^2 yA^2 xB xA yB + 2 y yA xA^3 xC^2 yB \\
&+ 3 y^2 yA^2 xC^3 yB + 3 y^2 yA^2 xC yB xB^2 + 2 xB yA^2 x xA yB^3 - 2 xB yA^2 x xC yB^3 \\
&- 3 x^2 xA^2 xC yA yB^2 - 3 x^2 xC^3 yB^2 yA - 3 yB^4 xC y xA^2 + yB^2 xC xA^4 y - 2 xB^3 yA^2 x yB xC \\
&- xB^2 yA^3 x yB^2 - xB^2 yA^2 y xC yB^2 - 3 xB^2 xA^2 y xC yB^2 - xB yA^2 y yB^2 xA^2 - 3 xB yA^4 y xC^2 \\
&- xB xA^4 y yB^2 - xB^3 xA^2 y yA^2 + xB xC^4 y yB^2 + 4 y xC^3 yB xB^2 yA + 6 x^2 xC^2 yB^2 yA xA \\
&- 2 x xA^2 xB xC yB yA^2 + 3 x^2 xC^3 yB yA^2 - 3 x^2 xA xC^2 yB yA^2 + 6 x^2 xA xC xB yB yA^2 \\
&- 2 yC^2 x xA^3 xB yA - 4 yC^2 x xA^3 xB yB + 2 yC^2 x xA^2 xC xB yB + 2 yC^2 xA y yB yA xC^2 \\
&- 2 yC^2 xA y yB yA xB^2 + 4 yC^2 xA x xC yB^3 - 2 yC^2 xB y yB yA xC^2 + 2 yC^2 xB^2 y yB yA xC \\
&+ 2 yC^2 xB x xA yB^3 - 2 yC^2 y yA xC xA^2 yB + 2 yC^2 xA yB xB^3 xC - 2 yC^2 xB^3 x yB xC \\
&- yC^2 xA^4 xC yB + 3 yC^2 x xA^4 yB + 3 yC^2 y xA^3 xB^2 - 2 yC^2 xA^3 y xB xC - 6 yC^2 y^2 yA xA xB^2 \\
&+ 3 yC^2 y^2 yA xA^2 xB + 2 yC^2 yA^3 xA xB^2 + 2 yC^2 yA xA^3 xB^2 + yC^2 xA^4 y xC \\
&- 6 yC^2 x^2 xB^2 yA xA - 3 yC^2 yA^2 xC^2 x yB + 3 yC^2 y^2 xC yB xA^2 + 3 yC^2 y^2 xC yB xB^2 \\
&- 6 yC^2 y^2 xC yB xA xB - 6 yC^2 xA x xB yB yA^2 - yC^2 xA^2 xC^2 x yB - 2 yC^2 xB x xC yB^3 \\
&- 2 yC^2 x xA^2 xC xB yA - 3 yC^2 y^2 xA yB xB^2 + 2 yC^2 y xA^2 xB yA yB - 2 yC^2 yA^2 xA^2 xB yB \\
&+ 2 yC^2 yA^3 xC x xA - 6 yC^2 yA xA x xC yB^2 + 2 yC^2 y xA xC xB^3 + 3 yC^2 yA^2 xA^2 x yB \\
&+ 3 yC^2 yA xC^2 x yB^2 - 4 yC^2 yA^3 xC x xB - 3 yC^2 x^2 xC xB^2 yA + 3 yC^2 xA^2 xC^2 y xB \\
&- 3 yC^2 xA xC^2 y xB^2 + yC^2 yA^2 xC y xA^2 - yC^2 yA^2 xC xA^2 yB - yC^2 yA^2 xC y xB^2 \\
&+ yC^2 x xA^2 xB^2 yA - 3 yC^2 xB^2 x yA yB^2 - yC^2 xB^2 y xC yB^2 - yC^2 xA y yB^2 xC^2 \\
&- yC^2 xA y yA^2 xC^2 + yC^2 xA y yA^2 xB^2 + 4 yC^2 xA x xB^3 yA + 2 yC^2 xA x xB^2 yB xC \\
&+ 6 yC^2 xA x xB yA yB^2 + 2 yC^2 xB yB xC^2 yA^2 - yC^2 xB y yB^2 xA^2 + yC^2 xB y yB^2 xC^2 \\
&+ yC^2 xB y yA^2 xC^2 - 2 yC^2 x xA xC xB^2 yA - 2 yC^2 x xA^3 xC yB - yC^3 yA^2 xA^2 x \\
&+ yC^3 x xB^2 yB^2 - 2 yC^3 y xB^3 yA + yC^3 yA^2 xA^2 xB + 2 yC^3 xA^3 x xB + 3 yC^3 x^2 xA xB^2 \\
&- 3 yC^3 x^2 xA^2 xB - 3 yC^3 x xB^2 yA^2 + 2 yC^3 yA xC yB xB^2 + 2 yC^3 x xC xB yB^2 \\
&- 2 yC^3 y xC yB xB^2 - 4 yC^3 x xA xB yB^2 - 2 yC^3 x xA xB^3 + 3 yC^3 y^2 xA xB^2 \\
&+ 2 yC^3 y xA yB xB^2 + yC^3 y^2 xA^3 - yC^3 x^2 xB^3 + yC^4 xB^3 y + 2 yC^3 y xA^3 yB \\
&- 4 yC^3 x xC xB yB yA + 2 yC^3 x xB^2 yB yA - 2 yC^3 x xA xC yB^2 + 3 yC^3 x xA^2 yB^2 \\
&+ 2 yC^3 y yA xC xB^2 + 4 yC^3 y yA xA xB^2 - 4 yC^3 y yA xA xC xB + 2 yC^3 x xC xB yA^2 \\
&+ 4 yC^3 y xB yB xA xC - 4 yC^3 y xB yB xA^2 - 2 yC^3 y xC yB xA^2 - 3 yC^3 y^2 xA^2 xB \\
&- 2 yC^3 xA x xC yA^2 + 4 yC^3 xA x xB yA^2 - 2 yC^3 yA xA^2 y xB + 2 yC^3 yA xC y xA^2 \\
&- 2 yC^3 xA^2 x yA yB + 4 yC^3 xA x yA xC yB + 3 yC^4 xA^2 y xB - 3 yC^4 xA y xB^2 - yC^4 xB^2 x yB \\
&- yC^4 xA^2 x yB + 2 yC^4 xB x xA yB - 2 yC^4 xB x yA xA + yC^4 xB^2 x yA + yC^4 xA^2 x yA \\
&+ yC^2 xA xB^4 y + yC^2 xB^3 xC^2 y - 2 yC^2 xB xA^4 yB - yC^2 xB xA^4 y - 3 yC^2 xB^3 y xA^2 \\
&+ 3 yC^2 y^2 xB^3 yA + yC^2 yA^3 xC^2 x + 3 yC^2 xB^2 yA^3 x - yC^2 y xB^4 xC - yC^2 xC^2 yB^3 x \\
&+ 3 yC^2 x^2 xB^3 yA - 3 yC^2 y^2 xA^3 yB - 3 yC^2 x^2 xA^3 yB - yC^2 xA^3 xC^2 y - 3 yC^2 xA^2 x yB^3 \\
&- 3 yC^2 x xB^4 yA + 2 yC^2 xB^3 x yA xC + 3 yC^2 x^2 xC xB^2 yB - yC^2 x xB^2 xA^2 yB
\end{aligned}
$$

$$+ 2\, yC^2\, x\, xB^3\, xA\, yB + 2\, yC\, y\, xA\, yA\, xC^2\, yB^2) \Big/ ((yA^2 + yB^2 - 2\, yB\, yA - 2\, xA\, xB + xB^2 + xA^2)\, (xC^2 - 2\, xA\, xC + xA^2 + yA^2 - 2\, yC\, yA + yC^2)\, (xB^2 - 2\, xC\, xB + xC^2 + yC^2 - 2\, yC\, yB + yB^2))$$

> ND1:=numer(D1);

$$\begin{aligned}
ND1 :=\ & -y^2\, yA^3\, xC^3 - 6\, x^2\, xC^2\, yB\, xB\, yA^2 - 6\, y^2\, xB\, yB\, yA^2\, xC^2 + xA^3\, yB^4\, y \\
& - 4\, yC\, yA^3\, xC\, x\, xA\, yB - 3\, yC\, x^2\, xC^2\, yB^2\, xB - xB^3\, yA^4\, y - yB^3\, xC\, xA^4 - yB^4\, xC^3\, y \\
& + y^2\, xC^3\, yB^3 + yA^3\, xC^4\, x + x^2\, xB^3\, yA^3 - yA\, x\, xB^2\, yB^2\, xC^2 + yC\, xB^3\, yA^4 + y^2\, xB^3\, yA^3 \\
& - xC^4\, yB^3\, x + x^2\, xC^3\, yB^3 - yA\, x\, xB^2\, xA^2\, yB^2 - 6\, yA\, x^2\, xA\, xC\, xB\, yB^2 - 6\, yA\, y^2\, xA\, xC\, xB\, yB^2 \\
& - y^2\, xA^3\, yB^3 - 2\, yA\, y\, xB^3\, yB\, xC^2 - yC^4\, xA^3\, y - x^2\, xC^3\, yA^3 + yA^4\, xC^3\, y - yA^4\, xC^3\, yB \\
& - x^2\, xA^3\, yB^3 + 6\, yC\, y^2\, xA\, yB\, yA\, xB^2 - x\, xB^4\, yA^3 - 4\, yC\, y\, xB\, yB^3\, xA\, xC + x\, xA^4\, yB^3 \\
& - 2\, xB\, y\, yB^3\, yA\, xC^2 + 6\, y^2\, yA\, xA\, yB^2\, xC^2 + 2\, y\, yA^3\, xA\, yB\, xB^2 + 6\, y^2\, yA^2\, xA\, yB\, xC\, xB \\
& - 2\, y\, yA\, xA^2\, xB\, yB^3 + 3\, y^2\, yA\, xA^2\, yB^2\, xB - 3\, y^2\, xA\, yB^3\, xC^2 - 3\, y^2\, xA\, yB\, yA^2\, xB^2 \\
& - xB^2\, y\, xC^3\, yB^2 + 3\, xB^2\, y\, xC^2\, yB^2\, xA + 4\, xB\, y\, yB\, yA^3\, xC^2 + 3\, xC^2\, yB^3\, x\, yA^2 \\
& + 2\, x\, xB^3\, xA\, yB\, yA^2 + 2\, xB\, yB\, xC^2\, yA^4 - 2\, yA\, xC^3\, x\, xB\, yB^2 + 2\, xA^2\, x\, xB\, yA\, yB^2\, xC \\
& + 2\, xB\, y\, yB^2\, xA^3\, xC + 2\, yA^3\, xB\, xA\, xC\, yB^2 + 2\, xA^3\, xB\, yA\, yB^2\, xC + 4\, yA^3\, xC\, x\, xB\, yB^2 \\
& - yC^3\, xA^4\, x + yC^3\, xA^4\, xB + yC^3\, x^2\, xA^3 + 6\, yC\, y\, xA\, yA\, xC^2\, xB^2 + 3\, yC\, y^2\, xA\, yA^2\, xC^2 \\
& + 3\, yC\, y^2\, xA\, yA^2\, xB^2 - 2\, yC\, y\, xA\, yA\, xB^4 + 6\, yC\, y^2\, xA\, xC\, xB\, yB^2 - yC\, x\, xA^2\, xB^2\, yA^2 \\
& + 2\, yC\, x\, xA\, xC\, xB^2\, yA^2 + 4\, yC\, x\, xA^3\, xC\, yB^2 + yC\, x\, xC^2\, yB^2\, xA^2 + yC\, x\, xB^2\, xA^2\, yB^2 \\
& + 2\, yC\, x\, xA^3\, xB\, yB^2 + 4\, yC\, x\, xA^3\, xB\, yA\, yB - 3\, yC\, x^2\, xA^2\, xB\, yB^2 + 6\, yC\, x^2\, xA\, xC\, xB\, yB^2 \\
& - 2\, yC\, x\, xC^2\, yB^2\, xB\, xA - 2\, yC\, x\, xA^2\, xC\, xB\, yB^2 - 2\, yC\, xA\, yB\, y\, yA^2\, xB^2 - 4\, yC\, xA\, yB\, x\, xB^3\, yA \\
& - 4\, yC\, xA\, yB^3\, x\, xB\, yA - 6\, yC\, yA^2\, xC\, x\, xB\, yB^2 + 2\, yC\, yA^2\, xC\, y\, yB\, xB^2 - 4\, yC\, yA^2\, xC\, x\, xB^3 \\
& - 2\, yC\, yA\, xA^3\, yB\, xB^2 - 2\, yC\, yA\, xC\, y\, yB^2\, xA^2 - 4\, yC\, yA^3\, xC\, y\, xB^2 - 2\, yC\, yA\, xC^2\, y\, xB\, yB^2 \\
& - 6\, yC\, xA^2\, xC^2\, y\, yB\, xB - 3\, yC\, y^2\, xB\, yB^2\, xA^2 - 3\, yC\, y^2\, xB\, yB^2\, xC^2 - 4\, yC\, y\, xB^3\, yA\, xC^2 \\
& - 3\, yC\, y^2\, xB\, yA^2\, xC^2 + 2\, yC\, y\, xB^4\, xC\, yA + 6\, yC\, y^2\, xB\, yB\, yA\, xC^2 - 2\, yC\, xA\, yB^2\, y\, yA\, xB^2 \\
& - 2\, yC\, xA\, yB^4\, x\, xC - 2\, yC\, xC^3\, yB^2\, xB\, xA + 2\, yC\, y\, xB^3\, yB\, xC^2 - 2\, yC\, yA\, xC^2\, x\, yB^3 \\
& - 2\, yC\, xB^2\, yA^3\, xA\, yB - 6\, yC\, x^2\, xA^2\, xC\, yB^2 + 3\, yC\, x^2\, xC^2\, yB^2\, xA + 2\, yC\, yB^2\, xC\, xA^2\, xB^2 \\
& + 2\, yC\, xB\, yA^3\, y\, xC^2 - 2\, yC\, xB^2\, yA^2\, xC\, yB^2 + 4\, yC\, xC^3\, yB\, y\, xA\, xB + 4\, yC\, xC\, yB\, x\, xB^3\, yA \\
& - 2\, yC\, xC^3\, yB\, y\, xA^2 - 2\, yC\, xC^3\, yB\, y\, xB^2 - 2\, yC\, y\, xB\, yB\, xC^2\, yA^2 - 4\, yC\, yA\, xA^3\, x\, xC\, yB \\
& + 4\, yC\, yA^3\, xA\, x\, xB\, yB + yC\, yA^2\, xA^2\, xC^2\, xB + 6\, yC\, x^2\, xC^2\, yB\, xB\, yA + 3\, yC\, x^2\, xA\, xC^2\, yA^2 \\
& - 6\, yC\, x^2\, xA\, xC\, xB\, yA^2 - 2\, yC^2\, yA^3\, xC\, xA\, xB - 3\, yC^2\, y^2\, yA\, xC\, xA^2 - 3\, yC^2\, y^2\, yA\, xC\, xB^2 \\
& + 6\, yC^2\, y^2\, yA\, xC\, xA\, xB + yC^2\, xA\, yB^2\, y\, xB^2 + 6\, yC^2\, y^2\, xA^2\, yB\, xB - 2\, yC^2\, xA^2\, xC^2\, xB\, yB \\
& + 3\, yC^2\, x^2\, xA^2\, xC\, yB - 3\, yC^2\, x^2\, xA^2\, xC\, yA + yC^2\, yB^2\, xC\, y\, xA^2 - yC^2\, xB\, yA^2\, y\, xA^2 \\
& + yC^2\, xB^2\, x\, yA\, xC^2 + yC^2\, xA^2\, x\, yA\, xC^2 - 2\, yC^2\, xA\, x\, yA\, xC^2\, xB - 3\, yC^2\, x^2\, xB^2\, xA\, yB \\
& + 2\, yC^2\, yA\, xA^3\, x\, xC - 2\, yC^2\, yA^3\, xA\, x\, xB - 2\, yC^2\, yA\, xA^3\, xC\, xB + 6\, yC^2\, x^2\, xA^2\, xB\, yB \\
& + 3\, yC^2\, x^2\, xA^2\, xB\, yA - 6\, yC^2\, x^2\, xA\, xC\, xB\, yB + 6\, yC^2\, x^2\, xA\, xC\, xB\, yA + 2\, yC^2\, xA\, x\, xB\, yB\, xC^2 \\
& + 6\, yC^2\, xB\, x\, xC\, yB\, yA^2 - yC^2\, xB^2\, x\, yB\, xC^2 + yC\, yA^2\, xA^2\, xB^3 + yC\, xA^2\, yB^4\, x
\end{aligned}$$

$$- 3 yC y^2 xB^3 yA^2 + yC xB xA^4 yB^2 + 2 yC xB^3 yA^3 y + yC yA^4 xC^2 xB + 3 yC x^2 xA^3 yB^2$$
$$+ 2 yC xC yB^2 xA^4 - yC xB^2 yA^4 x - yC yA^4 xC^2 x - 3 yC x^2 xB^3 yA^2 + yC xC^2 yB^4 x$$
$$+ 3 yC x xB^4 yA^2 - 2 yC yA^4 xC xB^2 + 4 yC y xC yB^3 xA^2 + 2 yC y xB yB^3 xA^2 - 2 yC y xA^3 yB^3$$
$$- 3 yC x xA^4 yB^2 + 2 yC xB y yB^3 xC^2 - 2 yC xB yA xC^2 yB^3 - 2 yC xA y yB^3 xC^2$$
$$- 6 yC y yA xC xB^2 xA^2 + 3 yC y^2 xA^3 yB^2 - 2 yC y yA xA^3 xB^2 - 6 yC y^2 yA xA^2 yB xB$$
$$- 6 yC y^2 xC yB^2 xA^2 - 6 yC yA x^2 xC xB^2 yB + 2 yC yA xB^2 y xC yB^2 + 2 yC yA xA^2 x yB^3$$
$$- 6 yC yA y^2 xC yB xB^2 + 4 yC yA xB x xC yB^3 + 2 yC yA^3 xC^2 x yB + 2 yC yA xA^3 xC^2 yB$$
$$+ 4 yC yA xA^3 xC xB y + 6 yC y^2 yA xC yB xA^2 - 6 yC x^2 xA^2 yB xB yA + 2 yC xB xA^4 y yB$$
$$+ 2 yC xB yA^2 y yB xA^2 - 2 yC xB^2 yA^3 x yB + 6 yC y xB^2 xC yB xA^2 + yC x xB^2 yB^2 xC^2$$
$$- 2 yC x xB^2 yB^2 xA xC + 3 yC x xB^2 yB^2 yA^2 + 3 yC x^2 xB^2 yA^2 xA - 2 yC y xC xA^4 yB$$
$$+ 6 yC x^2 xB^2 yA xA yB - 6 yC x^2 xC^2 yB yA xA + 6 yC x^2 xA^2 xC yA yB$$
$$+ 6 yC yA^2 xC x xA yB^2 + 2 yC yA^2 xC^3 x xB + 6 yC x^2 xB^2 xC yA^2 + 4 yC xA xC^3 x yA yB$$
$$- 2 yC xA xC^3 x yB^2 + 2 yC yA xC^3 y xA^2 + 2 yC yA xC^3 y xB^2 - 4 yC yA xC^3 y xA xB$$
$$+ 2 yC y xA^2 xB yA yB^2 - 4 yC y xA xB^3 xC yB - 6 yC y^2 xA yB yA xC^2 + 2 yC y xA^2 xB^3 yB$$
$$+ 4 yC y xA^2 xB^3 yA - 4 yC y xA^3 yB xB^2 + yC yA^2 xA^2 xB yB^2 - yC yA^2 xC^2 x xB^2$$
$$- 3 yC yA^2 xA^2 x yB^2 - yC yA^2 xA^2 x xC^2 + 2 yC yA^2 xA^2 x xC xB + 2 yC yA^2 xA x xC^2 xB$$
$$+ 4 yC yA^3 xA y xC xB - 6 yC y^2 xA yA^2 xC xB + 2 yC xB xC^3 x yB^2 - 4 yC xC^3 yB x yA xB$$
$$+ 6 yC y^2 xB^2 yA^2 xC - 2 yC xA xC^3 x yA^2 + 4 yC xA^3 xC^2 y yB - 2 yC yA^2 xC y yB xA^2$$
$$+ 2 yC yA^4 xC x xB - 2 yC yA xA^3 xC^2 y - 3 yC x^2 xC^2 xB yA^2 + 2 yC yA^2 xC xA^2 yB^2$$
$$- 2 yC yA^2 xC xA^2 xB^2 - 2 yC yA^3 xA y xC^2 - 2 yC yA^3 xA y xB^2 - 2 yC yA^2 xA x xB^3$$
$$+ 2 yC yA^3 xA yB xC^2 + 2 yC y xA yB xC^2 yA^2 + 3 yC y^2 xA yB^2 xC^2 - yB^4 xC^2 x yA$$
$$+ xB^2 yA^4 x yB - xB^2 yA^4 xC yB + 3 x^2 xC^2 yA^3 xB + 3 y^2 yA^3 xC^2 xB + 2 yB^2 xC xA^3 x yA$$
$$+ 2 yA^2 xA^2 xB yB xC^2 + yC^3 x xB^4 - yA xA^2 x xC^2 yB^2 - yC^3 y^2 xB^3 + yA^2 xA^2 yB^3 x$$
$$+ yA xA^2 xC xB^2 yB^2 - 5 xA^2 yC^2 xB^2 yB xC - 5 xA^2 yC^2 xB yA yB^2 - 4 xA^2 yC^2 xB^3 yA$$
$$- 2 xC^2 yC yB xB^3 yA - 4 xA xC yC^2 xB^3 yA + xA xC^2 yC^2 xB^2 yB - xA xC^2 yC yB^2 xB^2$$
$$+ 4 xA^2 yC^3 xB yB^2 + 2 xA^2 xC yC yB^4 + 3 xA^2 yC^3 xB^3 + 4 xA^3 yC^2 yB xB^2 + 3 xA^3 yC^2 yB^3$$
$$+ 2 xA xC yC^2 yB^3 xB - 4 xA^2 xC yC^2 yB^3 - 2 xA xC yC^3 xB yB^2 + xA xC^2 yC^2 yB^3$$
$$- xC^2 yC yB^4 xA - 2 yA xA^3 xC^2 yB^2 - 2 xB yA^3 x xA yB^2 - 4 y xC yA^3 xA xB yB$$
$$- 3 x^2 xB^2 yA^3 xC - 3 x^2 xB^2 yA^2 xA yB + 3 yA xC^4 x yB^2 + 2 y yA^3 xA yB xC^2$$
$$+ 3 y^2 xC yB^3 xA^2 + 4 yA^2 xC^3 x xB yB + 3 x^2 xB^2 xC yB yA^2 + 3 x^2 xC^2 yB^2 xB yA$$
$$- xA^2 yB^4 x yA + 3 yB^2 xC^3 y xA^2 + 2 x xA xC^3 yB yA^2 - yA^2 xC xB^2 xA^2 yB - xA xC^4 y yA^2$$
$$+ 2 yA^3 xC x xA yB^2 - 2 yA^3 xC^3 x xB + 2 xA yB^4 x yA xC - 3 yA^2 xC^4 x yB + yA^4 xC^2 x yB$$
$$- 2 yA^4 xC x xB yB - 3 yA^3 xC^2 x yB^2 - 2 yA^3 xA yB^2 xC^2 - 3 xC^2 yA^3 xB^3$$
$$+ 5 xC^2 yA^2 xB yB^2 yC - 3 xC^3 yA^2 yB^3 + 4 xC^2 yA^2 xB^3 yC - 2 xA^2 yC^2 yB xB^3 + xA^3 yC^4 yB$$
$$- 3 xA^3 yC^3 xB^2 + xA^2 xC yB^4 yA - 4 xA^2 xC yC yB^3 yA + 4 xA^2 xC^3 yB^2 yA$$

$$- 5\, xA^2\, xC^2\, yB^2\, yA\, xB + 2\, xA^2\, yC\, yB\, xB^3\, yA + 2\, xA^2\, yC\, yB^3\, xB\, yA - 4\, xC^3\, yA^2\, xB^2\, yB$$
$$- 4\, xC^2\, yA^3\, xB\, yB^2 - xA^3\, yC\, yB^2\, xB^2 - xA^3\, yC\, yB^4 - 2\, xA^2\, yC^2\, yB^3\, xB + 5\, xC^2\, yA^2\, xA\, yB\, xB^2$$
$$+ 4\, xC^2\, yA^2\, xA\, yB^3 + 4\, yA\, xA\, xC^3\, xB\, yB^2 - 2\, xC^2\, yB^4\, yA\, xA - xB^3\, yC^2\, yA\, xC^2$$
$$+ xB^4\, yC^2\, yA\, xC - xB^2\, yC^3\, xA\, yB^2 + xB^2\, yC^4\, xA\, yB - xB^4\, yC^3\, xA + 2\, xB^2\, yC^2\, yA\, xA\, yB^2$$
$$+ 4\, xC^2\, yB^3\, yA\, xA\, yC - 2\, xC^2\, yB^2\, yA\, xA\, yC^2 - 2\, xC^4\, yB^2\, yA\, xA - 2\, xC^2\, yB^2\, yA\, xA\, xB^2$$
$$- xC^4\, yB^2\, yA\, xB + xC^3\, yB^2\, yA\, xB^2 + 3\, xA^3\, xC^2\, yB^3 - xA^2\, xC^2\, yC^2\, yA\, xB$$
$$+ 5\, xA^2\, xC\, yC^2\, yA\, xB^2 + 2\, xA^2\, xC\, yC^3\, yB^2 + 5\, xA^2\, xC\, yC^2\, yA\, yB^2 - 2\, xA^2\, xC^3\, yC\, yB\, yA$$
$$+ 2\, xC^3\, yC\, yB\, yA\, xB^2 + 2\, xA\, xC\, yC^3\, xB\, yA^2 + 5\, xC^2\, yB^2\, xB\, yC\, xA^2 - 5\, xB^2\, yC^2\, xC\, yB\, yA^2$$
$$- 2\, xB^2\, yC^3\, xC\, yA^2 - xB^3\, yC^4\, yA + 3\, xB^3\, yC^3\, yA^2 + xB^2\, yC^2\, yA\, xC\, yB^2 - 3\, xC^3\, yB^3\, xA^2$$
$$+ xC^4\, yB^3\, xA + 2\, xC^2\, yB^3\, xB\, yA^2 + 2\, xC^3\, yB^2\, yC\, xA^2 - xC^2\, yB^2\, xB\, yC^2\, yA + xC^3\, yB^4\, yA$$
$$+ 4\, xB^3\, yA^2\, xA\, yC\, xC - xC^4\, yA^3\, xB + 3\, xC^3\, yA^3\, xB^2 - 5\, xC^2\, yA^2\, xA\, yC\, xB^2$$
$$- 2\, xC^3\, yA^2\, yC\, xB^2 + 3\, xC^3\, yA^3\, yB^2 - 2\, xA\, xC\, yB^3\, xB\, yA^2 - 2\, xA^2\, yC^4\, xB\, yB - xA^2\, yC^4\, xB\, yA$$
$$- 5\, xA\, xC^2\, yC\, yB^2\, yA^2 - 4\, xA^3\, xC^2\, yC\, yB^2 - 4\, xA^3\, xC\, yC\, yB^2\, xB + xA\, xC^2\, yC^2\, yB\, yA^2$$
$$+ xA^3\, xC^2\, yC^2\, yB + 4\, xA^3\, xC\, yC^2\, xB\, yB + 2\, xB^4\, yC^2\, yA\, xA - 2\, xA^2\, xC\, yC^3\, yA\, yB$$
$$- 3\, xA^3\, yC^3\, yB^2 + 2\, xB^3\, yA^2\, yB\, xC^2 + 4\, xA^2\, yC^3\, yB\, xB\, yA + 2\, xC^4\, yA^2\, xB\, yB$$
$$+ 2\, xC^3\, yA^2\, xA\, yC\, xB + xC^4\, yA^2\, yB\, xA - xC^2\, yA^3\, xB\, yC^2 - 2\, xC\, xB^3\, yA^2\, xA\, yB$$
$$- 4\, xC^2\, xB\, yA^3\, yC\, yB - 4\, xB^2\, yC^3\, yA^2\, xA + 4\, xB^2\, yC^2\, yA^3\, xC - 4\, xC^3\, xB\, yA^2\, yB\, xA$$
$$+ 4\, xB^2\, yA^3\, xC\, yC\, yB + xB^4\, yA^3\, xC - xB^2\, yA^2\, xA\, yC\, yB^2 + 5\, xB^2\, yA^2\, xA\, yC^2\, yB$$
$$- xB^4\, yA^2\, xA\, yC - 2\, xB^4\, yA^2\, yC\, xC - 4\, xB^2\, yC^3\, yA\, xA\, yB + 2\, xB^2\, yC^4\, yA\, xA$$
$$+ 2\, xB^2\, yC^2\, yA\, xA\, xC^2 - 3\, xB^3\, yA^3\, yC^2 + xB^2\, yA^3\, xC\, yB^2 - 3\, y^2\, xA^2\, yA\, xC\, yB^2$$
$$+ x\, xB^2\, yA^2\, xA^2\, yB + xA\, xB^4\, y\, yA^2 - 3\, xA^3\, xC^2\, y\, yB^2 - xA\, xC^4\, y\, yB^2 + 3\, yA^2\, xC^2\, xB^3\, y$$
$$+ yA^2\, xC\, y\, yB^2\, xA^2 + 3\, yA^4\, xC\, y\, xB^2 + 2\, yA^3\, xC\, x\, xB^3 + yA^2\, xC^2\, y\, xB\, yB^2 + xA^3\, xB^2\, y\, yB^2$$
$$- yA^2\, xC\, xB^4\, y - 2\, yA^2\, xC\, xB^3\, y\, xA - 3\, yA^2\, xC^2\, xB\, y\, xA^2 + 3\, yA^2\, xC\, xB^2\, y\, xA^2$$
$$- 4\, y\, yA\, xC^3\, xA^2\, yB + x\, xA^2\, yB\, xC^2\, yA^2 + 3\, x^2\, xA^2\, xB\, yA\, yB^2 - 2\, yB^2\, xC^3\, y\, xA\, xB$$
$$+ 2\, yA^2\, xC^3\, y\, xA\, xB + yA^2\, xC^3\, y\, xA^2 - yA^2\, xC^3\, xA^2\, yB + 2\, x\, xA\, xC\, yB^2\, xB^2\, yA$$
$$+ 2\, x\, xA\, xC^3\, yB^3 + 2\, x\, xA\, xC^2\, xB\, yA\, yB^2 - 2\, x\, xA\, xC\, yB\, xB^2\, yA^2 - 2\, x\, xA^3\, xC\, yB^3$$
$$- 4\, x\, xA\, xC^3\, yA\, yB^2 - 3\, yA^2\, xC^3\, y\, xB^2 + x\, xB^2\, yB\, xC^2\, yA^2 - 2\, x\, xA^3\, xB\, yA\, yB^2$$
$$+ 3\, x^2\, xA^2\, xC\, yB^3 - 3\, x^2\, xA\, xC^2\, yB^3 - 4\, yA^2\, xC\, x\, xA\, yB^3 - 3\, y^2\, yA^2\, xC^2\, xA\, yB$$
$$- yA^2\, xC\, xA^2\, yB^3 - 2\, yA^3\, xC^3\, y\, yB - 2\, yA^3\, xC\, y\, yB\, xB^2 + 2\, y\, yA\, xA^3\, xB^2\, yB$$
$$- 4\, y\, yA\, xA^3\, xC\, xB\, yB - 3\, y^2\, yA\, xC^3\, yB^2 - 3\, y^2\, yA^3\, xC\, xB^2 + 2\, y\, yA\, xC^3\, yB^3$$
$$+ 3\, y^2\, yA\, xC^2\, xB\, yB^2 + 2\, y\, yA\, xC\, yB^3\, xA^2 + 6\, y\, yA\, xC^2\, xB\, xA^2\, yB + 3\, xA\, yB^4\, y\, xC^2$$
$$- xA\, yB^2\, y\, yA^2\, xC^2 + xA\, yB^2\, y\, yA^2\, xB^2 + 2\, xA\, xC^4\, y\, yB\, yA - 6\, xA\, xB^2\, y\, yB\, yA\, xC^2$$
$$+ 4\, xA\, xB^3\, y\, yB\, yA\, xC + xB\, xC^4\, y\, yA^2 - 4\, xA\, yB^3\, y\, yA\, xC^2 + 4\, xA\, yB^3\, y\, yA\, xC\, xB$$
$$- 2\, xB^3\, xA^2\, y\, yB\, yA - 2\, xB\, xC^4\, y\, yB\, yA - 2\, x\, xC^2\, yA^2\, xB\, xA\, yB + 2\, y\, yA\, xA^3\, xC^2\, yB$$
$$+ 3\, y^2\, yA^2\, xC^3\, yB + 3\, y^2\, yA^2\, xC\, yB\, xB^2 + 2\, xB\, yA^2\, x\, xA\, yB^3 - 2\, xB\, yA^2\, x\, xC\, yB^3$$

$- 3\,x^2\,xA^2\,xC\,yA\,yB^2 - 3\,x^2\,xC^3\,yB^2\,yA - 3\,yB^4\,xC\,y\,xA^2 + yB^2\,xC\,xA^4\,y - 2\,xB^3\,yA^2\,x\,yB\,xC$
$- xB^2\,yA^3\,x\,yB^2 - xB^2\,yA^2\,y\,xC\,yB^2 - 3\,xB^2\,xA^2\,y\,xC\,yB^2 - xB\,yA^2\,y\,yB^2\,xA^2 - 3\,xB\,yA^4\,y\,xC^2$
$- xB\,xA^4\,y\,yB^2 - xB^3\,xA^2\,y\,yA^2 + xB\,xC^4\,y\,yB^2 + 4\,y\,xC^3\,yB\,xB^2\,yA + 6\,x^2\,xC^2\,yB^2\,yA\,xA$
$- 2\,x\,xA^2\,xB\,xC\,yB\,yA^2 + 3\,x^2\,xC^3\,yB\,yA^2 - 3\,x^2\,xA\,xC^2\,yB\,yA^2 + 6\,x^2\,xA\,xC\,xB\,yB\,yA^2$
$- 2\,yC^2\,x\,xA^3\,xB\,yA - 4\,yC^2\,x\,xA^3\,xB\,yB + 2\,yC^2\,x\,xA^2\,xC\,xB\,yB + 2\,yC^2\,xA\,y\,yB\,yA\,xC^2$
$- 2\,yC^2\,xA\,y\,yB\,yA\,xB^2 + 4\,yC^2\,xA\,x\,xC\,yB^3 - 2\,yC^2\,xB\,y\,yB\,yA\,xC^2 + 2\,yC^2\,xB^2\,y\,yB\,yA\,xC$
$+ 2\,yC^2\,xB\,x\,xA\,yB^3 - 2\,yC^2\,y\,yA\,xC\,xA^2\,yB + 2\,yC^2\,xA\,yB\,xB^3\,xC - 2\,yC^2\,xB^3\,x\,yB\,xC$
$- yC^2\,xA^4\,xC\,yB + 3\,yC^2\,x\,xA^4\,yB + 3\,yC^2\,y\,xA^3\,xB^2 - 2\,yC^2\,xA^3\,y\,xB\,xC - 6\,yC^2\,y^2\,yA\,xA\,xB^2$
$+ 3\,yC^2\,y^2\,yA\,xA^2\,xB + 2\,yC^2\,yA^3\,xA\,xB^2 + 2\,yC^2\,yA\,xA^3\,xB^2 + yC^2\,xA^4\,y\,xC$
$- 6\,yC^2\,x^2\,xB^2\,yA\,xA - 3\,yC^2\,yA^2\,xC^2\,x\,yB + 3\,yC^2\,y^2\,xC\,yB\,xA^2 + 3\,yC^2\,y^2\,xC\,yB\,xB^2$
$- 6\,yC^2\,y^2\,xC\,yB\,xA\,xB - 6\,yC^2\,xA\,x\,xB\,yB\,yA^2 - yC^2\,xA^2\,xC^2\,x\,yB - 2\,yC^2\,xB\,x\,xC\,yB^3$
$- 2\,yC^2\,x\,xA^2\,xC\,xB\,yA - 3\,yC^2\,y^2\,xA\,yB\,xB^2 + 2\,yC^2\,y\,xA^2\,xB\,yA\,yB - 2\,yC^2\,yA^2\,xA^2\,xB\,yB$
$+ 2\,yC^2\,yA^3\,xC\,x\,xA - 6\,yC^2\,yA\,xA\,x\,xC\,yB^2 + 2\,yC^2\,y\,xA\,xC\,xB^3 + 3\,yC^2\,yA^2\,xA^2\,x\,yB$
$+ 3\,yC^2\,yA\,xC^2\,x\,yB^2 - 4\,yC^2\,yA^3\,xC\,x\,xB - 3\,yC^2\,x^2\,xC\,xB^2\,yA + 3\,yC^2\,xA^2\,xC^2\,y\,xB$
$- 3\,yC^2\,xA\,xC^2\,y\,xB^2 + yC^2\,yA^2\,xC\,y\,xA^2 - yC^2\,yA^2\,xC\,xA^2\,yB - yC^2\,yA^2\,xC\,y\,xB^2$
$+ yC^2\,x\,xA^2\,xB^2\,yA - 3\,yC^2\,xB^2\,x\,yA\,yB^2 - yC^2\,xB^2\,y\,xC\,yB^2 - yC^2\,xA\,y\,yB^2\,xC^2$
$- yC^2\,xA\,y\,yA^2\,xC^2 + yC^2\,xA\,y\,yA^2\,xB^2 + 4\,yC^2\,xA\,x\,xB^3\,yA + 2\,yC^2\,xA\,x\,xB^2\,yB\,xC$
$+ 6\,yC^2\,xA\,x\,xB\,yA\,yB^2 + 2\,yC^2\,xB\,yB\,xC^2\,yA^2 - yC^2\,xB\,y\,yB^2\,xA^2 + yC^2\,xB\,y\,yB^2\,xC^2$
$+ yC^2\,xB\,y\,yA^2\,xC^2 - 2\,yC^2\,x\,xA\,xC\,xB^2\,yA - 2\,yC^2\,x\,xA^3\,xC\,yB - yC^3\,yA^2\,xA^2\,x$
$+ yC^3\,x\,xB^2\,yB^2 - 2\,yC^3\,y\,xB^3\,yA + yC^3\,yA^2\,xA^2\,xB + 2\,yC^3\,xA^3\,x\,xB + 3\,yC^3\,x^2\,xA\,xB^2$
$- 3\,yC^3\,x^2\,xA^2\,xB - 3\,yC^3\,x\,xB^2\,yA^2 + 2\,yC^3\,yA\,xC\,yB\,xB^2 + 2\,yC^3\,x\,xC\,xB\,yB^2$
$- 2\,yC^3\,y\,xC\,yB\,xB^2 - 4\,yC^3\,x\,xA\,xB\,yB^2 - 2\,yC^3\,x\,xA\,xB^3 + 3\,yC^3\,y^2\,xA\,xB^2$
$+ 2\,yC^3\,y\,xA\,yB\,xB^2 + yC^3\,y^2\,xA^3 - yC^3\,x^2\,xB^3 + yC^4\,xB^3\,y + 2\,yC^3\,y\,xA^3\,yB$
$- 4\,yC^3\,x\,xC\,xB\,yB\,yA + 2\,yC^3\,x\,xB^2\,yB\,yA - 2\,yC^3\,x\,xA\,xC\,yB^2 + 3\,yC^3\,x\,xA^2\,yB^2$
$+ 2\,yC^3\,y\,yA\,xC\,xB^2 + 4\,yC^3\,y\,yA\,xA\,xB^2 - 4\,yC^3\,y\,yA\,xA\,xC\,xB + 2\,yC^3\,x\,xC\,xB\,yA^2$
$+ 4\,yC^3\,y\,xB\,yB\,xA\,xC - 4\,yC^3\,y\,xB\,yB\,xA^2 - 2\,yC^3\,y\,xC\,yB\,xA^2 - 3\,yC^3\,y^2\,xA^2\,xB$
$- 2\,yC^3\,xA\,x\,xC\,yA^2 + 4\,yC^3\,xA\,x\,xB\,yA^2 - 2\,yC^3\,yA\,xA^2\,y\,xB + 2\,yC^3\,yA\,xC\,y\,xA^2$
$- 2\,yC^3\,xA^2\,x\,yA\,yB + 4\,yC^3\,xA\,x\,yA\,xC\,yB + 3\,yC^4\,xA^2\,y\,xB - 3\,yC^4\,xA\,y\,xB^2 - yC^4\,xB^2\,x\,yB$
$- yC^4\,xA^2\,x\,yB + 2\,yC^4\,xB\,x\,xA\,yB - 2\,yC^4\,xB\,x\,yA\,xA + yC^4\,xB^2\,x\,yA + yC^4\,xA^2\,x\,yA$
$+ yC^2\,xA\,xB^4\,y + yC^2\,xB^3\,xC^2\,y - 2\,yC^2\,xB\,xA^4\,yB - yC^2\,xB\,xA^4\,y - 3\,yC^2\,xB^3\,y\,xA^2$
$+ 3\,yC^2\,y^2\,xB^3\,yA + yC^2\,yA^3\,xC^2\,x + 3\,yC^2\,xB^2\,yA^3\,x - yC^2\,y\,xB^4\,xC - yC^2\,xC^2\,yB^3\,x$
$+ 3\,yC^2\,x^2\,xB^3\,yA - 3\,yC^2\,y^2\,xA^3\,yB - 3\,yC^2\,x^2\,xA^3\,yB - yC^2\,xA^3\,xC^2\,y - 3\,yC^2\,xA^2\,x\,yB^3$
$- 3\,yC^2\,x\,xB^4\,yA + 2\,yC^2\,xB^3\,x\,yA\,xC + 3\,yC^2\,x^2\,xC\,xB^2\,yB - yC^2\,x\,xB^2\,xA^2\,yB$
$+ 2\,yC^2\,x\,xB^3\,xA\,yB + 2\,yC\,y\,xA\,yA\,xC^2\,yB^2$

> ND1:=factor(ND1);

$ND1 := (-xB\,yC + xA\,yC - xA\,yB + xC\,yB - yA\,xC + xB\,yA)^2\,(-xB^2\,y\,xC - xB^2\,x\,yA$

$$+xA^2\,x\,yB+yC\,x\,yB^2-y^2\,yA\,xC+x^2\,xC\,yB-x^2\,xC\,yA-xB\,yA^2\,y+x\,yA\,xC^2-x\,yA\,yB^2$$
$$+x^2\,xB\,yA-xA^2\,y\,xB+xA\,y\,xB^2+xA^2\,y\,xC-xA\,xC^2\,y+xA\,y\,yB^2-xA\,x^2\,yB-xA\,y^2\,yB$$
$$+yA^2\,xC\,y-yB^2\,xC\,y+yC\,xA\,x^2+yC\,xA\,y^2-yC\,x\,yA^2-yC\,y^2\,xB-yC\,x^2\,xB+yC\,x\,xB^2$$
$$+yA\,xC\,xB^2-yA\,xC^2\,xB+yA\,xC\,yB^2+xA\,yC^2\,yB-xA\,yC\,yB^2+xB\,yC\,xA^2-xA\,yC\,xB^2$$
$$+xB\,yC\,yA^2-xB\,yC^2\,yA+xC^2\,yB\,xA-xC\,yB\,xA^2-xC\,yB\,yA^2+y^2\,yA\,xB+y^2\,xC\,yB$$
$$-xC^2\,x\,yB+yA^2\,x\,yB+xC^2\,y\,xB-yC^2\,x\,yB+yC^2\,xB\,y-yC^2\,y\,xA+yC^2\,x\,yA-yC\,x\,xA^2)$$

```
> E1:=op(2,ND1);
# ATTENTION : dans notre exécution, le facteur qui nous intéressait était le 2ème, cela peut changer d'une exécution à l'autre !
```

$$E1:=-xB^2\,y\,xC-xB^2\,x\,yA+xA^2\,x\,yB+yC\,x\,yB^2-y^2\,yA\,xC+x^2\,xC\,yB-x^2\,xC\,yA-xB\,yA^2\,y$$
$$+x\,yA\,xC^2-x\,yA\,yB^2+x^2\,xB\,yA-xA^2\,y\,xB+xA\,y\,xB^2+xA^2\,y\,xC-xA\,xC^2\,y+xA\,y\,yB^2$$
$$-xA\,x^2\,yB-xA\,y^2\,yB+yA^2\,xC\,y-yB^2\,xC\,y+yC\,xA\,x^2+yC\,xA\,y^2-yC\,x\,yA^2-yC\,y^2\,xB$$
$$-yC\,x^2\,xB+yC\,x\,xB^2+yA\,xC\,xB^2-yA\,xC^2\,xB+yA\,xC\,yB^2+xA\,yC^2\,yB-xA\,yC\,yB^2$$
$$+xB\,yC\,xA^2-xA\,yC\,xB^2+xB\,yC\,yA^2-xB\,yC^2\,yA+xC^2\,yB\,xA-xC\,yB\,xA^2-xC\,yB\,yA^2$$
$$+y^2\,yA\,xB+y^2\,xC\,yB-xC^2\,x\,yB+yA^2\,x\,yB+xC^2\,y\,xB-yC^2\,x\,yB+yC^2\,xB\,y-yC^2\,y\,xA$$
$$+yC^2\,x\,yA-yC\,x\,xA^2$$

```
> D2:=Equation(Gamma);
```

$$D2:=x^2+y^2+(-yB\,yC^2-yB\,xC^2+yA\,yC^2-yA\,yB^2-yA\,xB^2+yA\,xC^2+yB^2\,yC-yA^2\,yC$$
$$+yA^2\,yB-xA^2\,yC+xA^2\,yB+xB^2\,yC)\,x\,/\,(\%1)-(yB^2\,xC-yA^2\,xC+yA^2\,xB-xA^2\,xC$$
$$+xA^2\,xB+xB^2\,xC-xB\,yC^2-xB\,xC^2+xA\,yC^2-xA\,yB^2-xA\,xB^2+xA\,xC^2)\,y\,/\,(\%1)+\frac{1}{4}($$
$$-yB\,yC^2-yB\,xC^2+yA\,yC^2-yA\,yB^2-yA\,xB^2+yA\,xC^2+yB^2\,yC-yA^2\,yC+yA^2\,yB-xA^2\,yC$$
$$+xA^2\,yB+xB^2\,yC)^2\Big/\%1^2+\frac{1}{4}(yB^2\,xC-yA^2\,xC+yA^2\,xB-xA^2\,xC+xA^2\,xB+xB^2\,xC$$
$$-xB\,yC^2-xB\,xC^2+xA\,yC^2-xA\,yB^2-xA\,xB^2+xA\,xC^2)^2\Big/\%1^2-\frac{1}{4}$$
$$(yA^2+yB^2-2\,yB\,yA-2\,xA\,xB+xB^2+xA^2)\,(-2\,yC^3\,yB-2\,yC^3\,yA-2\,xA\,yC^2\,xC$$
$$-2\,xA\,xC\,yB^2-2\,xB^2\,xC\,xA+4\,xB\,xA\,xC^2-2\,xA^2\,xC\,xB-2\,yA^2\,xC\,xB+xB^2\,xC^2+xA^2\,xC^2$$
$$+xA^2\,xB^2+xA^2\,yB^2+yB^2\,xC^2+yB^2\,yA^2+yA^2\,xB^2+yA^2\,xC^2-2\,yC\,yA\,xC^2-2\,yC\,yA^2\,yB$$
$$+4\,yB\,yA\,yC^2-2\,yC\,yB\,xC^2-2\,xB^2\,yC\,yA-2\,xC\,xB\,yC^2-2\,yC\,yA\,yB^2-2\,xA^2\,yC\,yB+yC^4$$
$$+xC^4+2\,xC^2\,yC^2+xB^2\,yC^2+yC^2\,yB^2+yC^2\,yA^2-2\,xC^3\,xB+4\,xB\,yC\,yA\,xC+xA^2\,yC^2$$
$$-2\,xA\,xC^3+4\,xA\,yC\,xC\,yB)\Big/\%1^2=0$$
$$\%1:=-xB\,yC+xA\,yC-xA\,yB+xC\,yB-yA\,xC+xB\,yA$$

```
> D2:=op(1,D2);
```

$$D2:=x^2+y^2+(-yB\,yC^2-yB\,xC^2+yA\,yC^2-yA\,yB^2-yA\,xB^2+yA\,xC^2+yB^2\,yC-yA^2\,yC$$
$$+yA^2\,yB-xA^2\,yC+xA^2\,yB+xB^2\,yC)\,x\,/\,(\%1)-(yB^2\,xC-yA^2\,xC+yA^2\,xB-xA^2\,xC$$

$+ xA^2\, xB + xB^2\, xC - xB\, yC^2 - xB\, xC^2 + xA\, yC^2 - xA\, yB^2 - xA\, xB^2 + xA\, xC^2)\, y\, /\, (\%1) + \frac{1}{4}($
$-yB\, yC^2 - yB\, xC^2 + yA\, yC^2 - yA\, yB^2 - yA\, xB^2 + yA\, xC^2 + yB^2\, yC - yA^2\, yC + yA^2\, yB - xA^2\, yC$
$+ xA^2\, yB + xB^2\, yC)^2 \Big/ \%1^2 + \frac{1}{4}(yB^2\, xC - yA^2\, xC + yA^2\, xB - xA^2\, xC + xA^2\, xB + xB^2\, xC$
$- xB\, yC^2 - xB\, xC^2 + xA\, yC^2 - xA\, yB^2 - xA\, xB^2 + xA\, xC^2)^2 \Big/ \%1^2 - \frac{1}{4}$
$(yA^2 + yB^2 - 2\, yB\, yA - 2\, xA\, xB + xB^2 + xA^2)\, (-2\, yC^3\, yB - 2\, yC^3\, yA - 2\, xA\, yC^2\, xC$
$- 2\, xA\, xC\, yB^2 - 2\, xB^2\, xC\, xA + 4\, xB\, xA\, xC^2 - 2\, xA^2\, xC\, xB - 2\, yA^2\, xC\, xB + xB^2\, xC^2 + xA^2\, xC^2$
$+ xA^2\, xB^2 + xA^2\, yB^2 + yB^2\, xC^2 + yB^2\, yA^2 + yA^2\, xB^2 + yA^2\, xC^2 - 2\, yC\, yA\, xC^2 - 2\, yC\, yA^2\, yB$
$+ 4\, yB\, yA\, yC^2 - 2\, yC\, yB\, xC^2 - 2\, xB^2\, yC\, yA - 2\, xC\, xB\, yC^2 - 2\, yC\, yA\, yB^2 - 2\, xA^2\, yC\, yB + yC^4$
$+ xC^4 + 2\, xC^2\, yC^2 + xB^2\, yC^2 + yC^2\, yB^2 + yC^2\, yA^2 - 2\, xC^3\, xB + 4\, xB\, yC\, yA\, xC + xA^2\, yC^2$
$- 2\, xA\, xC^3 + 4\, xA\, yC\, xC\, yB)\, \Big/\, \%1^2$

$\%1 := -xB\, yC + xA\, yC - xA\, yB + xC\, yB - yA\, xC + xB\, yA$

```
> ND2:=numer(D2);
```

$ND2 := 2\, x\, yB\, yC^2\, yA\, xC - x\, yB\, yC^2\, xB\, yA - x\, yA\, yB^3\, xC - x\, yB^2\, xC^3 - x\, xB^3\, yC^2$
$+ x\, yA\, yC^3\, xA + x\, yB\, xC^2\, xB\, yC - x\, yB\, xC^2\, xA\, yC - x\, yB\, yC^3\, xA + 2\, x\, yB^2\, yC^2\, xA$
$- x\, yB^2\, yC^2\, xC + x\, yA\, yB^3\, xA + x\, xA^2\, yC^2\, xB + 2\, x\, xA^3\, yC\, yB + x\, xA^2\, yB^2\, xC$
$- x\, xA^2\, yC\, xC\, yB - x\, yA^2\, yC\, xC\, yB - x\, yA^2\, yB\, xB\, yC - x\, yA^3\, yB\, xC + 2\, x\, yA^2\, yC\, xA\, yB$
$- x\, yA^2\, xC^3 - x\, yA^2\, yB^2\, xA + x\, yA^3\, yB\, xB - x\, yA^2\, yC^2\, xC + 2\, x\, yA^2\, yC^2\, xB - x\, yB\, xC^2\, xB\, yA$
$- x\, yA\, yC^2\, xA\, yB + x\, yB^2\, xC^2\, xA + 2\, x\, yB\, xC^3\, yA - x\, yA\, yC^3\, xB - x\, yB^2\, yC\, yA\, xC$
$+ x\, yA^3\, yC\, xC - x\, yA^3\, yC\, xB - x\, xB^2\, yC\, yA\, xC - x\, yB^3\, yC\, xA + x\, yB^3\, yC\, xC - x\, yA^2\, yC^2\, xA$
$- x\, xA^2\, yB\, yA\, xC + x\, xB^2\, yC^2\, xA - x\, xB^2\, yC\, xA\, yB + x\, xB^2\, yC\, xC\, yB + x\, xA^2\, yC\, yA\, xC$
$+ x\, xA^2\, yB\, xB\, yA - x\, xA^2\, yC\, xB\, yA - x\, xA^2\, yB\, xB\, yC - x\, xA^3\, yC^2 + y\, yB^2\, xC\, xB\, yC$
$+ 2\, y\, xB^2\, xC\, xA\, yB + 2\, y\, xB^2\, xC^2\, yA - y\, xB^3\, xC\, yA + y\, yA^2\, xC^2\, yB + 2\, y\, xB\, yC^3\, xA$
$+ y\, xB\, xC^3\, yB + 2\, y\, xB\, xC^2\, xA\, yC - y\, yB^2\, xC\, xA\, yC - y\, yB^2\, xC\, xB\, yA - y\, yA^2\, xC\, xB\, yC$
$- y\, xB\, yC^2\, yA\, xC + y\, xB^2\, yC^2\, yA - y\, xB^2\, xC^2\, yC - y\, xA^3\, xC\, yB + 2\, y\, xA^2\, xC^2\, yB$
$- y\, xA^2\, xC^2\, yA + y\, yA^2\, xC\, xA\, yC + y\, xA^3\, xB\, yB - y\, xA^3\, xB\, yC - y\, yA^2\, xC\, xA\, yB$
$+ y\, yA^2\, xB^2\, yC + 2\, y\, xA^2\, xB^2\, yC + y\, xA^3\, xC\, yC - y\, yA^2\, xB\, xA\, yC - y\, xA^2\, xB\, xC\, yB$
$- y\, xB^2\, xC\, xA\, yC - y\, xB\, yC^2\, xA\, yB + y\, xB\, yC^2\, xC\, yB + y\, yA^2\, xB\, xA\, yB - y\, yA^2\, xB\, xC\, yB$
$- y\, xA^2\, xC\, xB\, yC + 2\, y\, xA^2\, xC\, xB\, yA - y\, xA\, yC^2\, xB\, yA - y\, xA\, yB^2\, xB\, yC - y\, xA\, yB^2\, yA\, xC$
$- y\, xA\, xB^3\, yC - y\, xB\, xC^2\, xA\, yB - y\, xA\, yC^2\, xC\, yB - y\, xA\, xC^3\, yB + y\, xA\, xC^3\, yA - y\, xB\, xC^3\, yA$
$+ y\, xA^2\, yC^2\, yB - y\, xA\, xC^2\, xB\, yA - y\, xA^2\, xB^2\, yB + y\, xA\, xB^3\, yA - y\, xA\, xB^2\, yA\, xC$
$- y\, xA^2\, xC^2\, yC + y\, xA^2\, yB^2\, yC + y\, xA\, yC^2\, yA\, xC + y\, xA\, yB^2\, xB\, yA - y\, xA^2\, xB^2\, yA$
$+ y\, xB^3\, xC\, yC - y\, xB^2\, xC^2\, yB + 2\, y\, yA^3\, xC\, xB + 2\, y\, yB^3\, xC\, xA + y\, yB^2\, xC^2\, yA - y\, yA^3\, xB^2$
$- y\, xA^2\, yB^3 - y\, xB^2\, yC^3 - y\, xA^2\, yC^3 + yC^3\, yA\, xB^2 + xA^2\, yC^3\, yB - y\, yA^3\, xC^2 - 2\, y^2\, xA\, xC\, yB^2$

$$+y^2\,yA^2\,xC^2+y^2\,xA^2\,yC^2+y^2\,xB^2\,yC^2+2\,x\,yA^2\,yB^2\,xC-x\,yA^2\,yB^2\,xB+2\,x\,yA\,xB^3\,yC$$
$$-x\,yB^2\,yC^2\,xB+x\,yB\,yC^3\,xB+x\,yA\,xB^2\,xA\,yB-x\,yA\,yB^2\,xA\,yC+x\,yA\,xC^2\,xA\,yC$$
$$-x\,yA\,xC^2\,xA\,yB-x\,yA^2\,xB^3+2\,x\,yA\,yB^2\,xB\,yC+x\,yA^2\,xC^2\,xB-x\,yA\,xB^2\,xC\,yB$$
$$-x\,yA\,xB^2\,xA\,yC+x\,yA^2\,xB^2\,xC-x\,yA\,xC^2\,xB\,yC-2\,xA^2\,xB^2\,yC^2-xA\,yC^3\,xB\,yA$$
$$+yA^2\,xC^3\,xB-2\,yA^2\,xB^2\,xC^2+yA^3\,xB^2\,yC+yA^3\,xC^2\,yB-xA\,xC\,yB^3\,yA-xA\,xC\,yB\,yA\,xB^2$$
$$-xA\,xC^3\,yB\,yA-xA\,xC\,yB^3\,yC-xA\,xC\,yB\,yA^2\,yC+xA\,xC\,yB^2\,yA^2-xA\,xC\,yB\,xB^2\,yC$$
$$+2\,xA\,yA\,xC\,yB^2\,yC+2\,xA\,yA\,xC\,xB^2\,yC+2\,xA\,xB\,yA\,yB\,yC^2+2\,xA\,xB\,yA\,yB\,xC^2$$
$$+yB\,xC^2\,yA\,xB^2+xA^2\,yB\,yA\,xC^2+xA^2\,yB\,xB^2\,yC-xA^2\,xC\,yB\,xB\,yA+xA\,xC\,yB^2\,yC^2$$
$$-xA\,xB\,yC\,yA\,xC^2+xA\,xB\,yC^2\,yB^2+xA\,xB\,yC^2\,yA^2-xA\,xB\,yC\,yA^2\,yB-xA^3\,yC\,xC\,yB$$
$$+xA^2\,yC\,yB\,xC^2-2\,xA^2\,yC^2\,yB^2+xA^3\,yB^2\,xC-2\,xA^2\,yB^2\,xC^2+xA^2\,yB^3\,yC+xA\,xC^3\,yB^2$$
$$+yB^3\,xC^2\,yA-2\,yB^2\,xC^2\,yA^2-2\,yA^2\,yC^2\,xB^2-xA^3\,xB\,yC\,yB+2\,xA^2\,xB\,yC\,xC\,yB$$
$$-xA^2\,xB\,yC\,yA\,xC+xA^2\,xB^2\,yC\,yA-xA\,xB\,yC^3\,yB-xA\,xB\,yC\,yB\,xC^2-xA\,xB\,yC\,yA\,yB^2$$
$$-xA\,xB^3\,yC\,yA-y\,yB^3\,xC^2+xA^3\,xB\,yC^2+xA\,xB^3\,yC^2+yA\,xC^2\,xB^2\,yC-yA^3\,xC\,yB\,xB$$
$$-yA\,xC\,yB\,xB\,yC^2-yA\,xC^3\,yB\,xB+yA^2\,xC\,xB\,yC^2+yA^2\,xB\,yB^2\,xC+yA^2\,xB^3\,xC$$
$$-x\,xA^3\,yB^2+2\,yA^2\,xB\,yC\,xC\,yB-yA^3\,xB\,yC\,xC-yA\,xB\,yC\,yB^2\,xC-yA\,xB^3\,yC\,xC$$
$$-xA\,xC\,yB\,yA\,yC^2-2\,x^2\,xA\,xC\,yB^2+x^2\,yB^2\,xC^2+x^2\,xA^2\,yB^2-2\,x^2\,xB\,yC^2\,xA$$
$$+2\,x^2\,xA\,yB\,yA\,xC-2\,x^2\,xB\,yC\,xC\,yB+2\,x^2\,xC\,yB\,xB\,yA+2\,x^2\,xA\,yC\,xC\,yB$$
$$+2\,x^2\,xB\,yC\,xA\,yB+x^2\,xA^2\,yC^2-2\,x^2\,xB^2\,yC\,yA-2\,x^2\,xA^2\,yC\,yB+2\,x^2\,xB\,yC\,yA\,xC$$
$$-2\,x^2\,xC^2\,yB\,yA-2\,x^2\,xA\,yB\,xB\,yA-2\,x^2\,xA\,yC\,yA\,xC-2\,x^2\,yA^2\,xC\,xB+x^2\,yA^2\,xB^2$$
$$+x^2\,xB^2\,yC^2+x^2\,yA^2\,xC^2+2\,x^2\,xA\,yC\,xB\,yA-2\,y^2\,xA\,yC\,yA\,xC+2\,y^2\,xA\,yC\,xB\,yA$$
$$-2\,y^2\,xB\,yC\,xC\,yB+2\,y^2\,xA\,yB\,yA\,xC-2\,y^2\,xA\,yB\,xB\,yA+2\,y^2\,xB\,yC\,xA\,yB$$
$$-2\,y^2\,xC^2\,yB\,yA+2\,y^2\,xB\,yC\,yA\,xC+2\,y^2\,xA\,yC\,xC\,yB-2\,y^2\,xB\,yC^2\,xA-2\,y^2\,xB^2\,yC\,yA$$
$$-2\,y^2\,xA^2\,yC\,yB-2\,y^2\,yA^2\,xC\,xB+y^2\,yA^2\,xB^2+y^2\,xA^2\,yB^2+y^2\,yB^2\,xC^2+2\,y^2\,xC\,yB\,xB\,yA$$

> D2:=factor(ND2);

$$D2:=(-xB\,yC+xA\,yC-xA\,yB+xC\,yB-yA\,xC+xB\,yA)\,(-xB^2\,y\,xC-xB^2\,x\,yA+xA^2\,x\,yB$$
$$+yC\,x\,yB^2-y^2\,yA\,xC+x^2\,xC\,yB-x^2\,xC\,yA-xB\,yA^2\,y+x\,yA\,xC^2-x\,yA\,yB^2+x^2\,xB\,yA$$
$$-xA^2\,y\,xB+xA\,y\,xB^2+xA^2\,y\,xC-xA\,xC^2\,y+xA\,y\,yB^2-xA\,x^2\,yB-xA\,y^2\,yB+yA^2\,xC\,y$$
$$-yB^2\,xC\,y+yC\,xA\,x^2+yC\,xA\,y^2-yC\,x\,yA^2-yC\,y^2\,xB-yC\,x^2\,xB+yC\,x\,xB^2+yA\,xC\,xB^2$$
$$-yA\,xC^2\,xB+yA\,xC\,yB^2+xA\,yC^2\,yB-xA\,yC\,yB^2+xB\,yC\,xA^2-xA\,yC\,xB^2+xB\,yC\,yA^2$$
$$-xB\,yC^2\,yA+xC^2\,yB\,xA-xC\,yB\,xA^2-xC\,yB\,yA^2+y^2\,yA\,xB+y^2\,xC\,yB-xC^2\,x\,yB$$
$$+yA^2\,x\,yB+xC^2\,y\,xB-yC^2\,x\,yB+yC^2\,xB\,y-yC^2\,y\,xA+yC^2\,x\,yA-yC\,x\,xA^2)$$

> E2:=op(2,D2);

$$E2:=-xB^2\,y\,xC-xB^2\,x\,yA+xA^2\,x\,yB+yC\,x\,yB^2-y^2\,yA\,xC+x^2\,xC\,yB-x^2\,xC\,yA-xB\,yA^2\,y$$
$$+x\,yA\,xC^2-x\,yA\,yB^2+x^2\,xB\,yA-xA^2\,y\,xB+xA\,y\,xB^2+xA^2\,y\,xC-xA\,xC^2\,y+xA\,y\,yB^2$$
$$-xA\,x^2\,yB-xA\,y^2\,yB+yA^2\,xC\,y-yB^2\,xC\,y+yC\,xA\,x^2+yC\,xA\,y^2-yC\,x\,yA^2-yC\,y^2\,xB$$
$$-yC\,x^2\,xB+yC\,x\,xB^2+yA\,xC\,xB^2-yA\,xC^2\,xB+yA\,xC\,yB^2+xA\,yC^2\,yB-xA\,yC\,yB^2$$

$$+ xB\,yC\,xA^2 - xA\,yC\,xB^2 + xB\,yC\,yA^2 - xB\,yC^2\,yA + xC^2\,yB\,xA - xC\,yB\,xA^2 - xC\,yB\,yA^2$$
$$+ y^2\,yA\,xB + y^2\,xC\,yB - xC^2\,x\,yB + yA^2\,x\,yB + xC^2\,y\,xB - yC^2\,x\,yB + yC^2\,xB\,y - yC^2\,y\,xA$$
$$+ yC^2\,x\,yA - yC\,x\,xA^2$$

```
> E1-E2;
```

$$0$$

```
>
```

IREM de Grenoble
Groupe Calcul Formel

Les voyages de Monsieur H

1997

Objectifs

Dans cet atelier, nous allons réaliser quelques constructions et chercher des lieux géométriques .
Notions abordées :

- orthocentre,
- démonstrations de propriétés classiques de l'orthocentre,
- le symétrique de l'orthocentre,
- lieu géométrique de l'orthocentre lorsque l'un des sommets du triangle décrit une courbe connue.

```
> restart ; read `geometri.m`;
```

Monsieur H

Détermination de Monsieur H

```
> A := Point(0, 0) :
> B := Point(1, 0) :
> C := Point(xc, yc) :
> T := Triangle(A, B, C) :
> H := Orthocentre(T) :
> Coordonnees(H) ;
```

$$\left[xc, -\frac{(-1+xc)\,xc}{yc} \right]$$

```
> h1 := Perpendiculaire(Droite(A, B), C) :
  h2 := Perpendiculaire(Droite(C, A), B) :
  h3 := Perpendiculaire(Droite(B, C), A) :
> seq(Equation(h.i),i=1..3) ;
```

$$x - xc = 0,\ xc\,x + yc\,y - xc = 0,\ (1 - xc)\,x - yc\,y = 0$$

Monsieur H existe : il appartient aux trois hauteurs

```
> Etre_concourantes(h1, h2, h3) ;
```

$$true$$

Etonnant non ?
On peut détailler un peu plus la démonstration

```
> hh := Intersection(h1, h2) : Coordonnees(hh) ;
```

$$\left[xc, -\frac{(-1+xc)\,xc}{yc} \right]$$

```
> Etre_un_point_de(h3, hh) ;
```

$$true$$

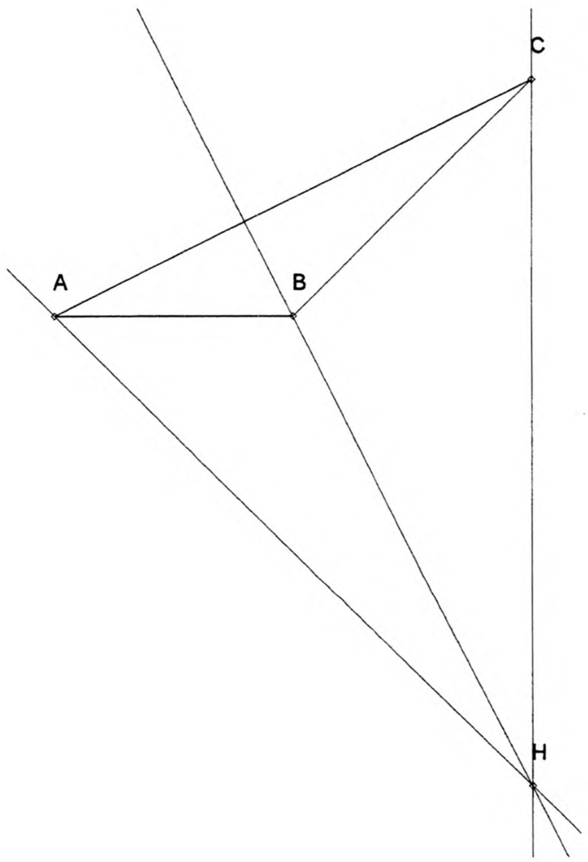
Une figure, pour voir.

```
> xc := 2 : yc := 1 :
```

On reconstruit C, T, H, h1, h2, h3 avec ces valeurs

```
> C := Point(xc, yc) :
> T := Triangle(A, B, C) :
> H := Orthocentre(T) :
> h1 := Perpendiculaire(Droite(A, B), C) :
  h2 := Perpendiculaire(Droite(C, A), B) :
  h3 := Perpendiculaire(Droite(B, C), A) :
> Colorier(T, Rouge) :
  Nommer(A, 'A') :Nommer(B, 'B') :Nommer(C, 'C') :
  Colorier(h1, Bleu) : Colorier(h2, Bleu) :Colorier(h3, Bleu) :
  Nommer(H, 'H') :
> F := Figure(A,B,C,T,h1,h2,h3,H) : Colorier(F,Noir) : # Noir pour impression
> Dessiner(F, `Orthocentre`) ;
```

Orthocentre



Le voyage obligatoire de Monsieur H

Chaque année, Monsieur H, se déplace sur le symétrique du cercle circonscrit : une vieille habitude !

```
> xc := 'xc' : yc := 'yc' : # Retour au cas général : xc et yc sont redevenues quelconques
```

On redéfinit C, T, H, h1, h2, h3 après avoir libéré xc et yc

```
> C := Point(xc, yc) :
> T := Triangle(A, B, C) :
```

```
> H := Orthocentre(T) :
> h1 := Perpendiculaire(Droite(A, B), C) :
  h2 := Perpendiculaire(Droite(C, A), B) :
  h3 := Perpendiculaire(Droite(B, C), A) :
> Hs := Image(Reflexion(Droite(A, B)), H) :
> Etre_cocycliques(A, B, C, Hs) ;
```

true

C'est magique !...mais c'est démontré!

Observons le voyage de Monsieur H

lorsque A et B sont fixes, C appartenant à un cercle fixe.

```
> xomega := 1/2 : yomega := 1 :
> Omega := Point(xomega, yomega) ; R := Distance(A, Omega) ;
```

$$\Omega := poinT$$

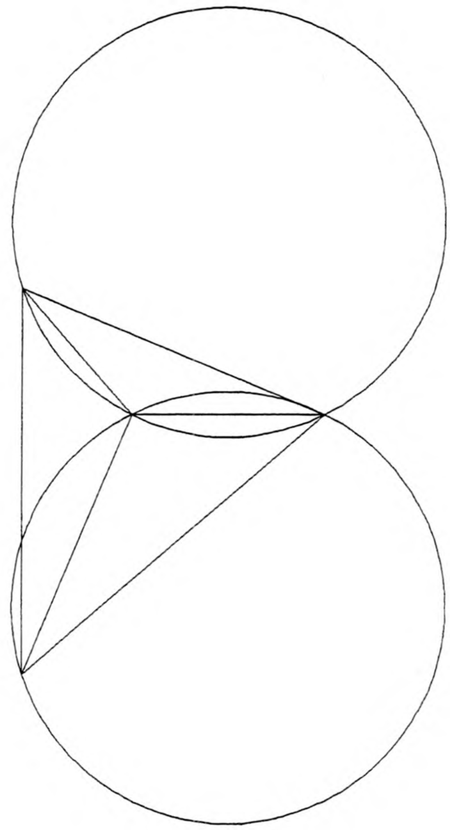
$$R := \frac{1}{2}\sqrt{5}$$

```
> CC := Cercle(Omega,  R) :
  Colorier(CC, Vert) :
> CCs := Image(Reflexion(Droite(A, B)), CC) :
  Colorier(CCs, Bleu) :
> C := Point(xomega+R*cos(t), yomega+R*sin(t)) :
```

On redéfinit T et H

```
> T := Triangle(A, B, C) :
  Colorier(T, Rouge) :
> H := Orthocentre(T) :
> hh1 := Segment(A, H) : hh2 := Segment(B, H) : hh3 := Segment(C, H) :
> F := Figure(T,CC, CCs, hh1, hh2, hh3) : Colorier(F,Noir) : # Noir pour impression
> Cadrage(-1, -2.2, 2, 2.2) :
> Animer(F, t=0..2*Pi,  `Le voyage obligatoire de Monsieur H`) ;
```

Le voyage obligatoire de Monsieur H



Les circuits aventure de Monsieur H

C se déplace maintenant sur une courbe quelconque.
Monsieur H part à l'aventure ! (Ce passage est sponsorisé par ...)

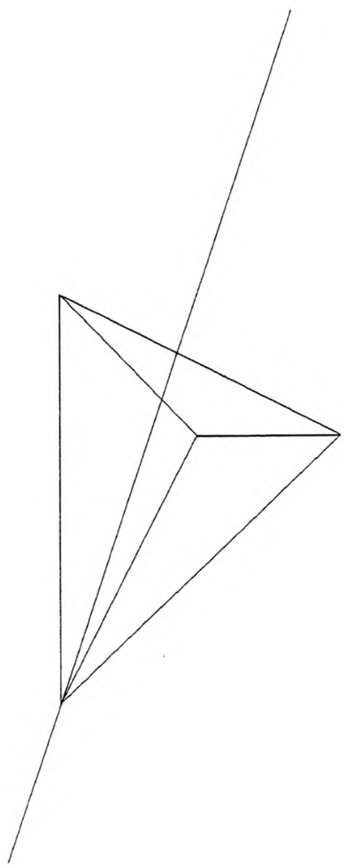
```
> f := x -> 3*x +1 ;
```

$$f := x \to 3\,x + 1$$

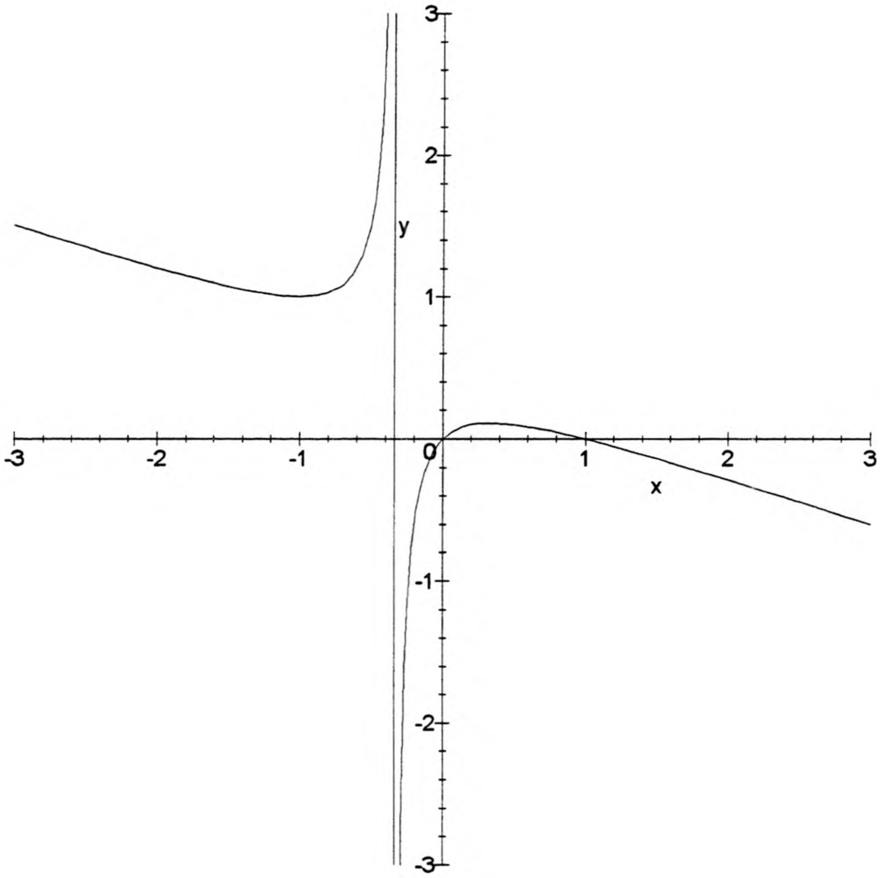
```
> C := Point(x, f(x)) :
```

On redéfinit T et H

```
> T := Triangle(A, B, C) :
  Colorier(T, Rouge) :
> H := Orthocentre(T) :
> hh1 := Segment(A, H) : hh2 := Segment(B, H) : hh3 := Segment(C, H) :
> xm := -3 : xM := 3 : ym := -3 : yM := 3 :
> E1 := Point(xm, f(xm)) : E2 := Point(xM, f(xM)) : e1e2 := Segment(E1, E2) :
  Colorier(e1e2, Bleu) :
> F := Figure(e1e2, T, hh1, hh2, hh3) : Colorier(F,Noir) : # Noir pour impression
> Cadrage(xm, ym, xM, yM) :
> Nombre_de_dessins := 50 :
> Animer(F, x=xm..xM, `Les aventures de Monsieur H`) ;
```



```
> plot(Ordonnee(H), x=-3..3, y=-3..3, color=black) ;
```



Où Monsieur H se fait escroquer

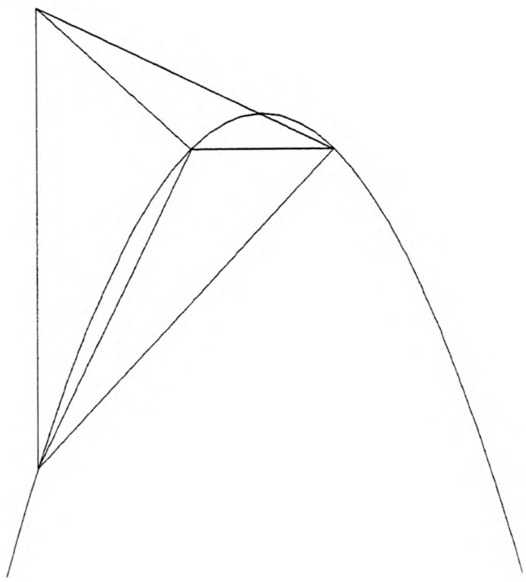
```
> f := x -> x - x^2 ;
```

$$f := x \to x - x^2$$

```
> C := Point(x, f(x)) :
```

On redéfinit T et H

```
> T := Triangle(A, B, C) :
  Colorier(T, Rouge) :
> H := Orthocentre(T) :
> hh1 := Segment(A, H) : hh2 := Segment(B, H) : hh3 := Segment(C, H) :
> xm := -3 : xM := 3 : ym := -3 : yM := 3 :
> P := Courbe(y=f(x), x=xm..xM) :
  Colorier(P, Noir) :
> F := Figure(T, hh1, hh2, hh3) : Colorier(F,Noir) : # Noir pour impression
> Cadrage(xm, ym, xM, yM) :
> Nombre_de_dessins := 50 :
> display(Dessiner(P),Animer(F, x=xm..xM, `L'aventure manquée de Monsieur H`)) ;
```



[>

IREM de Grenoble
Groupe Calcul Formel

Ellipses et astroïde

1996-97

Objectifs

Dans cet atelier, nous allons réaliser quelques constructions géométriques.
Notions abordées :

Constructions points par points d'ellipses en utilisant la méthode de la bande de papier.
Ellipses et courbes paramétrées.
Astroïde.
Enveloppe d'une famille de droites.

```
> restart ;
> read `geometri.m`;
```

Construction d'ellipses

```
> Ct := Cercle(Point(0, 0), 1) :
> P := Point(cos(t),sin(t)) :
> A := Point(cos(t),0) :
> B := Point(0,sin(t)) :
> S:=Segment(A,B) :
> E := k -> Point(A, Mul(k, Vecteur(A, B))) :
  Abscisse(E(k)) ; Ordonnee(E(k)) ;
```

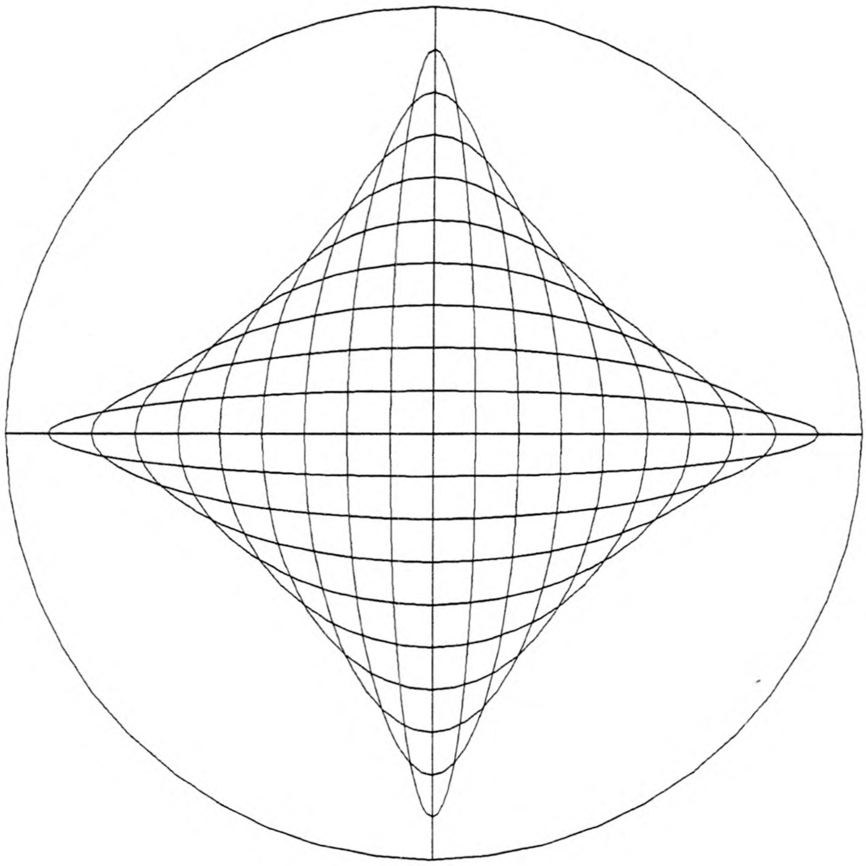
$$\cos(t) - k\cos(t)$$
$$k\sin(t)$$

```
> Ellipse := Courbe(Abscisse(E(1/3)), Ordonnee(E(1/3)), t=0..2*Pi) :
> Cadrage(-1, -1, 1, 1) :
  Colorier(S, Bleu) : Colorier(Ct, Bleu) : Colorier(Ellipse, Rouge) :
  # Dessiner([Ct, Ellipse], 'Ellipse') ;
> Ax:=Droite(Point(0,0),Point(1,0)) : Colorier(Ax, Noir) :
> Ay:=Droite(Point(0,0),Point(0,1)) : Colorier(Ay, Noir) :
> Ellipse2 := Courbe(2*cos(u)/3, sin(u)/3, u=0..2*Pi) :
  Colorier(Ellipse2, Vert) : F := E(1/3) : Colorier(F, Rouge) :
  # Animer([Ct, Ellipse2, S, F,Ax, Ay], t=0..2*Pi, 'Ellipse') ;
> Ellipses := seq(Courbe(Abscisse(E(k/10)), Ordonnee(E(k/10)), t=0..2*Pi), k=0..10) :
> Fig:=Figure(Ct, Ellipses) ; Colorier(Fig,Noir) ; # Noir pour impression monochrome
```

$$Fig := figurE$$
$$black$$

```
> Dessiner(Fig, 'Ellipses') ;
```

Ellipses



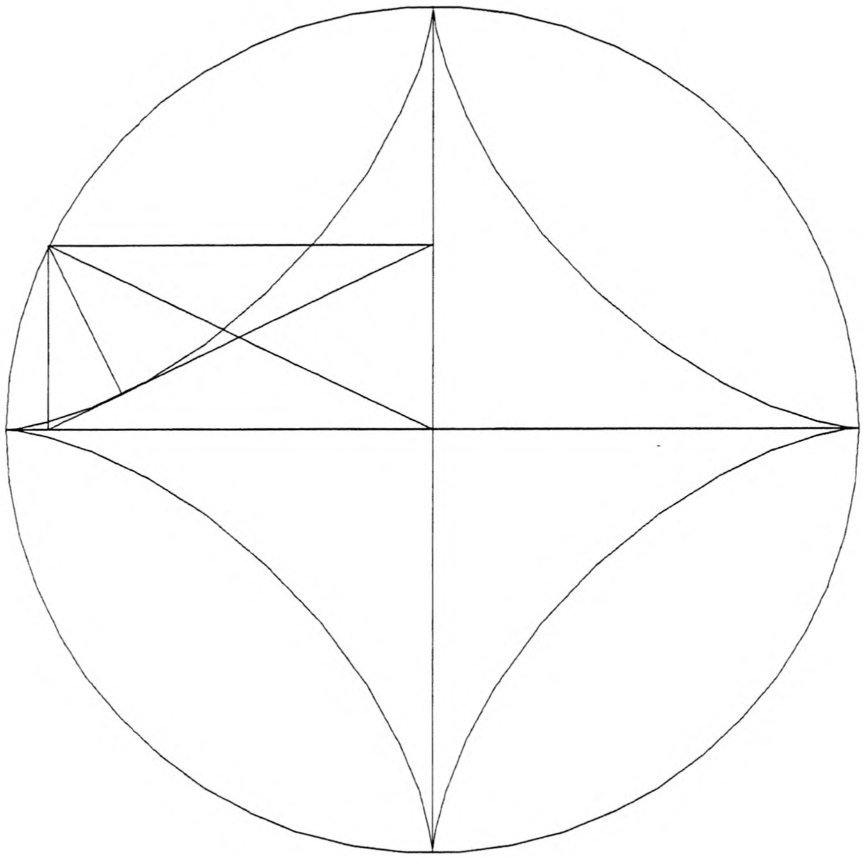
```
> H:=Image(Projection_orthogonale(Droite(A,B)),P) :
> Abscisse(H) ; Ordonnee(H) ;
```

$$\cos(t)^3$$

$$\sin(t) - \cos(t)^2 \sin(t)$$

```
> OP:=Segment(Point(0,0),P) :
> PH:=Segment(P,H) :
> PA := Segment(P, A)  :
> As:=Courbe(cos(u)^3,sin(u)^3,u=0..2*Pi) :
> PB := Segment(P, B) :
> As:=Courbe(cos(u)^3,sin(u)^3,u=0..2*Pi) :
> Colorier(OP,Noir) : Colorier(PH,Noir) :
  Colorier(PA, Noir) : Colorier(PB, Noir) :
  Colorier(As, Rouge) :
> # Nombre_de_points:= 4 : Nombre_de_dessins:= 4 :
> Nombre_de_points:= 50 : Nombre_de_dessins:= 35 :
> f := Figure(As, S,Ct,Ax,Ay,OP,PH,PA,PB) : Colorier(f,Noir) : # Noir pour impression
  monochrome
> Anim:=Animer(f, t=0..2*Pi, `Astroïde`) :
> Anim ;
```

Astroïde



Tangentes à l'astroïde

```
> xa := unapply(Abscisse(H), t) : ya := unapply(Ordonnee(H), t) :
> Va := Vecteur(D(xa)(t), D(ya)(t)) :
> Vab := Vecteur(A, B) :
> Etre_colineaires(Va, Vab) ;
```

true

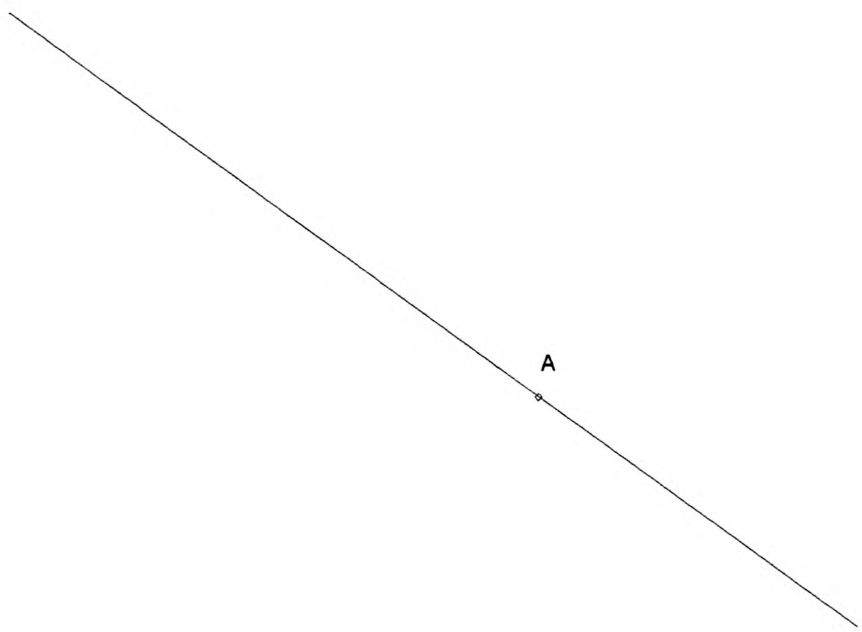
```
>
```

IREM de Grenoble
Groupe calcul formel
1996

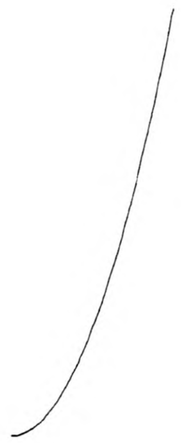
Famille de courbes

```
> restart ; read `geometri.m`:
> Cadrage(-4,-4,4,4):
> Dm:=Droite(m,m-1,-1):Equation(Dm);
  A:=Point(1,-1):Nommer(A,'A'):Colorier(A,Rouge):
  Dess:=Dessiner(A):Anim:=Animer(Dm,m=-3..3):display(Dess,Anim);
```

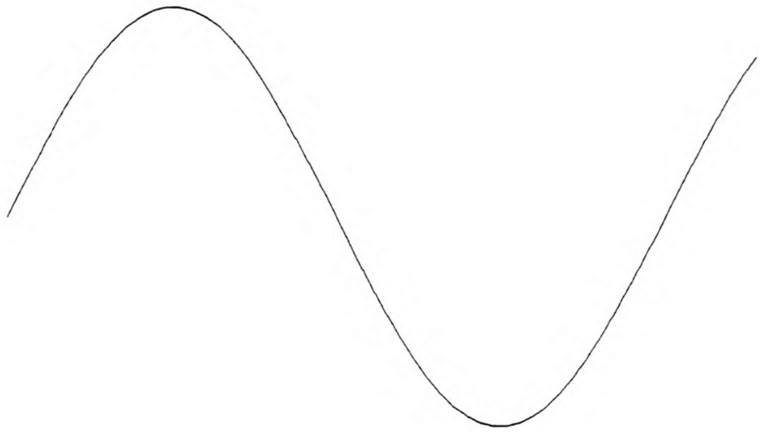
$$m\,x+(m-1)\,y-1=0$$



```
> Cadrage(-4,-4,3,4):
> Cm:=Courbe(t-4,m*t^2,t=-1..2):
  Animer(Cm,m=-2..2);
```



```
> Cadrage(-4,-4,4,4):
> Sm:=Courbe(t-Pi,2*sin(t+m),t=-2*Pi..2*Pi):
  Animer(Sm,m=0..5);
```



IREM de Grenoble
Groupe calcul formel

Le cosinus de 2π/17

1994-1996

Objet : Cet atelier utilisant Maple V se propose de calculer la valeur exacte du cosinus de 2π/17, puis de donner une construction à la règle et au compas, du polygone régulier de 17 côtés.
Niveau : Terminale S spécialité mathématique ou classe prépa.
Prérequis : Racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité dans le corps des nombres complexes.

PARTIE A : calcul de cos(2π/17).

Il y a 17 racines de l'unité dont 16 sont différentes de 1.

Notons $\omega = e^{\frac{2i\pi}{17}}$. Les racines sont les ω^k pour $k \in [0,..,16]$.

Classons les racines différentes de 1 dans l'ordre suivant :

$\omega,\ \omega^3,\ \omega^{(3^2)},\ \omega^{(3^3)},\ \omega^{(3^4)},\ \omega^{(3^5)},\ \omega^{(3^6)},\ \omega^{(3^7)},\ \omega^{(3^8)},\ \omega^{(3^9)},\ \omega^{(3^{10})},\ \omega^{(3^{11})},\ \omega^{(3^{12})},\ \omega^{(3^{13})},\ \omega^{(3^{14})},\ \omega^{(3^{15})}$.

Nous expliquerons plus loin pourquoi avoir choisi cet ordre, et nous pouvons dire, sachant que $\omega^{17} = 1$, que ces puissances de ω sont les $\omega^{(3^k \bmod 17)}$, et que, les exposants $3^k \bmod 17$ sont bien tous les nombres entiers de 1 à 16, ce que nous vérifierons avec Maple.

Nous pouvons dire également que ces 16 racines 17ième de l'unité, différentes de 1, sont les solutions de l'équation :

$$X^{16}+X^{15}+X^{14}+X^{13}+X^{12}+X^{11}+X^{10}+X^9+X^8+X^7+X^6+X^5+X^4+X^3+X^2+X+1=0$$

Nous allons classer ces racines en une somme, puis en deux sommes, puis en 4 sommes etc.

Classement en une somme.

On pose :

$$S=\omega^{(3^0)}+\omega^{(3^1)}+\omega^{(3^2)}+\omega^{(3^3)}+\omega^{(3^4)}+\omega^{(3^5)}+\omega^{(3^6)}+\omega^{(3^7)}+\omega^{(3^8)}+\omega^{(3^9)}+\omega^{(3^{10})}+\omega^{(3^{11})}+\omega^{(3^{12})}+\omega^{(3^{13})}+\omega^{(3^{14})}+\omega^{(3^{15})}.$$

On sait que S vaut -1.

Classement en deux sommes.

On pose, en prenant les termes de deux en deux :

$$u_1=\omega^{(3^0)}+\omega^{(3^2)}+\omega^{(3^4)}+\omega^{(3^6)}+\omega^{(3^8)}+\omega^{(3^{10})}+\omega^{(3^{12})}+\omega^{(3^{14})}.$$

$$u_2=\omega^{(3^1)}+\omega^{(3^3)}+\omega^{(3^5)}+\omega^{(3^7)}+\omega^{(3^9)}+\omega^{(3^{11})}+\omega^{(3^{13})}+\omega^{(3^{15})}.$$

Nous savons que $u_1+u_2=S$. Calculer $u_1 * u_2$. En déduire u_1 et u_2.

Pour calculer $u_1 * u_2$, vous pouvez le faire en flottants afin de constater que ce nombre est très voisin d'un nombre entier. Vous en conclurez la valeur exacte de $u_1 * u_2$ puis celles de u_1 et u_2.

Classement en quatre sommes.

On pose, en prenant les termes de deux en deux:

$$v_1=\omega^{(3^0)}+\omega^{(3^4)}+\omega^{(3^8)}+\omega^{(3^{12})}.$$

$$v_2=\omega^{(3^2)}+\omega^{(3^6)}+\omega^{(3^{10})}+\omega^{(3^{14})}.$$

$$v_3=\omega^{(3^1)}+\omega^{(3^5)}+\omega^{(3^9)}+\omega^{(3^{13})}.$$

$$v_4=\omega^{(3^3)}+\omega^{(3^7)}+\omega^{(3^{11})}+\omega^{(3^{15})}.$$

Nous savons que $v_1+v_2=u_1$. Calculer, en appliquant la même méthode, $v_1 * v_2$ puis v_1 et v_2.

De même nous savons que $v_3+v_4=u_2$. Calculer v_3*v_4, v_3 et v_4.

Classement en huit sommes.

On pose, en prenant les termes de deux en deux.

$w_1=\omega^{(3^0)}+\omega^{(3^8)}$.

$w_2=\omega^{(3^4)}+\omega^{(3^{12})}$.

$w_3=\omega^{(3^2)}+\omega^{(3^{10})}$.

$w_4=$......

Nous pourrions calculer 8 sommes comme celles-ci. Mais les deux premières vont suffir.

Nous savons que $w_1+w_2=v_1$. Montrer que $w_1*w_2=v_3$. En déduire w_1 puis le cosinus de $\frac{2\pi}{17}$.

Justification.

Nous pouvons maintenant expliquer pourquoi avoir classé les racines de cette façon et pourquoi ces sommes sont toutes réelles. En effet, dans chacune de ces sommes, nous constatons qu'il y a toujours $\omega^{(3^k)}$ et $\omega^{(3^{k+8})}$.

Montrons que ces deux racines sont conjuguées, ainsi leur somme sera deux fois leur partie réelle, c'est à dire deux fois un cosinus.

$$\begin{aligned}
\omega^{(3^k)}*\omega^{(3^{k+8})} &= \omega^{(3^k \bmod 17)}*\omega^{(3^{k+8} \bmod 17)}.\\
&= \omega^{(3^k \bmod 17)+(3^{k+8} \bmod 17)}.\\
&= \omega^{(3^k+3^{k+8}) \bmod 17}.\\
&= \omega^{(3^k(1+6561)) \bmod 17}.\\
&= \omega^{(3^k*6572 \bmod 17}.\\
&= \omega^{(3^k \bmod 17)*(6562 \bmod 17)}.\\
&= \omega^0 \qquad \text{puisque } 6562=17*386\\
&= 1.
\end{aligned}$$

Ce qui montre que $\omega^{(3^{k+8})}$ et l'inverse de $\omega^{(3^k)}$, c'est à dire de $e^{(3^k)i\theta}$, c'est à dire $e^{-(3^k)i\theta}$. C'est bien le conjugué de $\omega^{(3^k)}$.

PARTIE B : construction d'un 17-gone régulier.

Construction des solutions d'une équation du second degré.

On considère deux nombres dont on se donne la somme S et le produit P. On se propose de les dessiner à l'aide d'une règle et d'un compas.

Dans un repère orthonormal, on considère la droite $x=\frac{S}{2}$ et la médiatrice des deux points A(0,1), B(0,P).

Ces deux droites se coupent en un point Ω. Montrer, en utilisant l'unité « GeoIrem » que, si le cercle de centre Ω passant par A coupe l'axe des abscisses en deux points, les abscisses de ces deux points sont les deux nombres cherchés.

On peut ainsi construire les solutions des équations du second degré trouvées dans la recherche du cosinus de $\frac{2\pi}{17}$, et en déduire le dessin d'un côté du 17-gone régulier.

Faire cette construction en utilisant l'unité « GeoIrem ».

On peut également la faire en utilisant le logiciel « Geoplan ».

PARTIE C : démonstration des formules.

Dans la recherche du cosinus de $\frac{2\pi}{17}$, vous avez trouvé les valeurs en flottants très proches d'entiers, et vous en avez déduit des valeurs exactes. On peut le démontrer avec Maple.

Montrer que:

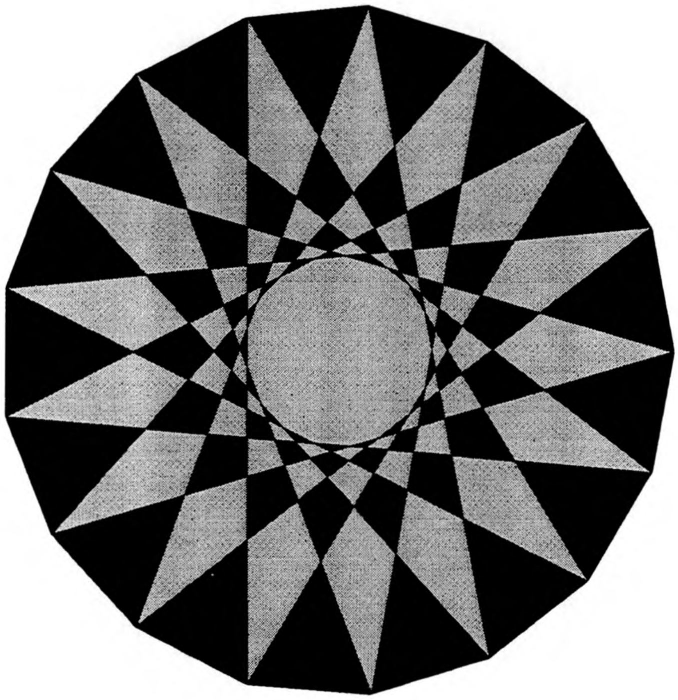
$u_1 + u_2 = -1$.

$u_1 * u_2 = -4$.

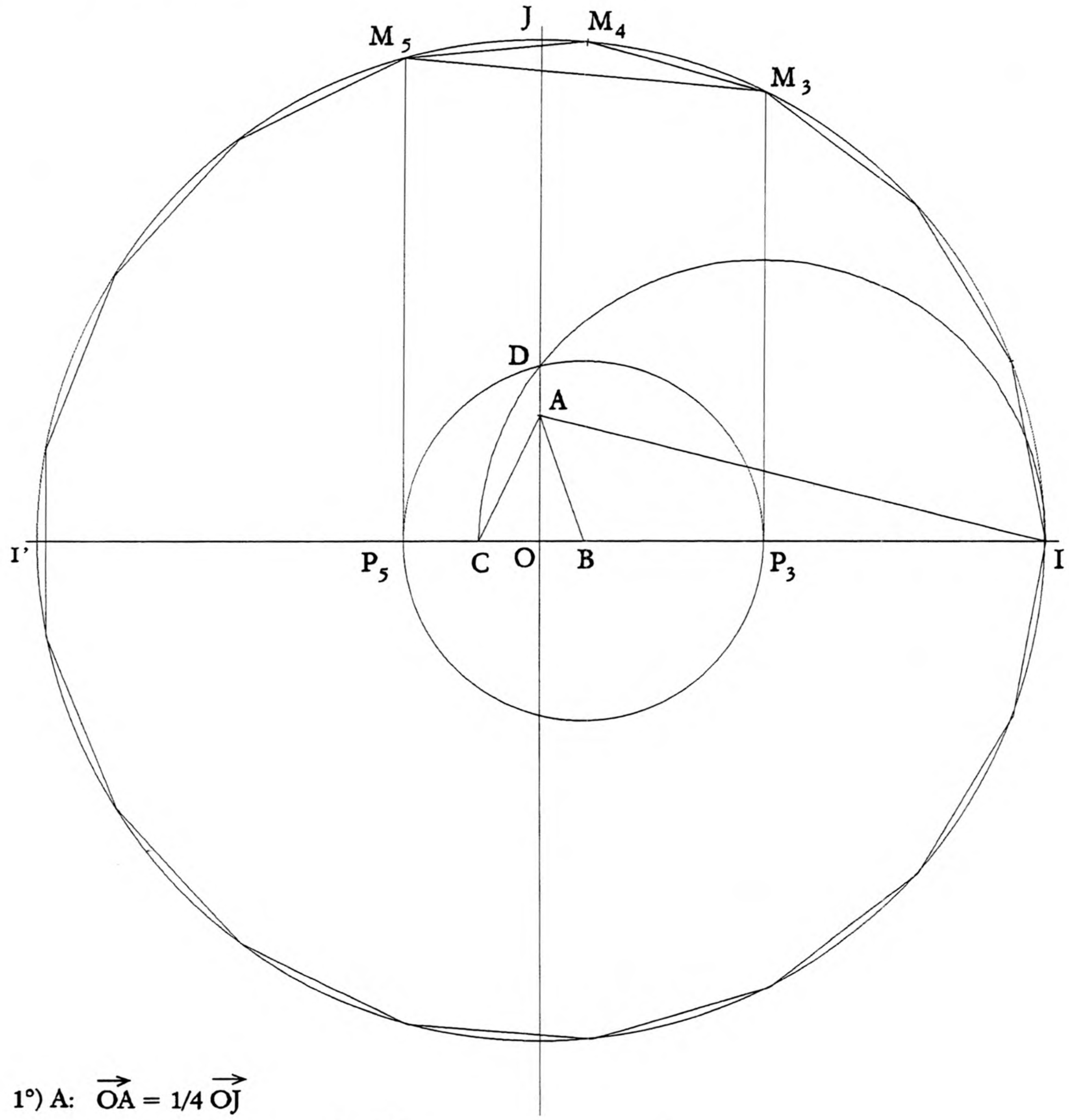
$v_1 * v_2 = -1$.

$v_3 * v_4 = -1$.

$w_1 * w_2 = v_3$.



PARTIE D : la construction de RICHEMONT



1°) A: $\overrightarrow{OA} = 1/4\ \overrightarrow{OJ}$

2°) B: $(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AB}) = 1/4\ (\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AI})$

3°) C: $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -\pi/4$

4°) D: Intersection de OJ avec le cercle de diamètre CI

5°) P_3 et P_5 : Intersection de I' I avec le cercle de centre B passant par D

6°) M_3 et M_5 : P_3 et P_5 sont les pieds des perpendiculaires abaissées de M_3 M_5 sur I' I.

7°) M_4 : La médiatrice de M_3M_5 coupe le cercle en M_4 .

En 1893, Richemont donnait cette construction.

Faire en Maple V, un programme utilisant la valeur exacte du cosinus de $\frac{2\pi}{17}$ et l'unité « GeoIrem » pour démontrer que la construction de Richemont est exacte.

IREM de Grenoble
Groupe calcul formel
1996

Le cosinus de 2π/17

PARTIE A

```
> P:=[seq(3^i mod 17,i=0..15)];
```

$$P := [1, 3, 9, 10, 13, 5, 15, 11, 16, 14, 8, 7, 4, 12, 2, 6]$$

On obtient bien tous les nombres de 1 à 15.

```
> theta:=2*Pi/17;
```

$$\theta := \frac{2}{17}\pi$$

```
> omega:=exp(I*theta);
```

$$\omega := \mathbf{e}^{(2/17 I \pi)}$$

Classement en une somme S.

Posons S = $\omega + \omega$ ^2 + ω ^3+......................+ ω ^15.
On sait que S vaut -1.

Classement en deux sommes u1 et u2.

```
> u1:=omega^(3^0 mod 17)+omega^(3^2 mod 17)+omega^(3^4 mod 17)+omega^(3^6 mod 17)+omega^(3^8 mod 17)+omega^(3^10 mod 17)+omega^(3^12 mod 17)+omega^(3^14 mod 17);
```

$$u1 := \mathbf{e}^{(2/17 I\pi)} + \left(\mathbf{e}^{(2/17 I\pi)}\right)^9 + \left(\mathbf{e}^{(2/17 I\pi)}\right)^{13} + \left(\mathbf{e}^{(2/17 I\pi)}\right)^{15} + \left(\mathbf{e}^{(2/17 I\pi)}\right)^{16} + \left(\mathbf{e}^{(2/17 I\pi)}\right)^8 + \left(\mathbf{e}^{(2/17 I\pi)}\right)^4 + \left(\mathbf{e}^{(2/17 I\pi)}\right)^2$$

```
> u2:=omega^(3^1 mod 17)+omega^(3^3 mod 17)+omega^(3^5 mod 17)+omega^(3^7 mod 17)+omega^(3^9 mod 17)+omega^(3^11 mod 17)+omega^(3^13 mod 17)+omega^(3^15 mod 17);
```

$$u2 := \left(\mathbf{e}^{(2/17 I\pi)}\right)^3 + \left(\mathbf{e}^{(2/17 I\pi)}\right)^{10} + \left(\mathbf{e}^{(2/17 I\pi)}\right)^5 + \left(\mathbf{e}^{(2/17 I\pi)}\right)^{11} + \left(\mathbf{e}^{(2/17 I\pi)}\right)^{14} + \left(\mathbf{e}^{(2/17 I\pi)}\right)^7 + \left(\mathbf{e}^{(2/17 I\pi)}\right)^{12} + \left(\mathbf{e}^{(2/17 I\pi)}\right)^6$$

```
> evalf(u1+u2);
```

$$-.9999999995 + .1\ 10^{-9} I$$

```
> evalf(u1*u2);
```

$$-3.999999999 - .1268465843\ 10^{-8} I$$

On en conclut que u1+u2=-1 et que u1*u2=-4.

Calcul de u1 et u2.

```
> Sol:=solve(Z^2+Z-4=0,Z);
```

$$Sol := -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{17}, -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{17}$$

```
> evalf(u1);evalf(u2);
```

$$1.561552813 + .8\ 10^{-9}\ I$$

$$-2.561552812 + .5\ 10^{-9}\ I$$

```
> if evalb(evalf(Sol[1])>0) then u1:=Sol[1];u2:=Sol[2] else u1:=Sol[2];u2:=Sol[1] fi;
```

$$u1 := -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{17}$$

$$u2 := -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{17}$$

Classement en quatre sommes : v1, v2, v3 et v4.

```
> v1:=omega^(3^0 mod 17)+omega^(3^4 mod 17)+omega^(3^8 mod 17)+omega^(3^12 mod 17);
```

$$v1 := e^{(2/17\,I\,\pi)} + \left(e^{(2/17\,I\,\pi)}\right)^{13} + \left(e^{(2/17\,I\,\pi)}\right)^{16} + \left(e^{(2/17\,I\,\pi)}\right)^{4}$$

```
> v2:=omega^(3^2 mod 17)+omega^(3^6 mod 17)+omega^(3^10 mod 17)+omega^(3^14 mod 17);
```

$$v2 := \left(e^{(2/17\,I\,\pi)}\right)^{9} + \left(e^{(2/17\,I\,\pi)}\right)^{15} + \left(e^{(2/17\,I\,\pi)}\right)^{8} + \left(e^{(2/17\,I\,\pi)}\right)^{2}$$

```
> evalf(v1*v2);
```

$$-.9999999999 - .3415498554\ 10^{-9}\ I$$

Ainsi v1+v2=u1 et v1*v2=-1.

Calculons v1 et v2.

```
> Sol:=solve(Z^2-u1*Z-1=0,Z);
```

$$Sol := -\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{17}+\frac{1}{4}\sqrt{34-2\sqrt{17}}, -\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{17}-\frac{1}{4}\sqrt{34-2\sqrt{17}}$$

```
> evalf(v1);evalf(v2);
```

$$2.049481178 + .7\ 10^{-9}\ I$$

$$-.4879283648$$

```
> if evalb(evalf(Sol[1])>0) then v1:=Sol[1];v2:=Sol[2] else v1:=Sol[2];v2:=Sol[1] fi;
```

$$v1 := -\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{17}+\frac{1}{4}\sqrt{34-2\sqrt{17}}$$

$$v2 := -\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{17}-\frac{1}{4}\sqrt{34-2\sqrt{17}}$$

```
> v3:=omega^(3^1 mod 17)+omega^(3^5 mod 17)+omega^(3^9 mod 17)+omega^(3^13 mod 17);
```

$$v3 := \left(e^{(2/17\,I\,\pi)}\right)^{3} + \left(e^{(2/17\,I\,\pi)}\right)^{5} + \left(e^{(2/17\,I\,\pi)}\right)^{14} + \left(e^{(2/17\,I\,\pi)}\right)^{12}$$

```
> v4:=omega^(3^3 mod 17)+omega^(3^7 mod 17)+omega^(3^11 mod 17)+omega^(3^15 mod 17);
```

$$v4 := \left(e^{(2/17\,I\,\pi)}\right)^{10} + \left(e^{(2/17\,I\,\pi)}\right)^{11} + \left(e^{(2/17\,I\,\pi)}\right)^{7} + \left(e^{(2/17\,I\,\pi)}\right)^{6}$$

```
> evalf(v3*v4);
```

$$-1.000000001 - .4282306471\ 10^{-9}\ I$$

Ainsi v3+v4=u2 et v3*v4=-1.

Calcul de v3 et v4.

```
> Sol:=solve(Z^2-u2*Z-1=0,Z);
```

$$Sol := -\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{17}+\frac{1}{4}\sqrt{34+2\sqrt{17}},\ -\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{17}-\frac{1}{4}\sqrt{34+2\sqrt{17}}$$

```
> evalf(v3);evalf(v4);
```

$$.3441507317+.1\ 10^{-9}\ I$$

$$-2.905703544-.4\ 10^{-9}\ I$$

```
> if evalb(evalf(Sol[1])>0) then v3:=Sol[1];v4:=Sol[2] else v3:=Sol[2];v4:=Sol[1] fi;
```

$$v3 := -\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{17}+\frac{1}{4}\sqrt{34+2\sqrt{17}}$$

$$v4 := -\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{17}-\frac{1}{4}\sqrt{34+2\sqrt{17}}$$

<u>Classement en huit sommes : w1, w2 ...</u>

Les autres seront inutiles.

```
> w1:=omega^(3^0 mod 17)+omega^(3^8 mod 17);
```

$$w1 := \mathbf{e}^{(2/17\,I\,\pi)}+\left(\mathbf{e}^{(2/17\,I\,\pi)}\right)^{16}$$

```
> w2:=omega^(3^4 mod 17)+omega^(3^12 mod 17);
```

$$w2 := \left(\mathbf{e}^{(2/17\,I\,\pi)}\right)^{13}+\left(\mathbf{e}^{(2/17\,I\,\pi)}\right)^{4}$$

```
> evalf(w1*w2-v3);
```

$$.1\ 10^{-8}+.3690734382\ 10^{-10}\ I$$

Ainsi w1+w2 = v1 et w1*w2=v3.

```
> Sol:=solve(Z^2-v1*Z+v3=0,Z);
```

$$Sol := -\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\%1+\frac{1}{8}\sqrt{17}+\frac{1}{8}\sqrt{68-6\,\%1+12\sqrt{17}-2\sqrt{34-2\sqrt{17}}\,\sqrt{17}},$$

$$-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\%1+\frac{1}{8}\sqrt{17}-\frac{1}{8}\sqrt{68-6\,\%1+12\sqrt{17}-2\sqrt{34-2\sqrt{17}}\,\sqrt{17}}$$

$$\%1 := \sqrt{34-2\sqrt{17}}$$

```
> evalf(w1);evalf(w2);
```

$$1.864944459+.2\ 10^{-9}\ I$$

$$.1845367191$$

```
> combine(convert(w1,trig));
```

$$2\cos\left(\frac{2}{17}\pi\right)$$

```
> if evalf(Sol[1])>1 then w1:=Sol[1];w2:=Sol[2] else w1:=Sol[2];w2:=Sol[1] fi;
```

$w1 :=$

$$-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\sqrt{34-2\sqrt{17}}+\frac{1}{8}\sqrt{17}+\frac{1}{8}\sqrt{68-6\sqrt{34-2\sqrt{17}}+12\sqrt{17}-2\sqrt{34-2\sqrt{17}}\,\sqrt{17}}$$

$w2 :=$

$$-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\sqrt{34-2\sqrt{17}}+\frac{1}{8}\sqrt{17}-\frac{1}{8}\sqrt{68-6\sqrt{34-2\sqrt{17}}+12\sqrt{17}-2\sqrt{34-2\sqrt{17}}\,\sqrt{17}}$$

```
> CC:=w1/2;
```

$$CC := -\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\sqrt{34-2\sqrt{17}}+\frac{1}{16}\sqrt{17}$$
$$+\frac{1}{16}\sqrt{68-6\sqrt{34-2\sqrt{17}}+12\sqrt{17}-2\sqrt{34-2\sqrt{17}}\sqrt{17}}$$

```
> evalf(CC,1000);
```

```
.93247222940435580457311589182156338626258777794511692824835001186053604656 9\
    644498128074712850429850975199317771955063603452225595829170285957782296811\
    882572852752223126156786390988976359336907137353108178933440529500976614875\
    172209745612065331096212571185836827570609893334637824341946015475517591411\
    374306059853125157950162901355246901854608551549771507233736352576288718392\
    915430558314345656535376778470250004424814764590070202156928946276974431027\
    301553628124028004384400184137920259749613427633596999061465584689217348222\
    771691813082639247262555848964736719289332125597966775166152117022037643455\
    380666048921404419409585898644601040921898872726306103439068503136226261376\
    350886337758087611595462006474266544539252128989920906307535267506833589805\
    570379486734745520302271738892038222994117083157341646229263579827865806863\
    074767134052796350542627693617182898341622985434256960539259959712220306111\
    498828659333142758319907493520655496861219808000647596927853420452370260815\
    594742996534130014380097 3
```

```
> evalf(cos(theta),1000);
```

```
.93247222940435580457311589182156338626258777794511692824835001186053604656 9\
    644498128074712850429850975199317771955063603452225595829170285957782296811\
    882572852752223126156786390988976359336907137353108178933440529500976614875\
    172209745612065331096212571185836827570609893334637824341946015475517591411\
    374306059853125157950162901355246901854608551549771507233736352576288718392\
    915430558314345656535376778470250004424814764590070202156928946276974431027\
    301553628124028004384400184137920259749613427633596999061465584689217348222\
    771691813082639247262555848964736719289332125597966775166152117022037643455\
    380666048921404419409585898644601040921898872726306103439068503136226261376\
    350886337758087611595462006474266544539252128989920906307535267506833589805\
    570379486734745520302271738892038222994117083157341646229263579827865806863\
    074767134052796350542627693617182898341622985434256960539259959712220306111\
    498828659333142758319907493520655496861219808000647596927853420452370260815\
    594742996534130014380097 3
```

C'est bien le même nombre.

PARTIE B : construction d'un 17-gone régulier

```
> read `geometri.m`;
```

Construction géométrique des solutions d'une équation du second degré dont on donne la somme et le produit des racines.

```
> Solution_equation_second_degre:=proc(s,p) local Omega,C,Inter,S1,S2,Resultat;
    Omega:=Intersection(Mediatrice(Point(0,1),Point(0,p)),Droite(1,0,-s/2));
    C:=Cercle(Omega,Distance(Omega,Point(0,1)));
    Inter:=Intersection(C,Droite(0,1,0));
    S1:=Objet(1,Inter);
    S2:=Objet(2,Inter);
    Resultat:=[S1,S2];
    RETURN(Resultat);
  end:
```

Donnons un exemple avec s=2 et p=-3. On doit obtenir -1 et 3 comme solutions.

```
> s:=2;p:=-3;
```

$$s := 2$$

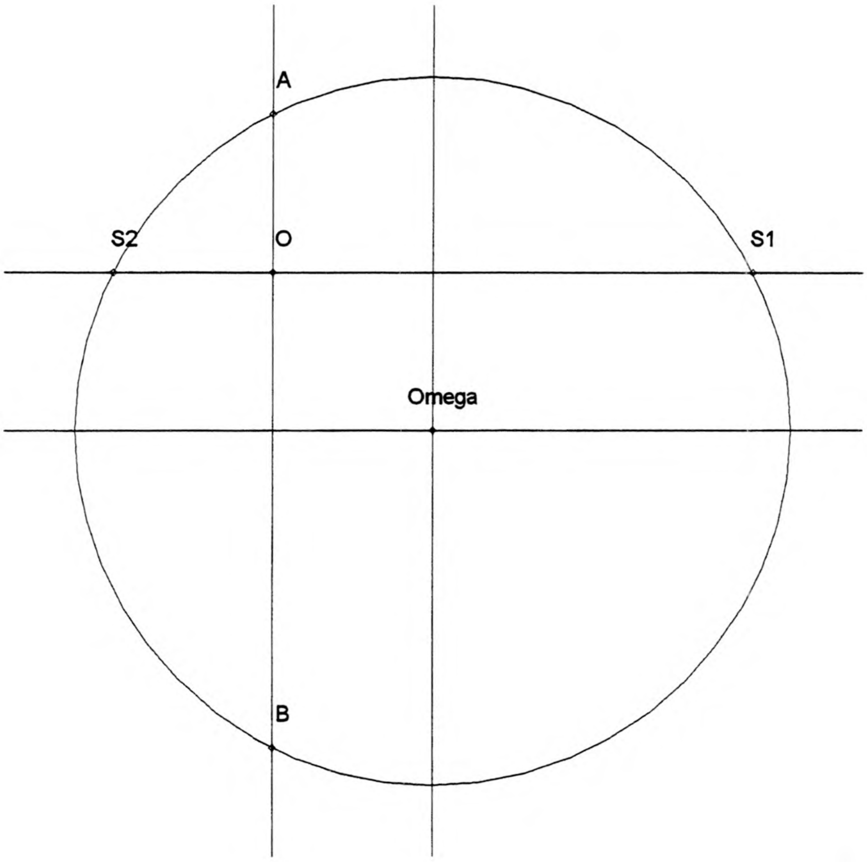
$$p := -3$$

```
> Sol:=Solution_equation_second_degre(s,p);
```

$$Sol := [poinT, poinT]$$

Dessinons cette figure.

```
> OO:=Point(0,0):d1:=Droite(1,0,0):d2:=Droite(0,1,0):A:=Point(0,1):B:=Point(0,p):Delta1:=Medi
  atrice(A,B):Delta2:=Droite(1,0,-s/2):Omega:=Intersection(Delta1,Delta2):C:=Cercle(Omega,Dist
  ance(Omega,A)):Inter:=Intersection(C,Droite(0,1,0)):S1:=Objet(1,Inter):S2:=Objet(2,Inter):
> Colorier(d1,Noir):Colorier(d2,Noir):Colorier(Delta1,Bleu):Colorier(Delta2,Bleu):Colorier(C,Ro
  uge):
> Nommer(OO,`O`):Nommer(A,'A'):Nommer(B,'B'):Nommer(S1,'S1'):Nommer(S2,'S2'):Nommer(
  Omega,'Omega'):
> Fig:=Figure(OO,d1,d2,A,B,Delta1,Delta2,Omega,C,S1,S2) : Colorier(Fig,Noir): # Noir pour
  impression monochrome
> Dessiner(Fig);
```




```
> Abscisse(S1);Abscisse(S2);
```

3

-1

Ce sont bien les résultats attendus.

```
> s:='s':p:='p':
> Sol:=Solution_equation_second_degre(s,p);
```

$$Sol := [poinT, poinT]$$

```
> Abscisse(op(1,Sol))+Abscisse(op(2,Sol));
```

$$s$$

```
> expand(Abscisse(op(1,Sol))*Abscisse(op(2,Sol)));
```

$$p$$

Ceci pose un problème. En effet il n'y a pas toujours de solution.
Nous pouvons simplement affirmer que, si les abscisses des deux points de Sol sont réelles, ce sont bien les nombres dont la somme est s et le produit p.

Construction du 17-gone régulier.

```
> S:=Solution_equation_second_degre(-1,-4);
```

$$S := [poinT, poinT]$$

```
> U1:=S[1];U2:=S[2];
```

$$U1 := poinT$$

$$U2 := poinT$$

```
> S:=Solution_equation_second_degre(Abscisse(U1),-1);
```

$$S := [poinT, poinT]$$

```
> V1:=S[1];V2:=S[2];
```

$$V1 := poinT$$

$$V2 := poinT$$

```
> S:=Solution_equation_second_degre(Abscisse(U2),-1);
```

$$S := [poinT, poinT]$$

```
> V3:=S[1];V4:=S[2];
```

$$V3 := poinT$$

$$V4 := poinT$$

```
> S:=Solution_equation_second_degre(Abscisse(V1),Abscisse(V3));
```

$$S := [poinT, poinT]$$

```
> W1:=S[1];
```

$$\mathrm{W1} := poinT$$

```
> T:=Cercle(Point(0,0),1);
```

$$T := cerclE$$

```
> P:=Milieu(Point(0,0),W1);
```

$$P := poinT$$

```
> Abscisse(P);
```

$$-\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\sqrt{17}+\frac{1}{16}\sqrt{34-2\sqrt{17}}$$
$$+\frac{1}{16}\sqrt{12\sqrt{17}+68-7\sqrt{34+2\sqrt{17}}-\sqrt{17}\sqrt{34+2\sqrt{17}}}$$

```
> Inter:=Intersection(T,Droite(1,0,-Abscisse(P)));
```

$$Inter := figurE$$

```
> if evalf(Ordonnee(Objet(1,Inter)))>0 then SJ1:=Objet(1,Inter) else SJ1:=Objet(2,Inter) fi;
```

$$SJ1 := poinT$$

```
> S:=Point(evalf(Abscisse(SJ1)),evalf(Ordonnee(SJ1)));
```

$$S := poinT$$

```
> Abscisse(S);Ordonnee(S);
```

$$.9324722293$$

$$.3612416663$$

```
> r:=Rotation(Point(0,0),Angle(Vecteur(1,0),Vecteur(Point(0,0),S)));
```

$$r := application\_affinE$$

```
> S:=Point(1,0);SS:=S;
```

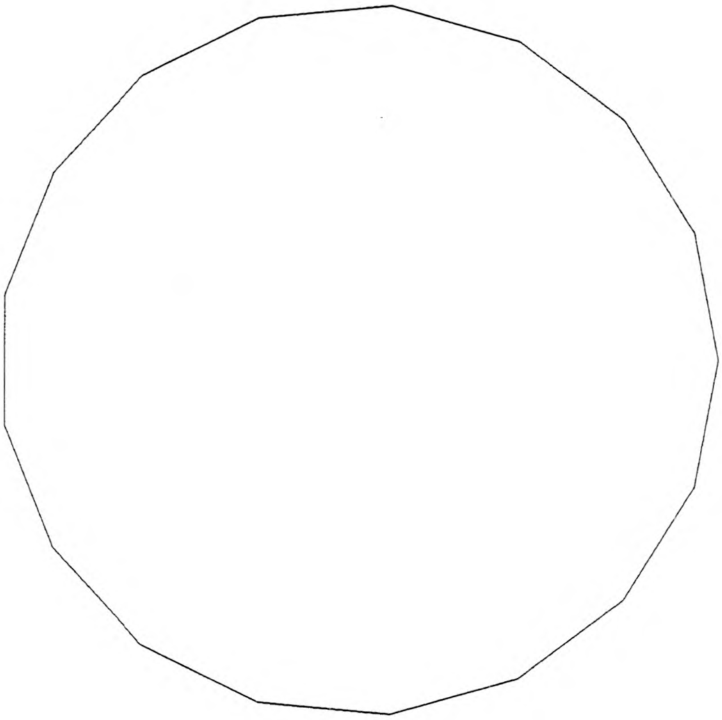
$$S := poinT$$

$SS := poinT$

```
> for i from 1 to 16 do S:=Image(r,S);SS:=SS,S od:
> P17:=Polygone(SS);
```

$P17 := polygonE$

```
> Colorier(P17,Noir):Dessiner(P17);
```



Il paraît que Gauss chercha longtemps une construction "régle et compas" du 17-gone régulier. Des idées voisines de celles présentées ici furent développées par K. Von Staudt en 1842. Une autre construction fort élégante, mais aussi fort compliquée, fut proposée par H.W. Richemont en 1893. Pour cela, voir le livre "Théorie des corps. La règle et le compas" de J-C Carrega (Ed Hermann) page 61 et suivantes.

PARTIE C : démonstration des formules

Les précedents calculs de u1, u2, v1, v2, v3, v4, w1, w2 ont été effectués en flottants.
Essayons de faire les calculs exacts.

1°) ω^1+ω^2+ .... + ω^15=-1

```
> expand((1+u1+u2)*(1-omega));
```

$$0$$

2°) u1*u2=-4.

```
> expand((4+u1*u2)*(1-omega));
```

$$0$$

3°) v1*v2=-1

```
> expand((1+v1*v2)*(1-omega));
```

$$0$$

4°) v3*v4=-1

```
> expand((1+v3*v4)*(1-omega));
```

$$0$$

5°) w1*w2=v3.

```
> factor(expand(w1*w2-v3));
```

$$0$$

Sachant que ω n'est pas égal à 1 on en retrouve bien les résultats précédents.

Maple ne sait pas trouver directement que : (1+a^1+a^2+................+a^16)= (1-a^17)/(1-a).

```
> A:=sum('a^i','i'=0..16);
```

$$A := 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + a^6 + a^7 + a^8 + a^9 + a^{10} + a^{11} + a^{12} + a^{13} + a^{14} + a^{15} + a^{16}$$

```
> simplify(A);
```

$$1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + a^6 + a^7 + a^8 + a^9 + a^{10} + a^{11} + a^{12} + a^{13} + a^{14} + a^{15} + a^{16}$$

```
> factor(A);
```

$$1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + a^6 + a^7 + a^8 + a^9 + a^{10} + a^{11} + a^{12} + a^{13} + a^{14} + a^{15} + a^{16}$$

Il faut faire :

```
> expand(A*(1-a));
```

$$1 - a^{17}$$

PARTIE D : la construction de Richemont.

```
> II:=Point(1,0);
```

$$II := poinT$$

```
> J:=Point(0,1);
```

$$J := poinT$$

```
> A:=Point(0,1/4);
```

$$A := poinT$$

```
> OO:=Point(0,0);
```

$$OO := poinT$$

```
> BB:=Intersection(Droite(OO,II),Bissectrice(OO,A,II));
```

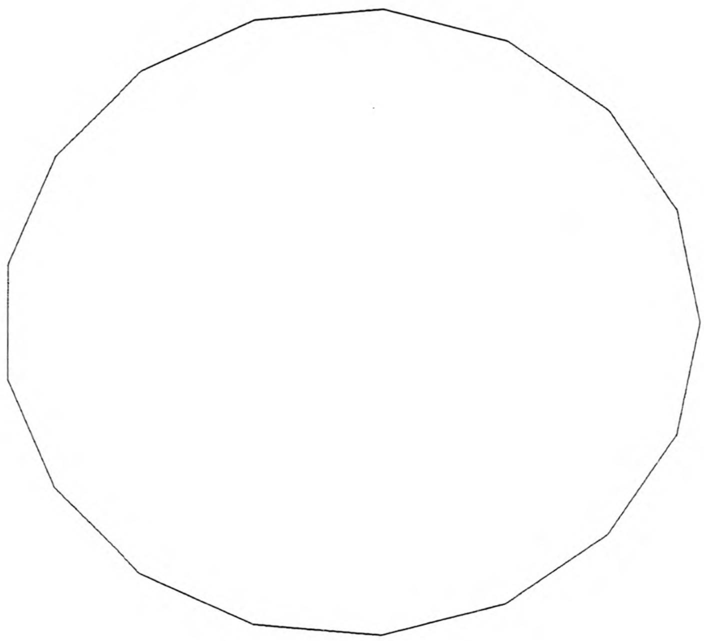
$$BB := poinT$$

$SS := poinT$

```
> for i from 1 to 16 do S:=Image(r,S);SS:=SS,S od:
> P17:=Polygone(SS);
```

$P17 := polygonE$

```
> Colorier(P17,Noir):Dessiner(P17);
```



Il paraît que Gauss chercha longtemps une construction "régle et compas" du 17-gone régulier. Des idées voisines de celles présentées ici furent développées par K. Von Staudt en 1842. Une autre construction fort élégante, mais aussi fort compliquée, fut proposée par H.W. Richemont en 1893. Pour cela, voir le livre "Théorie des corps. La règle et le compas" de J-C Carrega (Ed Hermann) page 61 et suivantes.

PARTIE C : démonstration des formules

Les précedents calculs de u1, u2, v1, v2, v3, v4, w1, w2 ont été effectués en flottants.
Essayons de faire les calculs exacts.

```
> expand(cos(5*x));
```

$$16\cos(x)^5 - 20\cos(x)^3 + 5\cos(x)$$

```
> C5:=16*CC^5-20*CC^3+5*CC;
```

$$C5 := 16\left(-\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\%1+\frac{1}{16}\sqrt{17}+\frac{1}{16}\%2\right)^5 - 20\left(-\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\%1+\frac{1}{16}\sqrt{17}+\frac{1}{16}\%2\right)^3 - \frac{5}{16} + \frac{5}{16}\%1 + \frac{5}{16}\sqrt{17} + \frac{5}{16}\%2$$

$$\%1 := \sqrt{34-2\sqrt{17}}$$

$$\%2 := \sqrt{68-6\,\%1+12\sqrt{17}-2\sqrt{34-2\sqrt{17}}\,\sqrt{17}}$$

```
> Delta:=C5-Abscisse(P5);
```

$$\Delta := 16\left(-\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\%3+\frac{1}{16}\sqrt{17}+\frac{1}{16}\%4\right)^5 - 20\left(-\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\%3+\frac{1}{16}\sqrt{17}+\frac{1}{16}\%4\right)^3 - \frac{5}{16} + \frac{5}{16}\%3 + \frac{5}{16}\sqrt{17} + \frac{5}{16}\%4$$

$$+\frac{17}{16}\,\frac{-16\sqrt{2}+2\sqrt{\%2}\,\sqrt{17+\sqrt{17}}+\sqrt{\%2}\,\sqrt{17}\,\sqrt{2}+\sqrt{\%2}\,\sqrt{2}}{\sqrt{17+\sqrt{17}}\,(34+\%1)}$$

$$\%1 := \sqrt{17}\,\sqrt{2}\,\sqrt{17+\sqrt{17}}$$

$$\%2 := 2\,\%1 - 12\sqrt{17} - 6\sqrt{2}\,\sqrt{17+\sqrt{17}} + 68$$

$$\%3 := \sqrt{34-2\sqrt{17}}$$

$$\%4 := \sqrt{68-6\,\%3+12\sqrt{17}-2\sqrt{34-2\sqrt{17}}\,\sqrt{17}}$$

```
> evalf(Delta);
```

$$-.30\ 10^{-8}$$

```
> factor(Delta);
```

$$0$$

L'abscisse de P5 est bien le cosinus de 5*2*Pi/17.

Ceci prouve bien que les points P3 et P5 sont les projections des sommets M3 et M5 du 17-gone régulier.

```
>
```

IREM de Grenoble
Groupe Calcul Formel

UN CUBE COUPÉ PAR UN PLAN

avril 1997

Un problème de géométrie dans l'espace.
Le travail avec MapleV consiste à créer des primitives de géométrie dans l'espace le plus simplement possible, afin de traiter le problème.

```
> restart;
> Point:=proc(x,y,z) local poinT;
     poinT[x_]:=x;
    poinT[y_]:=y;
    poinT[z_]:=z;
    RETURN(poinT);
  end:
> Abscisse:=proc(O);
    RETURN(O[x_]);
  end:

> Ordonnee:=proc(O);
    RETURN(O[y_]);
  end:
> Cote:=proc(O);
    RETURN(O[z_]);
  end:
> Vt:=proc(x,y,z) local vecteuR;
    vecteuR[x_]:=x;
    vecteuR[y_]:=y;
    vecteuR[z_]:=z;
    RETURN(vecteuR);
  end:
> Vecteur:=proc() local Resultat;
    if nargs=3 then Resultat:=Vt(args)
   else
  Resultat:=Vt(Abscisse(args[2])-Abscisse(args[1]),Ordonnee(args[2])-Ordonnee(args[1]),Cote(ar
  gs[2])-Cote(args[1]));
    fi;
    RETURN(Resultat);
  end:
> Coordonnees:=proc(O) local Resultat;
    Resultat:=[Abscisse(O),Ordonnee(O),Cote(O)];
    RETURN(Resultat);
  end:
```

```
> Produit_vectoriel:=proc(V1,V2) local X,Y,Z,Resultat;
   X:=Ordonnee(V1)*Cote(V2)-Ordonnee(V2)*Cote(V1);
   Y:=Cote(V1)*Abscisse(V2)-Cote(V2)*Abscisse(V1);
   Z:=Abscisse(V1)*Ordonnee(V2)-Abscisse(V2)*Ordonnee(V1);
    Resultat:=Vecteur(X,Y,Z);
    RETURN(Resultat);
  end:
> Plan:=proc(A,B,C) local plaN,V;
    V:=Produit_vectoriel(Vecteur(A,B),Vecteur(A,C));
    plaN[a_]:=Abscisse(V);
    plaN[b_]:=Ordonnee(V);
    plaN[c_]:=Cote(V);
    plaN[d_]:=-(plaN[a_]*Abscisse(A)+plaN[b_]*Ordonnee(A)+plaN[c_]*Cote(A));
    RETURN(plaN);
  end:
> Coeff1:=proc(P) local Resultat;
    Resultat:=P[a_];
    RETURN(Resultat);
  end:
> Coeff2:=proc(P) local Resultat;
    Resultat:=P[b_];
    RETURN(Resultat);
  end:
> Coeff3:=proc(P) local Resultat;
    Resultat:=P[c_];
    RETURN(Resultat);
  end:
> Coeff4:=proc(P) local Resultat;
    Resultat:=P[d_];
    RETURN(Resultat);
  end:
> Equation:=proc(P) local Resultat;
   global x,y,z;
    x:='x';y:='y';z:='z';
    Resultat:=Coeff1(P)*x+Coeff2(P)*y+Coeff3(P)*z+Coeff4(P)=0;
    RETURN(Resultat);
  end:
> Droite:=proc(A,B) local droitE;
    droitE[P1_]:=A;
    droitE[P2_]:=B;
    RETURN(droitE);
  end:

> Point1:=proc(D) local Resultat;
    Resultat:=D[P1_];
    RETURN(Resultat);
```

```
end:
> Point2:=proc(D) local Resultat;
   Resultat:=D[P2_];
   RETURN(Resultat);
end:
> Intersection:=proc(P,D) local Resultat,Sol;
global x,y,z,l;
x='x';y:='y';z:='z';l:='l';
Sol:=solve({Equation(P),x=l*(Abscisse(Point2(D))-Abscisse(Point1(D)))+Abscisse(Point1(D)),y
=l*(Ordonnee(Point2(D))-Ordonnee(Point1(D)))+Ordonnee(Point1(D)),z=l*(Cote(Point2(D))-C
ote(Point1(D)))+Cote(Point1(D))},{x,y,z,l});
assign(Sol);
Resultat:=Point(x,y,z);
RETURN(Resultat);
end:

> Mul:=proc(V,k) local Resultat;
   Resultat:=Vecteur(k*Abscisse(V),k*Ordonnee(V),k*Cote(V));
   RETURN(Resultat);
end:
> Extremite:=proc(P,V) local Resultat;
   Resultat:=Point(Abscisse(P)+Abscisse(V),Ordonnee(P)+Ordonnee(V),Cote(P)+Cote(V));
end:
> A:=Point(0,0,0);
```

$$A := poinT$$

```
> B:=Point(72,0,0):
> C:=Point(72,72,0):
> DD:=Point(0,72,0):
> Ap:=Point(0,0,72):
> Bp:=Point(72,0,72):
> Cp:=Point(72,72,72):
> Dp:=Point(0,72,72):
> P:=Extremite(Bp,Mul(Vecteur(Bp,Cp),1/4));
```

$$P := poinT$$

```
> Q:=Extremite(C,Mul(Vecteur(C,Cp),3/4)):
> R:=Extremite(DD,Mul(Vecteur(DD,Dp),1/4)):
> Coordonnees(P);
```

$$[72, 18, 72]$$

```
> Coordonnees(Q);
```

$$[72, 72, 54]$$

```
> Coordonnees(R);
```

$$[0, 72, 18]$$

```
> PP:=Plan(P,Q,R);
```

$$PP := plaN$$

```
> S:=Intersection(PP,Droite(A,Ap));
```

$$S := poinT$$

```
> Coordonnees(S);
```

$$[0, 0, 42]$$

```
> T:=Intersection(PP,Droite(Ap,Bp));
```

$$T := poinT$$

```
> Coordonnees(T);
```

$$[60, 0, 72]$$

```
> F1:=[Coordonnees(A),Coordonnees(B),Coordonnees(C),Coordonnees(DD)];
```

$$F1 := [[0, 0, 0], [72, 0, 0], [72, 72, 0], [0, 72, 0]]$$

```
> F2:=[Coordonnees(B),Coordonnees(C),Coordonnees(Q),Coordonnees(P),Coordonnees(Bp)];
```

$$F2 := [[72, 0, 0], [72, 72, 0], [72, 72, 54], [72, 18, 72], [72, 0, 72]]$$

```
> F3:=[Coordonnees(C),Coordonnees(DD),Coordonnees(R),Coordonnees(Q)];
```

$$F3 := [[72, 72, 0], [0, 72, 0], [0, 72, 18], [72, 72, 54]]$$

```
> F4:=[Coordonnees(DD),Coordonnees(A),Coordonnees(S),Coordonnees(R)];
```

$$F4 := [[0, 72, 0], [0, 0, 0], [0, 0, 42], [0, 72, 18]]$$

```
> F5:=[Coordonnees(A),Coordonnees(B),Coordonnees(Bp),Coordonnees(T),Coordonnees(S)];
```

$$F5 := [[0, 0, 0], [72, 0, 0], [72, 0, 72], [60, 0, 72], [0, 0, 42]]$$

```
> F6:=[Coordonnees(P),Coordonnees(Q),Coordonnees(R),Coordonnees(S),Coordonnees(T)];
```

$$F6 := [[72, 18, 72], [72, 72, 54], [0, 72, 18], [0, 0, 42], [60, 0, 72]]$$

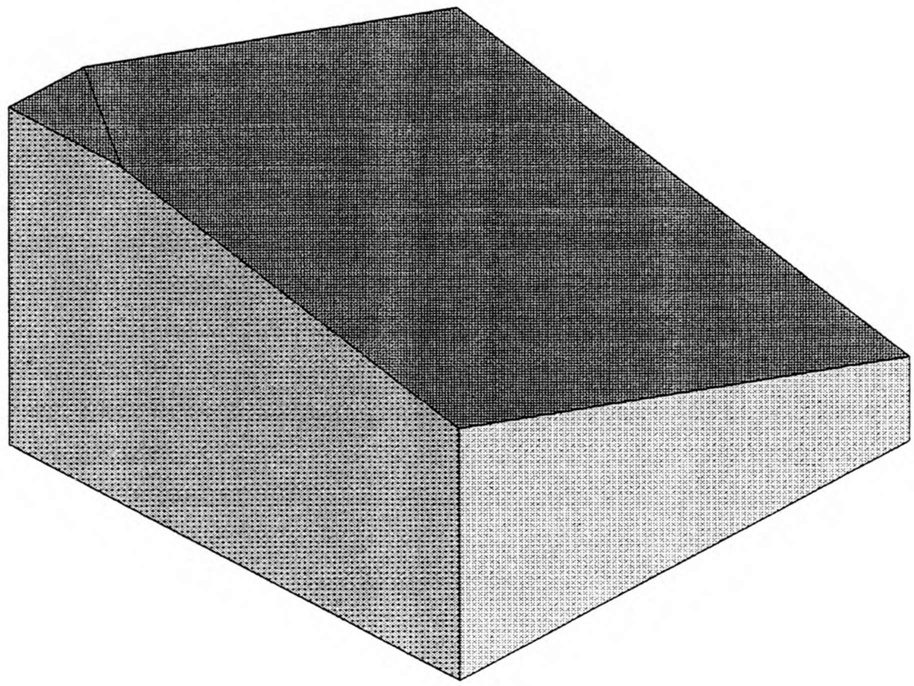
```
> F7:=[Coordonnees(Bp),Coordonnees(P),Coordonnees(T)];
```

$$F7 := [[72, 0, 72], [72, 18, 72], [60, 0, 72]]$$

```
> FF:=F1,F2,F3,F4,F5,F6,F7;
```

$$\begin{aligned}FF := {} & [[0, 0, 0], [72, 0, 0], [72, 72, 0], [0, 72, 0]],\\ & [[72, 0, 0], [72, 72, 0], [72, 72, 54], [72, 18, 72], [72, 0, 72]],\\ & [[72, 72, 0], [0, 72, 0], [0, 72, 18], [72, 72, 54]],\\ & [[0, 72, 0], [0, 0, 0], [0, 0, 42], [0, 72, 18]],\\ & [[0, 0, 0], [72, 0, 0], [72, 0, 72], [60, 0, 72], [0, 0, 42]],\\ & [[72, 18, 72], [72, 72, 54], [0, 72, 18], [0, 0, 42], [60, 0, 72]],\\ & [[72, 0, 72], [72, 18, 72], [60, 0, 72]]\end{aligned}$$

```
> PLOT3D(POLYGONS(FF),STYLE(PATCH));
```



[>