Le vrai et le faux en mathématiques au collège et au lycée

Michèle GANDIT - Marie Claire MASSE-DEMONGEOT

Irem de GRENOBLE

ISBN 2-903815-35-6

Prix : 40 F

Edition octobre 1996

Nos élèves, nos collègues qui ont participé aux stages que nous avons animés en 94/95 et 95/96, sont à l'origine de notre questionnement et nous ont fourni le support de notre réflexion.

Marc LEGRAND, chercheur en didactique à l'UJF de Grenoble, nous a aidé dans une lecture possible de la réalité qui donnerait du sens à nos choix.

Claude MOSER, directeur de L'IREM, a répondu à nos nombreuses questions sur logique mathématique et équations et nous a permis de travailler à cette brochure dans un contexte favorable.

Raymond CHUZEVILLE, Claire HELMSTETTER, Jean HOUDEBINE, Micheline PROUILHAC, Odile VESLIN, par leurs remarques critiques et amicales, nous ont incitées à remettre maintes et maintes fois notre texte sur le métier.

Qu'ils en soient tous remerciés.

Un enseignant, dans l'exercice de sa profession, s'appuie sur ses représentations de la discipline, de l'apprentissage, de l'école, et aussi, même si c'est de façon moins explicite, sur certaines valeurs concernant les rapports humains et la vie en société.

Dans le texte qui suit, nous expliquons nos choix et leurs raisons d'être, issues de ces représentations et valeurs. Notre entrée se fait par l'image que nous avons des mathématiques. Le reste n'est pas ignoré et apparaît tout au long du texte dans la recherche d'une cohérence entre nos convictions et les conditions de travail, de vie, que nous créons dans la classe. Nous imaginons que, dans ce cheminement qui nous est personnel, le lecteur puisse trouver ce qui sera "bon" pour lui.

Toute forme d'enseignement est contraignante. Dans la classe ces contraintes ne sont pas niées, elles sont soulignées quand c'est possible. Nous essayons, et ce, dès le début de l'année, d'associer les élèves aux raisons mathématiques, scolaires, sociales, humanistes qui nous animent, afin que les efforts et les détours que nous leur demandons trouvent quelque légitimité à leurs yeux : nous passons ainsi contrat avec eux. On le verra, nos choix sous-entendent une implication importante de l'élève et du professeur.

Puisqu'il s'agit de choix, ceux-ci peuvent être discutés. Nous serions heureuses de le faire avec vous, soit lors de stages, soit sous forme épistolaire si vous nous adressez vos remarques à l'IREM.

Sommaire

Pour commencer

Entendu dans une classe de première S :

Sam : - Soit I le point d'intersection des trois droites...

Marielle : - Mais tu ne sais pas qu'elles sont concourantes !

Sam : - Mais si ! Je sais qu'elles sont concourantes, on me demande de le démontrer, c'est que c'est vrai.

Qui plus est, il n'a pas tort. Son expérience déjà grande des exercices mathématiques lui a appris que "si on demande de démontrer, c'est que c'est vrai". Cette "logique scolaire" est très rarement mise en défaut. Mais Sam est mal parti pour sa démonstration. Marielle qui, elle, a bien intégré le fonctionnement des mathématiques, sait qu'elle doit commencer en faisant comme si elle ne savait pas que les droites étaient concourantes, malgré ce qu'elle voit sur le dessin, et malgré cet indice scolaire auquel elle se fie elle aussi.

En terminale ES, un exercice de probabilité, extrait d'un sujet de bac, est proposé en devoir surveillé. En voici le début : "Une classe de 36 élèves âgés de 16, 17, 18 ans comprend 22 garçons dont 18 âgés de 17 ans et 3 âgés de 18 ans. On dénombre aussi 6 filles âgées de 18 ans et une seule a 17 ans."

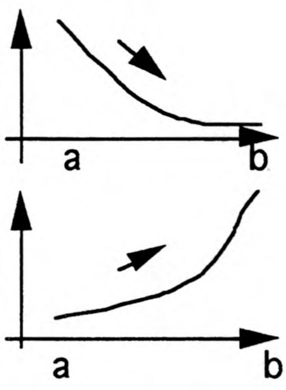
Il s'agissait alors, dans un premier temps, de compléter un tableau déjà dressé. Trois élèves n'ont pas réussi, en voici un exemple :

	filles	garçons	totaux
16 ans			*8 36-28=8*
17 ans	*1*	*18*	*19*
18 ans	*6*	*3*	*9*
totaux	*7*	*21*	*36 normalement*

On peut se demander pourquoi ces élèves n'ont pas rempli un tableau aussi simple. Une explication plausible se trouve peut-être auprès de celui qui, le jour du devoir, m'a demandé en aparté comment il se faisait que le total des garçons dont on donnait l'âge était de 21, et non 22 comme annoncé. Je lui ai suggéré qu'un garçon devait avoir 16 ans. Sa réaction, véhémente, ne se fit pas attendre : "Alors, pourquoi ne le dites-vous pas ?".

Dans une conversation courante, il est clair que cette information n'aurait pas manqué, on n'aurait pas laissé ce calcul à la charge de l'interlocuteur. L'élève s'est fié à ce principe du maximum d'information qui joue dans le quotidien, où il s'agit d'avoir le bon résultat, au lieu de se placer dans un contrat didactique, où ce qui compte, c'est d'apprendre comment établir le résultat. Remarquons que l'auteur du sujet a plongé l'élève dans ce quotidien en lui parlant de son environnement immédiat, la classe. Faux quotidien d'où l'élève doit s'échapper pour commencer l'exercice.

Encore un exemple de ces décalages inattendus entre la réponse mathématique espérée dans des cas qui paraissent fort simples, et la réponse apportée. Cet exemple concerne une classe de seconde, où l'on a dit, dans le livre, pour expliquer ce qu'est une fonction décroissante sur un intervalle :



La fonction f est décroissante sur [a ; b] :
"plus x est grand, plus f(x) est petit" (1)

La fonction f est croissante sur [a ; b] :
"plus x est grand, plus f(x) est grand" (2)

Les élèves ont estimé que, pour être cohérente avec la première expression, la deuxième aurait dû être :

"Plus x est petit, plus f(x) est grand" (3)[1].

Comment cette expression (3) a-t-elle été construite ? En prenant le contraire de l'adjectif dans chacune des deux propositions constituant la phrase (1). N'est-ce pas un fonctionnement habituel du langage courant ? En voici un autre exemple, dire le contraire de la phrase : "Si tu réussis ton interro de math, tu pourras aller au cinéma", n'est-il pas : "Si tu ne réussis pas ton interro de math, tu n'iras pas au cinéma" ? (Remarquons d'ailleurs que, dans le quotidien, dire la première de ces deux phrases, c'est sous-entendre la seconde, ce qui n'est pas le cas si on les regarde avec la logique mathématique).

La formation des deux mots, "croissante" et "décroissante" avec le préfixe "dé", peut laisser penser qu'une fonction est soit l'un soit l'autre, avec l'idée de contraire. Pensons aux mots "faire", "défaire", "placer", "déplacer", etc... du langage courant. Or sur le plan mathématique on peut construire des fonctions qui ne sont ni croissantes, ni décroissantes sur un intervalle donné, ce qui est donc contradictoire avec ce que suggère le langage courant. Qui plus est, toujours sur le plan mathématique, à vouloir ainsi dire le "contraire" de l'expression (1), on se retrouve avec une expression (3) qui a la même signification que cette expression (1) : la fonction est encore décroissante.

Le langage quotidien a cours à l'école, avec son fonctionnement et sa logique de communication, les élèves ont une expérience scolaire dont ils tirent des conduites fort utiles, aussi bien pour apprendre que pour vivre à l'école, mais, on le voit, ces savoirs issus du quotidien ou de la vie scolaire peuvent faire obstacle à l'apprentissage mathématique. Les mathématiques se situent sur un autre plan, fonctionnent selon une autre logique qui n'est pas celle du "bon sens", et qui heurte souvent celui-ci.

Dans ce fascicule nous nous interrogeons sur l'entrée dans la démarche mathématique, envers et contre ces savoirs existants, sur la spécificité de cette démarche qui n'a rien d'évident. Notre interrogation est globale, elle ne concerne ni un niveau particulier du secondaire, ni un domaine particulier des mathématiques, ni une activité particulière en classe. Bien sûr nous avons eu besoin

---

[1] Reconnaissons que ces expressions sont douteuses. Comment un élève pourrait-il se faire des idées justes à partir d'elles ?

d'exemples (on trouvera même un chapitre entier sur les équations), mais par delà ces exemples nous recherchons une cohérence qui s'appuierait sur la représentation que nous avons de la démarche mathématique.

Nous proposons beaucoup d'explicitations, beaucoup de questions et ...quelques pistes à explorer. Nous décrivons un chantier et non une construction finie et, pour que plusieurs entrées soient possibles au lecteur, nous n'avons pas hésité à faire quelques répétitions.

En amont de notre enseignement :une image des mathématiques

Les élèves ont souvent des réactions ou des réponses qui au mieux nous surprennent, au pire nous feraient baisser les bras tant la distance qui nous sépare nous paraît grande. Le mot distance fait état de séparation entre deux lieux : le lieu de l'élève et le lieu du professeur quand celui-ci se situe sur le plan mathématique. Nous croyons souvent que l'élève est dans le même lieu que nous, ou devrait y être d'office, au moins pas trop loin. L'élève lui, de sa place, voit mal ce qui se passe sur le lieu de l'enseignant et s'en fait une image qui peut, dans certains cas, l'en éloigner encore davantage. Nous aussi sûrement voyons mal ce qui se passe sur le lieu de l'élève.

Les occasions de malentendus sont nombreuses car en classe se superposent trois logiques :

- une logique du quotidien,
- une logique propre aux mathématiques,
- une logique propre à l'apprentissage.

L'incompréhension s'intalle. Pour la diminuer, nous pensons qu'il est essentiel de mettre d'abord en vue l'activité mathématique. "Mettre en vue", c'est-à-dire montrer ce qu'elle est, ou plus exactement, ce que nous croyons qu'elle est, à des personnes pour qui cela ne va pas de soi. Pour réussir dans cette voie que nous explorons, il nous a semblé nécessaire de sous-tendre notre action par quelques convictions que, écrit oblige, nous donnons dans un certain ordre, mais qui ne peuvent que s'entremêler dans le quotidien.

L'une d'elles, sans doute la plus difficile à faire vivre, serait de ne pas perdre de vue que l'autre a toujours de bonnes raisons de rester en dehors de la démarche mathématique, que cette place extérieure existe, est respectable, légitime, et qu'elle doit être reconnue comme telle, ce qui n'a rien à voir avec le laxisme. Notre désir d'enseignant n'en serait pas amoindri, il s'agirait de faire passer l'élève d'un lieu à un autre, ces deux lieux ayant été identifiés. A l'inverse, la reconnaissance de ce lieu extérieur, occupé ou non selon les circonstances, devrait relativiser nos sentiments d'échec si nous en avons, et diminuer les sentiments de contrainte et d'étrangeté que l'autre, l'élève, exprime quelquefois.

"Mettre en vue" donc, c'est donner un espace pour le recul. Encore est-il nécessaire de savoir ce qu'on veut montrer. Qu'est-ce que faire des mathématiques ? Dans notre réponse à cette question, et nous pouvons nous imaginer la donnant à quelqu'un d'extérieur, qu'est-ce que nous avons envie d'enseigner ? Il s'agit d'expliciter ce que l'élève devrait savoir pour avoir une attitude congruente avec l'activité mathématique. Mais pour cela, il est utile de se mettre au clair soi-même, de travailler ses propres représentations, pour aider l'élève à se construire les siennes, en cohérence avec celles de l'enseignant, mais sans préjuger de ses choix futurs.

Les quelques idées que l'enseignant juge essentielles à la compréhension des buts de la démarche mathématique devraient être communiquées aux élèves, tout au long de l'année, à travers les multiples activités de la classe, quotidiennement. Et il faut bien se dire que nous n'en avons jamais terminé avec cet objectif que nous essayons de garder toujours en vue.

Bien sûr, cette "ligne d'horizon" dépend de chacun de nous. Ce qui paraît essentiel à certains peut ne pas l'être pour d'autres. Il est sûrement important de se la tracer soi-même si on veut y croire suffisamment pour ne pas l'abandonner au premier obstacle. Nous ne pensons pas que l'élève perde quoi que ce soit en étant confronté à la diversité, sa représentation des mathématiques ne peut que s'enrichir.

A titre d'exemple voici quelques idées qui nous servent, à nous, actuellement, de base de travail. Ce sont elles qui constituent la trame de ce fascicule. Il faut bien voir que tout ce qui suit se limite à décrire **une image des mathématiques** qui peut orienter l'action dans la classe. D'autres images sont possibles, par exemple celles qui privilégieraient l'aspect historique ou ludique... Beaucoup d'autres facteurs peuvent aussi orienter notre enseignement, par exemple une image forte de l'apprentissage.

Dans ce qui suit, la numérotation n'a qu'une fonction de repérage et non de hiérarchisation.

1. Les objets mathématiques sont des objets de pensée créés par une collectivité. Nous en avons des représentations communes ou non. Certaines représentations sont bien codifiées comme, par exemple, les vecteurs, les angles droits... D'autres le sont moins, mais peuvent servir localement entre quelques interlocuteurs, s'ils se sont préalablement entendus.

2. Ces objets, et les affirmations à caractère général concernant ces objets, telles que :

Si un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu, alors c'est un parallélogramme

sont des résultats, des productions de l'activité mathématique.

Ces affirmations sont vraies s'il n'y a pas de contre-exemple. Un seul contre-exemple suffit pour qu'elles soient fausses. Un énoncé déclaré vrai ne souffre pas d'exception. Une conséquence de cela est que plusieurs exemples ne permettent pas de généraliser, puisque l'existence d'exemples ne prouve pas qu'il n'y a pas de contre-exemple.

Cette règle du vrai et du faux en mathématiques est aussi la base du caractère de nécessité des énoncés : dès que les hypothèses sont vérifiées, ce qui est annoncé dans la conclusion ne peut que se réaliser. Les énoncés ont un caractère prédictif, la validité de la prédiction étant garantie.

Le fonctionnement du vrai et du faux dans le quotidien n'est pas celui-ci. Il a aussi son lieu d'existence, où, d'ailleurs, le vrai et le faux mathématiques n'ont guère leur place.

3. Un énoncé correctement formulé ne peut avoir que deux valeurs de vérité qui s'excluent : vrai ou faux, sans aucune nuance.

Ainsi, quand nous parlons des objets de pensée, la question de "l'à peu près" ne se pose pas : un triangle, par exemple, est ou n'est pas rectangle, il n'y a pas d'autre possibilité.

Une autre conséquence est qu'en mathématiques les contradictions sont intolérables. Dans le quotidien, il en va autrement.

Il n'en demeure pas moins présent à notre esprit qu'il existe des énoncés auxquels on ne sait pas attacher de valeur de vérité, soit parce que l'on ne sait pas prouver qu'ils sont vrais ou faux, soit parce que, dans la théorie où ils se placent, dire qu'ils sont vrais ou dire qu'ils sont faux ne conduit à aucune contradiction. Les élèves, eux, sont souvent dans cette situation "d'indécidabilité".

4. Les objets de pensée sur lesquels on travaille sont issus de problèmes relatifs à la réalité (et aussi de problèmes liés à d'autres objets de pensée), et la connaissance que l'on a d'eux peut permettre d'agir, de prévoir, dans cette réalité. C'est la fonction de modèle des mathématiques qui ne peut s'exercer que par une très grande simplification du réel.

La question de "l'à peu près", cette fois, se pose. Quel est le rapport entre les mesures et la valeur exacte dans le modèle ?

5. Les preuves pour établir les connaissances mathématiques ne s'appuient pas sur les sens. Une estimation avec l'œil, une mesure avec tout autre instrument, ne constituent pas une preuve.

Cependant, il est bon de reconnaître, par exemple, que tout le monde voit, y compris l'enseignant, que les points sont alignés sur le dessin, même s'il ne le sont pas dans l'objet géométrique. C'est encore faire exister une pensée extérieure.

6. Il est nécessaire de distinguer la recherche de la preuve, d'une part, et l'exposé de la preuve qui est le "produit fini", d'autre part. La recherche est faite d'essais, d'erreurs, d'intuitions, de fausses pistes, d'expérimentations. Elle n'apparaît plus dans l'exposé de la preuve, ce qui peut laisser croire que ce temps ne fait pas partie de l'activité mathématique, et même, que ce temps n'existe pas. Il est important de faire exister publiquement la recherche en classe.

7. Lors de la recherche, il y a très souvent, en géométrie par exemple, superposition de la représentation de l'objet de pensée, nous dirons figure, et d'un objet réel, nous dirons dessin. La même trace sur la feuille peut être vue comme représentation de l'objet mental triangle ou comme dessin sur lequel j'expérimente, je mesure. Le même problème se pose dans le domaine numérique avec l'écran de la calculatrice.

En particulier, on peut se demander s'il est légitime de fournir un contre-exemple par une trace sur le papier, puisque les preuves ne s'appuient pas sur les sens. Si cette trace est vue comme figure, c'est à dire comme objet de pensée descriptible par un discours, le contre-exemple est tout à fait recevable.

8. Les arguments en mathématiques sont à puiser dans un corpus de connaissances commun (définitions, théorèmes...).

La preuve a statut de preuve dans une communauté. Démontrer est une activité sociale. Nous voyons la classe comme une communauté avec son corpus de connaissances et son niveau de preuve qui peut évoluer au cours du temps. Chacun doit pouvoir apporter ses arguments, examiner ceux des autres, être entendu.

Les moments où c'est le professeur qui dit le vrai ou le faux, ne doivent pas empiéter sur la validation, faite par l'élève lui-même, par des moyens mathématiques : chacun devrait arriver à se créer des convictions, soit par intuition remise éventuellement en question, soit en se donnant des preuves mathématiques, et non parce que le professeur, personne d'autorité, a dit.

Modèle mathématique et réalité : l'élève ne se situe point là où on l'espère

En classe, la solution qui consistait à utiliser les arrangements pour calculer le nombre de façons de garer trois voitures sur cinq places de parking fit l'unanimité. Mais quand Antonin proposa de "faire comme si les trois voitures étaient semblables, de ne pas chercher à savoir quelle voiture occupait telle place" et d'utiliser des combinaisons, Nadège réagit vivement en disant qu'il n'y avait pas deux voitures semblables : à supposer qu'elles aient le même propriétaire, elles auraient des immatriculations différentes, même si elles étaient de couleur identique, la peinture... Ce sont des faits indéniables. Mais calculer le nombre de combinaisons, ce n'est pas nier ces faits, c'est ne pas en tenir compte, c'est "faire comme si", c'est se placer sur un autre plan que la réalité. Nadège refusait de se placer sur cet autre plan pour des raisons que nous ignorons et qui pouvaient tenir à l'exercice, à ses relations aux mathématiques, ou au professeur, ou à Antonin... Le choix entre arrangements et combinaisons dans ce cas ne peut se décider qu'en fonction de l'usage que l'on prévoit de faire de ce dénombrement.

Il arrive ainsi que les élèves se trouvent confrontés à un exercice qui mette en jeu une "réalité" et un "modèle" mathématique rendant compte de celle-ci. Aussi bien en collège qu'au lycée, ceci se réalise par exemple quand on demande aux élèves de résoudre par "une mise en équation" un problème portant sur une "situation réelle".

Par "situation réelle", nous entendons "situation comportant des éléments du quotidien", même si celle-ci est complètement fabriquée. Pour revenir aux équations, c'est le cas par exemple des exercices évoquant les âges des mères qui ont le double des âges de leurs filles.

Le mot "modèle" peut paraître prétentieux pour désigner l'équation qui va traduire le problème des âges. Mais le mot "objet mathématique" fait oublier les liens étroits qui existent entre la situation et l'équation, et le mot "outil", déjà utilisé dans l'expression "boîte à outils" pour désigner des théorèmes et des définitions, fait oublier que l'équation a été établie à partir de la situation par celui qui cherche le problème.

Un modèle en mathématiques est donc une construction de l'esprit, qui ampute la réalité de bien des aspects, mais qui permet de la décrire sous un certain angle, de communiquer à son propos, de prévoir ou d'agir sur elle. Le choix, la construction du modèle dépendent du but que l'on s'est assigné.

Voici d'autres exemples de modèles souvent utilisés en classe :

- les fonctions sous forme graphique ou avec leur expression explicite,
- les schémas, les codages,
- les figures géométriques associées à un objet réel...

Associer une figure géométrique à un objet sous-entend qu'on associe aussi toutes les connaissances géométriques que l'on a. De même, associer une équation à une situation, c'est aussi lui associer un ensemble de nombres et ses propriétés.

La construction du modèle et le retour à la situation après étude du modèle, n'ont rien d'évident ; la distinction entre les deux non plus. Pour se rendre compte des difficultés, nous allons examiner les positions de quelques élèves devant deux textes proposant des situations réelles : le problème du bac ES 95 et le dernier exercice de l'évaluation du début de la classe de seconde en 95 aussi.

Exemple 1 : problème du bac ES 95

Nous ne nous intéresserons qu'au début du problème *(le texte entier est donné en annexe).*

Une entreprise achète une machine 30000F. Elle peut la revendre au bout de t années au prix de :

$$v(t) = \frac{30}{0,5\,t + 1} \quad \text{pour } 0 \leq t \leq 8$$

où t est exprimé en années et v(t) en milliers de francs (en abrégé kF).

1) a) Au bout de combien d'années la machine aura-t-elle perdu 50% de sa valeur à l'achat ?

b) Quelle est sa valeur de revente au bout de 4 ans ?

c) La différence, exprimée en kF, entre le prix d'achat de la machine et son prix de revente au bout de t années est : D(t) = 30 - v(t).

Montrer que D est une fonction croissante sur [0 ; 8].

2) On peut exprimer le coût total d'entretien en kF, pour une durée de t années d'utilisation par :

$$E(t) = 2,5\, e^{0,4\,t} - t - 2,5\,.$$

a) Calculer E'(t), où E' désigne la fonction dérivée de E.

b) En déduire que E est une fonction croissante sur l'intervalle [0 ; 8].

3) a) Vérifier que le coût total (en kF) d'usage de cette machine est :

$$f(t) = D(t) + E(t) = 27,5 - \frac{30}{0,5t+1} + 2,5\, e^{0,4\,t} - t\,.$$

b) Déduire des questions précédentes le sens de variation de f sur [0 ; 8].

Voici maintenant le corrigé pour cette partie du problème.

1) a) Après une perte de 50% de la valeur d'achat, le prix de revente est, en kF, $\frac{30}{2} = 15$; on cherche donc t tel que v(t)=15 , soit $\frac{30}{0,5\,t+1} = 15$, soit $0,5\,t = 1$, soit t = 2.

b) On a $v(4) = \frac{30}{2+1} = 10$: la valeur de revente au bout de 4 ans est de 10000F.

c) La fonction $u(t) = 0,5\,t + 1$ étant croissante, $v = \frac{1}{u}$ est décroissante et - v croissante. Il en est de même de D(t) = 30 - v(t).

2) a) On a $E'(t) = 2,5 \times 0,4\, e^{0,4\,t} - 1 = e^{0,4\,t} - 1$.

b) La fonction $e^{0,4\,t}$ étant croissante, il en est de même de E', d'où $E'(t) \geq E'(0) = e^{0} - 1 = 0$. Comme E' est positive, E est croissante.

3) a) Le coût total d'usage f(t) en kF après t années est égal à la somme

*du coût d'investissement : valeur d'achat - valeur de revente = 30 - v(t)

*du coût d'entretien E(t).

On a donc $f(t) = D(t) + E(t) = 30 - \dfrac{30}{0,5\,t + 1} + 2,5\, e^{0,4\,t} - t - 2,5$

$$= 27,5 - \frac{30}{0,5\,t + 1} + 2,5\, e^{0,4\,t} - t.$$

b) La fonction f est somme des deux fonctions croissantes D et E

A l'aide du corrigé et du texte, essayons de voir ce qui était attendu du candidat. Nous verrons ensuite une copie d'élève.

Tout d'abord le modèle est donné a priori avec les fonctions v (prix de revente), D (différence entre prix de revente et prix d'achat), E (coût total d'entretien). Pour la seule fonction f, coût total d'usage de la machine, on demande de vérifier que $f(t) = D(t) + E(t)$, c'est à dire, d'après le corrigé, de justifier par des connaissances économiques, l'égalité proposée. Dans ce texte finalement intervient un modèle mathématique, un modèle économique et une situation réelle. Nous ne distinguerons pas ces deux derniers.

Dans les questions 1)a) et 1)b), le modèle sert à faire des prévisions sur la situation.

Dans toutes les autres questions où on demande d'étudier le sens de variation des fonctions, l'auteur du corrigé s'est placé strictement sur le plan mathématique, faisant appel à des connaissances très variées dans ce domaine. Aucune conclusion n'est à tirer de ces études pour la situation ; il en est d'ailleurs ainsi dans toute la suite du problème. La seule utilité du modèle est donc de tester les élèves sur leurs compétences en mathématiques. C'est du détournement d'objectif.

Nous avons eu l'occasion de présenter ce texte à un enseignant du supérieur, totalement étranger à ces épreuves du baccalauréat. Un peu surpris par l'expression de v(t), il a vérifié que v était décroissante et en a conclu : "C'est bon, c'est cohérent". Cette démarche, doute puis recherche de cohérence, est peu probable de la part des élèves. Etudier le sens de variation en se plaçant sur le plan mathématique pouvait effectivement se faire pour vérifier la cohérence. Le texte ne le présente pas ainsi.

Qu'a fait le candidat ? Voici ses réponses.

1) *a) La machine vaut 30000F, sa valeur diminuée de 50% vaut 15000 soit 15 kF*

donc $15 = \dfrac{30}{0,5\,t + 1}$

$0,5\,t + 1 = \dfrac{30}{15}$

$0,5\,t = -1 + 2$

$0,5\,t = 1$

$t = 2$

La machine aura perdu 50% de sa valeur au bout de 2 ans.

b) Sa valeur de revente au bout de 4 ans :

$v(t) = \dfrac{30}{(0,5 \times 4) + 1} = 10$

Sa valeur de revente au bout de 4 ans est de 10000F.

c) $D(t) = 30 - v(t)$

$D(2) = 30 - 15 = 15$	*soit*	*15000*
$D(4) = 30 - 10 = 20$	*soit*	*20000*
$D(6) = 30 - 7{,}5 = 22{,}5$	*soit*	*22500*
$D(8)=30-6=24$	*soit*	*24000*

La fonction est bien croissante sur l'intervalle [0 ; 8]. Car il est logique que plus les années passent, plus la machine perd de sa valeur.

2) Coût total d'entretien en kF de cette machine

$E(t) = 2{,}5\, e^{0{,}4t} - t - 2{,}5$

a) $E'(t) = 2{,}5\, e^{0{,}4t} - 1$

Sur l'intervalle [0 ; 8] E est une fonction croissante.

b) $t = 2$	*$E(t) \approx 6{,}459$*	*soit*	*6459*
$t = 4$	*$E(t) \approx 13{,}918$*	*soit*	*13918*
$t = 6$	*$E(t) \approx 21{,}377$*	*soit*	*21377*
$t = 8$	*$E(t) \approx 28{,}836$*	*soit*	*28836*

Elle est bien croissante sur l'intervalle [0 ; 8].

3) a)

$$f(t) = \underbrace{D(t)}_{\text{la différence en kF entre prix d'achat et prix de revente}} + \underbrace{E(t)}_{\text{coût total d'entretien en kF}} = 27{,}5 - \frac{30}{0{,}5\,t + 1} + 2{,}5\, e^{0{,}4t} - t$$

[...]

b) Sens de variation sur [0 ; 8] : croissante puisque plus les années passent plus les pertes de la valeur de la machine s'accentuent et plus l'entretien est nécessaire.

Dans les questions 1)a) et 1)b) le modèle sert bien à des prévisions, les deux phrases pour conclure l'attestent. Le candidat a bien essayé de vérifier que $f(t) = D(t) + E(t)$ en rappelant ce que représentait chacune des deux fonctions D et E, sans toutefois faire appel à la connaissance économique "coût d'investissement" comme cela a été fait dans le corrigé.

Mais pour ce qui est de l'étude du sens de variation des fonctions en jeu, la copie et le corrigé divergent ; pour justifier la croissance l'élève :

- soit calcule les valeurs de la fonction pour des valeurs entières de t ,
- soit fait appel à la situation réelle, à ce qu'il sait des prix par ailleurs.

Peut-on expliquer la position du candidat ? Je devrais dire des candidats, car cette copie n'était pas unique en son genre.

L'élève a étudié le sens de variation avec des calculs de valeurs. Il se peut qu'il croie que le calcul de quelques valeurs suffisent pour cela. Il se peut qu'il ne sache pas utiliser le calcul d'une dérivée. D'ailleurs il a fait une erreur dans ce calcul. On peut l'accabler. Mais il n'était pas le seul. Certains ont calculé E(0), E(1), E(2),... et ce, jusqu'à E(8), c'est à dire ont fait comme si t était un entier, et comme si les fonctions étaient définies sur les neufs premiers entiers naturels. Or, au début du texte, on se contente d'écrire $0 \leq t \leq 8$, sans préciser à quel ensemble appartient t ; dans les questions 1.a et 1.b, t est un entier ; enfin, on parle d'années, ce n'est donc pas illégitime de ne s'intéresser qu'à des nombre entiers. L'ambiguïté n'est levée que de façon implicite dans la suite du texte.

Est-il également légitime de faire appel à des connaissances sur la situation pour justifier le sens de variation ? Comme nous l'avons dit, le modèle est donné a priori dans le texte, c'est à dire que ces fonctions sont introduites pour cela dès le départ : on sait par exemple que E représente le coût total d'entretien de cette machine pour une durée de t années.

Or, nos connaissances économiques nous font dire que le coût total d'entretien ne peut que croître avec la durée et cette propriété du coût a sûrement été prise en compte lors de la modélisation. Ce qui fait donc dire aussi que E est nécessairement croissante, sinon elle ne représenterait justement pas le coût d'entretien comme on l'annonce ! Dans cette optique, pourquoi calculer la dérivée ?

Toutes ces ambiguïtés légitiment la position du candidat qui a été placé dans une situation trop artificielle pour faire vraiment des mathématiques.

Exemple 2 : Evaluation à l'entrée en seconde en 1995

Nous donnons ici le texte du dernier exercice.

On étudie le temps t (exprimé en heures) d'un parcours en fonction de sa distance d (exprimée en kilomètres) pour différents moyens de transport :

- une voiture sur autoroute : sa vitesse est de 100 km/h ;

- un TGV : sa vitesse est de 240 km/h, mais il faut ajouter une heure à la durée du trajet en train pour le trajet du domicile à la gare ;

- un avion : sa vitesse est de 750 km/h, mais il faut ajouter trois heures à la durée du vol pour le trajet du domicile à l'aéroport et les démarches d'enregistrement et de contrôle.

Pour la voiture le temps t est donné par : $t = \frac{d}{100}$ où d est la distance.

Pour le TGV, le temps t est donné par : $t = 1 + \frac{d}{240}$ où d est la distance.

Pour l'avion, le temps t est donné par : $t = 3 + \frac{d}{750}$ où d est la distance.

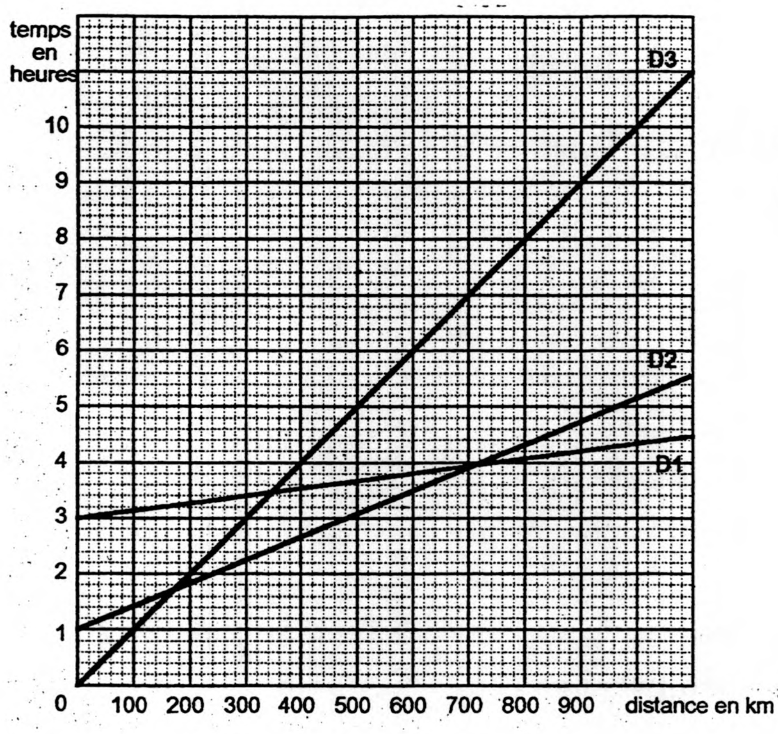
1° Cinq heures après le départ du domicile, quelle distance a-t-on parcourue avec chaque moyen de transport ?

Voiture :

TGV :

Avion :

2° Sur le graphique ci-dessous on a représenté le temps d'un parcours en fonction de la distance parcourue par chacun de ces moyens de transport.



Associer chaque droite du graphique à un moyen de transport.

D_1

D_2

D_3

3° Jean affirme : " L'avion va plus vite, donc pour faire 500 km l'avion est le moyen le plus rapide."

Pierre lui répond : " pour prendre l'avion ou le train, on perd du temps pour aller à la gare ou à l'aéroport, donc pour faire 500 km la voiture est le moyen le plus rapide."

L'un des deux garçons a-t-il raison ?

Justifier la réponse.

Là encore ce fut la surprise quand nous avons lu les réponses des élèves à cette dernière question. En voici quelques exemples.

<u>Réponse A</u>

Je trouve que Jean a raison car tout le monde sait que le moyen de transport le plus rapide au monde c'est l'avion. Des scientifiques l'ont démontré en mettant au point le concorde.

<u>Réponse B</u>

Oui Jean a raison car pour aller à la gare ou l'aréoport on perd du temps mais quand le TGV part il va au moins à 300 km/h sans s'arrêter à une autre gare et l'avion c'est pareil donc pierre a tort.

<u>Réponse C</u>

Celui des deux qu'a raison est Pierre car pour faire 500 km la voiture est plus rapide car on ne va pas jusqu'à la gare pour la prendre.

Réponse D

Je pense que c'est Jean qui a raison car pour aller jusqu'à l'aéroport ou jusqu'à la gare on ne met pas plus d'une heure ou deux, de plus l'avion est très rapide car il n'y a pas d'embouteillage dans l'aire tandis qu'en voiture il y a beaucoup de bouchons.

Mais si on compare avec l'exercice 1, on voit que c'est la voiture le moyen le plus rapide.

Réponse E

Si on prend la voiture on fait 300 km avant que l'avion parte mais l'avion fait 750 km en une heure donc la voiture aura fait 400 km quand l'avion aura fait 750 km. C'est l'avion le moyen le plus rapide.

Réponse F

Avion : $t = 3 + \frac{500}{750}$

$t = 3{,}6\ h$

TGV : $t = 1 + \frac{500}{240}$ *Jean a raison*

$t = 3\ h$

Voiture : $t = \frac{500}{100}$

$t = 5\ h$

Réponse G

Pour faire 500 km, c'est le train qui est le plus rapide car il met 3 h env en comptant une heure d'arrêt en gare. L'avion met plus de 3 h 30, et la voiture met 5 h. Donc aucun des deux garçons n'a raison.

Toutes ces réponses ont été relevées dans la même classe.

Sur 32 élèves, 6 ont répondu sans tenir compte du modèle proposé, tant leur expérience quotidienne était prégnante, ou tant, peut-être, ce modèle était loin de leur expérience, les réponses A, B, C en sont des exemples. Et pourtant ces élèves ont réussi aussi bien que les autres les calculs précédents et l'identification des droites. Est-ce le ton familier de la conversation qui les a éloignés du modèle ?

Dans cette même classe, 6 n'ont pas répondu et 3 n'ont pas justifié leur réponse. Les autres, c'est à dire 17, font référence au modèle. Avec plus ou moins de bonheur.

Première ambiguïté, ils sont 7 parmi les 17 à n'avoir comparé que la voiture et l'avion. Ils ont peut-être cru, mais ce n'est qu'une interprétation que, comme dans les conversations les plus ordinaires, l'un avait forcément tort et l'autre raison, ou bien ils s'en sont tenus à ce qui était évoqué : la voiture et l'avion. Les réponses E et F en sont des exemples.

Enfin même dans le cas où le modèle est utilisé, le lien entre ce modèle et la situation n'est pas très clair : dans la réponse G, l'heure que l'on ajoute pour le train est un temps d'arrêt en gare de ce train, pour la réponse E, pendant les trois heures qui interviennent avec l'avion, la voiture fait 300 km sur l'autoroute.

Examinons encore le texte. La modélisation est donnée là aussi a priori. Mais pour résoudre quel problème ? Si on modélise une situation, c'est avec un objectif, la modélisation dépendant de cet objectif. Ce n'est point dit ici. A travers ce modèle essayons de retrouver le problème. Il ne s'agit pas du problème ordinaire où on se demande quels temps seraient nécessaires pour se rendre d'un point A à un point B suivant les moyens de transport utilisés. En effet, il serait peu probable que la distance d soit la même dans tous les cas. Sans doute la question est-elle : je veux faire une certaine distance en avion, la même distance en train, la même distance en voiture, compte tenu du fait que j'habite près de l'autoroute et loin (?) de l'aéroport et de la gare, combien de temps me faudra-t-il ? Remarquons que la distance n'est pas la distance parcourue par la personne mais par le moyen de locomotion qui intéresse. La distance concerne le moyen de transport, le temps concerne l'usager. La première ligne du texte est d'ailleurs ambiguë puisqu'on y parle "du temps t d'un parcours en fonction de sa distance d pour différents moyens de transport". La distance d ne correspond pas au parcours dont on on mesure le temps. Ce n'est pas une mince difficulté.

S'expliquent alors les réponses des élèves. On les sort de ce modèle pour les plonger, au travers d'une conversation qui se veut familière, dans un quotidien où les problématiques habituelles ne sont justement pas celles du modèle. Les élèves (ceux qui n'ont pas encore intégré toute la logique scolaire...), répondent sur le même ton, c'est à dire par des propos du quotidien. Ils limitent aussi leur comparaison aux deux moyens de transport cités pendant cette conversation : si on voulait comparer avec le train, on le dirait.

Et puis, dans la première réplique, Jean ne parle que de l'avion, absolument pas d'un éventuel usager, le temps dont il est question est le temps de l'avion. Quant à Pierre, il énonce une généralité : "on perd du temps pour aller..." Qui est ce "on" ? Le modèle précédent dépend d'un domicile particulier. Ce "on" général autorise les réponses B et D où le TGV va à 300 km/h et où on ne met pas pas plus d'une heure ou deux pour aller à l'aéroport. Voilà pour ceux qui se sont attachés au temps.

Maintenant, il y a ceux qui se sont attachés à la distance, celle de l'usager qui n'est pas celle du moyen de transport. Et c'est la réponse E.

Remarquons que dans la réponse G, l'élève a levé la difficulté : en laissant le train une heure en gare, le temps devient bien le temps de parcours du train !

Trop souvent nos "situations réelles" ne sont que des habillages plaqués sur des exercices que l'on voudrait voir résolus uniquement sur le plan mathématique. Les difficultés que nous introduisons ainsi nous échappent totalement, tant l'imagination nous fait défaut pour sortir de la position mathématique. Quand on y regarde de près, les réponses "étranges" sont le fait d'élèves n'ayant pas adopté cette position. Et pourquoi l'auraient-ils fait ?

Se situer dans un modèle mathématique n'a rien d'évident, les ambiguïtés liées aux rapports insuffisamment explicités entre la situation et le modèle n'arrangent rien. Nous ne proposons pas d'éviter les "situations réelles" car les mathématiques ont bien fonction de modèle. Ce n'est pas en supprimant la difficulté que l'apprentissage se fera. Nous proposons au contraire de laisser vivre dans la classe toutes les ambiguïtés relatives aux situations réelles. Nous légitimons le fait de se tromper à cause de ces ambiguïtés et nous apprenons aux élèves à les réduire. Ce flou a en effet besoin d'être levé, sous peine de voir l'élève ne plus rien y comprendre et adopter, soit une attitude de rejet, soit une attitude "scolaire" : "j'accepte de faire, mais c'est farfelu". Pour cela il est sans doute utile que le modèle réponde à un problème, ne soit pas coupé de son objectif, ni de sa construction, et utile aussi de mettre en évidence le fait que le modèle ne se situe pas sur le plan de la réalité. Sinon les élèves ne comprennent pas à quel jeu on joue et se construisent une image des mathématiques que nous ne souhaitons pas..

Annexe

PROBLÈME *(10 points)*

Une entreprise achète une machine 30 000 F. Elle peut la revendre au bout de t années au prix de :

$$v(t) = \frac{30}{0{,}5\,t + 1} \quad \text{pour } 0 \leqslant t \leqslant 8$$

où t est exprimé en années et $v(t)$ en milliers de francs (en abrégé kF).

1. *a.* Au bout de combien d'années la machine aura-t-elle perdu 50 % de sa valeur à l'achat ?

   b. Quelle est sa valeur de revente au bout de 4 ans ?

   c. La différence, exprimée en kF, entre le prix d'achat de la machine et son prix de revente au bout de t années est : $D(t) = 30 - v(t)$.
   Montrer que D est une fonction croissante sur l'intervalle [0 ; 8].

2. On peut exprimer le coût total d'entretien en kF, pour une durée de t années d'utilisation, par :

$$E(t) = 2{,}5\,e^{0{,}4\,t} - t - 2{,}5\,.$$

   a. Calculer $E'(t)$, où E' désigne la fonction dérivée de E.

   b. En déduire que E est une fonction croissante sur l'intervalle [0 ; 8].

3. *a.* Vérifier que le coût total (en kF) d'usage de cette machine est :

$$f(t) = D(t) + E(t) = 27{,}5 - \frac{30}{0{,}5\,t + 1} + 2{,}5\,e^{0{,}4\,t} - t\,.$$

   b. Déduire des questions précédentes le sens de variation de f sur [0 ; 8].

   c. Tracer la courbe représentative Γ de f, dans un plan muni d'un repère rectangulaire, avec pour unités : 2 cm pour une année sur l'axe des abscisses, 1 cm pour 4 kF sur l'axe des ordonnées.
   On pourra utiliser les valeurs approchées suivantes :

t	0	1	2	3	4	4,5	5	6	7	8
$f(t)$	0	10,23	16,06	20,80	25,88	28,90	32,40	41,56	54,94	74,83

4. Le coût moyen d'utilisation, en kF et au bout de t années, est égal à :

$$U(t) = \frac{f(t)}{t} \quad \text{avec } 1 \leqslant t \leqslant 8\,.$$

   a. Soit M le point d'abscisse t de la courbe Γ. Montrer que $U(t)$ est le coefficient directeur de la droite (OM).

   b. Déterminer graphiquement la valeur de t pour laquelle $U(t)$ est minimum.

   c. On admet que la fonction dérivée de U peut s'écrire sous la forme $U'(t) = \frac{g(t)}{t^2}$, où g est une fonction continue dont le tableau de variation est le suivant :

t	1		2,7		8
$g(t)$	− 3,0	↘	− 6,8	↗	118

   Montrer que g s'annule en un point et un seul de [1 ; 8], que l'on notera a.
   On admettra que l'on a : $4{,}4 \leqslant a \leqslant 4{,}5$.

   d. Dresser le tableau de variation de U et vérifier que U admet un minimum.

Épreuve : **Mathématiques** Série **ES**	Repère : **M 5 MON**	Page : 3

Les conventions du vrai et du faux pour le mathématicien

Modèle et implication : un circuit électrique

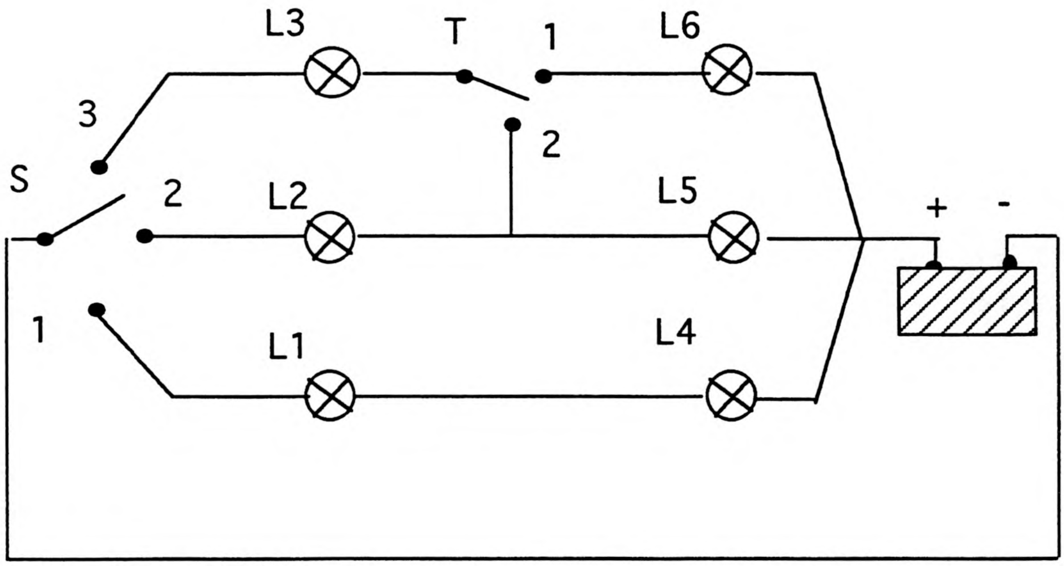
Entrer dans le monde mathématique ne va donc pas de soi ! Il y a un pas à franchir pour passer du monde dans lequel nous vivons à celui des mathématiques. Comment aider nos élèves à franchir l'obstacle ? Nous avons choisi, non pas de rendre le passage aisé, mais d'orienter notre jeu vers la prise de conscience par les élèves qu'il existe un changement radical de mode de pensée lorsque l'on passe du réel aux mathématiques.

Nous vous proposons une activité permettant d'expliciter quelques spécificités du raisonnement mathématique sous le nom de "Circuit". Elle est proposée dans une brochure écrite par Marc Legrand, didacticien et professeur de mathématiques à l'université, intitulée "Enseigner autrement en DEUG A à l'université". Elle a été expérimentée dans de nombreuses classes, de la quatrième à l'université.

Voici comment elle est présentée à une classe d'élèves de lycée, un amphithéâtre d'étudiants de l'université ou à un groupe d'adultes en formation.

Essayez de la vivre vous-même en lisant ces pages.

Voici un circuit électrique.

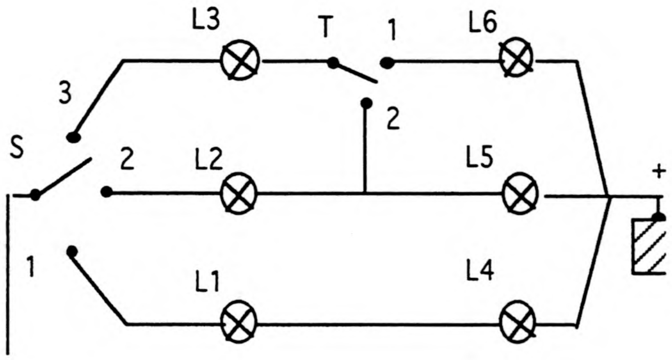


Il va vous être proposé un certain nombre de phrases, relatives à ce circuit, que l'on appellera des <u>conjectures,</u> car on ne sait pas a priori leur valeur de vérité. Vous devez vous demander si elles sont vraies ou fausses. Pour chacune d'elles, qui est écrite en caractères gras, essayez de procéder de la manière suivante : vous la lisez et vous vous accordez un moment de réflexion pour vous faire une opinion et trouver des arguments ; ensuite seulement, vous poursuivez votre lecture, afin de voir quels sont les avis et les arguments, qui sont avancés lorsque la conjecture est étudiée dans un groupe.

Etude d'une première conjecture

La conjecture C_1 est-elle vraie ou fausse ?

C_1 : "Si je vois la lampe 4 briller, je suis certain que la lampe 1 brille elle aussi"



Etude de C_1 dans un groupe

Maintenant je pose cette même question à un groupe (d'élèves, d'étudiants ou de professeurs) : j'écris au tableau cette première conjecture et, tout en restant moi-même totalement neutre, je laisse réfléchir chacun, avec éventuellement l'aide de ses voisins. Au bout de quelques minutes, j'inscris trois cases au tableau, "Vrai", "Faux", "Autre" et je demande à chacun de voter pour l'une seule de ces réponses.

Que se passe-t-il ? Eh bien, à peu près toujours la même chose ! Que le public soit constitué d'adultes ou non, de spécialistes ou non, une majorité, parfois écrasante, se dégage pour la réponse "vrai" et quelques voix se portent sur "Autre". Voici quelques-uns des arguments justifiant cette dernière réponse :

- "on ne connaît pas la position de l'interrupteur",
- "la lampe peut ne pas briller",
- "que signifie justement "briller" ? ",
- "et si les ampoules ne sont pas de même puissance, le courant peut passer sans que l'ampoule ne brille".

Une fois ces arguments avancés, certains, qui avaient pourtant voté "Vrai", renchérissent :

- "Il se peut aussi que les fils soient coupés, que la batterie ne fonctionne pas, que certaines lampes soient grillées...".

Des participants peuvent être très violemment opposés à cette argumentation, ils pensent que l'on perd son temps, qu'il n'y a aucun doute possible. Après quelques échanges, qui peuvent être parfois difficiles[1] (au moins un quart d'heure a pu se passer depuis le début de l'étude de la conjecture C_1), je fais procéder à un nouveau vote, et alors, c'est aussi toujours la même chose...: même si la réponse "Vrai" reste majoritaire, les indécis sont nettement plus nombreux.

(Et vous, changez-vous d'avis ?)

Objectif poursuivi dans l'étude de C_1

Quel peut bien être le but poursuivi, au travers de ce débat, que l'on n'interrompt pas - on verra plus loin la nécessité de laisser les participants s'exprimer suffisamment - et qui prend donc du temps, si précieux ? Il ne réside pas dans la réponse elle-même, mais dans la mise en évidence qu'il n'est pas aussi simple qu'on pourrait le croire de se mettre d'accord. Pourquoi ? Parce que les uns fonctionnent dans un modèle, un circuit normalisé suggéré par le dessin, exempt de toutes les "anomalies" avancées ci-dessus, alors que les autres sont plongés dans le concret ; parce qu'aucune des règles, régissant le fonctionnement de ce circuit et qui ont été suivies implicitement par les uns, n'a été énoncée ; parce que le flou demeure sur des mots tels que "briller", "voir briller", chacun ne leur accordant pas nécessairement le même sens.

Il s'agit donc bien ici de dégager cette notion fondamentale de **modèle** : tout débat mathématique est impossible s'il ne se situe pas dans un monde, parfaitement imaginaire, mais connu de chacun des interlocuteurs ; et même s'il s'agit d'une étude personnelle, en dehors de tout groupe, on ne peut se prononcer sur la véracité de telle ou telle phrase mathématique, que si l'on attribue exactement le même sens que l'auteur à chacun des mots de la phrase.

Pour la suite, on se met d'accord pour se situer dans le modèle suivant : "voir briller" signifie que le courant passe, les fils, les lampes et la batterie fonctionnent parfaitement, les lampes sont de même puissance. Dans ce modèle maintenant explicité, il est clair que la première conjecture est vraie.

Dans la suite, pour signifier que le courant traverse la lampe n° i, nous écrirons "L_i", dont la négation sera notée "non L_i". On peut remarquer que cette dernière définition montre combien le modèle se détache du monde réel : ici toutes les nuances que l'on pouvait attribuer aux mots "voir briller" sont complètement gommées, une seule signification demeure : le courant passse ou il ne passe pas.

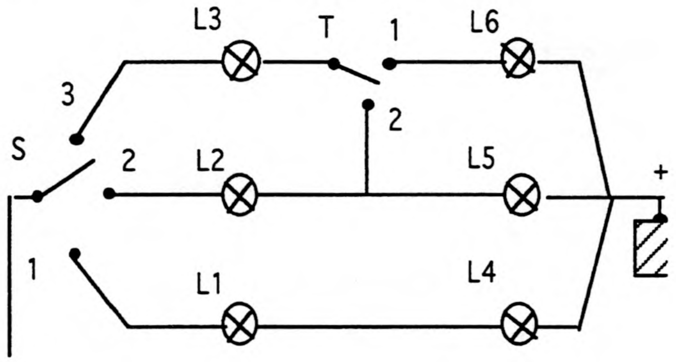
---

[1]Voir plus loin des compléments sur ce point dans les commentaires sur l'étude des conjectures.

Etude d'une deuxième conjecture

La conjecture C_2 est-elle vraie ou fausse ?

C_2 : "Si non L_2 , alors non L_5 ."



Etude de C_2 dans un groupe

L'étude de cette conjecture en groupe donne lieu à deux sortes de déroulements suivant la nature du public : s'il s'agit d'adultes scientifiques, l'unanimité se dégage rapidement pour dire que cette conjecture est fausse parce qu'il y a un contre-exemple, mais s'il s'agit de non-scientifiques ou d'élèves, le débat s'établit, les uns exhibant un contre-exemple, les autres des exemples...Il y a plus de cas où la conjecture est vraie que de cas où elle est fausse, alors..?

Elle permet donc d'institutionnaliser la convention suivante, qui est fondamentale en mathématiques, concernant toute conjecture du type "si A, alors B", dans un modèle donné :

Au sein d'un modèle :

- une conjecture est dite fausse si elle admet un contre-exemple ;

- une conjecture est dite vraie s'il est impossible qu'elle soit fausse, c'est à dire si l'on démontre qu'elle ne peut pas avoir de contre-exemple.

Mais quel est le contre-exemple ici ? S_3 et T_2 : lorsque les interrupteurs sont dans cette position, le courant ne passe pas dans la lampe n°2, mais il passe dans la lampe n°5. Cette conjecture qui présente un contre-exemple est donc fausse.

Etude d'une troisième conjecture

La conjecture C_3 est-elle vraie ou fausse ?

C_3 : "Si L_3 , alors L_2 "

Etude de C_3 dans un groupe

Voici quelques arguments qui émergent du débat, quel que soit d'ailleurs le niveau du public :

- "(L_3 implique non L_2) est vraie, donc (L_3 implique L_2) est fausse", *(ce qui est faux),*
- "il n'a pas d'exemple, donc elle est fausse" *(ce qui est faux aussi)...*

Peut-être est-il temps de revenir à l'étude précédente, et à la règle fondamentale des mathématiques ? Qu'est-ce qu'une conjecture vraie ? Une conjecture qui n'est pas fausse, donc une conjecture qui présente la garantie absolue de n'avoir aucun contre-exemple. Quel contre-exemple peut-on donner ici ? S_2 et T_1 ? S_2 et T_2 ? Ce ne sont pas tous les deux des contre-exemples : le deuxième est un "hors-sujet". L'objectif de l'étude de cette conjecture est justement de définir ces mots.

Exemple, contre-exemple, hors-sujet pour une conjecture C donnée du type "Si A, alors B"

Pour une conjecture C donnée,

*** un <u>exemple</u> est un cas qui vérifie l'hypothèse et la conclusion de C,**

*** un <u>contre-exemple</u> est un cas pour lequel l'hypothèse de C est vraie, alors que le conclusion de C est fausse,**

*** un <u>hors-sujet</u> est un cas pour lequel l'hypothèse de C n'est pas vérifiée.**

Ici, il n'y a que 6 cas possibles, ce sont ceux qui correspondent aux 6 combinaisons des interrupteurs. Examinons les conjectures 2 et 3.

Conjecture C_2:"Si non L_2 , alors non L_5".

Pour la conjecture C_2	l'hypothèse est "non L_2"	la conclusion est "non L_5"	
Cas	hypothèse H	conclusion C	Ce cas est un
S_1 et T_1	vraie	vraie	exemple
S_1 et T_2	vraie	vraie	exemple
S_2 et T_1	fausse		hors-sujet
S_2 et T_2	fausse		hors-sujet
S_3 et T_1	vraie	vraie	exemple
S_3 et T_2	vraie	fausse	contre-exemple

Conjecture C_3 : "Si L_3 , alors L_2".

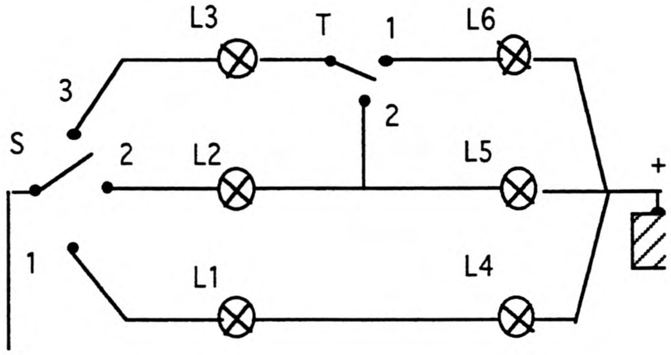
Pour la conjecture C_3	l'hypothèse est "L_3"	la conclusion est "L_2"	
Cas	hypothèse H	conclusion C	Ce cas est un
S_1 et T_1	fausse		hors-sujet
S_1 et T_2	fausse		hors-sujet
S_2 et T_1	fausse		hors-sujet
S_2 et T_2	fausse		hors-sujet
S_3 et T_1	vraie	fausse	contre-exemple
S_3 et T_2	vraie	fausse	contre-exemple

Ainsi, ces conjectures sont bien fausses puisqu'elles admettent au moins un contre-exemple : c'est l'argument qui est à donner ici. La présence ou l'absence d'exemples n'a rien à voir avec le fait qu'une conjecture soit vraie ou fausse.

Etude d'une quatrième conjecture

La conjecture C_4 est-elle vraie ou fausse ?

C_4 : "Si L_1 et L_3 , alors L_2 et non L_5"



Etude de C_4 dans un groupe

Que se passe-t-il ? Encore une fois, à peu près toujours la même chose : la discussion est très animée. Certains, qui examinent les six cas possibles et ne trouvent aucun contre-exemple, appliquent la règle du jeu mathématique, d'autres leur opposent que c'est complètement absurde, donc c'est forcément faux. L'étude de cette conjecture constitue réellement un obstacle : il n'est pas aussi simple qu'on aurait pu le croire au premier abord de comprendre le principe de contradiction que nous avons vu lors de l'étude de la deuxième conjecture, et, pour certains, c'est maintenant que se joue l'acquisition de cette connaissance fondamentale. Je ne brusque pas les choses et laisse suffisamment de temps à chacun pour qu'il se rende compte de la contradiction entre "c'est faux parce que c'est absurde" (on ne peut pas jamais avoir L_1 et L_3 en même temps) et "c'est vrai parce qu'il n'y a pas de contre-exemple". Mais notons que la connaissance ne s'acquiert souvent qu'après un parcours sinueux passant par des moments de compréhension et d'autres de non-compréhension et que ce qui se passe lors de l'étude de cette conjecture relève de ce processus.

Mais concluons ici après avoir examiné le tableau ci-desscus.

Pour la conjecture C_4	l'hypothèse est "L_1 et L_3"	la conclusion est "L_2 et non L_5"	
Cas	hypothèse H	conclusion C	Ce cas est un
S_1 et T_1	fausse		hors-sujet
S_1 et T_2	fausse		hors-sujet
S_2 et T_1	fausse		hors-sujet
S_2 et T_2	fausse		hors-sujet
S_3 et T_1	fausse		hors-sujet
S_3 et T_2	fausse		hors-sujet

La conjecture C_4 n'admet aucun contre-exemple, donc elle ne peut être que vraie. Cependant on note qu'il n'existe que des hors-sujet pour cette conjecture, elle ne peut être illustrée par aucun exemple : elle ne présente aucun intérêt, elle est complètement vide, mais elle est vraie.

Commentaires sur l'étude de ces quatre conjectures et exploitation

1 - Nous accordons une grande importance à l'étude de cette quatrième conjecture, destinée à établir l'existence d'un écart considérable entre le fonctionnement du monde habituel, concret ou abstrait d'ailleurs, qui nous entoure et celui des mathématiques.

En effet, dans le monde quotidien, est considéré comme vrai ce qui est vrai dans beaucoup de cas, et ce n'est pas un cas malheureux, où cela ne marche pas, qui fait basculer les opinions. L'exception qui confirme la règle est un adage fondamentalement faux en mathématiques, comme le montre l'étude de la conjecture C_2 : <u>un seul</u> contre-exemple suffit à prouver qu'une conjecture est fausse. L'a-t-on dit un jour à nos élèves ? Leur a-t-on fait comprendre que pour faire des mathématiques, il faut passer d'un monde de couleurs et de subtilités à un monde peint en noir et blanc ? Insistons : il n'y pas de nuances dans la vérité mathématique, pas de conjecture qui soit, dans un modèle donné, un peu fausse ou un peu vraie, ou encore presque vraie ou encore "vraie dans certains cas", comme le disent parfois certains élèves. Dans nos classes, nous ne rencontrons que des conjectures qui n'ont que deux valeurs de vérité très nettes : "Vrai" ou "Faux" (nous excluons ici les conjectures indécidables[1] qui ne nous concernent pas au collège ou au lycée). Bien sûr, il n'est pas toujours évident de connaître cette valeur de vérité, c'est pourquoi nous avons la possibilité de voter "Autre".

Toute cette activité "circuit" a justement pour but de montrer qu'il faut être conscient de cette rupture, entre la vérité du quotidien et celle des mathématiques : tant que l'on n'a pas compris que faire des mathématiques, c'est se plonger dans un modèle, c'est à dire un monde complètement simplifié, en dehors de toute réalité, et que ce modèle est régi par un principe de contradiction fondamental, on ne peut que tenter d'imiter un certain discours, dans un champ nécessairement limité, sans rien comprendre en profondeur. Et cette convention des mathématiques, celle que l'on fait émerger de l'étude de la deuxième conjecture, est incontournable : son non-respect fait sortir immédiatement du monde mathématique, aucun compromis n'est possible. Là encore, la différence est grande avec le monde habituel.

Pour montrer cette rupture, nous choisissons de provoquer un conflit. Celui-ci sera d'autant plus violent et, par suite, porteur de fruits, qu'il est vécu dans un groupe de personnes suffisamment nombreux. Aussi consacrons-nous du temps à l'étude de la première conjecture, même s'il faut lutter (et inéluctablement la résistance est forte) contre une majorité : notre véritable objectif, au travers de

[1] On dit qu'une conjecture est indécidable si le fait de la déclarer vraie, tout comme celui de la considérer fausse, ne conduit à aucune contradiction.

l'étude de cette conjecture, est en fait l'installation de ce malaise, qui permet ensuite d'expliquer que l'on ne peut faire des mathématiques que si l'on se plonge dans un modèle.

Il peut arriver que, lors de l'étude de cette première conjecture, tous les participants soient d'accord pour dire qu'elle est vraie et qu'il n'y ait pas du tout de conflit au départ. Cela ne sert absolument pas notre objectif. Nous avons alors confectionné un "véritable circuit" en montant en série deux ampoules, l'une du phare-avant, l'autre du phare-arrière d'une bicyclette : lorsque l'on relie les deux ampoules à une pile de 4,5 V, le courant les traverse effectivement, mais l'une "ne brille pas" ; elles sont en effet de puissances différentes. L'utilisation de ce circuit permet d'instaurer le doute et de poser le problème du modèle.

2 - Pourquoi un circuit ? Certaines personnes sont très réticentes face aux mathématiques : souvent celles qui n'ont pas eu conscience du pas à franchir entre le réel et les mathématiques et qui voient ce dernier de très loin. Aussi avons-nous choisi, pour qu'elles puissent s'en rapprocher, de les y attirer par des activités apparemment non mathématiques, comme semble l'être l'activité "circuit".

C'est assez tôt dans l'année scolaire que nous introduisons cette activité en classe. Auparavant nous créons des occasions où se pose la question de vrai et du faux. Et au moment d'aborder "circuit", nous en présentons l'objectif qui est justement de clarifier ce que l'on appelle vrai et ce que l'on appelle faux en mathématiques.

Lors de l'étude de la deuxième conjecture nous faisons le point sur les notions d'exemple, de contre-exemple, de hors-sujet pour une conjecture donnée, ainsi que la convention fondamentale du vrai et du faux du mathématicien.

Une pause est alors bénéfique à ce moment lorsque l'on pratique cette activité avec des élèves de lycée. Nous arrêtons là en général l'activité "circuit" pour quelques semaines, au cours desquelles nous ne manquons aucune occasion de faire fonctionner le principe de contradiction dans le monde mathématique de la classe. Dans une classe de seconde, nous nous contentons d'ailleurs de l'étude de ces deux premières conjectures pour une bonne partie de l'année, et ce n'est qu'au milieu de l'année scolaire que nous poursuivons l'activité par l'étude d'autres conjectures, que l'on verra dans les pages suivantes, qui concernent les notions de réciproque et de contraposée.

En collège, il nous semble tout aussi important que ces points de modèle et de contre-exemple soient abordés très tôt : le circuit électrique peut alors être remplacé par un circuit de bus (voir en annexe de ce chapitre). Les autres notions peuvent être abordées un peu plus tard, à partir de la classe de quatrième.

En résumé :

Premières notions abordées pour entrer dans le jeu des mathématiques :	**Dans l'activité "circuit" précédente :**
Notion de modèle	Etude de la conjecture C_1
Définition d'un exemple, d'un contre-exemple, d'un hors-sujet, pour une conjecture donnée	Etude de la conjecture C_2, qui permet d'illustrer chacune des définitions.
Convention fondamentale des mathématiques : **au sein d'un modèle, une conjecture est dite fausse si elle admet un contre-exemple ; une conjecture est dite vraie si l'on démontre qu'il ne peut en exister aucun contre-exemple.**	Etude de la conjecture C_2, qui permet d'énoncer ce principe, puis des conjectures C_3 et C_4, qui permettent d'asseoir véritablement cette convention.

Quelques exemples au collège ou en seconde

Après l'activité précédente, on peut demander aux élèves de résoudre quelques conjectures très simples (ils doivent dire si elles sont vraies ou fausses et le prouver) du type suivant.

Conjecture 1 : "quels que soient les nombres a et b (réels, à partir de la classe de seconde), si $a \leq b$, alors $a^2 \leq b^2$."

Conjecture 2 : "tout nombre réel est inférieur à son carré."

Conjecture 3 : "quels que soient les nombres a et b différents de 0 (réels, à partir de la classe de seconde), si $a \leq b$, alors $\frac{1}{a} \leq \frac{1}{b}$"

Conjecture 4 : "quels que soient deux nombres entiers impairs consécutifs, leur somme est multiple de 4."

L'étude de ces conjectures permet un travail en profondeur sur le raisonnement et sur les nombres. On aborde aussi les problèmes de langage en demandant une reformulation des conjectures 2 et 4 sous la forme "si , alors..." avant leur étude. Elle peuvent être la base du cours, si on en débat en classe. Les trois premières font encore fonctionner la règle du contre-exemple, mais la dernière demande le passage à une démonstration, utilisant par exemple l'écriture algébrique, pour convaincre qu'il n'existe pas de contre-exemple.

Conjecture 5 : "quels que soient les triangles OAB et OA'B' tels que O, A, A' d'une part et O, B, B' d'autre part, soient alignés, si $\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB}$, alors (AB) et (A'B') sont parallèles."

Elle permet non seulement de faire fonctionner la règle du contre-exemple, mais aussi de montrer l'importance de l'ordre des points dans l'énoncé de la "réciproque" du théorème de Thalès : cette fameuse petite phrase dont aucun élève ne se soucie, soit qu'il l'apprenne par cœur sans comprendre, soit qu'il n'apprenne rien du tout.

Plus particulièrement en seconde, on peut demander l'étude des conjectures suivantes.

Conjecture 6: "quels que soient les points A, B, A', B' et le réel x, si $\overrightarrow{AB} = x\,\overrightarrow{A'B'}$, alors $AB = x\,A'B'$ "

Ici encore fonctionne le principe de contradiction, on étudie aussi un des aspects de la différence entre vecteur et longueur et l'utilisation de la lettre x qui ne désigne pas nécessairement un nombre positif.

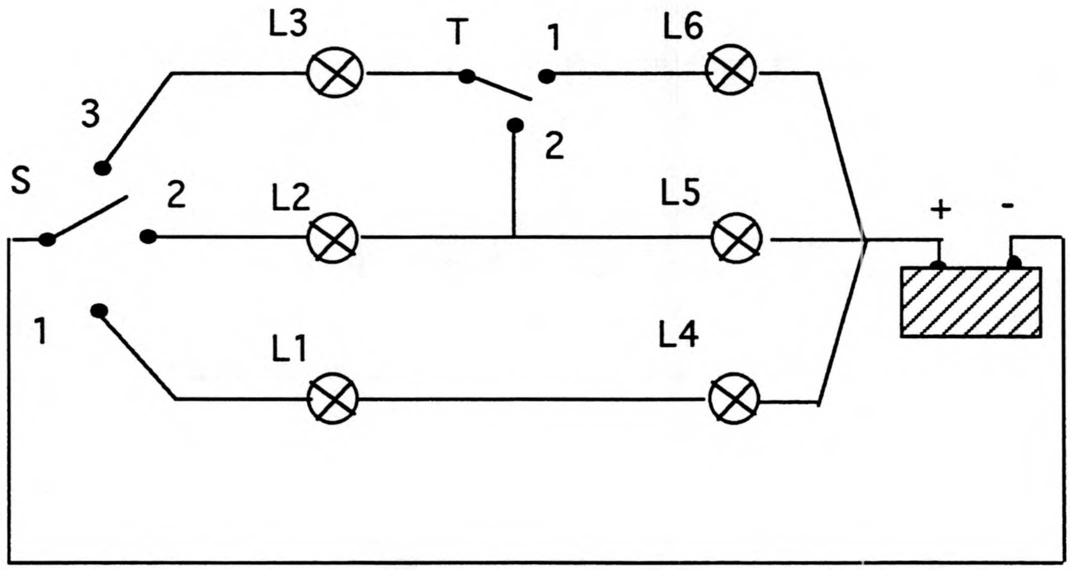
Dans tous les cas, la recherche de contre-exemple est une activité riche : elle permet de manipuler les concepts fondamentaux et peut déboucher, soit sur la rédaction d'une démonstration élaborée dans le cas où la conjecture est vraie, soit sur l'énoncé d'une autre conjecture dont on a modifié l'énoncé au vu des contre-exemples trouvés pour la précédente. On peut finir par aboutir ainsi à un théorème.

Faire des mathématiques, c'est bien le but que nous poursuivons pour chacun de nos élèves. Ce que nous venons de voir de l'activité "circuit" n'est qu'un moyen de les faire entrer dans un mode de pensée qui leur permette d'avancer vers cet objectif, chacun à son niveau. Le travail est à poursuivre sans cesse dans le même esprit. Mais quel que soit le niveau, il n'y a pas besoin de chercher des conjectures très compliquées, bien au contraire. Mais en donner à débattre en classe, en y passant du temps, permet de voir certaines notions fondamentales sous des aspects différents et de travailler sur les définitions. Et ceci est accessible à tous les élèves, même faibles. Nous avons choisi de leur permettre, à eux aussi, de faire réellement des mathématiques, sans les considérer comme devant bénéficier sans cesse d'une aide particulière. La possibilité qui est offerte à toute la classe de voter "Autre" est justement destinée à n'écarter aucun élève, en reconnaissant à chacun le droit de "ne pas savoir". Mais nous y reviendrons dans le chapitre suivant.

Contraposée et réciproque : retour au circuit

Après cette première partie de l'activité "circuit" décrite ci-dessus, il nous semble important d'aborder la notion de réciproque assez tôt au collège (cinquième ou quatrième), celle de contraposée pouvant être remise à la classe de troisième ou de seconde, encore qu'elle s'avère indispensable si l'on veut justifier simplement le raisonnement qui consiste à démontrer qu'un certain triangle n'est pas rectangle, ou que certaines droites ne sont pas parallèles.

Nous choisissons habituellement d'aborder ces notions en utilisant à nouveau l'activité "circuit" au travers de l'étude des conjectures suivantes, dans le même modèle de circuit normalisé que celui qui a été décrit à la fin de l'étude de la conjecture C_1.



Implication directe et réciproque

On peut reprendre l'étude de la conjecture C_2: "si non L_2 , alors non L_5 " *(S_3 et T_2 est un contre-exemple pour cette conjecture : elle est donc fausse.).*

Puis passer à l'étude de la **conjecture C_5 : "si non L_5 , alors non L_2 "**

Il est intéressant de construire le tableau renfermant les six cas possibles.

Pour la conjecture C_5	l'hypothèse est "non L_5"	la conclusion est "non L_2"	
Cas	hypothèse H	conclusion C	Ce cas est un
S_1 et T_1	vraie	vraie	exemple
S_1 et T_2	vraie	vraie	exemple
S_2 et T_1	fausse		hors-sujet
S_2 et T_2	fausse		hors-sujet
S_3 et T_1	vraie	vraie	exemple
S_3 et T_2	fausse		hors-sujet

Cette conjecture C_5 n'admettant aucun contre-exemple est donc vraie.

Notons que les valeurs de vérité (c'est à dire qu'elles soient vraies ou fausses) d'une implication (I) telle que $A \Rightarrow B$ et de sa réciproque (R) telle que $B \Rightarrow A$ sont complètement indépendantes l'une de l'autre : en effet, si (I) admet un contre-exemple, c'est un cas où A est vraie et B est fausse, c'est donc un hors-sujet pour la réciproque (R), puisque son hypothèse B est fausse.

Implication et contraposée

<u>Conjecture C_6</u> : "si L_2, alors L_5"

Pour la conjecture C_6	l'hypothèse est "L_2"	la conclusion est "L_5"	
Cas	hypothèse H	conclusion C	Ce cas est un
S_1 et T_1	fausse		hors-sujet
S_1 et T_2	fausse		hors-sujet
S_2 et T_1	vraie	vraie	exemple
S_2 et T_2	vraie	vraie	exemple
S_3 et T_1	fausse		hors-sujet
S_3 et T_2	fausse		hors-sujet

Etant donnée une conjecture écrite sous la forme, "si A, alors B" , que l'on appelle (D) (implication directe), sa réciproque est, comme nous l'avons vu, "si B, alors A" , et elle n'est pas à confondre avec sa contraposée "si (non B) , alors (non A) ", que l'on désigne par (C).

Pour la contraposée (C) , un contre-exemple est un cas où (non B) est vrai et (non A) faux, autrement dit, un cas où B est faux et A vrai, c'est donc aussi un contre-exemple pour l'implication directe (D). Réciproquement un contre-exemple pour (D) est aussi un contre-exemple pour (C) . (C) et (D) ont donc les mêmes contre-exemples, ce qui permet d'affirmer qu'une implication directe et sa contraposée ont la même valeur de vérité. Cependant, même si elles sont logiquement équivalentes, elles sont formellement très différentes et elles ne disent pas la même chose ; en effet, un exemple pour (D) est un cas où A et B sont vrais, autrement dit, un cas où (non A) et (non B) sont faux, c'est donc un hors-sujet pour la contraposée. Débattre de cette conjecture 6 permet justement d'expliciter cette idée importante, qui permet de déboucher sur le principe démonstratif suivant : si on n'a pas d'idée pour démontrer qu'une conjecture est vraie, le passage à sa contraposée peut permettre de débloquer la situation.

Par exemple, lorsqu'il s'agit de démontrer la conjecture (E_1) suivante :

"si le carré d'un entier naturel est impair, alors cet entier est impair".

Sa contraposée est (E_2) : " si un entier naturel est pair, alors son carré est pair". L'idée évoquée par cette contraposée est différente de celle que l'on a à la lecture de (E_1), bien qu'elles soient toutes les deux logiquement équivalentes. La démonstration de (E_2) est immédiate, et elle prouve aussi (E_1).

Quelques compléments de logique

Ce qui suit, sous cette forme, est destiné aux enseignants. Il ne s'agit pas d'un cours de logique, mais de quelques bases qui peuvent servir aux professeurs de mathématiques.

Négation de "quel que soit , il existe..."

Nous allons utiliser ici les mots de "prédicat" et de "proposition".

Nous appelons **proposition** toute suite de symboles mathématiques qui peut se traduire par une phrase compréhensible, dont on peut dire si elle est "vraie" ou si elle est "fausse". "$4 \geq 3$" est une proposition vraie ; "$4 \geq 5$" est une proposition fausse.

Ce que nous appelons **un prédicat à une variable x** est une suite de symboles mathématiques qui peut se traduire par une phrase compréhensible, renfermant une variable désignée par x, qui prend ses valeurs dans un ensemble bien défini, la valeur de vérité de cette phrase dépendant uniquement de la valeur de la variable.

Par exemple, x désignant un entier naturel, "x est pair" est un prédicat à une variable, que l'on note P(x), qui est vrai par exemple pour la valeur 4 de la variable x, mais qui est faux pour la valeur 5 de la variable x. Pour toute valeur de x dans l'ensemble IN, on peut dire si P(x) est vrai ou bien faux.

P désignant un prédicat à une variable x décrivant un ensemble E, comment dire que la proposition [**quel que soit x, x appartenant à un ensemble E, P(x)**], que l'on appelle $\mathcal{P}$, est <u>fausse</u> ? Cela revient à dire que sa négation est vraie, c'est à dire que la proposition $\mathcal{P}$ admet au moins un contre-exemple. Un contre-exemple pour $\mathcal{P}$ est une valeur de la variable x appartenant à E telle que (non P(x)). Autrement dit, dire que (non $\mathcal{P}$) est vraie signifie que la proposition [**il existe x, x appartenant à E, tel que (non P(x))**] est <u>vraie</u>. Ainsi en reprenant l'exemple ci-dessus, où x désigne un entier naturel et P(x) le prédicat "x est pair" : prenons pour $\mathcal{P}$ la proposition [quel que soit x, $x \in$ IN, P(x)], dire qu'elle est fausse revient à dire que [il existe x, $x \in$ IN, (non P(x))] est vraie, c'est à dire qu'il existe un entier naturel qui n'est pas pair.

Maintenant, Q désignant un prédicat à une variable appartenant à un ensemble E, quelle est la négation de la proposition $\mathbf{Q}$ suivante : [**il existe x, x appartenant à E, tel que Q(x)**]" ? $\mathbf{Q}$ signifie l'existence d'un contre-exemple à la proposition $\mathbf{Q'}$ qui est : [**quel que soit x, x appartenant à E, (non Q(x))**]. Par exemple, en appelant $\mathbf{Q}$ la proposition [il existe x, x appartenant à IN, $x < 0$], on peut dire que $\mathbf{Q}$ affirme l'existence d'un contre-exemple à la proposition $\mathbf{Q'}$ suivante, [quel que soit x, x appartenant à IN, $x \geq 0$] : $\mathbf{Q'}$ étant vraie, $\mathbf{Q}$ est fausse.

Si l'une de ces deux propositions est fausse, alors l'autre est nécessairement vraie ; l'une est donc la négation de l'autre.

Un autre exemple : pour démontrer que la proposition **Q** suivante: "il existe un réel x tel que $x \geq \sqrt{x^2+1}$" est fausse, il suffit de démontrer que la proposition **Q'** [pour tout x, x est réel, $x < \sqrt{x^2+1}$] n'a aucun contre-exemple, c'est à dire qu'elle est vraie.

Remarquons que [$\sqrt{a^2+b^2} = a + b$] est faux (évidemment, lorsque l'on écrit une telle proposition, on sous-entend "quels que soient les réels a et b"), et [$\sqrt{a^2+b^2} \neq a + b$] est faux aussi (avec le même sous-entendu). Et les deux propositions

[$\exists (a,b), (a,b) \in \mathbb{R}^2, \sqrt{a^2+b^2} = a + b$] et [$\exists (a,b), (a,b) \in \mathbb{R}^2, \sqrt{a^2+b^2} \neq a + b$]

sont toutes les deux vraies.

Dans la classe

"Est-ce que j'ai le droit de remplacer $\frac{5x+3}{2}$ par $5x + \frac{3}{2}$?", demande Valérie au milieu de la résolution d'une équation en classe.

Que peut faire le professeur ?

- Il répond : " la règle, c'est $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$, donc c'est ce que tu dois appliquer....";

ou alors,

- il dit : "prends x = 1 et remplace dans chacune des expressions, qu'en penses-tu ?"

Donner la première réponse renforce les élèves dans l'idée qu'en mathématiques, il y a des lois, que l'on <u>n'a pas le droit de faire certaines choses</u>. Aucune initiative n'est laissée à Valérie : elle doit appliquer la règle. Dans ce cas l'attitude du professeur est en désaccord avec l'image des mathématiques que nous avons choisi de développer chez les élèves. Quant à la deuxième façon de répondre, elle renvoie la balle dans le camp de Valérie qui doit alors faire fonctionner le principe de contradiction. Elle permet certes d'entrer dans le "vrai" et le "faux", mais l'initiative n'en est pas laissée à l'élève.

Nous, nous avons choisi de **ne pas répondre à ce genre de question.** Nous renvoyons systématiquement cette question à la classe, qui doit en extraire une conjecture vraie ou fausse, arguments à l'appui. Ainsi ici :

"quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $\frac{5x+3}{2} = 5x + \frac{3}{2}$ " est fausse.

Mais " il existe $x \in \mathbb{R}$, $\frac{5x+3}{2} = 5x + \frac{3}{2}$ " est vraie.

Retour sur l'implication

Deux "règles" de base du raisonnement déductif

Sachant que, pour tout x d'un ensemble E, A(x) implique B(x) et que, pour tout x de E, A(x) est vrai, on peut en déduire que B(x) est vrai pour tout x de E. Il ne peut en effet exister aucune valeur de x pour laquelle B(x) est faux, car, dans ce cas, cette valeur constituerait un contre-exemple pour l'implication A(x) ⇒ B(x), ce qui contredirait le fait que cette implication est vraie pour tout x de E. Ceci correspond à la première "règle" de base du raisonnement déductif, la "règle du modus ponens" :

[(A ⇒ B) et A] ⇒ B ou encore,

sachant que (A ⇒ B) est vrai et que A est vrai, on en déduit que B est vrai.

Sachant que, pour tout x élément d'un ensemble E, A(x) implique B(x) et qu'il existe x_0 de E pour lequel B(x_0) est faux, on peut en déduire que A(x_0) est faux aussi. En effet, si A(x_0) était vrai, il en serait de même de B(x_0) puisque A(x_0) ⇒ B(x_0). On utilise la contraposée de l'implication. Ceci rejoint la deuxième "règle" de base du raisonnement déductif qui est celle du "modus tollens" :

[(A ⇒ B) et (non B)] ⇒ (non A) ou encore,

sachant que (A ⇒ B) est vrai et que B est faux, on en déduit que A est faux.

Mais attention ! **Sachant que, pour tout x de E, A(x) implique B(x) et que, pour tout x de E, B(x) est vrai, on ne peut rien conclure sur A(x)** : en effet il se peut ausi bien qu'il y ait des valeurs de x pour lesquelles A(x) est vrai que des valeurs de x pour lesquelles A(x) est faux. Toute valeur de x pour laquelle A(x) est vrai constitue un exemple pour l'implication, puisqu'alors A(x) et B(x) sont tous les deux vrais. Et toute valeur de x pour laquelle A(x) est faux n'est qu'un hors-sujet pour l'implication. Par exemple : pour tout x réel, l'implication $3x = 5x + 2 \Rightarrow 0x = 0$ est vraie puisqu'elle repose sur le théorème "si deux nombres réels sont égaux, alors les produits de chacun d'eux par un même réel sont égaux aussi". "0 x = 0" est vrai pour tout x réel, mais il existe un réel pour lequel "3 x = 5 x + 2 " est vrai, c'est - 1, et il existe une infinité de réels pour lesquels "3 x = 5 x + 2 " est faux.

Table de vérité

Voici un autre cadre dans lequel on peut voir l'implication : celui d'une table de vérité[1]. Mais ne nous y méprenons pas : l'implication y apparaît sans aucune difficulté, parce qu'il n'y a plus aucun non-dit. Il ne faudrait surtout pas penser que la connaissance de la table de vérité de l'implication suffirait à faire comprendre cette notion. Une table de vérité ne porte que sur des propositions, lesquelles constituent un système beaucoup trop pauvre pour modéliser l'activité mathématique.

Insistons : ce qui suit n'est pas proposé pour être étudié en classe.

On peut donner la **définition suivante de l'implication** :

A et B désignant deux propositions quelconques, dire que **"A implique B"** est vrai signifie qu'**on ne peut pas avoir A vrai et B faux** ou encore qu'**il n'y a pas A sans B** (ce que nous avons déjà appelé le caractère de **nécessité** de ces énoncés).

Ainsi (A ⇒ B) est faux seulement dans le cas où A est vrai et B faux (contre-exemple). Le cas où A et B sont tous les deux vrais constitue un exemple pour l'implication et les cas où A est faux (que B soit vrai ou faux) ne sont que des hors-sujet pour (A ⇒ B).

A	B	**A ⇒ B**
V	V	**V**
V	F	**F**
F	V	**V**
F	F	**V**

Cette table permet donc de regrouper tous ces cas : c'est la table de vérité de A ⇒ B.

Nous venons de dire que (A ⇒ B) est faux seulement dans le cas où A est vrai et B faux, et donc que, dans les autres cas, (A ⇒ B) est vrai. Ces autres cas correspondent à **A faux ou B vrai**, ou encore à **(non A) vrai ou B vrai**. Construisons la table de vérité de [(non A) ou B].

A	B	non A	**(non A) ou B**
V	V	F	**V**
V	F	F	**F**
F	V	V	**V**
F	F	V	**V**

Nous retrouvons exactement la même table de vérité que celle de A ⇒ B.

[1] Une table de vérité est un tableau dans lequel sont récapitulés les quatre cas concernant la vérité du couple de propositions (A , B) .

Nous y retrouvons les deux "règles" de base du raisonnement déductif, dont nous venons de parler ci-dessus. La première ligne de la table de vérité correspond à $[(A \Rightarrow B) \text{ et } A] \Rightarrow B$; dans la dernière ligne, nous retrouvons que $[(A \Rightarrow B) \text{ et } (\text{non } B)] \Rightarrow (\text{non } A)$.

Quant aux deux autres lignes, elles illustrent ce dont il est question à la fin du paragraphe précédent, à savoir que : sachant que A implique B et que B est vrai, on ne peut rien en conclure sur A, puisqu'il peut être tout aussi bien vrai que faux.

Exemples

Ce qui suit n'est pas destiné à être étudié en classe, il s'agit simplement d'asseoir les notions de logique dont nous venons de parler.

1 - Proposition P_1 : "$\forall x \in \mathbb{R} : 2 - x^2 = 9x^2 \Rightarrow \sqrt{2 - x^2} = 3x$"

a) Que représente le cas où x vaut $\sqrt{0,2}$ pour cette proposition ?

C'est un exemple puisque $2 - (\sqrt{0,2})^2 = 9(\sqrt{0,2})^2$ et $\sqrt{2 - (\sqrt{0,2})^2} = 3\sqrt{0,2}$.

b) Que représente le cas où x vaut $-\sqrt{0,2}$ pour cette proposition ?

C'est un contre-exemple puisque $2 - (-\sqrt{0,2})^2 = 9(-\sqrt{0,2})^2$ et $\sqrt{2 - (-\sqrt{0,2})^2} \neq 3(-\sqrt{0,2})$.

c) Que représente le cas où x vaut 0 pour cette proposition ?

C'est un hors-sujet puisque $2 - 0^2 \neq 9(0)^2$.

P_1 est évidemment fausse puisqu'elle admet un contre-exemple.

2 - Proposition P_2 : "$\forall x \in \mathbb{R} : \sqrt{2 - x^2} = 3x \Rightarrow 2 - x^2 = 9x^2$"

a) P_2 est-elle vraie ou fausse ?

Elle est évidemment vraie puisqu'il s'agit d'une application du théorème :

"$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 : a = b \Rightarrow a^2 = b^2$"

b) Que représente le cas où x vaut - 1 pour cette proposition ?

Il s'agit d'un hors-sujet puisque $\sqrt{2 - (-1)^2} \neq 3(-1)$

c) Quels sont les exemples pour P_2 ?

Il n'y en qu'un, c'est $x = \sqrt{0,2}$.

En effet, un exemple est une valeur de x pour laquelle $\sqrt{2 - x^2} = 3x$ et $2 - x^2 = 9x^2$. Or l'équation $2 - x^2 = 9x^2$ n'a que deux solutions dans IR qui sont $\sqrt{0,2}$ et $-\sqrt{0,2}$. D'après **1**, seule $\sqrt{0,2}$ convient pour $\sqrt{2 - x^2} = 3x$.

3 - Proposition P_3 : "$\forall x \in IR : \sqrt{2\ x^2+3} = x+1 \Rightarrow 2x^2+3=(x+1)^2$"

Est-elle vraie ou bien fausse ?

La vérité de cette implication vient évidemment du même théorème que celui qui est cité ci-dessus, mais il n'y a ici aucun exemple : en effet, un exemple serait une valeur de x pour laquelle $\sqrt{2\ x^2+3} = x+1$ et $2x^2+3=(x+1)^2$. Or l'équation $2x^2+3=(x+1)^2$ n'a aucune solution dans IR. Donc "$\sqrt{2\ x^2+3} = x+1$ et $2x^2+3=(x+1)^2$" ne peut jamais être réalisé.

Mais il n'y a pas non plus de contre-exemple car, s'il en existait un, c'est à dire s'il existait un réel a tel que : $\sqrt{2\ a^2+3} = a+1$ **et** $2a^2+3=(a+1)^2$, alors il existerait un réel a tel que $2a^2+3=(a+1)^2$, donc cela contredirait le fait que l'équation $2x^2+3=(x+1)^2$ n'a aucune solution dans IR.

Notion de variable

Accéder à un langage d'initiés

Examinez la conjecture suivante :

"si un triangle est isocèle, alors une hauteur est aussi médiane".

Comparez-la à la phrase suivante :

"si Paul arrive avant 8 heures, alors nous irons au cinéma".

Elles sont bien toutes deux de la forme "si A , alors B ", mais dans la première se cachent deux variables, la variable "triangle" et la variable "hauteur", alors que dans la deuxième, il s'agit de Paul et d'une autre personne bien identifiée.

Que s'agit-il de comprendre au travers de cette première conjecture ? Donnons-en une reformulation qui explicite ces variables :

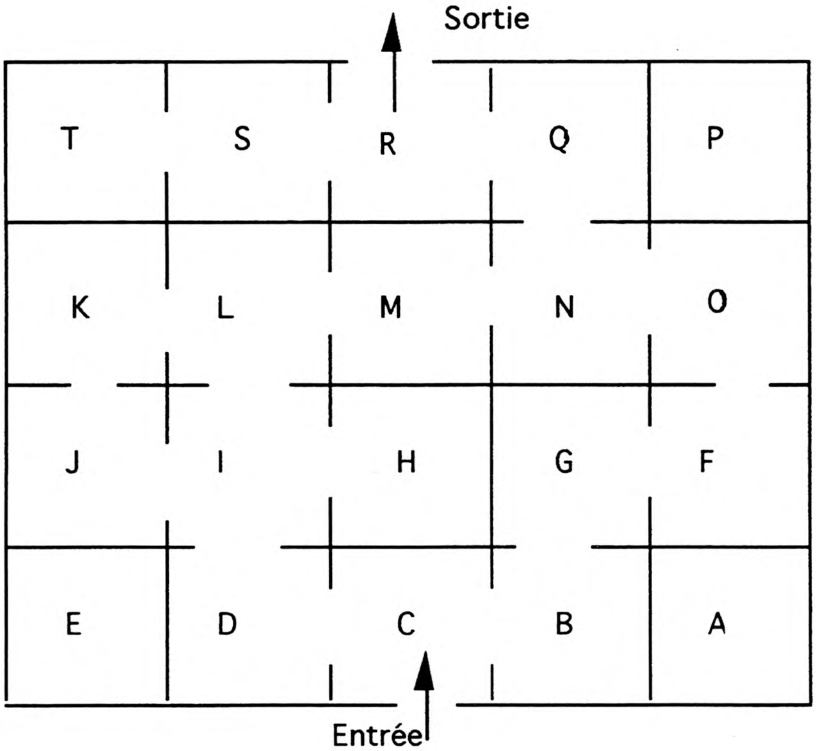
"Quel que soit le triangle ABC, si ABC est isocèle, alors il existe une hauteur de ABC qui est aussi une médiane".

Bien sûr, c'est très lourd, mais on y voit clairement apparaître les deux variables : "triangle", qui peut prendre une infinité de valeurs, et "médiane", qui, une fois le triangle fixé, ne peut prendre que trois valeurs. Ainsi sous l'utilisation des articles "un" ou "une", on doit comprendre que le premier signifie "quel que soit un" et que le deuxième signifie "il existe une". On voit donc au travers de cet exemple que la géométrie est très elliptique, qu'elle ne peut être comprise que si l'on accède au langage d'initiés qu'elle véhicule. Notre jeu d'enseignant consite donc à faire comprendre à chaque élève les subtilités sous-entendues sous chaque mot, à lui faire construire le sens des définitions et des théorèmes, de manière à le faire accéder à cette complexité qui fait partie du savoir mathématique. Ce n'est pas une mince affaire, car la compréhension logique des énoncés est d'autant plus difficile que leur syntaxe est simplifiée, et ceci est spécialement vrai en géométrie. Nous allons donc devoir commencer par les exercer à la gymnastique intellectuelle qui consiste à rétablir les quantificateurs là où ils sont omis.

Lors de l'activité "circuit" évoquée ci-dessus, il n'est pas du tout clair pour tout le monde que ce qui peut constituer un contre-exemple, c'est une position particulière du couple des deux interrupteurs : ainsi se cache derrière chacune des conjectures relatives à ce circuit une variable, qui peut prendre six valeurs possibles.

Voyons cela sur un autre exemple, emprunté à l'évaluation du programme de seconde faite par l'APMEP en 1991, qui a été analysé aussi par V. DURRAND-GUERRIER (voir la bibliographie).

Le labyrinthe, extrait de la brochure EVAPM 2/91



Voici un labyrinthe. Lire attentivement les lignes ci-dessous avant de répondre aux questions.
Une personne, que nous appellerons X, a traversé ce labyrinthe, de l'entrée à la sortie, sans jamais être passée deux fois par la même porte.
Les pièces sont nommées A, B, C,...comme il est indiqué sur la figure.

Il est possible d'énoncer des phrases qui aient un sens par rapport à la situation proposée et sur la vérité desquelles on puisse se prononcer (VRAI ou FAUX), ou qui peuvent être telles que les informations que l'on possède ne suffisent pas pour décider si elles sont vraies ou fausses (ON NE PEUT PAS SAVOIR).....

Ensuite sont proposées plusieurs phrases, dont voici les trois dernières :
Phrase n°4 : "Si X est passé par O, alors X est passé par F" *(qui est vraie) ;*

phrase n°5 : Si X est passé par K, alors X est passé par L" *(qui est vraie) ;*

phrase n°6 : "Si X est passé par L, alors X est passé par K".

Pour cette dernière phrase on est tenté de répondre qu'on ne peut pas savoir : X a pu passer par K, mais X a aussi pu passer par I, qui communique directement avec J, en évitant le passage par K. Mais pourtant "X est passé par L et par I" n'est-il pas un contre-exemple ? Cela dépend : X désigne-t-il une variable ou non ? Si X désigne une variable, c'est à dire une personne prise parmi toute personne qui a traversé ce labyrinthe, de l'entrée à la sortie, sans jamais passer deux fois par la même porte, alors on a effectivement un contre-exemple, et on peut dire que la phrase est fausse. Mais si X désigne une personne précise, il n'y a pas lieu de parler de contre-exemple : "on ne peut pas savoir".

En fait, peu importe la personne qui a traversé le labyrinthe. Ce qui est ici la variable sous-jacente, c'est la variable "trajet" : on appelle trajet une suite finie de lettres choisies parmi les lettres de A à T. L'ensemble $\mathcal{T}$ de tous ces trajets est fini et la variable en question décrit donc cet ensemble.

Ainsi, t désignant un trajet, la phrase n°4 se dit "si O appartient à t, alors F appartient à t". Reste à comprendre si cette phrase signifie :

"quel que soit t appartenant à $\mathcal{T}$, si O appartient à t, alors F appartient à t"

ou bien

"il existe t appartenant à $\mathcal{T}$ tel que si O appartient à t, alors F appartient à t".

C'est évidemment différent, mais, la première étant vraie, elles sont vraies toutes les deux.

Il en est de même de la phrase n°5 :

"si X est passé par K, alors X est passé par L",qu'on la comprenne comme

"quel que soit t appartenant à $\mathcal{T}$, si K appartient à t, alors L appartient à t"

ou bien

"il existe t appartenant à $\mathcal{T}$ tel que, si K appartient à t, alors L appartient à t".

Mais c'est différent pour la phrase n°6, à savoir

"si X est passé par L, alors X est passé par K".

Si on la comprend comme "quel que soit t appartenant à $\mathcal{T}$, si L appartient à t, alors K appartient à t", elle admet le trajet CDILMNQR comme contre-exemple, elle est donc fausse. Par contre, si on considère qu'elle signifie "il existe t appartenant à $\mathcal{T}$ tel que si L appartient à t, alors K appartient à t" , alors elle est vraie puisque CDILMNQR répond bien à la condition.

Remarquons par ailleurs que pour les phrases 4 et 5 intervient différemment la chronologie des événements. Pour la phrase n°5, l'événement de l'hypothèse, "X est passé par K" est antérieur à l'événement de la conclusion "X est passé par L". Par contre, pour la phrase n°4, l'événement de l'hypothèse, "X est passé par O", est nécessairement postérieur à l'événement de la conclusion "X est passé par F" puisqu'il est interdit à X de passer deux fois par la même porte lorsqu'il traverse le labyrinthe.

Ainsi il est utile de soulever ces problèmes en classe, car les abus de langage, les imprécisions sont monnaie courante.

Exemples en classe

Voici deux énoncés d'exercices accompagnés des réponses écrites de deux élèves de seconde, Thibaut et Gaëlle. Voyons comment, au travers du travail courant de la classe, nous véhiculons les idées précédentes.

<u>Enoncé 1</u> : A, B, C désignent trois points distincts non alignés Existe-t-il un point M tel que $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB}$? Si oui, construis-le.

<u>Réponse de Gaëlle</u>

$\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AB}$

Ce n'est pas possible, $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne peuvent pas être égaux car on sait que les points A, B, C ne sont pas alignés. Donc il n'y a pas de point M.

<u>Enoncé 2</u> : A, B, C désignent trois points distincts non alignés. Existe-t-il un point M tel que $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB}$? Si oui, construis-le.

<u>Réponse de Thibaut</u>

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}$

$2\ \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$

$2\ \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}$

$2\ \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{CB}$

$\overrightarrow{MA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$

Il y a un seul point M *(et il le construit).*

Dans le passage d'une ligne à l'autre, aucun lien logique n'est apparent, sauf dans la première ligne de la réponse de Gaëlle ou est écrit un "donc". Considérons-nous que, là où il n'y a aucun mot de liaison logique, est sous-entendu un "donc" ou un "qui équivaut à" ?

Si l'on suppose que c'est "donc", la réponse de Gaëlle est une illustration d'un des principes du raisonnement déductif rappelé ci-dessus, à savoir : sachant qu'une proposition p implique une proposition q et que q est fausse, on peut conclure que p est fausse. Elle est donc en ce sens logiquement correcte. En effet la proposition p est "il existe un point M tel que $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB}$", et l'on note à nouveau la part de l'implicite en comparant cette proposition p et la première ligne de la réponse ; la proposition q est " $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AB}$ ".

Par contre celle de Thibaut n'est pas conforme au raisonnement par implication : en considérant comme proposition p "il existe un point M tel que $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB}$ " et comme proposition q "il existe un point M tel que $\overrightarrow{MA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$". En effet, sachant qu'une proposition p implique une proposition q et que q est vraie, on ne peut rien conclure sur p , qui peut être aussi bien vraie que fausse. Il faudrait donc faire aussi le raisonnement réciproque, et alors les deux raisonnements suffiraient pour conclure à l'existence d'un point M unique (l'image du point A par la translation de $\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$).

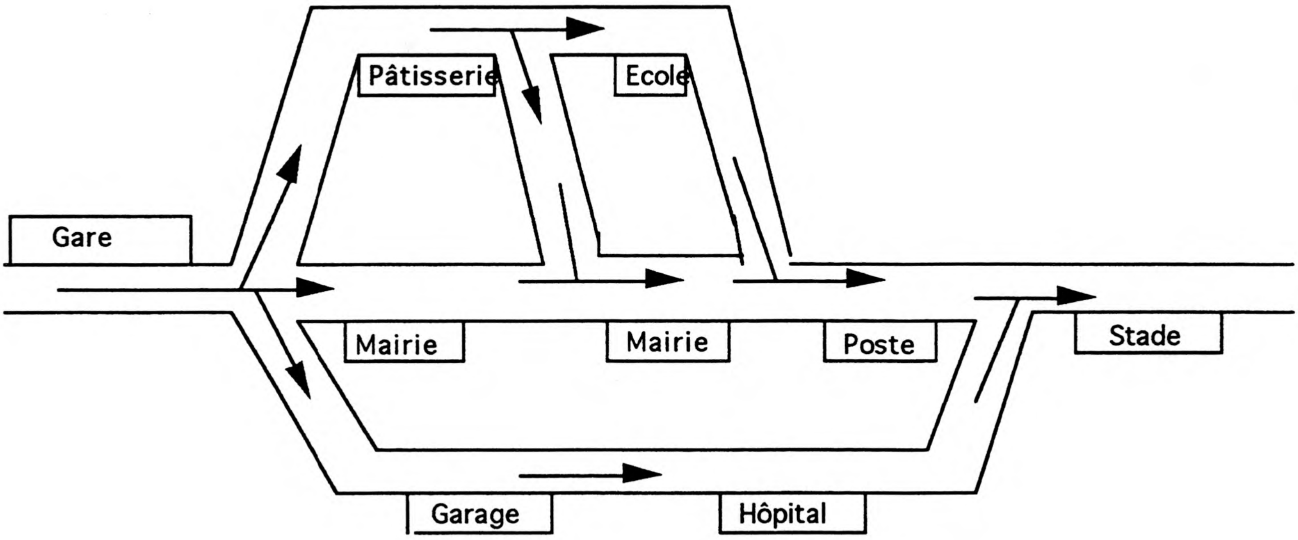
Si maintenant l'on considère que c'est un "qui équivaut à" qui est sous-entendu entre chaque ligne, alors il n'y a plus que l'implicite qui concerne le quantificateur relatif au point M qui reste à expliciter par les deux élèves pour que l'on puisse considérerer que leurs réponses sont tout à fait correctes.

Ces types de réponses sont très couramment rencontrées en classe lors de la résolution des équations, que ce soit dans l'ensemble des points du plan ou dans l'ensemble des nombres réels. Nous voyons la grande part de l'implicite qu'elles renferment : il nous paraît important qu'il soit négocié avec les élèves et nous y consacrons du temps en classe, tout particulièrement en seconde.

Annexe : un circuit de bus

Dans les petites classes de collège, on peut pratiquer l'activité "circuit", mais avec un circuit de bus à la place du circuit électrique présenté au début du chapitre.

Voici un fragment du plan de la ville de Menucourt représentant les différents parcours suivis par les bus permettant de se rendre de la gare au stade. Les flèches indiquent les sens obligatoires.



On gère cette activité exactement de la même façon que celle qui concerne le circuit électrique. Des conjectures que l'on peut étudier sont les suivantes :

C_1 : "Si un bus passe devant le garage, alors il passe devant l'hôpital."

L'étude de C_1 permet de faire comprendre que l'on ne peut se mettre d'accord que si on se place dans un modèle parfaitement déterminé.

C_2 : "Si un bus passe devant la poste, alors il passe devant la mairie."

C_2 permet d'une part, de voir ce que l'on appelle un exemple, un contre-exemple, un hors-sujet pour une conjecture donnée, d'autre part, d'énoncer la convention du Vrai et du Faux en mathématiques.

C_3 : "Si un bus passe devant la mairie, alors il passe devant la poste."

L'étude de cette conjecture permet de faire passer la notion de réciproque d'une implication et de montrer que la valeur de vérité de l'une est indépendante de la valeur de vérité de l'autre.

C4 : "Si un bus ne passe pas devant la mairie, alors il ne passe pas devant la poste.

C'est l'occasion de voir ce que l'on appelle la contraposée d'une implication et de montrer qu'une implication et sa contraposée ont la même valeur de vérité.

Le débat:une gestion de la classe permettant la confrontation des représentations

Un exemple : un cours de seconde à propos d'équations

Une mise en situation

Imaginez une classe de seconde, dans laquelle je désire faire passer les notions d'équations équivalentes, de solution d'une équation, d'ensemble de solutions d'une équation et prévenir l'erreur qui consiste à diviser les deux membres d'une équation par une expression qui s'annule pour certaines valeurs de l'inconnue.

Je choisis de faire mon cours sous la forme d'un "débat". De quoi s'agit-il ?

Le déroulement de la séance

La séance est prévue sur une heure et demie.

J'écris au tableau

Conjecture : les équations $(x + 2)^2 = (x + 2)(5x - 4)$ *et* $x + 2 = 5x - 4$ *sont équivalentes.*

Les élèves doivent chercher si elle est vraie ou bien fausse et argumenter. Ils en discutent avec leurs voisins, mais pas avec moi, qui ne réponds à aucune de leurs questions. Ils savent que, dans quelques instants, ils vont avoir à se placer par un vote dans une des trois positions suivantes : "vrai" , "faux" ,"autre".

Au bout de quelques minutes, je demande aux élèves de lever la main s'ils pensent que la conjecture est vraie, j'inscris leur nombre au tableau ; ensuite je relève les votes de ceux qui pensent qu'elle est fausse ; enfin votent pour une troisième possibilité, que l'on appelle "autre", ceux qui ne sont ni convaincus qu'elle est vraie, ni convaincus qu'elle est fausse, que ce soit parce qu'ils n'ont pas eu suffisamment de temps, ou que certains indices les font douter, ou qu'ils n'ont pas compris la question...Une majorité de "vrai" se dégage de ce premier vote.

Je donne ensuite la parole à plusieurs élèves qui ont voté "vrai" et j'écris leurs arguments au tableau, ils sont les suivants :

- je divise la première équation par $x + 2$ *et je retrouve la deuxième ;*

- je résous les deux équations et je les trouve égales toutes les deux à 6.

Ce dernier argument est ainsi explicité par un "bon" élève : *la première équation est équivalente à* $x^2 + 4x + 4 = 5x^2 - 4x + 10x - 8$ *, puis à* $12 = 4x^2 + 2x$ *, enfin à* $6 = 2x^2 + x$ *; la deuxième est successivement équivalente à* $2 + 4 = 5x - x$ *, c'est à dire*

$6 = 4x$; comme on trouve 6 dans un membre de chacune des équations, "elles sont égales".

Beaucoup d'élèves, qui ont fait sur leur feuille le même calcul sont d'accord avec lui. Un de ceux qui ont voté "faux" fronce les sourcils, mais ne dit rien, on voit qu'il est perplexe. Quant aux autres, difficile de savoir où ils en sont ! Devant le malaise que je constate dans la classe, je propose alors les deux équations suivantes : $6 = 3x - 30$ et $6 = 2x$ et je résous la deuxième au tableau : elle a pour seule solution 3, qui n'est pas solution de la première. S'agit-il d'équations "égales" ? Le doute s'installe chez ceux qui pensent les équations "égales".

Un des élèves qui a voté "faux" prend la parole pour dire que *les deux équations n'ont pas la même solution : 1,5 est solution de la deuxième équation, mais pas de la première.* Comme tout ce qu'ont dit les élèves auparavant, le professeur le note au tableau . Les élèves vérifient et proposent d'écrire que $6 = 4x$ est équivalente à $x = 1{,}5$, puis ils utilisent $6 = 2x^2 + x$ dans laquelle ils remplacent x par 1,5 , car ils sont convaincus qu'elle est équivalente à l'équation donnée dans l'énoncé (pour la plupart d'entre eux, les équations équivalentes se reconnaissent à leur écriture en colonne !). Ils concluent que les deux équations ayant 1,5 pour solution sont bien équivalentes.

Je fais procéder à un nouveau vote : la conjecture du départ est-elle vraie ou fausse ? Enorme majorité de "vrai", il ne reste qu'un seul "faux". L'élève qui a voté "faux" dit que la première équation a peut-être une autre solution que 1,5 . Un élève (doublant) affirme alors qu'une équation n'a qu'une solution.

Un autre lui propose alors $x = x^2$ qui a pour solutions 0 et 1 . Un troisième élève remarque que la forme de l'équation donnée dans l'énoncé ressemble un peu à $x = x^2$. Un quatrième dit : "c'est normal car $0^2 = 0$ et $1^2 = 1$. J'en profite alors pour demander si l'on peut découvrir une autre solution à la première équation, en examinant uniquement sa forme donnée dans l'énoncé, en faisant des essais. Plusieurs réponses sont données et écrites au tableau : toutes sont rejetées comme n'étant pas des solutions de l'équation proposée. Beaucoup d'élèves ne cherchent même pas d'ailleurs, persuadés qu'ils sont que l'équation n'a pas d'autre solution que 1,5. Et soudain, toujours le même élève, qui se sentait isolé dans son camp, propose $x = -2$. La vérification que les deux membres de la première équation valent 0 quand on remplace x par -2 est écrite au tableau.

Beaucoup d'élèves affirment alors ne plus rien comprendre, avoir perdu leurs idées claires (surtout certains bons élèves) et ont du mal à admettre qu'un seul puisse avoir raison contre toute la classe. Le conflit est très fort.

J'accorde une pause.

Au retour de la récréation, tous sont d'accord pour affirmer que la conjecture est fausse, mais considèrent que c'est un "coup de chance" si on a trouvé la solution -2 . Un élève, qui a résolu sur sa feuille la première équation (au moment où il a été dit que l'équation avait peut-être une autre solution) affirme qu'il a trouvé ce -2 après quelques calculs ; j'écris sa résolution au tableau : je demande aux élèves s'ils sont d'accord avec celle-ci. La réponse est "oui" en majorité, quelques élèves ne savent pas, aucun n'est contre. Elle est correcte.

Je reviens alors à la "division par $x + 2$ " préconisée au début de la séance pour faire remarquer qu'elle fait "perdre " la solution -2 ; je mets l'accent sur cette erreur courante.

Je demande ensuite à toute la classe de faire le bilan de la séance, en tenant compte à la fois des erreurs commises, des résultats corrects obtenus, des démarches rencontrées, bonnes ou mauvaises : les élèves notent

- ce que signifie "résoudre une équation dans un ensemble",
- comment on reconnaît si un nombre est ou n'est pas solution d'une équation,
- ce que l'on appelle des "équations équivalentes", des "équations égales",
- que deux équations qui ont chacune le même membre ne sont pas nécessairement égales, ni même équivalentes,
- que la division des deux membres d'une équation par une même expression peut faire perdre des solutions, et que, par exemple, dans IR, l'équation $x^2 = x$ n'est pas équivalente à l'équation $x = 1$,
- comment résoudre une équation qui comporte le même facteur dans chacun des membres.

Enfin se pose la question de savoir ce qu'ils devraient rédiger lors d'un devoir, s'ils avaient cette conjecture à étudier:

> *-2 est solution de la première équation puisque $(-2 + 2)^2 = (-2 + 2)\,(5.(-2) - 4)$) ;*
> *mais -2 n'est pas solution de la deuxième équation, puisque $-2 + 2 \neq 5.(-2) - 4$.*
> *Les deux équations n'ont pas le même ensemble de solutions, elles ne sont donc pas équivalentes, c'est à dire que la conjecture est fausse.*

Certains s'étonnent du fait qu'il n'y ait pas la résolution des équations dans la rédaction de la réponse et se demandent "comment on peut faire si on ne pense pas au $0 = 0$". Je réponds que la résolution est alors à faire, mais elle peut rester au brouillon, l'argumentation proposée ci-dessus étant suffisante. L'accent est mis sur la différence qui peut exister en mathématiques, entre la recherche d'un problème et la démonstration de sa solution. Nous y reviendrons dans le chapitre "Expérimentation, démonstration".

Des questions soulevées par cette forme de cours

Pourquoi est-ce que j'écris au tableau tout ce que les élèves disent, au risque de faire un grand déballage ?

Tout d'abord, nous jugeons important que toutes les idées puissent s'exprimer, celles qui ne comportent que des "choses vraies" comme celles qui renferment des erreurs. En effet, ces dernières, une fois explicitées et reconnues, au niveau de la classe toute entière, comme conduisant à des contradictions ont de grandes chances de rester moins longtemps dans la tête de leurs auteurs ou de ceux qui les pensent sans le dire ; de plus, chercher à les contredire entraîne à la recherche de contre-exemple. Quant aux autres idées, qui ne comportent pas d'erreurs, elles sont à trier par l'ensemble des élèves de la classe : certaines sont sources de conjectures vraies - ou théorèmes -, de pistes intéressantes pour telle démonstration, mais d'autres ne mènent à rien qui soit en rapport avec le problème posé. Tout ceci donne à chaque élève l'occasion d'aborder les problèmes sous des angles différents, chacun ayant la possibilité de confronter ses idées avec le reste de la classe.

Dans la situation relatée ci-dessus, il était indispensable que soit discutée l'idée selon laquelle "on reconnaît que les deux équations sont égales au fait qu'elles ont toutes les deux un membre égal à 6" : si cette idée avait été écartée, il y a fort à parier que tous ceux qui l'avaient eue - et ils étaient relativement nombreux - n'auraient rien compris à se qui se passait ensuite, sûrs de leur réponse, *parce qu'il est incontestable que 6 est bien égal à 6 et qu'un calcul qui conduit à ceci ne peut être que juste.* Un élève qui est sûr d'avoir raison relâche son attention : il se dit que le professeur a simplement utilisé une autre méthode, et qu'il va sûrement arriver au même résultat que lui. Ce n'est qu'au moment où il entend que la conclusion diffère de la sienne (et ce n'est pas toujours le cas), qu'il se dit que peut-être..., mais c'est souvent trop tard, il a perdu le fil.

Quant à l'écriture au tableau de chacune de ces idées, elle permet de mettre une certaine distance entre elle et son auteur et de faire de leur étude un problème posé à tous. Peu importe qui a émis telle ou telle proposition : ce qui doit être retenu par la classe, c'est le fait qu'elle soit vraie ou bien fausse, et pourquoi. Il est déjà très déstabilisant pour un élève de se rendre compte qu'une idée, qu'il avait peut-être depuis longtemps, est erronée ; il serait tout à fait néfaste qu'en plus, les autres élèves le montrent du doigt. Imaginez le "bon" élève et l'histoire des "deux équations égales à 6", si les autres...

Pourquoi est-ce que j'écris au tableau les propositions des élèves telles qu'ils les disent, souvent confuses et mal formulées ?

Il est nécessaire que les élèves se rendent compte de l'intérêt d'avoir des définitions précises, des énoncés clairs, porteurs pour tous du même sens. Pour cette raison, nous essayons de les confronter à des énoncés confus et mal formulés, dont ils ne sont pas les auteurs, sur lesquels il est impossible de se mettre d'accord tant que les uns ne comprennent pas la même chose que les autres. Or une mauvaise formulation dénote souvent une compréhension erronée des définitions mathématiques ; par suite, reformuler une proposition d'élève avant de l'écrire au tableau transforme, plus profondément qu'il n'y paraît, le sens que l'élève lui donne. Dès qu'une idée est reconnue par la classe comme mal formulée, nous demandons à tous de la corriger, non pas au niveau de sa vérité, mais seulement sur le plan de la forme : il n'est pas rare d'ailleurs que l'auteur soit mieux compris par certains autres élèves que par le professeur. Une fois la formulation correcte, reste à voir si elle est intéressante par rapport au problème étudié, si elle est vraie ou bien fausse, si elle est utile...

Dans l'exemple relaté ci-dessus, j'ai jugé important d'écrire au tableau que les "équations étaient toutes les deux égales à 6". Ceci montrait que les notions d'équation, de solution d'une équation n'étaient pas du tout comprises. Il était pour moi nécessaire que nous prenions le temps de décortiquer ce que l'on entend par "résoudre une équation", "solution d'une équation"... , puisque c'était justement l'objectif de cette séance.

Pourquoi est-ce que je m'interdis de répondre aux questions des élèves au début de leur recherche ?

D'une façon tout à fait normale, les élèves essaient de parvenir à la bonne réponse avec le minimum d'efforts. Ils vont donc essayer de me questionner, car je suis la personne la mieux placée pour leur éviter de trop chercher, sans toutefois me demander la réponse, car ils savent que je suis là pour les faire travailler. Leurs questions vont porter sur des mots, des méthodes ; ils vont chercher des indices susceptibles de les mettre sur la voie, car ils savent que moi, je sais. Ils se placent d'emblée dans la logique scolaire. J'ai dû évidemment négocier un autre contrat avec eux : *"Je ne vous demande pas de trouver ma solution au problème posé ; mon but étant de vous apprendre des mathématiques, je suis une stratégie qui va permettre à chacun de se poser véritablement le problème et de participer au débat qui va suivre, et je vous délégue la responsabilité du vrai et du faux de ce qui va se dire au cours du débat".* Dans ces conditions, le moindre de mes gestes en faveur d'un élève rompt le contrat précédent, puisque celui-ci n'est plus responsable à part entière du vrai et du faux . Or un des tremplins de cette forme de cours est justement le doute : je cherche à ce qu'il s'installe.

En quoi le vote des élèves est-il utile ?

La première fonction du vote dans le débat est de forcer chacun à s'engager. Il permet à tout élève de se rendre compte qu'il doit véritablement faire sienne la question posée. Je reconnais à chaque élève le droit de ne pas savoir répondre à la question posée, en lui offrant la possibilité de voter "Autre" ; et le rôle des indécis n'est pas des moindres, dans le cours du débat. C'est d'ailleurs adopter une attitude scientifique que de considérer que l'on n'a pas suffisamment d'arguments pour être sûr de sa réponse. De plus, le vote et la suite du débat montrent que ce n'est pas nécessairement la majorité qui a raison ; il en est ainsi dans l'exemple qui est présenté ci-dessus. Le vote met en évidence que la vérité mathématique est tout à fait différente de celle de la vie courante. Enfin il me renseigne sur l'état de connaissance de la classe en rapport avec le problème posé. Et mes surprises sont fréquentes. S'il se trouve des élèves qui ne votent pas, je cherche à connaître leurs raisons et j'essaie de renégocier le contrat avec eux.

Ne perd-on pas beaucoup de temps sur ces équations ?

On peut commencer par se demander qui pense qu'il perd du temps, le professeur ou les élèves ? Ensuite, il faut avoir conscience que la connaissance en mathématiques s'acquière rarement linéairement, par simple imitation de ce que fait le maître ; les notions ont besoin d'être décortiquées, mais pas par le professeur, par les élèves eux-mêmes. Et pour cela, il faut du temps ! D'autant plus de temps que les obstacles à franchir pour chaque élève sont nombreux : difficulté à entrer dans la problématique, reconnaissance de ses erreurs, acquisition de la nouvelle connaissance sans trop la déformer....

Si on reprend l'exemple décrit auparavant, on remarque que, pendant cette séance d'une heure et demie, non seulement plusieurs points de cours ont été abordés et quelques méthodes explorées, mais encore la plupart des élèves sont entrés dans le jeu de la démarche scientifique : expérimenter, conjecturer, argumenter, critiquer, réfuter, contrôler...

Par ce travail, nous pensons aider les élèves à accéder à une certaine autonomie de pensée qui leur permette de réussir sur des questions qu'ils n'ont pas déjà vues. Bien sûr cette forme de cours ne remplace pas l'entraînement à la résolution des équations : pendant la séance qui vient d'être décrite, les élèves n'ont acquis aucune performance technique. Ce n'était pas le but. Cet entraînement viendra après, notre objectif est que les élèves construisent du sens, ce qui favorisera ensuite les acquisitions techniques. Nous voyons souvent des élèves avides de "recettes" dépourvues de signification, et qui ne peuvent plus ensuite s'adapter à une situation nouvelle. L'usage d'une telle forme de cours devrait éviter cela et permettre que construction du sens et acquisitions techniques s'épaulent, sans que ces dernières se fassent au détriment du sens comme c'est trop souvent le cas. Cet objectif me paraissant important, j'ai décidé d'y passer du temps.

Mais combien de temps ? A cette question, il est très difficile de répondre en général. Pour ce même thème de débat, le temps peut être multiplié par deux quand on passe d'un groupe à un autre : il dépend essentiellement de ce qui se passe au cours du débat, du niveau des participants, du corpus de connaissances du groupe.

Le débat en cours : pourquoi et comment

Nous venons de voir un exemple de pratique du débat en cours à propos d'équations en seconde et les questions que soulèvent une telle pratique sur ce sujet. Maintenant, d'une manière plus générale, intéressons-nous aux raisons qui nous ont poussées à recourir à cette forme d'enseignement et à son organisation.

Les idées qui sous-tendent le débat

Ce que nous appelons "débat" est un moyen d'enseigner les mathématiques à une classe fonctionnant comme une sorte de communauté scientifique.

Ceci repose sur deux idées. Tout d'abord, on ne peut **faire des mathématiques qu'au sein d'une société qui a adopté quelques règles fondamentales** fixant ce que l'on considère comme vrai et ce que l'on considère comme faux : il ne peut y avoir de mathématiques dans l'absolu, en dehors de toute règle partagée par un certain nombre de personnes.

Ensuite, **on n'apprend pas des mathématiques si on ne se pose pas d'abord des questions**. Certains élèves, ceux qui réussissent, se les posent naturellement, mais ils sont en faible proportion dans nos classes. La plupart ne se pose de problème que si elle y est invitée par le professeur. C'est donc à celui-ci que revient la tâche de faire en sorte que les connaissances mathématiques viennent en réponse à des questions que la classe se pose réellement. Et il ne suffit pas d'écrire au tableau un énoncé de problème pour que l'on puisse dire que chaque élève se le pose réellement. Ce n'est peut-être qu'après bien des détours que tel élève aura compris effectivement la question : il aura peut-être dû d'abord expérimenter, faire une conjecture, se rendre compte qu'elle est fausse, en trouver une autre, la réfuter aussi... Ainsi il commencera à se poser des questions, pour lui de vraies questions. Nous pensons que c'est justement dans cette démarche de recherche que la présence des autres élèves de la classe peut constituer un atout : avant de réussir à argumenter et réfuter ses propres conjectures, à s'interroger, en un mot, à débattre mathématiquement avec soi-même, la plupart des élèves a intérêt à s'initier à cette démarche en se confrontant d'abord aux autres. En se demandant souvent "Ce qu'un tel dit est-il vrai ou est-il faux ?", en essayant de le prouver ou de le réfuter, ils vont, à notre avis, acquérir une habitude de questionnement qu'ils pourront ensuite s'appliquer à eux-mêmes. N'oublions pas que c'est là notre objectif, que chacun apprenne à faire des mathématiques, et nous orientons notre pratique collective de façon à permettre à chacun de saisir la démarche mathématique.

Partant de ces idées, nous allons donc exploiter la richesse que constitue la classe pour susciter chez chaque élève un questionnement mathématique, y recréer les conditions propices à l'acquisition des connaissances, mettant autant l'accent sur la démarche mathématique que sur le contenu qu'elle permet d'atteindre.

Au travers du débat, nous cherchons à atteindre ces objectifs.

- Faire entrer les élèves dans des problématiques scientifiques : nous en avons déjà parlé, mais insistons, tant cela nous semble important. Nous voudrions que les élèves en arrivent à se poser des questions en dehors de celles que nous leur posons, de "vraies" questions, ou au moins qu'ils s'approprient les nôtres, en ne se contentant pas de rester sur le plan scolaire, qu'ils ne nous interpellent plus en nous demandant s'ils "ont le droit de" faire telle ou telle chose, mais qu'ils replacent cette interrogation sur le plan de vrai et du faux. Que chaque élève sache se détacher du plan scolaire habituel pour se placer réellement sur le plan mathématique.

- Eviter que les élèves ne déforment les connaissances : nous pensons que l'écart est grand entre ce que nous disons et ce qu'ils comprennent réellement. Aussi recherchons-nous au travers du débat un moyen pour que l'élève déforme le moins possible les connaissances. Pour aborder certains notions nouvelles, nous choisissons des situations suffisamment problématiques pour que les élèves saisissent l'intérêt de connaître autre chose, même si la réponse ne leur est donnée ensuite que partiellement parce que certains aspects dépassent le niveau de la classe.

- Permettre aux élèves d'accéder à une certaine forme d'autonomie de pensée : qu'ils possèdent suffisamment le principe de contradiction fondamental pour être en mesure de décider eux-mêmes si ce qu'ils avancent est vrai ou faux, qu'ils sachent s'écarter de la logique scolaire, qu'ils aient des occasions de chercher des idées - qu'ils en fassent part ou non aux autres - en les argumentant sur le plan mathématique et que soit écarté tout argument d'autorité.

Les différents types de situations gérées par le débat

Dans nos classes de collège ou de lycée, il est impossible de concevoir un cours de mathématiques intégralement sous forme de débat, d'un bout à l'autre de l'année scolaire. D'autres pratiques sont mieux adaptées à l'acquisition de certaines connaissances. Par exemple, ce n'est sûrement pas la pratique du débat en cours qui va permettre d'acquérir des techniques dont la maîtrise est indispensable. Nous pensons par ailleurs que c'est en diversifiant nos formes de cours que l'on pourra toucher le plus grand nombre de nos élèves. Il n'est donc pas question de présenter le débat en cours comme le seul moyen d'enseigner les mathématiques. Toutefois, il est indéniable que sa pratique entretient dans la classe un certain état d'esprit. Nous conduisons les autres activités de cours de façon à maintenir cet état d'esprit.

Des choix sont cependant à faire au niveau des situations que l'on va gérer en débats. Si pour certaines notions fondamentales, nous choisissons de prendre du temps et de jouer à fond le jeu du débat, nous compensons par un enseignement plus dirigé à propos de contenus jugés moins importants, tout en maintenant un niveau problématique.

On peut relever trois types de situations que nous pouvons gérer en débats.

- La première est celle qui démarre à propos d'une conjecture que nous choisissons nous-mêmes. C'est le cas de l'exemple d'introduction à propos des équations équivalentes.

- La deuxième est le débat spontané, à l'occasion d'une erreur commise ou d'une question posée par un élève. Elle peut débuter par un travail sur un énoncé, celui sur lequel on va débattre.

- Enfin, la dernière forme de débat, la plus riche, mais aussi la plus complexe dans sa gestion, est celle qui est destinée à l'introduction d'un nouveau concept. Nous amorçons le débat par un problème et faisons en sorte que l'élève se le pose effectivement, constate que l'état de son savoir ne lui permet pas de le résoudre et qu'il réalise qu'il a besoin d'une nouvelle connaissance pour accéder à de nouveaux horizons. Même si c'est finalement nous qui allons lui apprendre ce savoir nouveau, l'élève se construit au cours du débat un questionnement mathématique tout à fait nouveau. Dans cette situation, ce sont donc les élèves qui formulent des conjectures. Tout d'abord celles-ci sont écrites au tableau ; ce qui permet d'en faire des conjectures de la classe, et d'en oublier l'auteur. Nous essayons de respecter scrupuleusement ce que disent les élèves : la moindre de nos interventions au niveau de leur formulation risquerait de déformer la pensée de leur auteur et ainsi d'ignorer certaines conceptions erronées. Ensuite elles sont triées : certaines constituent des non-sens, d'autres doivent être modifiées - et ce sont les élèves qui le reconnaissent - au niveau de leur expression, mais non sur le plan du sens, d'autres encore sont peut-être reconnues comme impliquées par les autres. Ce travail sur les énoncés, sûrement le plus difficile pour les élèves, est la première étape de ce type de débat. Celui-ci sera ensuite géré comme les deux premières situations.

Les différentes phases du débat

Nous nous fixons certaines règles lorsque nous faisons un cours sous forme de débat. Dans la description de ce qui suit, nous ne tenons pas compte du point de départ qui, comme il en a été question ci-dessus, est différent suivant la connaissance à faire acquérir aux élèves. Supposons que les élèves aient une conjecture à résoudre, c'est à dire qu'ils aient un énoncé écrit au tableau, à propos duquel nous leur demandons s'il est vrai ou bien faux. Plusieurs étapes sont alors à distinguer très nettement, au cours desquelles nous jouons des rôles différents : la recherche des élèves, le vote, l'argumentation, enfin l'institutionnalisation. Cette dernière, qui contient toute la connaissance que nous voulons apporter à chaque élève, nous l'avons sans cesse présente à l'esprit, et elle oriente notre comportement au cours des autres étapes.

La recherche des élèves

Nous laissons du temps aux élèves pour qu'ils puissent "entrer" dans la conjecture proposée.

Ils peuvent en discuter avec leurs voisins proches, nous leur demandons d'écrire leur recherche. Pendant qu'ils cherchent, nous observons les élèves, nous regardons comment évoluent les choses, tout en nous efforçant de nous détacher complètement de ce qu'ils disent et en refusant de répondre à toute question. Les élèves vont en effet instinctivement chercher à avoir des indices sur la réponse. Si nous nous intéressons à l'un d'eux, nous coupons court à la recherche des élèves : beaucoup dans la classe se diront que l'un d'eux a la bonne réponse et se désintéresseront du problème posé. Nous y reviendrons, mais il ne faut pas oublier que c'est le doute qui est le moteur de la recherche. Cette observation de la classe pendant qu'elle cherche nous permet, d'une part, de juger du moment le plus opportun pour arrêter la recherche, d'autre part, de décider de la façon dont nous allons organiser le vote. Ce temps de recherche doit être en effet suffisamment long pour que les élèves soient réellement entrés dans le problème, mais pas trop long pour éviter qu'il n'y ait trop de décalage entre eux : éviter que certains aient résolu le problème, alors que d'autres n'ont fait que comprendre la question. Il est impossible de dire a priori combien de temps doit durer cette phase de recherche ; cela dépend bien sûr du problème posé, mais surtout, du groupe qui cherche : du niveau mathématique des participants, de leur état physique, du corpus de connaissances dont dispose le groupe.

Le vote

Au bout d'un certain temps, nous arrêtons donc la recherche des élèves et nous leur demandons aux élèves de voter pour l'une des trois possibilités suivantes :

- la conjecture est vraie,
- elle est fausse,
- "je n'ai pas eu suffisamment de temps pour me faire une opinion", ou "je ne sais pas, je n'arrive pas à me décider", ou encore "je ne comprends pas".

Nous relevons le vote en adoptant l'ordre que nous jugeons propice à favoriser telle ou telle idée en gardant toujours en tête la phase finale d'institutionnalisation. Nous attachons de l'importance à ce vote, dont les résultats sont notés au tableau, car il nous semble avoir quatre fonctions essentielles, qui ne sont pas d'ailleurs simultanées.

Tout d'abord, il force chacun à s'engager : les élèves le savent quand ils se lancent dans leur recherche, si nous avons bien passé le contrat avec eux. Le fait d'avoir à voter les pousse à se faire une idée sur le sujet. Ensuite il renseigne le professeur sur l'état de la classe par rapport au savoir visé. Il montrera, dans la suite du débat, que ce n'est pas du tout la majorité qui l'emporte en mathématiques, ce qui souligne encore la différence entre la logique des mahématiques et celle du quotidien. Enfin, au vu des votes de certains de leurs camarades, certains vont mener plus avant leurs investigations, afin de se persuader qu'ils ont raison.

A tout moment du débat, nous pouvons d'ailleurs juger utile de faire procéder à un nouveau vote : pour faire un bilan, pour relancer l'argumentation...

L'argumentation, la réfutation

Une fois le vote terminé, le doute s'installe peu à peu dans la classe : nous donnons alors la parole, soit à un élève qui a voté pour la première, ou pour la deuxième, ou pour la troisième voie, l'ordre de parole ayant ici aussi un rôle important, en rapport avec les résultats du vote et la connaissance visée. Si nous avons observé qu'une grande majorité s'est faite autour de "vrai", alors que c'est faux, il est peut-être plus intéressant de demander d'abord les votes pour "autre" et "faux". Nous demandons à chaque élève de s'adresser à toute la classe, et non pas à nous-mêmes. Nous écrivons sa proposition au tableau et nous demandons au reste de la classe de ne prendre la parole que pour argumenter ou réfuter ce qui est proposé au tableau : chacun doit ainsi écouter ce que dit tout élève, et c'est bien là le point que nous trouvons le plus difficile à tenir. Nous avons tous beaucoup de mal à laisser provisoirement de côté notre idée pour entrer dans l'argumentation d'un autre et nous en faire une opinion.

L'institutionnalisation

Dans toutes les phases précédentes, notre rôle a consisté à :

- décider du temps accordé à la recherche personnelle des élèves,
- relever leur vote,
- organiser leur prises de parole au service de la connaissance que l'on veut leur apporter, en écrivant leurs propositions au tableau,
- faire prendre conscience des contradictions.

Et tout ceci, en adoptant une position un peu extérieure au groupe, facilitant l'émergence et la confrontation des représentations.

Au moment que nous jugeons opportun, soit que nous pensions que chacun a vraiment fait sien le problème posé, soit qu'il nous semble nécessaire de faire une synthèse, nous décidons de l'arrêt du débat. Ici encore, très difficile de dire a priori exactement au bout de combien de temps. C'est essentiellement l'observation du comportement de la classe qui nous guide.

Nous reprenons alors notre rôle de spécialiste en mathématiques pour faire le bilan des définitions évoquées, des méthodes employées, en retenant que celle-ci est adéquate et celle-là ne l'est pas, et aussi bien des conjectures prouvées vraies que des conjectures prouvées fausses (contre-exemple à l'appui).

Le contrat passé avec les élèves

Il est utile qu'un contrat clair soit passé avec les élèves, dès le début de l'année scolaire : nous sommes là pour leur apprendre des connaissances et ils doivent nous faire confiance pour les moyens que nous choisissons à cet effet. Nous utilisons l'activité "circuit" dont il a été question au début de ce fascicule pour nouer un tel contrat avec une classe. Même s'il n'est pas permanent, le débat permet de créer dans la classe une atmosphère qui continue de régner lors des autres activités : les élèves n'ont pas peur de donner leur opinion, ils ont un autre regard face à l'erreur, ils deviennent peu à peu responsables sur le plan du vrai et du faux. Le débat n'est évidemment pas un but, mais seulement un moyen au service des trois objectifs que nous avons rappelés plus haut. Nous pensons qu'il favorise chez les élèves la prise de sens, l'apprentissage de la preuve, la découverte des idées contraires et qu'il leur donne un autre regard sur l'erreur.

Ce que nous avons trouvé dans le débat : avantages et difficultés

Un moyen pour mettre en vue la démarche mathématique

L'élève s'y trouve confronté à la fois à un problème et à ses pairs. Face à la diversité de toutes les idées exprimées, face aux contradictions, le doute s'installe et l'élève va se trouver en position d'apprendre à la fois à prouver et à réfuter.

Quand l'élève se trouve seul à chercher, la situation, de ce point de vue, est beaucoup moins favorable. Bien sûr, il doit aussi prouver, mais à qui ? Il s'adresse au professeur, mais celui-ci connaît la réponse. Souvent d'ailleurs, on a l'impression que l'élève montre qu'il sait répondre à la question "prouver que...", mais qu'il ne se met pas en position de prouver. Prouver dans cette situation, c'est s'inventer un interlocuteur fictif, c'est débattre avec soi-même, c'est réintroduire le doute. Combien d'élèves entrent seuls dans ce jeu ? Quant aux réfutations, quand on y a accès, on s'aperçoit qu'elles ne sont pas de nature mathématique, mais qu'elles prennent en compte le contexte scolaire : "Le résultat m'a paru trop petit, alors j'ai fait une multiplication", "La solution m'a paru trop simple, ça ne pouvait pas être ça qu'on me demandait". Qui n'a pas entendu de tels propos, même en terminale ? Comment après cela, croire que la démonstration, même faite par l'élève, ait statut de preuve ?

Lors de travaux de groupes, l'élève se trouve face à un problème et à ses pairs comme dans le débat. Si chaque membre du groupe est déjà entré dans le jeu mathématique, se développera effectivement une réelle activité mathématique. Dans l'autre cas, la situation n'est pas toujours favorable : d'une part, la confrontation des idées suppose une égalité de parole qui n'existe pas souvent dans un groupe ; d'autre part, ce que nous avons dit du travail solitaire de l'élève peut se produire aussi. Peuvent s'ajouter des arguments d'autorité du "bon en math" : si le but du travail est de produire un texte mathématique, dans un souci d'efficacité et de qualité, il est normal de faire appel à lui.

Enfin, dans aucune autre situation, l'erreur n'est gérée comme dans le débat. Sur la copie, c'est ce qui fait perdre des points. Lors de la recherche en groupe ou solitaire, ce qui est déclaré erroné ne l'est pas toujours pour les raisons que l'on espérait, nous l'avons vu.

Le débat, lui, est public et conduit par le professeur. Celui-ci a accès à tout ce qui se dit à haute voix (mais seulement à cela...). Il peut donc mener le débat de façon à servir au mieux ses objectifs. Rappelons que pour cela il est important de respecter et de <u>faire respecter la parole de chacun</u>, <u>d'écarter les "arguments d'autorité"</u>, de les reconnaître comme tels. Ainsi ce n'est pas la majorité qui fait le vrai ; de même écarter les interventions qui se présentent sous la forme "C'est faux parce que ce n'est pas comme cela qu'il faut faire, il faut...". Cette situation de débat met en avant la liberté d'expression, et joue sur la diversité des points de vue, diversité qui génère le doute, moteur de la recherche. A vrai dire ce n'est pas tant cette diversité qui génère le doute que l'acceptation de toutes les idées par l'enseignant ; ce qui fait qu'aucune d'entre elles ne s'impose d'évidence.

Enfin, contrairement aussi aux autres situations de classe, le faux, bien sûr limité à ce qui est mathématiquement faux, est vu de façon positive. C'est un savoir que de savoir ce qui est faux.

Le débat a donc ses caractéristiques propres. **Nous pouvons y réunir beaucoup de conditions favorables à la construction par les élèves, d'une image des mathématiques, d'un rapport aux mathématiques tels que nous les souhaitons.** C'est là sans doute l'idée première, l'objectif que nous gardons en vue pendant le débat. Il ne permet pas bien sûr, de se passer des autres travaux que l'on pratique déjà en classe et qui lui sont complémentaires : entraînement aux techniques, recherche solitaire, etc..., mais il peut favoriser ceux-ci. Il nous paraît important pour en augmenter l'efficacité, d'établir un maximum de cohérence entre le débat et les autres activités. Ce problème de la cohérence sera évoqué dans le chapitre Evaluation-Validation.

Quelques difficultés spécifiques

Notre expérience nous a aussi amenées à relever certaines difficultés venant à la fois des élèves et de nous-mêmes, professeurs.

Pour l'élève il y a quelques risques à s'engager ainsi devant toute la classe, à vivre le doute. Il n'est pas facile de voir remises en cause des idées sur lesquelles on s'est appuyé depuis longtemps. On peut en souffrir, réellement. Ainsi cet élève de terminale littéraire qui a très mal vécu le fait de découvrir que la connaissance des valeurs d'une fonction ne permettait pas de conclure sur son sens de variation : "Si on ne peut pas se fier aux nombres en mathématiques, à quoi va-t-on pouvoir se fier ?" Ou bien cet adulte en formation continue : "Quand je pense que pendant deux heures j'ai soutenu mon idée, j'en étais vraiment sûr et finalement c'était faux."

Les relations que les élèves entretiennent entre eux peuvent aussi constituer un obstacle. Toute confrontation mathématique, ou non mathématique d'ailleurs, nécessite un minimum de disponibilité, d'écoute, de bonne foi. En d'autres termes, chaque participant doit être prêt à mettre à l'écart momentanément sa propre pensée pour examiner celle d'autrui (qui y réussit vraiment ?), et à reconnaître les arguments de l'autre malgré le déplaisir que cela peut engendrer. Ainsi une élève de terminale, profitant de ma proximité géographique, me glisse en aparté : "Il a raison mais il ne faut pas le dire". Elle commentera elle-même sa réaction : "Ce n'est pas de ma faute si je ne suis pas contente que X ait raison". Ce sujet des relations dans la classe est évoqué dans [DOUADY 94 et PERRIN GLORIAN 93]...

Enfin il peut être plus difficile pour certains d'accepter le regard de leurs pairs que celui du professeur. Le professeur est censé savoir, en situation d'apprentissage il est normal de se tromper devant lui. Devant ses pairs, l'acceptation de l'erreur est plus difficile : "Pourquoi est-ce toujours les autres qui disent quand c'est faux et pas vous ?" a demandé un jour un participant.

Quand le professeur veut utiliser le débat dans sa classe, il a aussi quelques craintes au départ . Mes élèves apprendront-ils ? Comment vais-je gérer cette profusion d'idées, ce "désordre" ? Ne vais-je pas être débordé ?

Tout cet aspect affectif du débat ne doit pas être négligé et malgré toutes ces questions, le professeur doit se placer et placer ses élèves dans des conditions favorables pour diminuer au début ce sentiment d'insécurité partagé. A noter qu'aucune situation de classe, débat ou non, n'évacue l'affectivité, mais peut-être est-ce un point difficile du débat.

Quelques points qui favorisent le débat

Que faire pour vivre avec tout cela ? Quelques préalables et conditions à établir nous paraissent, à nous, d'une grande aide.

Tout d'abord **il nous paraît essentiel d'avoir a priori, une bonne image de nos élèves,** et de façon contradictoire :

- <u>être persuadé que tout élève est capable d'entrer dans une démarche mathématique.</u>
- <u>avoir du respect pour tout élève qui n'y entre pas.</u>

Cela frise l'utopie ? Certes. Mais maintenir contre vents et marées cette bonne image de nos élèves ne peut que les aider, et nous aider, car c'est aussi maintenir une bonne image de nous-mêmes.

Accepter qu'un élève n'entre pas dans notre jeu ne signifie pas qu'on ne va pas faire tout notre possible, mais cela évitera, à lui et à nous, de vivre la situation comme un échec total et de la bloquer dans le cas de jeunes élèves. De plus à observer de près et à entendre les idées multiples, surprenantes mais, la plupart du temps, justifiées pour peu qu'on s'y arrête, on comprend mieux les difficultés là où nous n'en voyons plus, par trop grande habitude sans doute.

Avoir un œil sur les élèves donc. **L'autre sur les objectifs.** Ce sont eux qui permettent l'organisation du débat et l'institutionnalisation.

Nous avons des objectifs locaux, pour la séance telle que nous l'avons construite, nous avons aussi des objectifs plus globaux, à savoir aider l'élève à entrer dans la démarche mathématique telle qu'on se l'est soi-même définie. Ces objectifs, s'ils sont assez prégnants pour nous, nous permettront toujours d'organiser le débat en nous donnant une grille de lecture des propositions faites par nos élèves. Se constituer une forte représentation des buts à atteindre aide à l'oganisation de la séance et permet une certaine souplesse, c'est à dire une adaptation aux faits.

Dans ce qui précède, nous décrivons plutôt un état d'esprit, des dispositions intérieures, nécessaires croyons-nous, pour être disponible et favorable à ce qui va émerger dans la classe. Quant à la réalisation concrète pourrait-on dire, le déroulement en a été décrit de façon précise dans le chapitre précédent.

Rappelons que, pour qui voudrait essayer le débat, il est utile au départ de bien préciser les règles de fonctionnement de la classe pendant cette séance. Quant aux points difficiles évoqués dans le paragraphe précédent, tels le statut de l'erreur dans la classe, l'attitude momentanément étrange du professeur, les rapports avec les autres, s'ils font obstacles, nous en discutons ensemble. Nous essayons de **passer au mieux le contrat avec tous les élèves**.

Il est peut-être aussi plus facile de commencer par des situations qui nous paraissent "familières", c'est à dire pour lesquelles on a déjà prévu beaucoup de réactions d'élèves. La confiance que l'on aura dans la situation permettra de concentrer son attention sur des points moins évidents qu'ils n'y paraissent, à savoir : ne pas intervenir quand les élèves cherchent, même s'ils posent des questions (ils auront d'ailleurs été prévenus à l'avance de ce fait), laisser pour cette fois la contrainte temps de côté, écrire au tableau ce que disent les élèves sans laisser paraître le moindre jugement, toutes choses qui, nous le savons bien, nous sont souvent difficiles.

Enfin certains élèves, même s'ils apprécient ce genre de travail, regrettent de ne pas pouvoir ou de ne pas savoir prendre des notes et retenir l'essentiel. La conclusion du débat est importante et doit être faite très clairement à l'écrit, c'est le professeur qui, cette fois, en est entièrement responsable. Cet écrit peut d'ailleurs se faire avec un décalage dans le temps. Dans ce cas, un moment d'évocation de la séance précédente sera nécessaire, évocation qui peut être faite individuellement, par chaque élève qui répond à un bref questionnaire, avec ou sans ses notes. Il ne s'agit pas de ramasser les copies et d'évaluer les élèves, mais de remettre toute la classe sur le même sujet. On fait immédiatement une mise en commun des réponses et tout ce qui est à retenir du débat sera mis en valeur par le professeur et écrit. Le questionnaire aura été construit avec cet objectif. Si on veut évaluer son propre travail, on peut bien sûr lire ces copies. Quelques surprises nous y attendent.

Résoudre une équation c'est encore démontrer

On peut être surpris de trouver un aussi long développement sur ce sujet, il y a plusieurs raisons à cela. Tout d'abord, la résolution des équations est une activité pratiquée dans toutes les classes, de la sixième à la terminale, elle nous intéresse donc tous. De plus nous avons souvent observé que, tous niveaux et toutes sections confondues, beaucoup d'élèves de lycée s'étaient construit une image inadéquate de la résolution des équations, voire des mathématiques à travers elle, faisant montre de comportements contre lesquels nous devons lutter dans d'autres domaines, et que nous n'expliquons que par une perte de sens du but à atteindre.

Pour rétablir une certaine cohérence dans toutes les activités mathématiques et remédier à cet état de fait, nous proposons ici de travailler sur le sens de l'équation et de considérer la résolution des équations comme une démonstration au plein sens du terme. Résoudre une équation c'est se lancer dans la recherche de preuves, c'est à dire dans l'activité mathématique. Ce n'est pas l'image que les élèves en ont.

Reprécisons ce qu'est pour nous une équation. N'envisageons pour simplifier que les équations numériques. L'égalité $f(X) = g(X)$, où f et g sont deux fonctions de R dans R, est une équation quand on ne connaît pas son domaine de validité, c'est à dire l'ensemble S des X tels que l'égalité $f(X) = g(X)$ soit vraie. Chaque élément de S est dit solution de l'équation. Il est donc, en principe, facile de tester si un élément de R est ou n'est pas une solution de l'équation.

Résoudre l'équation, c'est chercher cet ensemble S qui peut d'ailleurs être vide. Et comme toujours en mathématiques, c'est non seulement chercher, mais démontrer que l'ensemble trouvé répond bien à la problématique, ou encore que la proposition suivante :

$$\text{pour tout } X \text{ dans } R, \quad (X \in S \iff f(X) = g(X))$$

est vraie.

Observations : côté élèves et côté enseignants

Ce que nous percevons de l'attitude des élèves devant la résolution des équations

Voici quelques réactions d'élèves que nous avons pu observer dans nos classes.

Cas 1 (niveau première S et seconde)

Deux élèves ont résolu algébriquement une équation du type $|f(x)|=a$ et ont trouvé deux solutions. Deux autres ont résolu graphiquement la même équation et ont trouvé 3 solutions. Je leur demande ce qu'ils en pensent. Réponse : "La méthode graphique est plus précise car elle donne plus de solutions".

Ce type de réponse est très classique. Par exemple si, en seconde, on propose deux "résolutions" de l'équation $(x-1)(x-2) = (x-1)(2x-5)$: une résolution correcte, l'autre utilisant la division des deux membres par $(x-1)$, les élèves disent que les deux conclusions sont justes, simplement l'une d'elles est plus précise que l'autre car elle donne deux solutions au lieu d'une.

Cas 2 (niveau seconde)

Je donne le texte suivant à lire aux élèves qui doivent ensuite répondre à la question : "A-t-on résolu l'équation ?"

Texte : Considérons l'équation $x^2+4 = 2$. Quel que soit le nombre que l'on mettra à la place de x, x^2 sera toujours positif et si on l'ajoute à 4, on obtiendra toujours un nombre plus grand que 4, on ne pourra jamais obtenir 2. Il n'y a donc pas de solution à l'équation.

Réponses à la question : "l'équation n'est pas résolue car il n'y a pas de calcul", et aussi "l'équation n'est pas résolue car il n'y a pas de solution"

Cas 3 (niveau seconde)

Texte proposé aux élèves : Considérons l'équation $2x^2+1 = 3(x+1)$. Si on remplace x par 2 dans le premier membre, on trouve 9. Si on remplace x par 2 dans le deuxième membre, on trouve aussi 9.

Certains élèves disent alors que 9 est solution de l'équation. D'autres que tous les nombres sont solutions car 9=9.

Cas 4 (niveau seconde)

Beaucoup d'élèves disent que pour vérifier que deux équations sont équivalentes il suffit d'en résoudre une et de vérifier que les solutions trouvées sont aussi solutions de la deuxième. Cette remarque est pourtant faite après avoir constaté que $5x^2 = 3x$ n'était pas équivalente à $5x = 3$, même si elles ont une solution en commun.

Cas 5 (niveau seconde)

On arrive à l'équation fatidique $0x = 1$. Une élève tout à fait convaincue qu'il n'y a pas de solution, pense que "puisque ça n'existe pas, on n'a pas le droit d'écrire $0x = 1$".

Cas 6 (niveau seconde)

Texte proposé aux élèves : Que pensez-vous de cette résolution ?

$$x + 5 + \sqrt{x} = 3 + \sqrt{x}$$
$$x + 5 = 3$$
$$x = -2$$

-2 est la seule solution de l'équation.

Premières réactions, individuelles et par écrit :

"Je pense que c'est exact car les $\sqrt{x}$ s'annulent quand on les retranche aux deux membres"

"Cette équation est juste mais la phrase est fausse. Il faut dire :"-2 est solution de l'équation" car on n'a pas prouvé que -2 est l'unique solution."

Réactions collectives :

Un élève propose de remplacer x par -2 pour voir si -2 est solution, ce que le professeur fait au tableau. Plusieurs élèves font alors remarquer que $\sqrt{-2}$ ne peut se calculer. A ce moment-là, tous, sauf sept élèves, pensent que -2 n'est pas solution de l'équation, sans s'expliquer le calcul bien sûr. Une élève parmi les sept, bien que persuadée aussi que l'égalité des deux membres n'est pas réalisée pour x=-2, soutient que -2 est solution puisque "on a fait tout ce que l'on devait faire, on a suivi la loi".

Nous avons ainsi souvent observé que, <u>pour l'élève, résoudre une équation, c'est dérouler un calcul très codifié</u>, qui se termine par $x = \cdots$ ou $S = \{ \cdots \}$, ce qui ne coïncide pas, dans les esprits, avec le fait de savoir si l'équation a ou n'a pas de solution, et de trouver celles-ci.

Faire appel à un argument du type "la somme de deux nombres positifs dont l'un est non nul ne peut être nulle" pour dire que l'équation $x^2 + 3 = 0$ n'a pas de solution, ce n'est pas résoudre. Une des raisons invoquée par les élèves eux-mêmes est le fait qu'il n'y ait pas de calcul. Pas de calcul, pas de résolution. D'ailleurs, l'argument ci-dessus n'est pas accepté par la plupart des élèves qui préfèrent d'abord écrire $x^2 = -3$ ce qui est encore se ramener à un calcul.

Une autre raison invoquée, toujours par les élèves, est évidemment l'absence de solution, donc l'équation n'est pas résolue, ce qui est prendre les mots "résoudre" et "solution" dans le sens du langage courant, puisqu'un problème qui n'a pas de solution n'est évidemment pas considéré comme résolu dans le quotidien.

. Même en dehors de ces cas extrêmes, la technique prend le pas sur le sens, le but à atteindre est totalement perdu de vue. Trop souvent l'élève ne sait pas répondre à la question : "le nombre 3,2 est-il solution de l'équation $4x^2 - 3x + 4{,}5 = 12$?", car en seconde il ne sait pas résoudre, dans le sens où il l'entend, cette équation. Il arrive même que le calcul de $(-3)^2$ ne soit pas accepté comme preuve pour affirmer que (-3) est solution de l'équation $x^2 = 9$.

Lors de la vérification, après résolution des équations-produit, on voit souvent l'inconnue remplacée par une solution dans un des facteurs et, en même temps, remplacée par l'autre solution dans le deuxième facteur.

Enfin que sous-entend l'expression tant usitée : "l'équation est impossible" ?

Finalement l'élève calcule, mais ne sait pas ce qu'il a trouvé, ni donc sans doute ce qu'il a cherché.

Toutes les fois où j'ai placé mes élèves dans la situation de trouver un nombre différent de solutions selon la méthode, comme dans la premiere observation ci-dessus, il ne s'en est jamais trouvé un pour vivre les deux conclusions comme contradictoires. Si l'élève entendait vraiment les deux conclusions sous la forme de deux affirmations : "l'équation a une seule solution qui est ..." ou bien "l'équation a deux solutions qui sont ...", affirmations que chaque calcul prétendrait vraies, il me semble que la contradiction apparaîtrait. Mais pour sentir une contradiction, il faut attacher fortement une valeur de vérité à ces affirmations, se sentir dans la position d'avoir trouvé un résultat, et pas seulement dans celle de simple exécutant d'une tâche à accomplir pour satisfaire le professeur et les exigences de passage dans la classe supérieure.

Encore faut-il comprendre de quel genre de résultat il s'agit : d'un ensemble de nombres. Or il semble que pour les élèves, cet ensemble de nombres n'est pas bien défini tant il paraît "élastique". Le cerner est une réelle difficulté.

Dans quel contexte l'élève s'est-il créé cette image ?

Regardons d'abord dans les programmes du premier cycle, quelles sont les exigences sur la résolution des équations.

En sixième, il s'agit seulement de "la recherche d'un élément manquant dans une addition ou dans une multiplication", en résolvant par exemple des équations du type 23 x [_] = 47,5. Le même objectif est poursuivi en cinquième, mais cette fois le nombre manquant est désigné par une lettre, ce qui n'était pas le cas en sixième. Ce type de travail ne met en jeu que les rapports existant entre les quatre opérations.

En quatrième, on résout des problèmes aboutissant à des équations et à des inéquations du premier degré à une inconnue. En troisième, des méthodes graphiques s'ajoutent aux méthodes algébriques pour la résolution des systèmes de deux équations ou inéquations du premier degré à deux inconnues. Aucune compétence n'est exigible pour les systèmes d'inéquations, mais pour les systèmes d'équations, les élèves doivent "savoir résoudre ceux qui admettent une solution et une seule". Enfin, puisqu'on peut étudier des "problèmes se ramenant au premier degré", l'élève est censé savoir traiter les équations mises sous la forme A x B = 0, A et B étant deux polynômes du premier degré à une variable. De plus, sans compétence exigible, la résolution d'équations par essais et corrections successifs, dans les cas ne relevant pas du type mx + p = 0, est proposée dans les programmes de troisième.

Remarquons que les exigences explicites portent sur les techniques de calcul, rien ne sera demandé par exemple, sur ce travail "d'essais et corrections successifs" où pourtant le but à atteindre est mis en évidence. Seule aussi la résolution des systèmes ayant une solution est exigible, cette précision ne conduit-elle pas à ne résoudre que des systèmes de ce type ?

Peut-on avoir une idée de la pratique des enseignants ?

Ceux que nous avons interrogés s'appuient surtout sur la notion d'équations équivalentes, sans que le mot soit nécessairement prononcé. Par équations équivalentes, il faut entendre "équations ayant les mêmes solutions". L'image de la balance est souvent évoquée. Deux équations seront équivalentes, donc auront les mêmes solutions, si certaines "règles" sont respectées, à savoir :

- ajouter un même nombre aux deux membres,
- multiplier les deux membres par un même nombre non nul.

Le mot "équivalentes" ici, n'a pas le statut d'équivalence logique. Il n'est nullement en relation avec les énoncés du type "si...alors..." proposés par ailleurs.

Notons donc que si on respecte ces deux "règles", on est sûr d'avoir trouvé les solutions et toutes les solutions de l'équation. On comprend mal alors l'obligation qui est souvent faite à l'élève de vérifier. Dans le cadre ci-dessus, la vérification est un moyen de contrôler qu'il n'y a pas d'erreur de calcul. Elle n'a aucune nécessité mathématique. Alors pourquoi cette obligation de contrôle dans le cas de la résolution des équations, obligation qui n'existe pas pour d'autres problèmes ? Pourquoi ce rite de la vérification dans cette situation particulière ? Les programmes le suggèrent, c'est vrai, mais ils le suggèrent aussi pour les factorisations, et il est bien rare de voir un élève effectuer un contrôle dans ce cas. Si on adoptait un autre point de vue, à savoir la résolution par implication, la "vérification" dans ce cas ne serait plus contrôle mais <u>réciproque</u>. Cette perspective supposerait que lorsque l'on écrit, verticalement :

$$\begin{aligned} 3x - 2 &= 7(x - 3) \\ -4x &= -19 \end{aligned}$$

on pense à un énoncé du type "x étant un réel, si $3x - 2 = 7(x - 3)$ alors $-4x = -19$" et qu'on le considère comme une proposition à laquelle on puisse attribuer une valeur de vérité. Je ne crois pas que ceci soit pratique courante au collège. Or il n'y a que dans ce cadre que la vérification/réciproque a une nécessité mathématique ; sinon, elle n'est que contrôle.

Entre ces deux points de vue, résolution par équations équivalentes ou résolution par implication, la frontière n'est pas très claire et la confusion s'exprime nettement dès que l'on passe à des équations du type $A \times B = 0$. On peut bien sûr continuer avec la notion d'équations équivalentes en disant que l'équation $A \times B = 0$ a les même solutions que le système "$A = 0$ ou $B = 0$". Certains enseignants font aussi appel à l'énoncé, théoriquement proscrit par les programmes sous cette forme : "un produit de réels est nul, si et seulement si, l'un au moins des facteurs est nul". La situation est cependant moins simple qu'il n'y paraît. Ainsi, un jour où nous interrogions simultanément deux collègues, il s'est avéré que l'une demandait à ses élèves d'écrire : "Si un produit de réels est nul, alors l'un ou l'autre des facteurs est nul" et l'autre d'écrire : "Si dans un produit de réels, l'un ou l'autre des facteurs est nul, alors le produit est nul". Dans le même temps, ces collègues utilisent, pour les équations du premier degré, l'idée d'équations équivalentes c'est à dire ayant les mêmes solutions.

Il y a donc apparemment peu de cohérence dans les pratiques, aussi bien entre enseignants que selon les types d'équations.

Au lycée, en seconde, on continue souvent dans la même perspective, c'est à dire en parlant d'équations équivalentes ayant les mêmes solutions. Comme au lycée le symbole "<=>" est parfois utilisé, les élèves écriront :

$$\frac{3x+2}{x^3-2x+3} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x+2 = 0 \text{ et } x^3-2x+3 \neq 0$$

Mais ce symbole, ici non plus, n'aura pas son sens véritable d'équivalence logique si le lien n'a pas été fait avec les énoncés du type "si ... alors..." ou "...si et seulement si...", vus dans d'autres domaines, géométrique en particulier. Peut-être cette absence de cohérence contribue-t-elle, d'ailleurs, à l'usage abusif que font les élèves de ce symbole.

Les élèves qui n'ont jamais mis de sens sur ces algorithmes de résolution n'auront pas l'occasion de modifier leur représentation. Ainsi, certains en arrivent à penser, y compris ceux qui réussissent, qu'à chaque type d'équation correspond une méthode de résolution -un calcul- et une seule. Apprendre et faire des mathématiques, ce serait compiler toutes ces méthodes (toutes ces recettes ?).

Nous allons dans la suite, voir comment on peut essayer de modifier cette image, au lycée particulièrement. Nous suggèrerons aussi quelques pistes pour le collège.

Un point de vue possible pour essayer de modifier cette image

Objectifs

Si on veut essayer de remettre en cause cette image des mathématique, il est, croyons-nous, utile que les élèves rompent avec cette idée que résoudre une équation c'est simplement exécuter une tâche dont on peut décrire toutes les étapes, dérouler un algorithme, le transcrire sous une forme bien codifiée. Pour cela, les propositions que nous ferons dans ce chapitre seront toujours guidées par les objectifs suivants.

1. Le premier serait d'instituer le fait qu'**une résolution d'équation est une recherche de preuves, une démonstration**. Résoudre une équation, c'est démontrer :

- que celle-ci a ou n'a pas de solution,
- que, dans les cas favorables, l'ensemble des nombres que l'on exhibe est exactement l'ensemble cherché, ce qui signifie qu'on a trouvé toutes les solutions et seulement celles-ci.

Dans des cas moins favorables, il se peut qu'on n'aboutisse pas exactement à cet ensemble, et qu'on n'obtienne que des informations plus ou moins précises sur les solutions ; malgré tout, ces informations sont encore le résultat d'une démonstration.

Signalons encore une fois que prouver que l'équation n'a pas de solution, c'est résoudre. Ceci fait difficulté pour nombre d'élèves qui n'ont pas pris conscience de cette dérive mathématique des mots "résoudre" et "solution". Dans le quotidien, si un problème n'a pas de solution, il n'est justement pas résolu. Cette différence de langage est à expliciter en classe.

Une conséquence de ce statut de démonstration accordé à la résolution d'équation devrait être que l'élève se rende compte du fait que plusieurs méthodes sont possibles. A un type d'équation ne sera plus attaché une méthode unique. A l'élève de choisir.

2. Un deuxième objectif serait de **donner des moyens de contrôle internes aux mathématiques sur les méthodes elles-mêmes.** En effet, si un élève s'en tient à une méthode pour résoudre un type d'équation, toute autre méthode s'écartant de celle qui est coutumière dans la classe sera d'emblée suspecte, et ce pour des raisons qui n'auront rien de mathématique. Le premier argument que certains élèves donneront sera : "C'est faux parce que ce n'est pas comme cela qu' il faut faire. Il faut...". Dans ce genre d'argument prescriptif, on s'en réfère à une autorité extérieure sans aucun examen de la solution proposée. Donner des moyens de contrôle mathématique, c'est aussi favoriser l'attitude qui consiste à faire momentanément abstraction de ses propres idées pour examiner la proposition d'autrui à la lumière de critères - du vrai et du faux à instituer - qui deviennent des références communes aux protagonistes. Remarquons que cette situation est confortable par rapport à celles du quotidien où ce socle commun n'existe pas.

3. Il peut sembler que ces deux premiers objectifs nécessitent un investissement lourd pour ce qui ne peut paraître qu'un problème technique. Au minimum nous espérons éviter des comportements (mimétisme par exemple) qui font obstacle pour entamer une activité mathématique. De façon plus ambitieuse, nous pensons, et c'est notre troisième objectif, que **les apprentissages et les attitudes favorisées lors de cette activité de résolution se transfèreront à d'autres domaines** : contrôle, réflexion sur le but à atteindre et les méthodes utilisées, construction du sens de l'implication et de l'équivalence logique, toutes choses non spécifiques aux équations mais que nous voulons établir dans toutes les activités de la classe.

Nous allons maintenant proposer une approche des équations au lycée qui privilégie l'aspect logique de la résolution. Insistons sur un point : ce n'est qu'une part du travail sur les équations. En particulier, il est fort utile de travailler dans des contextes variés, sur le sens d'expressions du type "a est solution de l'équation", "l'équation n'a pas de solution", "a est la solution de l'équation"..., sur des équations dont on peut dire a priori qu'elles n'ont pas de solution, sur des mises en équations, etc... Tout cet aspect, nécessaire, n'est pas envisagé ici.

Eclaircissements préalables

Précisons d'abord le point de vue que nous avons adopté, qui nous a demandé, à nous-mêmes, des efforts d'éclaircissement.

Ce qui suit n'est pas destiné aux élèves.

Considérons la suite (1) d'écritures :

$\sqrt{2 - x^2} = 3x$

$2 - x^2 = 9x^2$

$x = \sqrt{0{,}2}$ ou $x = -\sqrt{0{,}2}$

Que penser d'une telle suite d'écritures, dans laquelle ne figure aucun lien logique ?.

Modifions cette suite :

Pour tout x dans R :

$\sqrt{2 - x^2} = 3x$

$\Rightarrow 2 - x^2 = 9x^2$

$\Leftrightarrow x = \sqrt{0{,}2}$ ou $x = -\sqrt{0{,}2}$

Cette suite (2) (où nous avons volontairement gardé la disposition couturnière verticale, mais tout à fait ambigüe), qui comporte une implication entre les deux premières égalités et une équivalence entre les deux dernières, est vraie.

Voici une suite (3) :

Pour tout x dans R_+ :

$\sqrt{2 - x^2} = 3x$

$\Leftrightarrow 2 - x^2 = 9x^2$

$\Leftrightarrow x = \sqrt{0,2}$ ou $x = -\sqrt{0,2}$

Cette suite (3) est encore vraie. Nous pourrions écrire d'autres variantes. A la suite (1), on ne peut attribuer une valeur de vérité car la formulation est incorrecte. Lors de la résolution des équations, le vrai et le faux des affirmations faites dépend donc essentiellement :

- du domaine sur lequel on se place,
- du lien explicite (implication ou équivalence) qui existe entre deux égalités.

Les affirmations en jeu sont du type :

$$\forall x \in D : (P(x) \Rightarrow Q(x))$$

ou bien du type

$$\forall x \in D : (P(x) \Leftrightarrow Q(x)).$$

Revenons donc sur les critères du vrai et du faux de telles propositions. Voici quatre points qu'il nous paraît utile de souligner.

1. Une proposition est une phrase bien formulée à laquelle on peut attribuer une valeur de vérité. Dans la suite (1), il n'y a pas de proposition pour cause de trop d'implicite. Nous ne dirons donc pas que c'est faux, mais qu'on ne peut pas savoir si c'est vrai ou si c'est faux, ce qui est différent sur le plan mathématique.

2. Une proposition du type

$$\forall x \in D : \quad (P(x) \Rightarrow Q(x))$$

est vraie s'il n'y a pas de contre exemple, fausse s'il y a un contre-exemple, c'est à dire un nombre a dans D tel que P(a) soit vraie et Q(a) fausse. Ainsi,

$$\forall x \in R : \quad \sqrt{2-x^2} = 3x \quad \Rightarrow \quad 2-x^2 = 9x^2$$

est vraie. En effet, s'il y avait un contre-exemple, cela signifierait qu'il existerait un réel a tel que $\sqrt{2-a^2} = 3a$ et $2-a^2 \neq 9a^2$, ce qui n'est pas possible car si deux nombres sont égaux, leurs carrés le sont aussi.

La proposition

$$\forall x \in R_+ : \quad \sqrt{2-x^2} = 3x \quad \Leftrightarrow \quad 2-x^2 = 9x^2$$

est vraie aussi. S'il existe un réel a, positif, tel que P(a) soit vraie, Q(a) sera vraie pour la même raison que ci-dessus. Réciproquement, s'il existe un réel a, positif, tel que $2\text{-}a^2 = 9a^2$, ces deux nombres étant égaux et positifs, leurs racines carrées le sont aussi ; or, a étant positif, $\sqrt{9a^2}$ est égal à 3a ; on a donc $\sqrt{2\text{-}a^2} = 3a$. Ceci nous prouve qu'on ne peut trouver de contre-exemple à la proposition puisqu'on ne peut avoir en même temps P(a) vraie et Q(a) faux.

Si on revient au langage des équations, nous sommes donc assurés que si un nombre a, positif, est solution de la première équation, alors il est solution de la deuxième et réciproquement.

On peut donc dire, d'une part que les deux équations sont équivalentes sur l'ensemble des nombres positifs, c'est à dire ont les mêmes solutions sur cet ensemble, et d'autre part, que les deux propositions P(x) et Q(x) sont équivalentes sur R_+ au sens logique du terme.

3. Pris par le biais du contre-exemple, le problème paraît assez clair. Mais parler de la propositon

$$\forall x \in D : \ (P(x) \Rightarrow Q(x))$$

c'est aussi pouvoir dire, dès qu'on remplace x par un nombre a pris dans D, si l'implication $P(a) \Rightarrow Q(a)$ est vraie ou non. Essayons avec le même exemple

$$\forall x \in R : \ \sqrt{2\text{-}x^2} = 3x \quad \Rightarrow \quad 2\text{-}x^2 = 9x^2$$

Prenons x=1. On a alors

$$\sqrt{2\text{-}1} = 3 \quad \Rightarrow \quad 2 - 1 = 9$$

L'hypothèse étant fausse, l'implication elle-même est vraie. D'une manière plus générale, l'implication $P(a) \Rightarrow Q(a)$ est vraie dès que P(a) est faux.

Prenons maintenant x=3. On a alors

$$\sqrt{2\text{-}9} = 3 \quad \Rightarrow \quad 2 - 9 = 81$$

Dans ce cas, $\sqrt{2\text{-}9}$ n'existe pas. Peut-on dire que $\sqrt{2\text{-}9} = 3$ est fausse ? Oui.

En effet, quand nous écrivons $\sqrt{2\text{-}9} = 3$, nous entendrons dans toute la suite la phrase suivante : " -7 a une image par la fonction racine et cette image est 3". Il est facile de s'accorder sur le fait que cette phrase en "français" est fausse. $\sqrt{2\text{-}9} = 3$ n'est pas une affirmation mal formulée, mais bien une proposition. Il en sera de même dans tous les cas où nous serons amenés à écrire "quelque chose qui n'existe pas", en l'occurrence des expressions contenant "des" f(k) où f est une fonction numérique et où k n'a pas d'image.

Revenons à la proposition

$$\sqrt{2\text{-}9} = 3 \quad \Rightarrow \quad 2 - 9 = 81$$

elle est donc vraie puisque son hypothèse est fausse.

Disons, pour reprendre la terminologie déjà utilisée dans un précédent chapitre, que pour la proposition

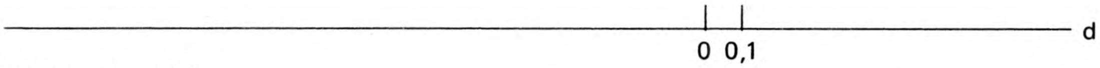
$$\forall x \in R \quad \sqrt{2\text{-}x^2} = 3x \quad \Rightarrow \quad 2\text{-}x^2 = 9x^2,$$

49. 1. Soit f l'application ainsi définie :

$$f : \mathbb{D}_1 \longrightarrow \mathbb{D}_1$$
$$a \longmapsto a - 3{,}5$$

Calcule f(0,7) , f(-0,2) , f(-1,5) , f(1,7) *et* f(-2,1) .

2. Sur la droite matérielle dessinée ci-dessous, on a marqué les barreaux d'abscisses 0 et 0,1 d'une échelle régulière graduée par $\mathbb{D}_1$.



Recopie ce dessin.

Soit R, S, T, U, V, R$'$, S$'$, T$'$, U$'$ et V$'$ les barreaux de cette échelle définis dans le tableau ci-contre.

barreaux	R	S	T	U	V	R$'$	S$'$	T$'$	U$'$	V$'$
abscisses	0,7	-0,2	-1,5	1,7	-2,1	f(0,7)	f(-0,2)	f(-1,5)	f(1,7)	f(-2,1)

Place ces barreaux sur ton dessin. ***Calcule*** $\overline{RU}$, $\overline{R'U'}$, $\overline{RS}$, $\overline{R'S'}$, $\overline{TU}$, $\overline{T'U'}$, $\overline{TV}$ *et* $\overline{T'V'}$. ***Que constates-tu ?***

3. Tu vas démontrer ce que tu as constaté.

Soit x et y deux éléments de $\mathbb{D}_1$, M et N les barreaux de la droite d d'abscisses x et y, M$'$ et N$'$ les barreaux de la droite d d'abscisses f(x) et f(y).

Compare $\overline{MN}$ *et* $\overline{M'N'}$.

◆◆◆

TABLE DES NOMBRES PREMIERS DE 2 A 2 357

2	101	233	383	547	701	877	1 049	1 229	1 429	1 597	1 783	1 993	2 161
3	103	239	389	557	709	881	1 051	1 231	1 433	1 601	1 787	1 997	2 179
5	107	241	397	563	719	883	1 061	1 237	1 439	1 607	1 789	1 999	2 203
7	109	251	401	569	727	887	1 063	1 249	1 447	1 609	1 801	2 003	2 207
11	113	257	409	571	733	907	1 069	1 259	1 451	1 613	1 811	2 011	2 213
13	127	263	419	577	739	911	1 087	1 277	1 453	1 619	1 823	2 017	2 221
17	131	269	421	587	743	919	1 091	1 279	1 459	1 621	1 831	2 027	2 237
19	137	271	431	593	751	929	1 093	1 283	1 471	1 627	1 847	2 029	2 239
23	139	277	433	599	757	937	1 097	1 289	1 481	1 637	1 861	2 039	2 243
29	149	281	439	601	761	941	1 103	1 291	1 483	1 657	1 867	2 053	2 251
31	151	283	443	607	769	947	1 109	1 297	1 487	1 663	1 871	2 063	2 267
37	157	293	449	613	773	953	1 117	1 301	1 489	1 667	1 873	2 069	2 269
41	163	307	457	617	787	967	1 123	1 303	1 493	1 669	1 877	2 081	2 273
43	167	311	461	619	797	971	1 129	1 307	1 499	1 693	1 879	2 083	2 281
47	173	313	463	631	809	977	1 151	1 319	1 511	1 697	1 889	2 087	2 287
53	179	317	467	641	811	983	1 153	1 321	1 523	1 699	1 901	2 089	2 293
59	181	331	479	643	821	991	1 163	1 327	1 531	1 709	1 907	2 099	2 297
61	191	337	487	647	823	997	1 171	1 361	1 543	1 721	1 913	2 111	2 309
67	193	347	491	653	827	1 009	1 181	1 367	1 549	1 723	1 931	2 113	2 311
71	197	349	499	659	829	1 013	1 187	1 373	1 553	1 733	1 933	2 129	2 333
73	199	353	503	661	839	1 019	1 193	1 381	1 559	1 741	1 949	2 131	2 339
79	211	359	509	673	853	1 021	1 201	1 399	1 567	1 747	1 951	2 137	2 341
83	223	367	521	677	857	1 031	1 213	1 409	1 571	1 753	1 973	2 141	2 347
89	227	373	523	683	859	1 033	1 217	1 423	1 579	1 759	1 979	2 143	2 351
97	229	379	541	691	863	1 039	1 223	1 427	1 583	1 777	1 987	2 153	2 357

Il y a 1 229 nombres premiers inférieurs à 10 000 et 9 592 nombres premiers inférieurs à 100 000.

Puis je donne à résoudre, sans commentaire de ma part, l'équation suivante, choisie parce que le calcul de la valeur des deux membres est possible pour toute valeur réelle donnée à x et aussi parce qu'elle n'est pas équivalente à l'équation obtenue en élevant ses deux membres au carré :

$$\sqrt{x^2+4} = 2 - 3x$$

Pendant le travail des élèves, au cours duquel je n'interviens pas, j'ai officieusement remarqué trois méthodes :

a) élever au carré les deux membres

b) "calculer" $\sqrt{x^2+4}$ qui est déclaré égal à $x+2$ ou à $-x+2$ ou à $-x-2$ ou à $x-2$

c) élever au carré et ajouter la condition $2-3x \geq 0$

Je choisis de demander à l'auteur d'une solution de type a) de la proposer. Il me semble qu'elle doit être examinée en premier si on veut que la résolution par implication soit instituée comme solution possible, mais ce choix peut être mis en doute. Il se trouve alors que les partisans du b) n'acceptent pas d'examiner cette voie jusqu'au bout, car leur méthode leur paraît beaucoup moins coûteuse. Donc nous laissons momentanément a) et examinons b) qui, suscitant des doutes chez certains, est vite éliminée par l'apport d'un contre-exemple aux propositions du type

$\forall x \in R : \sqrt{x^2+4} = x + 2.$

Dès le retour à a) que l'élève a ainsi présentée (sans numéro de lignes) :

(1) $\sqrt{x^2+4} = 2 - 3x$

(2) $x^2 + 4 = 4 - 12x + 9x^2$

(3) $8x^2 - 12x = 0$

(4) $x\,(8x - 12) = 0$

(5) $x = 0$ ou $x = \frac{3}{2}$

un malaise est exprimé autour de cette élévation au carré. : "A-t-on le droit de ... ? ", "C'est bizarre cette affaire de carré". Finalement quelqu'un examine les solutions et se rend compte qu'une des solutions ne convient pas. L'attention se reporte sur le passage de (1) à (2) que la classe est alors prête à jeter au panier. Je rappelle que, a et b étant deux réels, si $a = b$ alors $a^2 = b^2$, théorème qui nous assure que si la ligne (1) est vraie pour une valeur attribuée à x, la ligne (2) l'est nécessairement. Mais les élèves interviennent alors pour dire que la réciproque est fausse et que la solution superflue trouvée correspondrait à $2-3x < 0$. Les autres pas de la résolution sont ensuite reconnus comme des équivalences avec les théorèmes correspondants, en particulier pour le passage de (4) à (5).

Je conclus en disant qu'entre (1) et (5) nous n'avons donc qu'une implication, que de ce fait toutes les solutions de (1) sont solutions de (2), mais qu'il peut exister des solutions de (2) qui ne sont pas solutions de (1). Une vérification ou plutôt cette fois, une réelle réciproque s'impose.

Ensuite nous avons examiné la solution c) qui n'a pas, ce jour-là, soulevé d'objection. J'ai conclu en comparant les deux méthodes.

Toutes les discussions entamées par les élèves ne sont pas rapportées ici. Insistons : il est utile de laisser s'exprimer les idées.

A la fin de la séance, j'ai demandé de répondre aux deux questions suivantes :

1) Qu'ai-je appris aujourd'hui ?

2) Résoudre $\sqrt{2x-1} = \sqrt{3x-9}$ dans R

Malheureusement les élèves n'ont pas eu un temps suffisant pour répondre. Voici cependant les thèmes les plus courants apparaissant dans les réponses à (1) :

- J'ai revu des théorèmes servant à la résolution des équations (10 fois)
- Un théorème peut être vrai mais pas sa réciproque ("on le savait déjà !" ajoute un élève), il faut regarder si les lignes sont équivalentes, c'est à dire si la réciproque est vraie aussi, (12 fois).
- Il faut toujours vérifier que les lignes sont équivalentes (3 fois).
- Les réponses que l'on a trouvées doivent être vérifiées (2 fois).
- Pour résoudre certaines équations on doit résoudre un système (3 fois)
- On peut résoudre par implication ou équivalence (7 fois)
- Par implication on peut trouver les solutions de l'équation mais aussi d'autres solutions. Il faut vérifier (8 fois).
- Si on change quelque chose il faut vérifier, par exemple $\sqrt{x^2+2} = x + 2$ est faux (2 fois).
- Enfin trois réponses font apparaître un souci de vigilance, non localisée cette fois : il faut faire attention (aux signes, aux égalités...), j'ai appris à mieux me poser des questions devant des questions complexes, il ne faut pas se lancer directement, il faut réfléchir.

On notera que beaucoup de réponses sont très prescriptives et s'expriment en terme d'action.

Lors de <u>la deuxième séance</u> (2h), vue l'imprécision, réelle ou apparente des réponses précédentes, j'ai fait une rédaction détaillée des arguments pour la résolution de l'équation donnée à la première séance, ce pour les deux méthodes (voir point 2 des éclaircissements pour nous-mêmes). Est-ce-utile ?

Ensuite les élèves ont eu à travailler par groupe sur la liste d'équations ou d'inéquations qu'on trouvera page suivante, avec la consigne ci-dessous.

On veut résoudre dans R, la première équation ou inéquation de chaque paire .

Sans la résoudre, dire quelle opération permet de passer de (1) à (2) et se prononcer sur le vrai ou le faux de (1)⇒(2) et de (1)⇔(2).

Quand (1)⇔(2) est fausse, peut-on trouver un système S, tel que

$$(1) \quad \Leftrightarrow \quad (S) \begin{cases} (2) \\ \text{et} \\ \ldots \end{cases}$$

Equivalence - Implication

Pour toutes les {équations / inéquations de (1) à (11) on se place sur $\mathbb{R}$

(1)

$$\frac{1}{x} = x^2 + \frac{3x+1}{x}$$

$$1 = x^3 + 3x + 1$$

(2)

$$(x-1)^2(x^2-3) = (x-1)(x^2+5)$$

$$(x-1)(x^2-3) = (x^2+5)$$

(3)

$$\frac{x^2+2x-3}{x^2-3x+2} = 1$$

$$x^2+2x-3 = x^2-3x+2$$

(4)

$$3x - 9 > 0$$

$$3x > 9$$

(5)

$$\frac{3x+9}{x^2} > 1$$

$$3x + 9 > x^2$$

(6)

$$\sqrt{3x+8} = \sqrt{5x-3}$$

$$3x + 8 = 5x - 3$$

(7)

$$x^2 - x > \frac{6}{x-1}$$

$$(x^2 - x)(x-1) > 6$$

(8)

$$\sqrt{x^2+3} > 5x - 1$$

$$x^2 + 3 > (5x-1)^2$$

(9)

$$\sqrt{x^2+4} = x - 2$$

$$x^2 + 4 = (x-2)^2$$

(10)

$$\sqrt{x-1} = \sqrt{x+1} - \frac{1}{2}$$

$$x - 1 = \left(\sqrt{x+1} - \frac{1}{2}\right)^2$$

(11)

$$x + 8 = 5$$

$$x + 8 + \sqrt{x} = 5 + \sqrt{x}$$

Une difficulté, que je n'avais pas prévue, est apparue dans la recherche d'un système équivalent. Pour les élèves, trouver un système équivalent, c'est ajouter à (2) une condition qui "arrange". Ainsi pour la deuxième paire, où les deux équations sont :

(1) $(x - 1)^2 (x^2 - 3) = (x - 1) (x^2 + 5)$

(2) $(x - 1) (x^2 - 3) = (x^2 + 5)$

ils ont écrit :

(1) $\Leftrightarrow$ (2) et $(x-1) \neq 0$

Le débat fut très long, il a fallu examiner les deux implications sous-jacentes et revenir à la définition du contre-exemple et du hors-sujet. Le même problème s'est posé pour la paire 7 où les élèves ont écrit :

$$x^2 - x > \frac{6}{x-1} \quad \Leftrightarrow \quad (x^2 - x) (x - 1) > 6 \quad \text{et} \quad x - 1 > 0$$

Mais c'est à ces occasions que les élèves affinent leurs connaissances.

Pendant <u>la troisième séance</u> (1h30), un temps est consacré à la résolution des équations et inéquations, sauf 8 et 11. Les deux méthodes, par implication ou par équivalence, sont utilisées.

Le cas de 11 est examiné à part. Trois élèves pensent que (1)$\Rightarrow$(2) est faux et exhibent -3 comme contre-exemple. Beaucoup pensent que (1)$\Leftrightarrow$(2) est vrai, en avançant deux arguments :

- nous avons un théorème qui dit

Quels que soient a, b, k des réels, $a=b \Leftrightarrow a-k = b-k$

- $\sqrt{-3}$ n'existe pas, donc même si on l'ajoute, cela ne change rien.

Dans le deuxième argument, on voit la confusion entre l'expression "ne pas exister" et "être égal à 0". Je suis intervenue pour dire qu'une phrase du type

$$-3 + 8 + \sqrt{-3} = 5 + \sqrt{-3}$$

était fausse car elle disait justement que -3 avait une image par la fonction racine (cf. éclaircissement 3).

Pour le premier argument, un élève a fait remarquer que le "k" retranché ici n'était pas un réel, le théorème n'était pas applicable tel quel.

J'introduis alors l'idée qu'on peut se placer sur un sous-ensemble adéquat de R pour résoudre. Ainsi l'équation (9) est résolue en se plaçant sur $[2, +\infty[$, l'équivalence entre (1) et (2) étant alors acquise.

Ces trois séances décrites sommairement avaient donc pour but d'introduire l'idée que la résolution des équations était une démonstration. L'énoncé de théorèmes par les élèves pouvait être un indice que cette image etait en train de se construire. Elles devaient aussi permettre aux élèves de consolider un peu leur connaissance de l'implication et de l'équivalence logique. Cet objectif a pu aussi être atteint. Quant à la performance technique sur la résolution des équations, il est bien évident que ce travail ne suffit pas. Nous espérons aussi que les idées mises en place pourront être prises comme référence non seulement chaque fois que nous résoudrons des équations, mais aussi dans beaucoup d'autres situations.

Quelques pistes pour le collège

Les exemples ci-dessus, très pointus et ne concernant que quelques classes, ne doivent pas nous faire oublier notre propos. Au lycée, il est donc possible de considérer la résolution des équations comme une démonstration, et ce, en utilisant implication et équivalence comme en tout autre domaine. Et au collège ?

Si on veut essayer de construire l'idée que la résolution des équations, comme tout calcul d'ailleurs, est une démonstration, utilisons le vocabulaire de la démonstration, en particulier, ne parlons plus de règles mais de théorèmes. La règle insiste sur l'action, c'est à dire sur l'algorithme qui devient vite une recette et fait oublier le but poursuivi. Revenons aussi au langage ordinaire pour énoncer ce que nous avons démontré, par exemple : l'équation a exactement deux solutions qui sont 2 et 4.

Il n'est pas possible d'utiliser l'équivalence au sens de la logique au collège. Résoudre par implication nécessitera une réciproque, non une vérification. Le choix de résoudre par équations équivalentes, c'est à dire ayant le même ensemble de solutions, est tout à fait compatible avec l'objectif ci-dessus, si on garde à l'esprit qu'on est en train de prouver quelque chose. Que l'on fasse le choix de la résolution par implication ou par équations équivalentes, les formulations des théorèmes (règles) ne sont sans doute pas aussi évidentes qu'il y paraît. Pour s'en convaincre il suffit de penser à l'équation (11) proposée en classe de première ou à l'équation suivante : $\sqrt{x}\,(x+2) = 0$, pourtant finalement résoluble en collège. Il n'est pas utile croyons-nous, de rechercher une rigueur excessive pour ce niveau.

Démontrer suppose une problématique. <u>Résoudre une équation, c'est se poser la question de l'existence et de la détermination des solutions de cette équation.</u> Il nous paraît important de se lancer dans cette recherche avant de se lancer dans les algorithmes de résolution qui risquent fort de "tuer" le problème. Ainsi les programmes préconisent <u>la recherche par "essais et corrections successifs"</u> en troisième, mais ceci peut être fait beaucoup plus tôt. Tout problème qui amène à <u>tester si un nombre est solution d'une équation,</u> aidera l'élève à construire du sens autour de l'expression "résoudre une équation". De même, <u>sans déterminer les solutions, chercher des renseignements</u> sur celles-ci aboutirait à des résultats du type : "s'il existe des nombres solutions, ce ne peut être que des nombres positifs" par exemple, ou, autre formulation, "il n'y a pas de solution négative". Ce dernier type d'exercice a le mérite d'associer les deux mots démonstration et équation sans passer par la résolution.

L'équation est aussi un outil pour résoudre certains problèmes. Si on passe assez de temps à comprendre ce qu'on cherche dans ce problème, pourquoi pas directement "par essai et corrections" là aussi, la traduction mathématique ensuite, en terme d'équation, prendra du sens si la réponse n'est pas évidente.

Finalement, nous avons trois entrées possibles dans l'apprentissage du concept d'équation :

- l'équation-outil pour résoudre des problèmes,
- l'équation-objet formel pour lequel on peut se poser des questions sur ses solutions éventuelles, sans utilisation d'algorithme,
- l'équation-objet formel encore que l'on traite à l'aide d'algorithme.

Ce troisième aspect ne doit pas prendre le pas sur les deux autres qui, eux, contribuent à la construction du sens.

Une annexe

Petites remarques sur la résolution d'équations de genres différents que nous avons l'occasion de rencontrer au lycée.

1. Résolution de $|x+1| = 3-2x$.

Si l'on se place sur l'ensemble des réels inférieurs à 3/2, et on sait qu'il n'y a pas de solution ailleurs, elle se résout ainsi :

$$|x+1| = 3-2x \iff (x+1 = 3-2x \text{ ou } x+1 = -3+2x)$$

Si l'on reste dans R,

$$|x+1| = 3-2x \iff ((x+1 = 3-2x \text{ et } x+1 \geq 0) \text{ ou } (-x-1 = 3-2x \text{ et } x+1 \leq 0))$$

2. Si on a à résoudre des équations du type $f(x)=0$, où f est une fonction quotient, il est préférable que les élèves comprennent que la recherche des zéros du dénominateur est inutile. Il y va du sens du "et" dans la proposition

$$\text{pour tout x dans R:} \quad f(x)=0 \iff (N(x)=0 \text{ et } D(x)\neq 0)$$

où N et D sont respectivement numérateur et dénominateur de f. Il suffit de résoudre la première équation et de vérifier si les solutions de cette équation satisfont la deuxième condition.

3. Nous résolvons aussi des équations avec changements d'inconnues et obtenons dans des cas favorables des équivalences sur R^2 du genre :

$$f(g(x)) = 0 \iff (Y = g(x) \text{ et } f(Y) = 0)$$

C'est le cas par exemple des équations bicarrées. En terminale, il est une situation intéressante du point de vue de la résolution par équivalence ou implication. Voici un exemple :

Résoudre dans R l'équation : $4x^3 - 3x - 0,5 = 0$ (1)

Nous posons cette fois, $x = h(Y)$ avec $h(Y) = \cos Y$, et nous obtenons alors seulement l'ipmplication :

$$(x = \cos Y \text{ et } \cos^3 Y - 3\cos Y - 0,5 = 0) \Rightarrow 4x^3 - 3x - 0,5 = 0$$

En effet, sans étude complémentaire, rien ne prouve que toutes les solutions de l'équation seront ainsi obtenues, les solutions éventuelles non comprises entre -1 et 1 ne pouvant s'écrire cosY.

4. Il y a aussi les équations ou inéquations pour lesquelles on procède par "disjonction des cas". Prenons un exemple :

$$\sqrt{x-1} > 0,5x - 1$$

Bien sûr nous pourrions écrire par exemple : quel que soit x dans R,

$$\sqrt{x-1} > 0,5x-1 \iff ((x-1 \geq (0,5x-1)^2 \text{ et } 0,5x-1 \geq 0) \text{ ou } (\sqrt{x-1} > 0,5x-1 \text{ et } 0,5x-1 < 0))$$

mais il serait sans doute beaucoup plus parlant pour les élèves de dire et d'écrire en toutes lettres qu'il n'y a pas de solution inférieure à 1 (puisque x-1 doit être positif ou nul) et que l'on cherche d'abord les solutions dans [2, +∞[, ce qui nous amène à :

Dans [2, +∞[:

$$\sqrt{x-1} > 0{,}5\,x - 1 \quad \Leftrightarrow \quad x-1 > (0{,}5\,x-1)^2$$

en vertu du théorème de comparaison des carrés de deux nombres positifs. Puis on cherche les solutions dans l'intervalle [1, 2[: un raisonnement simple, sans calcul, permet de conclure que tous les nombres supérieurs ou égaux à 1 de cet intervalle sont solutions.

Il me paraît plus pertinent de se placer sur des ensembles, ici [2, +∞[, plutôt que de commencer par "si x>2" qui introduit à la fois une nouvelle inéquation et une nouvelle implication. Une résolution qui utiliserait aussi une représentation graphique des fonctions en jeu serait également bienvenue.

Expérimentation - Démonstration

L'expérimentation peut être la première des phases de ce que nous appelons la démarche mathématique : expérimenter de façon à conjecturer un résultat que l'on démontre ensuite.

Très schématiquement, on peut dire que cette phase est prédominante dans les premières années du collège et qu'elle laisse peu à peu place à la démonstration, qui devient l'activité essentielle dans les classes scientifiques du lycée. Le passage du stade où l'on se contente d'expérimenter pour conjecturer ou pour vérifier à celui où se fait sentir chez l'élève la nécessité de la démonstration pour étayer les étapes précédentes se fait institutionnellement en quatrième, mais beaucoup d'élèves n'ont pas encore franchi le cap en seconde, et certains ne le franchissent jamais vraiment.

Nous pensons que cette phase d'expérimentation doit garder une large place au lycée, et pas seulement dans la recherche privée - au brouillon - des élèves, nous avons aussi à la valoriser dans le cours et dans les contrôles.

Les différents rôles de l'expérimentation

Tous les commentaires sur les réponses d'élèves et les énoncés ci-après ne s'adressent qu'aux professeurs. Voici tout d'abord trois exemples dans lesquels nous examinons la phase d'expérimentation.

Exemple 1 : le vecteur qui bouge

En début de seconde, à la suite du cours sur la somme de deux vecteurs, l'énoncé suivant est proposé à une classe :

ACBD désigne un parallélogramme.

Pour tout point M (du plan), les deux vecteurs $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$ *et* $\overrightarrow{MD}$ *sont-ils égaux ?*

Les élèves cherchent, mais que font-ils ? Quelques-uns écrivent un calcul vectoriel, d'autres tentent un dessin, mais la plupart restent bloqués : beaucoup ne comprennent pas pourquoi il est question de deux vecteurs, alors qu'il y en a quatre dans l'énoncé. Après avoir fait au tableau ce bilan des questions de la classe, le professeur donne aux élèves l'idée de faire des essais : chacun se dessine un parallélogramme ACBD , se choisit un premier point M et construit, d'une part $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$, d'autre part $\overrightarrow{MD}$, se choisit un second point M et recommence une autre construction, et ainsi de suite... en choisissant à chaque fois une couleur différente.

Quel intérêt cela présente-t-il de demander aux élèves cette expérimentation ?

1 - Tout d'abord, elle aide chacun à bien comprendre l'énoncé : la signification de ce "pour tout point M", la distinction de ces deux vecteurs à comparer.

2 - Elle permet de faire le point sur la construction d'une combinaison linéaire de vecteurs.

3 - La confrontation des différentes constructions - chacun ayant son parallélogramme propre et ses points choisis - aboutit à la formulation d'une conjecture : celle que les vecteurs sont égaux pour tout point M du plan. Il est d'ailleurs nécessaire pour cela de débattre de certaines constructions (à l'aide de transparents par exemple) n'aboutissant pas à des vecteurs égaux. Le doute peut persister.

4 - Enfin cela permet de redonner confiance à certains élèves, qui, quelle que soit la question posée, se disent qu'ils ne savent rien faire : ils se rendent compte qu'ils peuvent être actifs, même sur un problème qu'ils jugeaient complexe au départ.

Quel rapport y a-t-il, dans cet exemple, entre expérimentation et démonstration ?

On peut tout d'abord dire que l'expérimentation permet la formulation d'une conjecture, mais ne donne aucune piste pour la démonstration. Elle facilite la compréhension du problème posé. Pour cette raison il n'est pas inutile d'entraîner ici tous les élèves dans la voie expérimentale, même ceux qui s'étaient directement lancés dans le calcul vectoriel.

On remarque d'ailleurs que les élèves expérimentent à des degrés divers, qui sont en relation avec leur position au sein de l'activité mathématique, c'est à dire suivant qu'ils ont ou non franchi le pas entre l'activité matérielle autour des mathématiques et l'abstraction.

- Les uns utilisent leur règle et leur compas, mesurent, obtiennent des vecteurs "qui diffèrent de quelques millimètres" et qu'ils considèrent comme tels : ils sont restés dans la phase expérimentale des premières classes de collège.

- D'autres utilisent des quadrillages et "voient " les deux vecteurs construits égaux : ils ne se bloquent pas sur des problèmes de mesure, le statut de leur dessin évolue vers celui d'une figure.

- D'autres encore font un croquis à main levée et leur dessin peut pratiquemment être remplacé par un discours expliquant qu'ils aboutissent nécessairement à des vecteurs égaux : ce sont ceux qui sont les plus avancés dans la pratique de la démarche mathématique, ils sont intimement convaincus que la conjecture est vraie. Seule l'idée qu'ils raisonnent sur un exemple de parallélogramme ou bien la confrontation de constructions diverses et contradictoires peuvent faire naître le doute dans leur esprit et leur faire sentir la nécessité d'une preuve ne s'appuyant pas sur un dessin.

- Il en reste un nombre infime pour lesquels la phase expérimentale a un rôle de vérification car ils ont déjà parfaitement compris le problème et l'ont résolu.

Ainsi les uns raisonnent dans le modèle, en s'appuyant sur une représentation de celui-ci, alors que les autres restent complètement attachés au dessin, sans avoir idée du modèle.

Exemple 2 : rangement de nombres réels

Maintenant un énoncé que nous proposons à nouveau à des élèves de seconde :

a et b désignant des réels quelconques tels que $a < b < 0$ *, comparer* $a + b$ *et* $a - b$ *.*

Voici quelques réponses d'élèves.

Réponse de Marie

"Donc a et b sont strictement négatifs car $a < b < 0$.

$a \leq b$, si $a - b \leq 0$.

$a \geq b$, si $a - b \geq 0$.

$(a - b) - (a + b) = a - b - a - b = - 2 b$

$- 2 b \geq 0$ car $- 2$ est négatif et b est négatif

Or le signe (-) multiplié par le signe (-) donne un nombre positif.

Donc $a - b \geq a + b$."

Réponse de Matthieu

"Pour comparer les réels $a - b$ et $a + b$ tels que $a < b < 0$, je vais faire une différence afin de trouver leur signe.

$(a - b) - (a + b) = a - b - a - b = - 2 b$

Je sais que $a < b$ et que $b > a$.

Donc le signe est négatif."

Réponse de Benjamin

"$a - b < 0$ $\quad a + b < 0$

$a - b > a + b$ car on soustrait un nombre $b < 0$ à un nombre $a < 0$; cela revient donc à faire $a + - b \Rightarrow a - b > a$. Quand on fait $a + b$, on ajoute un nombre $b < 0$ à un nombre $a < 0$, donc $a + b < a$, j'en déduis donc que $a - b > a + b$."

Réponse de Cécile

"On sait que $a < b < 0$, donc a et b sont strictement négatifs.

Donc $a - b > a + b$

(Exemple : $a = - 6$ et $b = - 4$, alors $a < b$.

$a - b > a + b$

$- 6 - (- 4) > - 6 + (- 4)$

$- 6 + 4 > - 6 - 4$

$- 2 > - 10$)

Pareil pour tous les a et b négatifs."

Réponse de Christina

"$a = - 5$ et $b = - 4$	$a = - 8$ et $b = - 3$	$a = - 10$ et $b = - 1$
$a - b = - 1$	$a - b = - 5$	$a - b = - 9$
$a + b = - 9$	$a + b = - 11$	$a + b = - 11$
$a - b > a + b$	$a - b > a + b$	$a - b > a + b$

Je pense que, dans tous les cas, $a - b > a + b$, car on rajoute quelque chose de positif à a négatif pour $a - b$ et c'est plus grand que $a + b$ (dans $a + b$ on ajoute deux nombres négatifs)."

On ne peut évidemment pas savoir ce qui s'est passé dans la tête de chacun de ces élèves, on ne peut que faire des constatations et émettre quelques suppositions.

Quelques maladresses d'expression sont à noter dans la démonstration de Marie : en particulier elle utilise les mêmes symboles a et b que dans sa démonstration pour citer la connaissance sur laquelle elle s'appuie. Mais elle est tout à fait convaincante et on voit qu'elle a bien compris le type de raisonnement qu'elle propose. Ce qui ne semble pas être du tout le cas de Matthieu : on se demande s'il a bien compris de quel signe il parle, il a retenu une méthode de démonstration sans avoir compris le fond du raisonnement. Quant à Benjamin, il se peut que sa démonstration soit directement issue de son expérimentation, et elle est finalement "élégante". Cécile, pour sa part, donne un exemple, avec des détails de calculs au niveau des signes. C'est ce que l'on peut appeler un exemple générique : elle a expérimenté et ne trouve pas d'autre moyen de convaincre le lecteur qu'un exemple qu'elle juge typique de son expérimentation. Comment considère-t-on ce genre de démonstration ? Peut-on se contenter de dire que Cécile n'est pas encore entrée dans la démarche mathématique et a "démontré avec un exemple" ? Enfin Christina a écrit son expérimentation, qui lui permet de conjecturer le résultat, elle tire directement la démonstration (certes un peu maladroite au niveau de l'expression) de l'examen de ses exemples.

Dans les deux dernières réponses, on voit nettement le rôle triple de l'expérimentation : elle permet la compréhension du problème posé, la formulation d'une conjecture et met sur la voie d'une démonstration. Certes, comme le montre la réponse de Marie, l'expérimentation n'est pas un passage obligé pour tous les élèves. Mais ne vaut-il pas mieux une réponse comme celle de Cécile (l'exemple générique) que celle de Matthieu, qui a ingurgité des techniques de démonstration qu'il n'a absolument pas assimilées. On lui a sûrement répété qu'il ne fallait pas prendre d'exemples pour démontrer, ce qu'il a peut-être retenu en omettant les deux derniers mots. La technique de démonstration a pris le pas sur la compréhension du problème.

Exemple 3 : droites parallèles ou concourantes

On rencontre de très nombreux problèmes où l'expérimentation est absolument essentielle pour la recherche de la solution. Par exemple, lorsqu'il s'agit de trouver un lieu de points qui répondent à certaines conditions, beaucoup d'élèves ont intérêt à construire plusieurs points qui satisfont aux contraintes imposées. L'expérimentation est alors aussi bien un moyen de conjecturer le lieu cherché que d'analyser le problème : la construction de nombreux exemples permet souvent de voir agir telle ou telle transformation qui sera utile dans la démonstration de la conjecture. De façon plus précise, voici un exercice proposé en 1ère S et travaillé collectivement.

Enoncé : *(D) et (D') sont deux droites parallèles données. A et A' sont deux points n'appartenant ni à (D), ni à (D'). A tout point M de (D) on associe le point M' d'intersection de (D') et de la parallèle à (AM) passant par A'. Que se passe-t-il pour les droites (MM') ?*

Ce qui nous intéresse particulièrement dans la gestion de cet exercice, c'est que l'expérimentation est faite par la classe toute entière. Elle en est d'autant plus riche. Certains obtiennent des droites (MM') parallèles, alors que d'autres voient sur leur dessin des droites (MM') concourantes. Ils examinent les deux situations et proposent :

Conjecture 1: "En appelant I le point d'intersection de (AA') et de (D) et I' le point d'intersection de (AA') et de (D'), il existe deux cas : celui où $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{A'I'}$ et celui où $\overrightarrow{AI} \neq \overrightarrow{A'I'}$, dans le premier cas les droites (MM') sont parallèles et dans le second elles sont concourantes".

On peut penser que si cet exercice avait été à faire individuellement, peu d'élèves (ou même aucun) auraient pensé à faire varier les points A et A' et voir ainsi qu'il y avait plusieurs cas. Nous leur demandons de passer à la démonstration, mais il reste peu de temps..., et nous la reprenons au cours suivant. Jusqu'alors aucun n'a pensé que les points I et I' pouvaient ne pas exister, nous leur posons la question. Ils s'aperçoivent alors que la droite (AA') peut aussi être parallèle aux droites (D) et (D'). Ils expérimentent à nouveau dans ce cas-là et conjecturent que les droites (MM') sont concourantes. Nous leur proposons alors de condenser l'étude de ces trois cas en deux seulement en introduisant les points K et K' respectivement projetés orthogonaux de A sur (D) et de A' sur (D'). D'où :

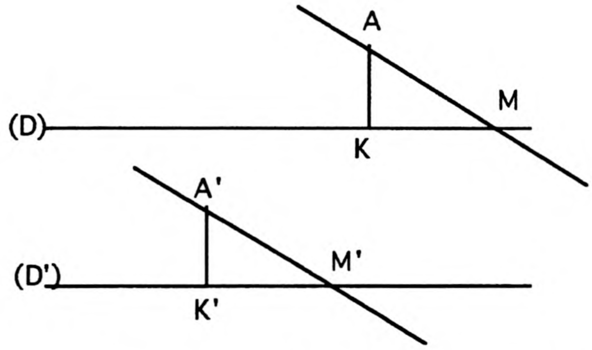
Conjecture 2 :

1 - si $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{A'K'}$, alors toutes les droites (MM') sont parallèles à (AA').

2 - si $\overrightarrow{AK} \neq \overrightarrow{A'K'}$, alors toutes les droites (MM') sont concourantes en un point appartenant à (AA').

Nous n'avons pas fait rédiger complètement la démonstration aux élèves, nous leur en avons proposé une, que nous avons commentée : elle tire ses principales idées de l'expérimentation, qui permet de voir les transformations qui sont utilisées.

Dans le cas où $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{A'K'}$:



On a donc aussi $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{KK'}$.

Soit M un point quelconque de (D) et M' le point de (D') qu'on lui associe dans l'énoncé.

Considérons la translation t de $\overrightarrow{AA'}$.

$$t : A \longmapsto A'$$
$$K \longmapsto K'$$

* La droite (AM) a pour image par t une droite parallèle et passant par A', c'est donc la droite (A'M').

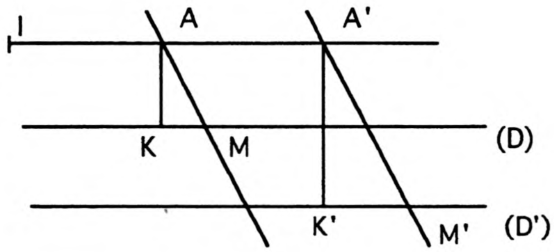
* La droite (D), qui contient K, a pour image par t une droite parallèle et passant par K', c'est donc (D').

* L'intersection de la droite (AM) avec (D) aura pour image l'intersection de la droite (A'M') avec (D'), c'est à dire que M aura pour image M'.

Puisque $t : M \longmapsto M'$, on en conclut que $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{MM'}$. Donc la droite (MM') est parallèle à la droite (AA'). Le point 1 est prouvé.

Ainsi c'est la manipulation des différents éléments de la figure qui fait apparaître la translation qu'on est amené à introduire dans la démonstration : pour peu qu'on utilise de la couleur, on **voit** les triangles A'M'K' images des triangles AMK par cette translation, et le parallélisme des droites (MM') à (AA') en découle.

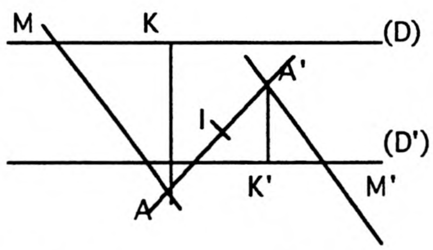
Dans le cas où $\overrightarrow{AK} \neq \overrightarrow{A'K'}$:



Par hypothèse, on est dans l'autre cas pour $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{A'K'}$, celui où $\overrightarrow{AK} \neq \overrightarrow{A'K'}$, mais ces deux vecteurs étant cependant colinéaires car les droites (AK) et (A'K') sont parallèles. Il existe donc un réel α, différent de 1, tel que $\overrightarrow{A'K'} = \alpha\ \overrightarrow{AK}$.

Considérons le point I tel que $\overrightarrow{IA'} = \alpha\ \overrightarrow{IA}$.

Ce point est en fait le barycentre de (A, α) et de (A', -1), qui existe puisque $\alpha - 1 \neq 0$ et il appartient donc à (AA').



Considérons l'homothétie de centre I et de rapport α : $h(I, \alpha) : A \longmapsto A'$

$$K \longmapsto K' \text{ car}$$
$$\overrightarrow{A'K'} = \alpha\ \overrightarrow{AK}$$

Par le même raisonnement que ci-dessus :

* la droite (AM) a pour image (A'M') ;

* la droite (D) a pour image la droite (D') ;

* le point M d'intersection de (AM) et de (D) a pour image le point M' d'intersection de (A'M') et de (D').

On a donc $\overrightarrow{IM'} = \alpha \ \overrightarrow{IM}$, ainsi les points I, M, M' sont alignés, autrement dit, la droite (MM') passe par I. Le point 2 est bien démontré.

Ici aussi, c'est l'expérimentation qui fait apparaître le point I et les triangles homothétiques : cette homothétie qui est la clé de la démonstration, on la voit clairement apparaître dans la phase expérimentale.

Voici maintenant deux exemples, où nous pensons que le lien entre expérimentation et démonstration est encore plus étroit, puisque celle-ci est pratiquemment la description de celle-là. Il s'agit de deux formes de démonstrations particulières, que l'on appelle **exemple générique** (et nous en avons déjà parlé au cours de l'exemple 2 précédent) et **expérience mentale.**

Exemple générique

Considérons l'énoncé suivant :

Démontrer que tout entier naturel sauf 0 peut s'écrire comme une somme de puissances de 2.

Que faisons-nous la plupart du temps, devant un tel problème ? Nous pouvons considérer les premiers entiers naturels, et voir comment ils s'écrivent sous forme de somme de puissances de 2 : $1 = 2^0$; $2 = 2^1$; $3 = 2^1 + 2^0$; $4 = 2^2$; $5 = 2^2 + 2^0$, $6 = 2^2 + 2$; $7 = ...$, puis essayer de faire une démonstration...., par récurrence...

Voici une autre façon de le démontrer, qui est en fait la description d'une expérimentation, et que nous considérons comme tout à fait acceptable - sous réserve qu'elle soit accompagnée d'une phrase d'explication, comme nous allons le voir ci-dessous -, tant elle éclaire justement les mécanismes de la décomposition en somme de puissances de deux :

Considérons un entier quelconque, par exemple 47.

$47 = 23 \times 2 + 1$

$23 = 11 \times 2 + 1$

donc $47 = (11 \times 2 + 1) \times 2 + 1 = 11 \times 2^2 + 2 + 1$

$11 = 5 \times 2 + 1$

donc $47 = (5 \times 2 + 1) \times 2^2 + 2 + 1 = 5 \times 2^3 + 2^2 + 2 + 1$

$5 = 2 \times 2 + 1$

donc

$$47 = (2 \times 2 + 1) \times 2^3 + 2^2 + 2 + 1 = 2^5 + 2^3 + 2^2 + 2 + 2^0$$

Etes-vous convaincu(e) par l'explicitation de cet exemple ? Il nous semble que l'on peut considérer que cette expérimentation a valeur de démonstration : il suffit d'ajouter que ce qui précède peut être fait pour n'importe quel nombre entier, puisque, à mesure que l'on effectue la division euclidienne des nombres par 2, on tombe sur un quotient qui est soit un nombre pair, soit sur un nombre impair, et que $1 = 2^0$.

Pourquoi ne considérons-nous pas qu'il s'agit d'une démonstration erronée, puisque sur un exemple, comme en font souvent les élèves qui ne sont pas encore entrés dans une démarche mathématique ? Justement parce qu'il est détaillé de façon à laisser voir les mécanismes de la décomposition et qu'y est mentionnée sa représentation du cas général : c'est un exemple générique.

Expérience mentale

Tout d'abord, considérons deux triangles OAB et O'A'B' tels que :

$OA = O'A'$, $OB = O'B'$ et $A\hat{O}B = A'\hat{O'}B'$.

Comment, au niveau du collège, démontrer que ces triangles sont superposables ?

On peut décrire ce que l'on appelle une expérience mentale, qui consiste à dire : on amène le point O sur le point O', on fait coïncider A et A', ce qui est possible puisque $OA = O'A'$; puisque $A\hat{O}B = A'\hat{O'}B'$, on peut superposer les droites (OA) et (O'A') ; enfin puisque $OB = O'B'$, B' coïncide obligatoirement avec B. Ainsi les trois sommets du triangle A'O'B' sont superposés à ceux du triangle AOB. Ce raisonnement était classique quand les cas d'égalité des triangles étaient encore au programme.

Comme son nom l'indique, une expérience mentale est une vue de l'esprit , en ce sens elle se distingue d'une expérimentation sur du papier, comme celles dont nous avons parlé à propos des exemples de géométrie évoqués dans les pages précédentes. Mais il s'agit d'un mode de démonstration très évocateur surtout dans les petites classes, et qui a été utilisé même par de grands mathématiciens. Voici une démonstration proposée par Cauchy du théorème des valeurs intermédiaires, dans les *Oeuvres complètes d'A. Cauchy, IIème série, Tome III, pages 51 et 52.*

"THEOREME IV. - *Si la fonction $f(x)$ est continue par rapport à la variable x entre les limites $x = x_0$, $x = X$,et que l'on désigne par b une quantité intermédiaire entre $f(x_0)$ et $f(X)$, on pourra toujours satisfaire à l'équation*

$$f(x) = b$$

par une ou plusieurs valeurs réelles de x comprises entre x_0 et X.

Démonstration. - Pour établir la proposition précédente, il suffit de faire voir que la courbe qui a pour équation $y = f(x)$ rencontrera une ou plusieurs fois la droite qui a pour équation $y = b$ dans l'intervalle compris entre les ordonnées qui correspondent aux abscisses x_0 et X ; or c'est évidemment ce qui aura lieu dans l'hypothèse admise. En effet, la fonction f(x) étant continue entre les limites $x = x_0$, $x = X$, la courbe qui a pour équation $y = f(x)$ et qui passe 1° par le point correspondant aux coordonnées x_0, $f(x_0)$, 2° par le point correspondant aux coordonnées X et f(X), sera continue entre ces deux points ; et, comme l'ordonnée constante b de la droite qui a pour équation $y = b$ se trouve comprise entre les ordonnées $f(x_0)$, f(X) des deux points que l'on considère, la droite passera nécessairement entre ces deux points, ce qu'elle ne peut faire sans rencontrer dans l'intervalle la courbe ci-dessus mentionnée.

On peut, au reste, comme on le fera dans la Note III, démontrer le théorème IV par une méthode directe et purement analytique, qui a même l'avantage de fournir la résolution numérique de l'équation $f(x) = b$."

Au cours de ces différents exemples, non seulement on remarque que l'expérimentation est indispensable pour la recherche d'une conjecture, mais on la voit aussi se rapprocher de plus en plus de la démonstration, jusqu'à en faire partie, dans ce que l'on nomme exemple générique et expérience mentale. Redonnons-lui donc la place qu'elle mérite dans notre enseignement.

Dans nos classes on peut créer beaucoup de situations où l'expérimentation est indispensable pour résoudre le problème posé : pratiquée collectivement, elle peut conduire à des résultats complètement différents, faire apparaître la nécessité de distinguer plusieurs cas, rendre chacun moins sûr de ce qu'il a obtenu, par suite motiver les élèves à trouver une preuve : comment se mettre d'accord si on ne passe pas à la démonstration ?

Un exemple est développé dans la suite, mais en voici succinctement quelques autres.

- Les côtés d'un triangle mesurent 8,1 cm, 5,8 cm, 10 cm ; est-il rectangle ?
- Des points dont on ne sait pas vraiment s'ils sont alignés ou non.
- Des droites dont on ne parvient pas à dire si elles sont parallèles ou non.
- Des fonctions qui semblent croissantes sur l'écran d'une calculatrice, mais qui peut-être...
- Des suites de nombres réels qui semblent converger.
- Des quadrilatères dont la nature est un objet de discussion dans la classe...

Dans l'exemple 1 "Le vecteur qui bouge", c'est l'énoncé qui conduit à une situation douteuse - il a été fabriqué dans ce but -, mais dans l'exemple 2, "Droites parallèles ou concourantes", c'est le bilan en classe de l'expérimentation qui fait ressortir des cas très différents, donnant lieu à des conjectures diverses. Là encore c'est la démonstration qui permet de mettre tout le monde d'accord.

Lors de l'expérimentation, peut se poser le problème de l'utilisation des **"cas particuliers"** : ils ne sont surtout pas à rejeter, bien au contraire, car, dans beaucoup de situations, ils fournissent des renseignements intéressants sur la stratégie de démonstration. N'oublions pas que ce qui est vrai dans le cas général est évidemment vrai dans un cas particulier. Si on demande à Alexandre, élève de sixième, de considérer un parallélogramme ABCD et qu'il dessine un rectangle, pourquoi lui dire de l'effacer ? Comment va-t-il interpréter ce refus du cas particulier ? En se disant qu'un rectangle n'est pas un parallélogramme ? C'est fâcheux ! Bien au contraire, ces cas particuliers enrichissent l'expérimentation collective, donne naissance à des questions, des idées de démonstrations...

Distinguer l'expérimentation de la démonstration

Les élèves doivent apprendre à distinguer le constat à partir d'expérimentation et démonstration, même si plus tard, ils rapprochent les deux comme nous l'avons dit au travers des exemples du paragraphe précédent. Nous allons voir cependant que cette distinction est difficile à saisir pour bon nombre d'élèves, certains la comprenant très tard dans leur scolarité et d'autres jamais, d'autant plus qu'on leur propose souvent des activités où s'enchevêtrent les deux, d'une manière tout à fait confuse.

C'est en classe de cinquième que commence dans les programmes l'initiation à la démonstration : les élèves découvrent donc peu à peu que certains énoncés du cours ont des statuts différents. Par exemple, dans un premier temps, Alexandre aura peut-être expérimenté pour se persuader que si deux droites sont parallèles, alors toute perpendiculaire à l'une est aussi perpendiculaire à l'autre. Dans un deuxième temps, on lui demandera d'utiliser ce résultat pour démontrer un autre résultat. Ainsi, ce que les élèves de cinquième, mais surtout de quatrième, sont amenés à comprendre, c'est qu'à partir d'un certain moment, certains énoncés - dans l'exemple, celui du théorème rappelé ci-dessus - obtiennent un statut nouveau dans la classe : ils deviennent des résultats qui devront être connus, qui vont alimenter le capital de connaissances de la classe et permettront de construire des démonstrations.

Mais la situation devient complexe pour un élève de cinquième, car les résultats - ce que nous appelons "le cours" - ne sont pas toujours des énoncés de théorèmes ou de définitions. Ce sont parfois aussi des constructions. Par exemple, la construction de la médiatrice d'un segment :

1 - l'élève expérimente avec son compas pour placer des points équidistants des extrémités d'un segment,

2 - il reconnaît que tous ces points appartiennent à la perpendiculaire au segment en son milieu - la médiatrice - ,

3 - la classe en déduit un énoncé à connaître : pour tout point, s'il est équidistant des extrémités d'un segment, alors il appartient à la médiatrice de ce segment ;

4 - mais il doit aussi retenir comme énoncé la construction de la médiatrice au compas et à la règle.

Ainsi l'élève doit comprendre que les mêmes gestes, à savoir l'utilisation de son compas et de sa règle, a valeur d'expérimentation dans la phase 1 ci-dessus, alors qu'elle n'est plus du tout une expérimentation si on lui demande de construire la médiatrice d'un segment.

Aussi, au collège, est-il essentiel de faire de fréquentes mises au point sur le statut de ce l'on est en train de faire tout au long du cours de mathématiques (voir bibliographie à ce sujet : R.

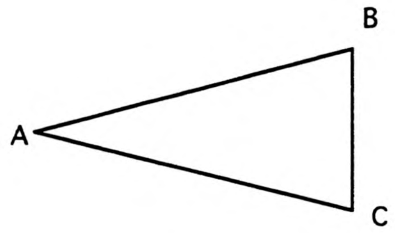
NOIRFALISE, *Rapport de l'élève à l'objet "énoncer des résultats en géométrie"*).Il en est d'ailleurs de même au lycée, par exemple à propos de l'utilisation des courbes des fonctions de référence, du cercle trigonométrique...

Quelques exemples d'ambiguïtés

Voici un type d'exercice dont on rencontre des illustrations dans certains manuels de cinquième, à la fin du chapitre consacré aux angles, où l'on considère comme un résultat de cours que la somme des angles d'un triangle est égale à 180 degrés.

Enoncé

Que penses-tu du texte et du dessin ci-contre tirés d'un cahier d'élève ?



Je construis [AB] et [AC] de même longueur.

Je mesure l'angle $\hat{A}$ *et l'angle* $\hat{B}$: $\hat{A} = 29°$ *et* $\hat{B} = 76°$

Quelles peuvent être les réponses des élèves ?

Anticipons sur différentes attitudes possibles d'élèves de cinquième :

1 - Il est tout à fait d'accord avec ce qui est écrit, mais il considère que l'expérimentation n'est pas terminée, alors il mesure le troisième angle du triangle ou bien il dit que cela devrait être fait. C'est de cette façon qu'il a procédé pour contrôler que la somme des angles d'un triangle vaut 180°. Mais il n'ajoute rien car il pense qu'on ne le lui demande pas. Il reste complètement dans l'expérimentation : d'une part, on ne peut pas dire que le texte ne l'y invite pas, d'autre part, c'est une attitude qu'on lui demande souvent d'adopter.

2 - L'élève ne trouve rien à redire à ce texte, il pense simplement qu'il manque la mesure du troisième angle. Il s'appuie donc sur le dessin et mesure le troisième angle du triangle, puis remarque que la somme des mesures n'est pas égale à 180°. Il conclut enfin que ce n'est pas étonnant à cause des erreurs de mesure. Il continue ainsi l'expérimentation décrite dans le texte, car elle lui semble inachevée, tout en gardant une certaine distance par rapport à ce qu'il trouve parce qu'il sait que les valeurs trouvées ne sont pas les "vraies valeurs" des angles.

3 - Son attitude est initialement la même que les deux précédents, mais, au lieu de mesurer le troisième angle, il raisonne en disant que la somme des angles d'un triangle valant 180°, $\hat{C}$

mesure 180 - 75 - 29 = 76°. Il ajoute que les deux angles $\hat{C}$ et $\hat{B}$ sont à peu près égaux, ce qui est cohérent avec le fait que ABC soit isocèle.

4 - Il n'est pas d'accord avec le texte, car il a mesuré les angles $\hat{A}$ et $\hat{C}$ et il ne trouve pas tout à fait les mêmes valeurs.

5 - Il considère que la mesure de l'angle $\hat{A}$ est fausse et il le justifie en disant que, comme le triangle ABC est isocèle, les deux angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$ sont égaux : ils mesurent donc 76°. Donc, comme la somme des angles d'un triangle vaut 180°, $\hat{A}$ devrait mesurer 28°.

6 - Il considère que les deux mesures d'angles sont fausses car, le triangle étant isocèle, 29 + 75 + 75 = 179°, ce qui est impossible.

Qu'attend-on d'un élève face à un tel exercice posé à la fin du chapitre sur la somme des angles d'un triangle ? Une réponse du type 6 ? Mais il n'y aucune raison de ne pas être d'accord avec un élève qui adopte les attitudes 1, 2, 3 ou 4. Cet énoncé est complètement ambigu : il est tout à fait normal que l'on considère que l'expérimentation est inachevée et on ne peut rien trouver à redire à de telles mesures d'angle qui ne sont pas aberrantes. Certes on aurait pu affirmer qu'il y avait erreur de mesure si l'on avait trouvé écrit dans le texte que $\hat{A}$ mesurait 40° et $\hat{B}$ 80°, mais ici on ne peut que dire que les mesures ne sont pas trop mauvaises.

Difficile pour un élève de savoir exactement ce qu'on lui demande au travers d'un tel exercice ! D'expérimenter, de raisonner en utilisant le cours ?

Si c'est d'expérimenter, il ajoute sa mesure du dernier angle, constate que finalement les mesures ne sont pas trop mauvaises. Mais alors quel est l'intérêt de lui poser cette question ?

Si c'est de raisonner, comment peut-il le faire puisqu'il n'a que des valeurs approchées ? Comment un élève qui débute dans l'argumentation mathématique peut-il faire tout seul la part des choses ? Comment peut-il ensuite distinguer expérimentation et démonstration, si, dans un tel cas, on attend de lui autre chose qu'une attitude tout à fait expérimentale ?

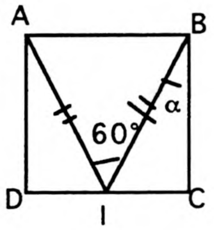
Même en première S la distinction n'est pas évidente

Voici un énoncé suivi de la réponse de deux élèves de première S.

Enoncé : *Ce qui suit est-il vrai ou faux :*

si ABCD est un carré et si I est le milieu de [CD], alors $\widehat{AIB} = 60°$ *?*

Réponse de Clémence



Vrai.

Dans le triangle rectangle BCI, $\sin \alpha = \frac{IC}{BI}$,

$\sin \alpha = \frac{1}{2,2} = 0,455$

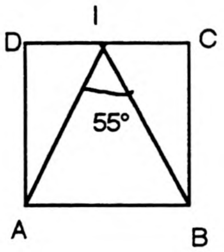
$\alpha = 27,1°$

Or $\widehat{ABC} = 90°$ donc $\widehat{ABI} = 62,9$

Comme il s'agit d'un triangle (ABI) isocèle, alors $\widehat{ABI} = \widehat{IAB}$, donc $\widehat{AIB} = 180 - 125,8 \approx \frac{\pi}{3}$

Aux erreurs de calculs près on peut dire que $\widehat{AIB} = 60°$

Réponse de Damien



Contre-exemple

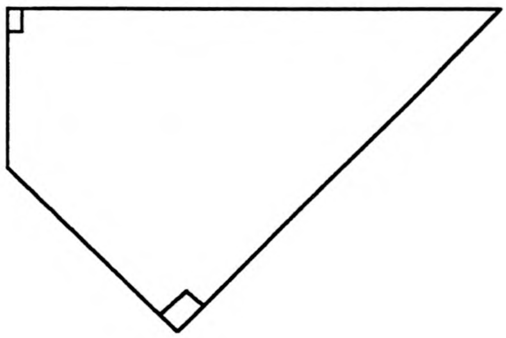
Ici on a $\widehat{AIB} = 55°$

donc Faux

Clémence et Damien s'appuient tous les deux sur une expérimentation, mais ils aboutissent à des conclusions contradictoires. Le statut du dessin évolue au cours de la réponse de Clémence, alors qu'il demeure expérimental pour Damien. En effet, pour Clémence, il constitue tout d'abord le support d'une manipulation, mais ensuite il devient la représentation du modèle : un carré quelconque dont on considère le milieu d'un côté. Clémence a le tort de passer trop rapidement de l'un à l'autre ; en fait, elle n'expérimente pas vraiment, puisqu'elle fait peu de cas des résultats de ses mesures, qu'elle juge trop imprécises (l'écart entre 180 - 125,8 = 54,2 ° et 60° est tout de même important). Quant à Damien, il reste trop dans l'expérimentation : il aurait dû expliciter son contre-exemple, passer de la mesure de l'angle à la justification qu'il ne peut pas être de 60° : *en considérant un carré de côté 1, J désignant le milieu de [AB], (IJ) est un axe de symétrie de la figure, tan* $\widehat{AIJ} = \frac{0,5}{1}$, *donc* $\widehat{AIJ} \neq 30°$, *ou encore, AIB est isocèle de sommet I, mais n'est pas équilatéral car* $AB = 1$, *alors que* $IA = IB = \frac{\sqrt{5}}{2}$...Nous posons ici le délicat problème du contre-exemple donné sous la forme d'un "dessin" : qu'admettons-nous et que refusons-nous ? On pourrait considérer qu'un dessin, que l'on peut remplacer par un discours, en quelque sorte un discours schématique, est admis comme contre-exemple.

Ainsi, pour la conjecture suivante :

C : "Un quadrilatère qui a deux angles droits a deux côtés parallèles.



On peut considérer comme tout à fait correcte, la réponse d'un élève qui dirait que cette conjecture C est fausse, marquerait "contre-exemple" et ferait ce dessin.

Ce genre de dessin, avec son codage des angles droits, n'est pas du domaine de l'expérimental : on n'y fait aucune mesure et on y sous-entend que les angles non marqués ne sont pas droits.

De même, pour la conjecture suivante :

C' : Toute fonction (de IR dans IR) strictement croissante dans IR admet $+\infty$ comme limite en $+\infty$

Nous pensons que toute représentation graphique, dans un repère du plan, d'une fonction qui soit clairement majorée par un réel, peut être admise comme contre-exemple à cette conjecture C', sans qu'il y ait besoin d'ajouter de commentaire. Ici encore le dessin est en fait un discours schématique.

Mais il existe beaucoup de cas où la frontière entre le dessin expérimental et le discours schématique est très floue : est-t-il clair que tels points ne peuvent pas être alignés, que tel angle ne peut pas mesurer 30°, que telles droites ne sont pas parallèles ?

Revenons maintenant à l'énoncé précédent, qui a donné lieu aux réponses de Clémence et Damien, et imaginons que, cette fois-ci, nous le posions devant une classe complète : nous laissons les élèves expérimenter. Que va-t-il se passer ? Beaucoup d'entre eux vont trouver des mesures d'angle voisines de celle de Clémence, mais vont-ils réagir comme elle : l'écart entre la mesure et 60° est-il vraiment dû à des erreurs d'expérimentation ? Il y a fort à parier qu'un certain nombre d'élèves, méticuleux, ne seront pas d'accord. Nous illustrons ainsi ce que nous avons dit dans le paragraphe précédent : la confrontation des différents résultats de l'expérimentation va faire naître le doute, qui ne pourra être levé que si l'on <u>démontre</u> que cet angle ne peut pas mesurer 60°, dans le modèle où nous travaillons.

Valoriser l'expérimentation

Même si certains élèves ont du mal à distinguer la démonstration de l'expérimentation, cette dernière ne doit pas, à notre avis, être gommée du cours de mathématiques ; bien au contraire, non seulement elle constitue une étape incontournable de l'activité mathématique - certes sous des aspects divers - mais elle en facilite aussi l'entrée, car elle procède d'une démarche assez naturelle, et pratiquée par les élèves dès leur premier contact avec les mathématiques. Il ne faut pas oublier que nombre d'élèves, même parmi ceux qui entrent au lycée, n'ont guère progressé dans la démarche mathématique, certains n'ont pas franchi le pas entre le réel et les modes de pensée propres aux mathématiques. Aussi est-il indispensable pour ceux-ci de consacrer du temps à l'expérimentation en classe et de la valoriser également en devoir surveillé, tout en n'omettant pas de distinguer celle-ci de la démonstration. Par exemple, mettre des points en contrôle à un élève qui énonce la réponse à une question sous la forme d'une conjecture issue de l'étude d'un certain nombre d'exemples et qui fait apparaître son incapacité à la démontrer : dans un tel cas, l'élève expérimente, conjecture, mais ne confond pas expérimentation et démonstration puisqu'il fait apparaître que ce qu'il a trouvé nécessite d'être démontré. Si on ne valorise pas cette phase ou si on ne pratique pas souvent l'expérimentation en classe, de tels élèves seront constamment en échec et se détourneront davantage des mathématiques. Mais il n'y a pas que pour les élèves faibles que l'expérimentation est importante : nous avons vu suffisamment d'exemples au début de ce chapitre qui montrent que celle-ci entre souvent pour une part importante dans l'élaboration de la démonstration, mais aussi dans la compréhension des théorèmes et des définitions.

Par exemple, même en terminale, n'est-il pas utile que les élèves expérimentent, aussi bien en calculant qu'en représentant dans le plan complexe pour comprendre les théorèmes relatifs aux modules et arguments des nombres complexes ?

Evaluation/Validation
Recherche d'une cohérence

Nos objectifs face à l'évaluation

Nous nous poserons ici la question de la cohérence entre nos pratiques dans le domaine de l'évaluation et nos objectifs tels qu'ils ont été définis au début de ce fascicule.

Retour sur l'activité mathématique

Nous attendons de l'élève qu'il entre dans **le jeu de la preuve et de la réfutation.** Pour cela les critères du vrai et du faux, le caractère de nécessité des énoncés font partie de l'apprentissage, car ce sont eux qui garantissent la validité des résultats. Toute personne qui fait des mathématiques fait des erreurs, est toujours en alerte sur ce sujet, a des moyens pour les détecter, pour comprendre à quel moment, vues les hypothèses, il est ou non possible de conclure sur la validité ou la non validité d'une proposition. Elle affirmera que ses arguments constituent une démonstration et que tel résultat est vrai, mais en même temps elle sera prête à réexaminer et cette preuve, et les réfutations de celui qui lui apporterait contradiction. Cette **alternance de suspicion et de certitude** sur son propre travail fait partie de l'activité mathématique.

Un élève qui s'appuie beaucoup sur l'imitation peut être sûr de ce qu'il a fait, mais cette certitude-là n'est pas la certitude mathématique. Tel autre dont le doute porte surtout sur la note qu'il va avoir ou qui vous dit : "Quand on en écrit le plus possible, on a plus de chances d'avoir des choses justes" sort, lui aussi, du champ mathématique.

En somme, notre but serait que **l'élève devienne autonome pour valider ses résultats à l'aide de critères mathématiques**. Insistons : cela ne signifie nullement l'absence d'erreurs, mais l'existence d'un contrôle comme c'est le cas lors de l'activité mathématique.

Evaluation et validation : définitions

Dans ce chapitre, nous allons donc considérer nos pratiques d'évaluation. Il nous semble que l'évaluation est souvent "regardée" avec des références à l'apprentissage, la nature du savoir enseigné étant moins prise en compte. Ce n'est pas le point de vue que nous adoptons ici : nous nous appuierons sur l'image des mathématiques que nous avons essayé d'expliciter. De plus nous restreindrons nos observations aux pratiques d'évaluation les plus courantes dans la classe.

Précisons d'abord le vocabulaire que nous allons utiliser et que nous empruntons à Claire Margolinas dans "De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques" (La pensée sauvage, Grenoble, 1993).

Quand l'élève a fait un travail, il y a pratiquement toujours un moment où il doit avoir une information, un retour sur celui-ci. Selon C. Margolinas, cette **phase de conclusion** peut avoir deux modalités : elle peut prendre la forme d'une **évaluation** ou d'une **validation.** Il y a évaluation, dit-elle, quand c'est le professeur qui se prononce sur la validité du travail de l'élève, et validation quand c'est l'élève lui-même qui en décide. La distinction théorique est nette, elle l'est beaucoup moins sur le terrain, mais elle nous paraît très pertinente au regard de nos objectifs et va nous permettre de lire, d'interpréter des situations de classe et de prendre des décisions.

Prenons un exemple. Les élèves ont fait un simple exercice d'entraînement, le professeur donne un corrigé écrit, nous sommes bien dans une phase de conclusion. Remarquons que le professeur ne se prononce pas directement sur le vrai ou le faux, il donne le corrigé écrit sans plus. La confrontation entre le corrigé et le travail de l'élève reste du domaine privé de celui-ci. Que va-t-il se passer ? A l'extrême, un élève peut se contenter de comparer les deux réponses, constater une différence, rayer sa propre réponse, écrire "faux". Pour cet élève, la correction est bien évaluation, au sens défini précédemment. A l'autre extrême, un élève, constatant aussi la différence entre les deux réponses, compare sa production et le corrigé, pèse les arguments de chacun, car, même s'il sait que les chances d'erreur sont plus grandes pour lui que pour l'enseignant, il oublie le contexte scolaire pour se situer sur le plan mathématique. Il ne conclura qu'après avoir compris pourquoi son résultat était faux. Pour cet élève-là, nous pourrions pratiquement dire qu'il a réussi à transformer une phase d'évaluation en phase de validation au sens précédent.

Ces deux extrêmes existent dans la même classe, devant le même corrigé écrit, sans intervention supplémentaire du professeur pour l'un ou pour l'autre. Existent aussi beaucoup de situations intermédiaires ; par exemple l'élève qui viendra demander où se situe son erreur et qui la comprendra seul, celui qui demandera aussi pourquoi c'est faux, etc... Où s'arrête l'évaluation, où commence la validation ? Certains faits sont inclassables.

"L'évaluation" au sens ci-dessus est contraire à nos objectifs

Nous rêvons d'élèves validant leur résultat. Nous souhaiterions que l'élève se comporte en "sujet mathématique", c'est-à-dire ne s'intéresse qu'à l'aspect mathématique du problème pendant sa propre résolution, et aussi pendant la correction. Qu'il ne se dise pas, "c'est comme cela qu'il faut faire", mais plutôt "pourquoi est-ce vrai, pourquoi est-ce faux ?".

Pour cela n'évaluons-nous pas trop souvent ? Nous ne parlons pas ici de la fréquence des devoirs en classe, mais de toutes les phases de conclusion où c'est le professeur qui décide du vrai et du faux : copies corrigées, correction au tableau par lui-même ou un élève, réponse orale à l'élève qui lui demande si ce qu'il vient de faire est juste,...

Qu'est-ce qui dans la situation de correction classique, pousse l'élève à valider ? Rien. Au contraire trop d'évaluation va l'empêcher d'entrer dans le jeu mathématique puisque c'est uniquement la parole d'autorité du professeur qui fera le vrai et le faux, non le caractère de nécessité des mathématiques. Ainsi un adulte ayant apporté un livre m'interrogeait sur l'exercice qu'il avait essayé de faire. Ayant obtenu une réponse de ma part, il demande : "Comment savez-vous que c'est juste, puisque la réponse n'est pas dans le livre ?". En somme seul l'auteur est habilité à savoir le vrai et le faux. Face à cet exercice qui demandait un raisonnement et aucune connaissance étrangère à cet adulte, celui-ci se sentait sans repère, comme lorsque, peut-être, vous devez répondre à la question : "Quel est le mois et l'année de la naissance de Robespierre ?". Comment savoir la réponse autrement qu'en regardant dans le livre ? Tout autre est le lien qui existe entre la question : "La somme de deux entiers impairs est-elle paire ou impaire ?" et sa réponse.

Les phases de conclusion sous forme d'évaluation tuent l'activité mathématique de certains élèves qui ne pensent pas, qui ne savent pas, qu'ils ont une responsabilité à exercer. Pour eux le problème est résolu puisque le professeur a parlé. Si les élèves vivent beaucoup de phases d'évaluation et trop peu de validation, la réponse au problème, pour ceux qui ne sont pas entrés dans la démarche mathématique, continuera à se trouver dans le livre ou auprès du professeur ou du camarade "bon" en math (qui, lui, ne l'aura trouvée qu'en lui-même). Pour de nombreux élèves, on sait, on connaît la réponse, on ne cherche pas.

Dire ce qui est vrai, ce qui est faux, donner la réponse, est une forme de l'évaluation. Il en est une autre qui consiste à dire à l'élève que la tâche est bien réalisée. Supposons que l'enseignant veuille savoir si ses élèves sont capables de "résoudre une équation du premier degré à une inconnue" et que l'information retenue par les élèves sur leur travail soit : je sais faire ou je ne sais pas faire. Faire, c'est-à-dire dérouler une suite d'actions. Si cette suite d'actions se légitime par : "C'est comme ça que le professeur a dit de faire" et non par :"Je ne peux que trouver la solution (ou les solutions ou l'absence de solution), et je comprends que ces calculs ne peuvent me donner qu'elle, nécessairement", l'élève n'entre pas non plus dans le jeu mathématique. L'information "tu sais résoudre les équations du premier degré" fournie à l'élève dans la phase de conclusion n'est pas pertinente du point de vue de nos objectifs si elle ne considère que l'algorithme.

Dans toute situation de classe, recherche individuelle, exercice d'entraînement, etc..., il y a tout lieu de surveiller ses réponses aux demandes des élèves. Certains n'avancent que sous le regard approbateur du professeur. Peut-être ont-ils besoin d'être rassurés. Si l'élève attend un jugement de la part du professeur, il espère bien entendu un jugement positif : c'est juste, tu es sur la bonne voie, ton calcul est bon, etc...En un certain sens, le faux, l'erreur, les tâtonnements de la recherche sont évacués par l'évaluation ; or nous avons vu que ceux-ci sont constitutifs de l'activité mathématique. L'évaluation, jugement du professeur sur l'activité de l'élève, va contribuer à créer chez celui-ci une image des mathématiques qui contrariera l'apprentissage.

Toutes ces réserves sur l'évaluation ne permettent pas de dire qu'elle soit à proscrire, car c'est irréalisable. Cependant nous faisons l'hypothèse que si nous essayons, aussi souvent que possible, de ménager des phases de conclusion sous forme de validation dans la classe, et si nous aidons l'élève à valider personnellement son travail, alors l'entrée dans la démarche mathématique en sera facilitée.

Valider, c'est reconnaître soi-même le vraisemblable, le vrai ou le faux de ses résultats, c'est contrôler son activité. C'est côtoyer l'erreur. Aussi pour que la validation puisse exister, aussi bien dans un travail collectif que dans une situation privée, est-il nécessaire de réhabiliter très officiellement l'erreur et la recherche, y compris dans les exercices de réinvestissement de connaissances.

En effet, on tolère l'erreur quand on aborde un nouveau chapitre, dans les "activités" introductives. Dans le débat, tel qu'il est décrit dans un chapitre précédent, elle existe à part entière, et nous avons insisté : le professeur ne doit pas évaluer les propositions de ses élèves. Mais dans les exercices, les devoirs, où l'élève est censé avoir déjà appris ? Là aussi l'erreur a droit d'existence.

Ceci nous amène à examiner la correction des copies, situation d'évaluation par excellence, car l'importance en est accentuée par l'attribution de la note dont dépend le destin scolaire de l'élève.

La correction des copies par le professeur

Nous ne parlerons ici que du classique devoir en classe et, en ce qui le concerne, seulement de la phase de conclusion, c'est-à-dire ;

- notation et annotations par le professeur,
- correction du devoir.

Comment conserver quelque cohérence avec nos objectifs ? Un moyen serait d'essayer, malgré le contexte, **de considérer la copie comme un lieu de débat, de véritable activité mathématique. Pour cela, faire en sorte que l'élève argumente réellement, puisse faire des conjectures, ait droit à l'erreur.** Ne nous y trompons pas, cet objectif ne sera jamais réellement atteint tant que le seul lecteur de la copie sera le professeur. Il est possible cependant de ne pas trop s'en éloigner.

Nous avons un point d'appui très fort et très ambigu : **la note**. Elle est un moyen de dire ce à quoi nous accordons de l'importance, ce qui nous paraît spécifique de l'activité mathématique.

Prendre en compte l'argumentation

Si en classe nous tenons beaucoup à ce que **l'élève argumente** ses propositions et si, sur la copie nous acceptons des réponses sans argumentation (les accepter, c'est mettre des points), il y a là un hiatus, et vu le poids de la note, ce qui se passe en classe ne sera qu'à moitié sérieux. Si nous n'acceptons pas la réponse non argumentée, ce n'est point par crainte d'une éventuelle copie sur le voisin, ce qui serait une raison scolaire, mais parce qu'il s'agit d'apporter la preuve de ses affirmations. La rédaction de la preuve permet à autrui, et souvent aussi à l'auteur, de valider la conclusion : si la preuve nous paraît satisfaisante, nous nous rendons à la conclusion, même si celle-ci nous paraît surprenante. Pour l'élève, le professeur connaissant la réponse et la copie n'étant destinée qu'à lui, il n'y a pas nécessité d'argumenter. S'il le fait, c'est qu'il se place dans une fiction : j'écris pour un destinataire, sujet mathématique comme moi, qui peut ou non valider ma preuve. Ceci n'a rien d'évident.

Pour l'aider à entrer dans cette fiction, il est possible de réserver une séance à la lecture des copies. Les élèves se mettent par deux, et on distribue à ces deux-là deux copies ne leur appartenant pas, non annotées par le professeur et appariées de façon que l'une d'elles soit très lisible, avec un raisonnement facile à suivre et l'autre non. Cet appariement est surtout utile pour ceux qui ne rédigent pas, certains n'imaginant même pas qu'on puisse le faire. La consigne essentielle est de n'avoir aucune communication avec les auteurs. Il s'agit de lire et non de juger. Ce sont les lecteurs qui doivent tirer bénéfice de cette lecture, non les auteurs. Il est demandé un grand respect des copies sur lesquelles on n'écrira pas, éventuellement des remarques peuvent être faites sur une feuille à part destinée aux auteurs. Ces précautions sont utiles, car il arrive que certains élèves supportent difficilement que leur copie soit lue. Le professeur, lui, n'intervient pas du tout et surtout ne répond pas aux questions qui ne manqueront pas de fuser : "Je ne comprends pas, qu'est-ce qu'il a voulu dire ?", ou bien "Pourquoi a-t-il écrit cela ?". Nous n'en savons pas plus qu'eux, que les élèves le sachent. Quand la lecture est finie ou le temps imparti écoulé, chacun peut s'exprimer. Il ne s'agit pas de discuter du contenu, mais de prendre conscience que **la copie est un support de communication**. Une séance de ce genre est efficace, au moins pour l'objectif, peu ambitieux mais indispensable, d'assurer la communication, celle-ci devant ensuite déboucher sur la validation par le lecteur.

Enfin, si nous tenons à ce que l'élève apporte la preuve de ses dires, nous devons valoriser toutes les situations où celui-ci tente de le faire. Ainsi devons nous accorder une importance plus grande à la réponse juste associée à une argumentation fausse, qu'à la seule réponse juste non argumentée, surtout en début d'apprentissage. Peut-être plus tard devons nous les considérer d'un même oeil, mais en aucun cas, nous ne devrions pénaliser l'argumentation fausse par rapport à l'absence d'argumentation.

Donner sa place à l'erreur

Ne plus accepter l'absence d'argumentation, mais en même temps **rétablir le droit à l'erreur**. Pour ce faire, en premier lieu, **ne la sanctionnons pas systématiquement**. Mettons le total des points à un élève qui aura remplacé 3x2 par 5, un signe + par un signe -, etc..., et qui sera resté cohérent jusqu'à sa conclusion. Il faut savoir calculer, certes. Mais ce genre d'erreur prouve-t-il qu'on ne le sache pas ? Je ne le crois pas. Lui accorder de l'importance au travers de la note contredit nos objectifs pour plusieurs raisons.

Dans ce cas, l'erreur est locale, elle ne porte pas sur le raisonnement, c'est-à-dire sur le lien qui pourrait exister entre deux propositions, or c'est cela qui est un aspect important des mathématiques que nous voulons faire passer. Faire des mathématiques, ce n'est pas seulement calculer comme beaucoup d'élèves le croient.

C'est le genre d'erreur dont l'élève dit lui-même que c'est une étourderie, une "faute d'étourdissement", il ne s'en sent pas responsable à juste titre ou non, peu importe. Si se côtoient, dans son devoir, avec le même poids, des erreurs qu'il comprend très bien mais qu'il juge inévitables, et des erreurs qui demandent un effort pour être comprises, il y a fort à parier qu'il se penchera plus facilement sur le premier type en faisant le compte des points perdus.

On voit ainsi des élèves furieux contre eux-mêmes (seulement contre eux-mêmes ?), tout à fait indisponibles pour examiner l'erreur sur laquelle on aimerait qu'ils s'attardent. On voit aussi des élèves qui affichent une irresponsabilité détachée pour échapper, peut-être, à leur sentiment d'impuissance. En effet, comme ils le disent eux-mêmes, il y a quelque "injustice" dans ces mathématiques où l'erreur se propage, où "une seule erreur peut modifier tous les résultats bien que le raisonnement soit juste".

Enfin, pour illustrer le propos ci-dessus, je citerai un élève de première : "Les divisions, les additions, les réductions au même dénominateur étant des opérations fréquentes et soi-disant faciles, on y attache par conséquent peu d'importance, c'est ainsi que naissent les erreurs. D'autre part, dans le cas d'un long raisonnement, être amené à effectuer l'une de ces opérations représente presque un moment d'oisivité, où l'on peut enfin respirer, d'où baisse de l'attention".

Une autre façon de rétablir le droit à l'erreur est d'accepter que, si un élève en détecte une dans sa copie et manque de temps pour la localiser et la corriger, il puisse la signaler : "Il y a une erreur car ce résultat est en contradiction avec celui que j'ai obtenu à la question 1". Accepter, c'est encore noter favorablement une telle initiative. En effet, elle prouve que l'élève contrôle, vérifie ce qu'il fait, n'est-ce-pas notre objectif ? Contrairement à ce que l'on peut croire, il n'est pas facile de détecter une contradiction et de le signaler, cela ne peut se faire par conformisme ou imitation.

Enfin cet élève fait passer la bonne foi nécessaire en sciences, avant le contexte scolaire. Beaucoup refusent de signaler une erreur détectée. Ainsi à mon incitation à le faire, l'un d'eux, indigné, a répondu : "Je ne vais tout de même pas écrire sur ma copie que ce que je viens de faire est faux !".

Pour toutes ces raisons, il nous paraît important d'**accepter très favorablement la reconnaissance de l'erreur**. A l'opposé, il est nécessaire de dire à travers la note qu'une contradiction n'est pas acceptable en mathématique. Sur la copie, bien sûr, seules les contradictions évidentes pour la classe en question seront relevées.

Valoriser la recherche

Il est une autre initiative à valoriser, nous semble-t-il, si nous voulons rester cohérent avec nos objectifs. C'est celle qui consiste à **faire des conjectures. Accepter que la recherche transparaisse sur la copie**.

Lorsque l'élève n'a pas réussi à faire une question d'un problème, il peut supposer acquis le résultat de cette question et continuer son travail. Dans ce cas, l'initiative n'est pas trop difficile à prendre. Mais il peut arriver aussi, lors d'une démonstration par exemple, qu'un "maillon" manque. L'élève devrait pouvoir dire : "Si ceci est vrai, je peux en conclure que ...".

L'important, ici, est que l'élève distingue ce qui est effectivement démontré de ce qui ne l'est pas, et ce dès le collège. Pour cela il nous paraît pertinent d'autoriser, d'inciter à l'écriture de propositions non démontrées, de les reconnaître comme telles, face à celles qui le sont. Cette distinction se fera d'autant mieux que les deux types de propositions pourront être écrites.

Inciter mais aussi initier.

Lors du débat, beaucoup de conjectures sont faites, c'est déjà une première approche du vraisemblable, du vrai, du faux. Il peut arriver qu'on déduise une proposition P_2 d'une propsition P_1 sans savoir si celle-ci est vraie. Mais la situation de débat est fort loin de la situation de devoir surveillé en temps limité. On peut, lors d'une séance d'exercices, initier à une telle rédaction qui consiste d'abord à prouver $P_1 \Rightarrow P_2$, puis que P_1 est vraie. Lors de la recherche les choses se passent souvent ainsi ; volontairement, dans le texte final, gardons cet ordre non chronologique. Les élèves doivent se sentir autorisés à le faire en devoir, même s'il ne savent pas ensuite prouver P_1, pourvu que cette absence de démonstration soit reconnue. Bien entendu, quand on évaluera, voir moins le manque que la prise d'initiative et traduire encore cela par la notation.

Dans une recherche en classe, si un élève propose une piste douteuse à nos yeux, ne l'accueillons pas par un : "Pensez-vous qu'elle va nous mener là où l'on veut ?". L'élève ne s'y trompera pas. Prenons le temps de nous y lancer en l'écrivant nous-même au tableau, constatons qu'elle ne mène nulle part, non point pour la dévaloriser, mais pour donner une image correcte de la recherche en maths :

- la fausse piste existera officiellement dans la classe, elle ne mène pas où l'on veut, mais elle permet souvent d'obtenir de nouvelles affirmations vraies. Dans les copies, ayons aussi, même s'il s'agit de réinvestir des connaissances, un regard positif sur ces propositions, et ce, malgré l'impasse.
- si fausse piste il y a, incitons l'élève à revenir au point de départ, aux hypothèses, à chercher une autre voie.

Quand on observe les élèves, on constate qu'il est rare qu'ils sachent revenir en arrière quand ils se sont fourvoyés. A certains cette situation paraît anormale. On sait ou on ne sait pas, donc si on se fourvoie c'est qu'on ne sait pas, et on en reste là, ce qui est très regrettable lors des devoirs en classe. Le temps passé à expérimenter, le tâtonnement ne sont pas du temps perdu.

Une deuxième étape, plus difficile, sera ensuite d'imaginer plusieurs pistes, d'apprendre à prévoir. Dans un premier temps, je crois qu'il est important de faire exister ces "errements", c'est une façon de rassurer l'élève en restant dans la ligne de nos objectifs.

Certains lecteurs peuvent être surpris par l'importance accordée à la note : il existe des formes d'évaluation plus "intelligentes". N'oublions pas que notre but ici n'est pas d'évaluer au sens courant du terme, mais de faire exister le plus possible la validation, c'est à dire des situations où l'élève soit incité à prendre des responsabilités quant au vrai, au faux, au prouvé, au non prouvé. Nous nous sommes limitées au plus sommaire et aux pratiques les plus partagées. Quoi qu'on fasse, tout se termine par la note, les élèves le savent, nous aussi, surtout au lycée. Les devoirs et la notation contribuent à l'image des mathématiques que les élèves se créent ; essayons par eux de faire que cette image soit proche de celle que nous souhaitons. Les exemples ci-dessus laissent penser malgré tout que nous pouvons rester quelque peu en accord avec nos objectifs en traduisant par la notation l'importance que nous accordons à l'argumentation, la recherche, la cohérence, le contrôle. Bien sûr, la notation exprime une évaluation, avec tous les inconvénients inhérents à celle-ci, mais on peut faire en sorte qu'elle ne véhicule pas trop d'idées contradictoires avec les validations qui peuvent avoir lieu par ailleurs.

La correction du devoir par l'élève

Pourquoi corriger, qu'attendons-nous d'un élève qui corrige ?

Corriger c'est, dit le Petit Robert, ramener à la règle ce qui s'en écarte, supprimer les fautes, les erreurs, rendre meilleur en supprimant les fautes.

Et dans la classe ? Les élèves ont fait un devoir. Ils ont déjà une note qui va intervenir dans la moyenne, qui a donc déjà un aspect définitif. Pourquoi voulons-nous que l'élève corrige ? Peut-être parce que nous n'aimons pas que des erreurs "traînent" ici et là et que nous avons le goût du travail bien fait. Dans ce cas, c'est rendre meilleur le produit fini qu'était le devoir, mais pour qui ? Ou bien, autre point de vue, ce n'est pas le produit fini qui nous intéresse, mais l'élève lui-même : nous corrigeons, il corrige pour qu'il apprenne encore. La correction d'un devoir terminé se fait pour l'avenir, il y a là quelque contradiction avec la note définitive.

La correction du devoir peut donc être l'occasion de **mettre l'élève dans une situation d'apprentissage particulière** : non pas refaire l'exercice que le professeur a déclaré faux par le biais de la note, mais être en retrait, prendre de la distance pour critiquer ce qui est déjà écrit.

L'élève devant l'erreur

Si nous proposons à une classe, des textes mathématiques que nous jugeons erronés, passages de copies ou textes créés de toutes pièces pour l'occasion, **trois sortes d'attitudes** apparaissent.

La première consiste à entrer dans le texte et à juger celui-ci en s'en tenant à ce qui est écrit. Par exemple "le théorème de Pythagore a été utilisé dans ce triangle, mais on ne savait pas s'il était rectangle", ou bien "ces deux expressions ne sont pas égales pour tout x, voici un contre-exemple". On prouve qu'il y a effectivement erreur, c'est une réfutation.

La seconde consiste à rechercher la cause de l'erreur chez l'auteur du texte : "il ne sait pas développer", "c'est une étourderie", " il a mal calculé la dérivée". Ce n'est plus le texte qui est analysé, mais l'action d'une personne.

Enfin la troisième glisse très rapidement sur le texte et l'erreur pour passer à ce qu'il aurait fallu faire : "C'est faux car ce n'est pas comme cela qu'il faut faire, il faut...".

La première se place du point de vue de la validation et juge du vrai ou du faux d'un énoncé, de la pertinence d'un argument. La seconde se place d'un point de vue "psychologique" ou peut-être même "moral", pourrait-on dire de façon simpliste. La troisième, elle, est prescriptive, ce qui est contraire à nos objectifs, nous l'avons déjà vu. Pour la seconde, nous estimons que seul l'auteur est habilité à chercher en lui-même des raisons à l'erreur. Le professeur ou les autres élèves ne peuvent faire que des suggestions : nous sommes quelquefois à cent lieues des raisons que les élèves peuvent nous donner quand il nous renseignent. Nous ne voulons pas dire par là que le professeur ne doit pas analyser sous des angles différents les erreurs des élèves, bien au contraire ; cette analyse est indispensable pour notre action en classe, y compris en dehors de la correction du devoir. Mais nous pensons que les commentaires liés à la seconde attitude ne devraient pas avoir cours dans un travail collectif sur les erreurs et que même le professeur devrait les éviter dans ses annotations sur les copies. Nous y reviendrons.

Il est possible et utile que la classe prenne conscience de ces différentes attitudes. Dans un travail collectif de critique de texte, la première position, essentiellement mathématique, doit faire l'objet d'un apprentissage, elle n'est pas acquise d'office, loin de là. C'est elle qui devrait aider l'élève à se construire une certaine autonomie dans son travail personnel en lui donnant des armes, non point tant pour éviter l'erreur a priori, que pour la détecter. Se poser la question "Ce que je dis est-il vrai ?" et avoir quelques moyens, même petits, d'y répondre, relève de la démarche mathématique, beaucoup plus, croyons-nous, que se poser la question "Comment dois-je faire, fais-je bien ?". Ce regard sur son texte pourrait être qualifié de **correction/validation**

Dans un travail privé de correction, la deuxième attitude peut être aussi très fructueuse. Je donnerai pour exemple cette élève qui a pris un jour conscience qu'elle ne relevait que les informations numériques dans l'énoncé des exercices et qu'elle passait à côté d'informations cruciales en ignorant par exemple l'adjectif "géométrique" accompagnant le mot "suite". Pour être intéressant, ce regard de l'auteur sur son propre texte ne doit minimiser ni sa responsabilité, ni l'importance de l'erreur, comme c'est le cas avec des commentaires du genre : "c'est une étourderie", "c'est ce que je voulais dire, mais j'ai seulement confondu les deux mots", "je n'ai pas eu le temps". Ce type de commentaires ne semble pas avoir d'impact sur la réussite au prochain devoir. De plus, l'efficacité de la critique paraît être plus grande si celle-ci se détache du contexte de l'exercice pour s'exprimer d'une façon plus abstraite. Pour reprendre l'exemple ci-dessus, l'élève ne s'est pas contentée de dire "je n'ai pas vu que la suite était géométrique", mais a fait une observation plus générale sur la façon dont elle prenait l'information dans un texte, donc plus transférable. Cette deuxième attitude face à son travail amène à ce qu'on pourrait appeler **autocorrection.**

La correction comme apprentissage

Insistons, **la correction/validation n'est nullement évidente** et il est important d'y consacrer du temps collectif en classe. Il est assez facile en général, pour les élèves de prouver qu'une réponse est fausse. Il est encore assez facile de voir qu'un argument est hors sujet, par exemple que le théorème cité n'est pas celui qui convient mais sa réciproque. Par contre, il est très difficle d'admettre que, la réponse étant exacte, le raisonnement qui y a conduit ne convient pas. Pour illustrer le propos, imaginons qu'une fonction étant donnée, un élève ait "prouvé" qu'elle était paire en prenant quelques valeurs de la variable et leurs opposées, et que la fonction soit effectivement paire. Comment invalider le raisonnement ?

- Nous avons dans ce cas précis possibilité de revenir à la définition d'une fonction paire et au critère du vrai et du faux : quelques exemples ne prouvent pas qu'il n'y ait pas de contre-exemple.

- Nous pouvons aussi sortir du contexte, c'est à dire montrer qu'avec ce "raisonnement", on peut "prouver" qu'une fonction qu'on sait ne pas être paire l'est.

- Cela revient aussi à considérer la proposition : "Si une fonction f définie sur R vérifie $f(x_1) = f(-x_1)$ et $f(x_2) = f(-x_2)$, alors elle est paire" et à prouver qu'elle est fausse en produisant un contre-exemple.

Cette sortie du contexte est très difficile à suivre pour les élèves ; certains ne voient plus le rapport entre ce qu'ils ont écrit et ce qui est en train de se dire là : "Oui, mais justement moi, ce n'était pas mon cas, la fonction était bien paire". De plus, expliciter une telle proposition (sous-entendue dans le texte pour qui est entré dans le jeu mathématique, mais pas pour l'élève qui parle de "sa" fonction bien particulière) est d'une très grande difficulté.

Ainsi, l'élève de quatrième à qui on demande la nature du quadrilatère EFGH et qui répond : "Ce quadrilatère ayant un angle droit est un rectangle", énonce deux propositons vraies, à savoir, il y a bien un angle droit, et c'est bien un rectangle. Ce qui est faux, c'est d'affirmer que la deuxième proposition est vraie parce que la première l'est. Mais a-t-il fait cela ? Peut-être s'est-il "contenté" de lire la nature du quadrilatère sur son dessin. Cet exemple est identique au précédent.

Dans cette situation complexe de la réponse exacte associée à une argumentation fausse, se joue la compréhension de ce qu'est une démonstration, des liens qui existent entre les affirmations faites, du statut de chacune d'elles. On apprend à démontrer ; il nous semble que la correction commentée de telles erreurs, en classe, constitue une voie pour cet apprentissage.

Nous faisons donc l'hypothèse que le travail de correction peut être un travail d'apprentissage : travail de réorganisation des connaissances, acquisition de moyens de vérification et de contrôle, contrôle. Pour cela la **correction/validation (on prouve que ce qui est écrit est faux et on cherche à comprendre pourquoi ça l'est),** privée ou publique, et **l'autocorrection (l'auteur examine sa propre action)**, sont deux façons d'y parvenir. Ceci revient à dire qu'il est utile d'**instituer la correction comme véritable travail** individuel, lui aussi vérifié par le professeur.

La mise en oeuvre de la correction peut être très variable selon le devoir et le moment de l'année : travail collectif de critique de textes, travail individuel de critique de textes écrits par autrui, travail individuel sur sa propre production et, pourrait-on dire, sur sa propre activité, avec ou sans le corrigé, travail guidé ou non guidé pour la recherche des erreurs, etc...Il est clair que ce travail sur les erreurs n'est pas évident ; si on veut qu'il s'installe dans la classe, il faut **prendre le temps de placer les élèves dans une situation de correction** avec suffisamment de "contraintes" : par exemple, donner un corrigé écrit, c'est préciser qu'il ne s'agit pas seulement de chercher les réponses aux exercices non faits, ni de recopier ce corrigé quand il y a une erreur, que ce n'est pas la bonne réponse qui nous intéresse. Ces "contraintes" de correction individuelle sont à inventer. Nous ne sommes pas loin de penser que la correction (correction/validation en particulier) devrait faire partie du devoir dans certains cas.

On trouvera ci-après un exemple de travail réussi : l'auteur fait une correction/validation, ainsi qu'une autocorrection, ce qui lui permet de revenir sur des connaissances antérieures et de les réorganiser. Cette élève réussissait bien en mathématiques. On sent dans son texte une sorte d'agacement, qui peut s'expliquer par le fait qu'elle a toujours réalisé ce travail personnel d'analyse d'erreurs en privé, et qu'ici on lui demande d'en rendre compte publiquement. Certains élèves se trouvent dans cette situation, alors que d'autres n'ont jamais imaginé ce type de retour sur leurs écrits.

$\boxed{\text{D.M. 5}}$

I

* Je tiens tout d'abord à préciser que je fais rarement plusieurs fois la même erreur. Le seul problème que j'ai (mis à part les erreurs d'étourderie ou de calculs), c'est que j'ai du mal, sans ma calculatrice, à dessiner la courbe d'une fonction associée, notamment dans le D.S. n° 3, question II b/.

* pour $h(x) = \frac{6}{x}$, si on faisait une translation de $+6\vec{\imath}$ (comme je l'avais proposé), cela correspondrait à la fonction $\frac{1}{x \pm 6}$, ce qui est bien évidemment différent de $\frac{6}{x}$.

* Il faut donc, pour tracer la courbe correspondant à la fonction $h(x)$, partir de la courbe représentant la fonction $\frac{1}{x}$ et multiplier toutes les ordonnées par 6.

En effet, $\frac{6}{x} = 6 \times \frac{1}{x}$. (graphique au dos de cette page)

* J'ai fait cette erreur par manque de connaissance. Je joins donc à ce DM. une fiche synthèse sur les fonctions associées.

Annotations des copies

Nous nous demandons actuellement, comment mettre nos annotations au service des objectifs décrits ci-dessus, quels commentaires faire sur la copie pour induire chez l'élève l'activité attendue.

Se placer sur le plan mathématique

Compte tenu de nos objectifs, il nous semble nécessaire en premier lieu, d'éviter de laisser transparaître sur la copie nos états d'âme : pas de "oh!", pas de trait rageur qui barre la page, pas de point d'exclamation, pas de remarque sur "l'intelligence" de la réponse. C'est difficile, l'échec de l'élève est aussi un peu le nôtre, mais lui va devoir aussi passer un peu sur le sien pour corriger. De plus il serait dommage que ces seules remarques deviennent indices du faux ; ainsi nous avons pu entendre dans une classe de terminale ES : "Mais comment va-t-on savoir si c'est faux, vous n'avez rien rayé ? ".

Eviter aussi les commentaires qui relèvent de la deuxième position, qui consiste à rechercher l'erreur chez l'auteur du texte. Ne communiquons pas, par écrit, nos hypothèses sur le fonctionnement de l'élève.

Enfin éviter aussi l'assimilation de l'erreur à la faute, ce qui est le cas quand nous écrivons par exemple "tu as mal calculé..." et aussi "c'est très bien" par opposition. Cette assimilation relève aussi du domaine privé de l'élève, et c'est sans doute pour lui une façon de prendre ses responsabilités.

Rester sur le plan mathématique donc, mais comment ? Est-il possible de considérer dans nos annotations, la copie comme un lieu de débat et de véritable activité mathémathique comme nous l'écrivions au début de ce chapitre ? Nous ne soumettons ici que des éléments de réflexion.

Tout d'abord, cette tentative ne suppose-t-elle pas une position particulière du professeur/lecteur ? Nous voulons dire par là que le professeur serait surtout lecteur :

- **un lecteur s'en tenant à ce qui est écrit sur la copie**, sans pouvoir de divination sur ce que l'élève a pensé, sans facultés extraordinaires qui lui permettraient de comprendre le plus incompréhensible,

- **un lecteur qui ne serait convaincu du vrai que par les preuves apportées sur la copie,** laissant momentanément de côté les connaissances qu'il peut avoir par ailleurs,

- mais aussi **un lecteur expert** dans l'utilisation des connaissances qui ont cours dans la classe et, de ce fait, naviguant facilement entre le doute et le certitude.

On peut se demander comment manifester cela. Voici deux ou trois exemples pour lesquels les réactions des élèves nous ont montré qu'ils n'étaient pas insignifiants.

Quand l'élève a réussi une démonstration, un calcul, (qui est aussi une démonstration, sinon nous ne demanderions que le résultat), nous pouvons écrire "bonne démonstration", ou plus simplement "très bien", ou encore "juste", mais c'est se placer sur un registre "moral". De plus cela sous-entend peut-être que, quelque part, existe une bonne démonstration que le professeur connaît et qu'il vérifie la conformité de celle-ci avec celle de l'élève. Serait faux alors ce qui ne serait pas conforme à cette bonne démonstration. Dans cette situation, le professeur est professeur avant d'être lecteur.

Pour changer de position et l'indiquer, nous pouvons écrire sur la copie : "d'accord", "je suis convaincu(e)", "tu as raison" ou plus neutre "raisonnement très convaincant". Si nous poursuivons dans la même idée, toute affirmation non argumentée sera assortie d'un "pourquoi ?" ou plus neutre, d'un "affirmation non justifiée", sans que nous prenions position sur le vrai ou le faux de cette affirmation, les deux cas étant traités sur un pied d'égalité. Enfin, si nous ne comprenons pas, tant les choses sont embrouillées, peut-être pouvons nous écrire "je ne comprends pas".

Toutes ces annotations ne sont pas neutres, elles sont contradictoires avec certaines représentations. Quelques protestations véhémentes d'élèves le prouvent. En terminale ES, j'ai fait lire à la classe trois réponses à un exercice de probabilité, deux de ces réponses n'étaient pas argumentées, la troisième l'était faussement, ce que les élèves ont facilement vu. Quant aux deux premières, elles ont été rejetées "on n'y comprend rien", "les calculs tombent du ciel". J'ai essayé de dire que je me situais comme eux face à ces réponses, ce qui a soulevé un tollé dans la classe : "Vous, vous savez quelle est la réponse à l'exercice", "il n'y a qu'une réponse juste". Le "je ne comprends pas" du professeur n'est pas non plus pris au sérieux par des élèves de première S, agacés ; ce n'est pour eux que pure mauvaise foi de la part d'un professeur.

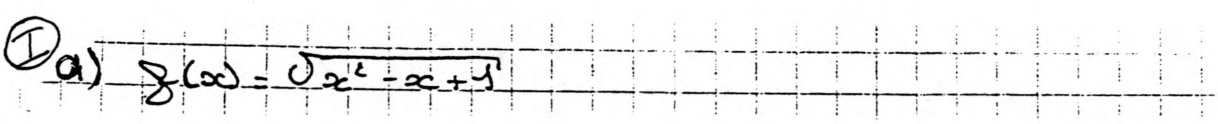
Tout ceci laisse à penser que le contrat didactique habituel est rompu quelque part, nous allons devoir en rétablir un autre.

Quelles annotations mettre ? Exemples

Et quand il y a erreur ? Comment la signaler pour que le travail personnel de l'élève qui doit suivre soit efficace ?

Voici tout d'abord un exemple d'annotation qui n'a servi à rien en première S. Le corrigé n'avait pas été donné, il s'agissait donc de corriger au sens usuel du terme.

Copie annotée :


I a) $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$

ou ($x^2 - x + 1 \geq 0$ car la racine carré d'un nombre négatif n'existe pas.

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 1$

$\Delta = 1 - 4$

$\Delta = -3$

$\Delta < 0$ donc le domaine de définition est :

d'argumenter

$S = [0 ; +\infty[$

Pourtant il me semble que (-1) a une image car $(-1)^2 - (-1) + 1$ est positif.

$f(-1) = \sqrt{3}$

Copie après correction

I

a) $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$

$x^2 - x + 1 \geq 0$ car la racine carré d'un nombre négatif n'existe pas.

$\Delta = b^2 - 4ac$ $(a = 1 ; b = -1 ; c = 1)$

$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 1$

$\Delta = 1 - 4$

$\Delta = -3$

cf Remarque dans copie. à argumenter

$\Delta < 0$ donc le domaine de définition est : $\boxed{D = \mathbb{R}}$

En voici un autre exemple avec la même annotation :

Copie annotée

I a) $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$

$f(x)$ ne peut pas être négatif donc le domaine de définition est $D = \mathbb{R}^+$ Pourtant -100 a une image !

$f(-100) = \sqrt{10000 + 100 + 1}$

Copie après correction

Exercice I :

a) * $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$ La racine d'un nombre négatif n'existe pas donc on prend x tel que $x^2 - x + 1 > 0$

On calcule le discriminant

$\Delta = b^2 - 4ac$

c.à.d $\Delta = -1^2 - 4 \times 1 \times 1$

$\Delta = 1 - 4$

$\Delta = -3$

$\Delta < 0$ donc il n'y a pas racine à cette fonction
La courbe C_f qui représente la fonction $f(x)$ ne coupe
pas l'axe des abscisses
Donc pour tout x, $f(x)$ sera positif
le domaine de définition D, est :
$D = \mathbb{R}$

Ces exemples sont fort décevants. On peut chercher des explications.

Dans les deux cas, le professeur a prouvé que la réponse était fausse, on peut supposer que les élèves ont compris cette preuve, ce qui n'est pas certain.

Pour le deuxième cas, il semble y avoir confusion entre le domaine de définition de f, l'ensemble des valeurs prises par f et l'ensemble des valeurs prises par le polynôme $P(x) = x^2 - x + 1$. Une interprétation plus optimiste serait de dire qu'il n'y a pas confusion entre ces trois objets mais uniquement un problème pour les nommer : la fonction polynôme n'est pas nommée dans le texte et on sait la difficulté des élèves à prendre l'initiative de nommer les objets. Si f(x), dans le texte remanié, désigne aussi ce polynôme, la correction au sens habituel du terme est plutôt réussie. Cependant il est clair que, quelle que soit l'interprétation, l'élève n'a pas identifié ce qui posait problème, il n'y a pas analyse de l'erreur comme cela a été fait dans le cas précédent pour les fonctions associées et il y a de grandes chances pour que la situation se reproduise.

Il semble que pour le cas 1, la réponse n'ait que peu de rapport avec le raisonnement fait, puisqu'elle a été modifiée sans que le reste le soit. Mais le oui du professeur, au début du texte, incite l'élève à penser que tout ce qui est écrit est correct et que l'erreur est localisée à la dernière ligne. La demande d'argumentation n'a pas été prise en compte. Mais encore une fois, on ne sait pas ce qui s'est passé pour l'élève, la correction qui remplace globalement ou partiellement la réponse erronée, laisse dans le domaine privé, le travail important qui nous semble à faire.

Finalement nous pouvons voir, ici, deux raisons, au fait que la correction ne corresponde pas à ce qu'on peut espérer : la localisation de l'erreur et l'absence de contraintes qui auraient poussé l'élève à analyser ses erreurs et à ne pas se contenter de refaire une réponse à l'exercice. Nous l'avons déjà dit, la localisation de l'erreur diminue la responsabilité de l'élève. Elle est peu judicieuse de la part de l'enseignant, ce qui est à revoir n'étant pas la réponse elle-même, mais le "donc" qui relie l'inégalité et le domaine de définition. De plus, si nous voulons insister auprès des élèves pour obtenir des démonstrations, ce n'est pas l'erreur dans la réponse qui est à souligner, car en le faisant c'est encore sur elle qu'on focalise l'attention, mais l'erreur dans le raisonnement.

Il semblerait donc préférable d'une part, de se placer, bien sûr sur le plan mathématique, en prouvant autant que faire se peut que ce qui est écrit est faux, et d'autre part :

- de ne pas signaler l'erreur au niveau de la réponse,

- de ne pas la localiser à une proposition simple ne comportant pas d'implication, ni à un calcul si elle n'amène pas à un retour sur une propriété,...

- mais plutôt la souligner au niveau des implications, des "donc" qui lient les propositions, avec la difficulté que nous avons vue, car pour prouver le faux nous allons devoir sortir du contexte. Le contre-exemple seul suffit à prouver le faux, mais le constat pur et simple du faux, s'il est nécessaire, n'est pas suffisant, encore faut-il en comprendre le pourquoi.

Enfin, il nous semble important de sélectionner les erreurs que l'élève devra ensuite travailler, car certains élèves se retrouveraient alors avec un travail titanesque. De plus certaines d'entre elles sont inintéressantes si on veut faire de ce travail d'analyse d'erreur, une aide à l'apprentissage.

Si nous pensons qu'il est bénéfique d'aller dans le sens que nous indiquons, il est nécessaire d'établir un contrat très clair avec les élèves aussi bien au sujet de la notation et des annotations par le professeur, que du travail personnel qui s'ensuit pour eux.

Expliquer donc la position du professeur/lecteur, indiquer ce qui est valorisé lors de cette lecture, les attentes du lecteur. Cette explicitation évite ensuite une personnalisation de ce lecteur qui doit être considéré comme sujet mathématique fictif. De plus, instituer la correction comme véritable travail personnel, établir des contraintes de situation pour que l'élève soit porté à faire effectivement ce travail. Un travail collectif est utile pour cela dans la classe. Certains manuels ont maintenant, parmi les exercices de fin de chapitre, des textes mathématiques à lire et critiquer.

En annexe à ce chapitre on trouvera ci-après un exemple de trame de correction fournie à des élèves.

Annexe

Cette feuille est distribuée et commentée en classe.

Correction des devoirs surveillés et autres

Tu as la possibilité de te faire évaluer à nouveau sur cette séquence **à la seule condition que tu t'investisses sérieusement dans la correction de ton devoir**, en procédant comme je l'écris ci-dessous.

1 - Réponds à toutes les questions et à toutes les remarques que j'ai écrites dans ta copie : note ta réponse à côté de la question dans une couleur différente du rouge et de celle que tu as utilisée auparavant.

2 - Pour chaque question du devoir, note le numéro de l'objectif visé en utilisant la feuille des objectifs de la séquence.

3 - Pour chacune des questions où tu as commis une erreur :

a) explique pourquoi ta réponse est fausse.

b) S'il s'agit d'une erreur de calcul, corrige-la et modifie, le cas échéant, le reste de ta réponse.

c) S'il s'agit d'une erreur de méthode ou de raisonnement, explique par des phrases une stratégie à utiliser ou un raisonnement correct, en liaison avec ce que tu as déjà fait, si possible.

4 - En ce qui concerne les questions que tu n'as pas traitées du tout, explique ton absence de réponse ; puis rédige une stratégie, un raisonnement, corrects, applicables dans cette question.

Lorsque tu as une méthode ou un raisonnement à rédiger, il est **nécessaire** que tu expliques **comment** on peut procéder (tu n'es toutefois pas obligé de traiter complètement la question sauf si je te l'ai demandé) ; mais il n'est **pas suffisant** que tu donnes la réponse juste. Il importe en effet que tu sois capable de les réutiliser lors d'un problème semblable à traiter ; or une des meilleures façons que tu les mémorises est que tu fasses l'effort de les énoncer clairement.

5 - Note toutes les questions que tu veux me poser encore au sujet du devoir ou de la séquence toute entière et écris-moi si tu souhaites te faire évaluer à nouveau (la nouvelle note remplaçant alors celle de ce devoir).

Remarque : les points 1, 3, 4 restent valables pour tous les devoirs ou interrogations écrites.

Pour conclure

Mettre en vue les mathématiques disions-nous. On peut trouver réductrice cette entrée dans l'enseignement par les seules mathématiques. L'élève n'est cependant pas oublié puisque nous nous sommes centrées sur son rapport à celles-ci. En effet, de nombreuses difficultés relevées dans ce fascicule ont été interprétées comme une ignorance de l'enjeu mathématique, comme un regard inadéquat sur ce savoir.

Cela a supposé de notre part que nous explicitions notre conception de la discipline que nous enseignons.

L'image que nous proposons paraît peut-être austère : Tous nos efforts tendent à séparer l'activité mathématique du sensible, du sens commun quotidien ou scolaire ; à demander aux élèves des attitudes qui vont souvent à contre-courant de la facilité, tant sur le plan cognitif qu'affectif, à contre-courant aussi d'une conception utilitariste de l'école qui voudrait que celle-ci serve à acquérir des diplômes avant des savoirs. Nous pensons que nous pouvons trouver justification à notre enseignement à l'intérieur même de la discipline enseignée, que nous pouvons la lester d'assez d'enjeux. Notons le encore, c'est un choix de départ.

Un choix qui va bien sûr mettre à jour des contradictions.Toutes ces tensions perceptibles, exprimées et vécues, sont peut-être à l'origine de notre recherche de cohérence. Car nous savons bien aussi que les mathématiques s'enracinent dans le sensible, que la pensée s'appuie avant tout sur le langage du quotidien, que notre enseignement se fait dans l'école, elle-même investie d'attentes très diverses par l'extérieur. Nous ne cherchons pas à gommer ces contradictions, mais à les voir. Quand nous disons séparation dans notre choix initial, il ne s'agit nullement d'ignorer une des parties, mais plutôt d'essayer, autant que faire se peut, de délier des fils, de n'en négliger aucun, et surtout de savoir lequel on tient à un moment donné et de le faire savoir aux élèves.

C'est ainsi qu'au début de ce fascicule surtout, nous observons quelques noeuds. Dans la suite, nous essayons de tirer quelques fils. C'est le cas par exemple quand nous précisons ce que sont le vrai et le faux pour le mathématicien, cette mise en vue des conventions mathématiques se faisant justement dans la tension, en insistant sur l'écart avec le quotidien. C'est le cas aussi, dans un chapitre suivant, avec quelques réflexions sur expérimentation et démonstration, ou bien encore quand nous choisissons d'opposer validation et évaluation.

Cette façon de voir, qui nous est personnelle, peut ou non convenir. Ce travail d'explicitation n'est jamais achevé, beaucoup d'implicite existe dans n'importe quelle activité de classe. Cependant cette mise au clair, limitée, en évolution, nous paraît faciliter notre enseignement en nous donnant une direction à la fois pour l'action et pour l'interprétation de ce que nous observons.

On peut trouver des points d'appui différents. Leur explicitation et la recherche de cohérence autour d'eux, nous paraissent très bénéfiques, ce fascicule pourrait être une aide en ce sens pour les lecteurs désireux d'entreprendre ce travail. Non point pour adopter notre point de vue mais pour construire soi-même, y compris contre ce qui a été exposé ici.

L'explicitation la plus large possible nous semble aussi nécessaire dans le cas d'un travail en équipe, aussi bien disciplinaire qu'interdisciplinaire. Trop souvent des divergences à propos de points a priori mineurs, sont en fait plus profondes qu'il n'y paraît, car liées aux représentations différentes des mathématiques, et aussi des savoirs, de l'élève qui apprend, de notre rôle d'enseignant,... Expliciter permet de replacer les divergences, s'il y en a, à leur juste niveau. Enfin, nous faisons aussi l'hypothèse qu'une représentation explicite de la discipline que nous enseignons facilite les échanges et la construction d'une cohérence interdisciplinaire.

Nous n'avons souligné ici que les avantages pour les enseignants à s'appuyer sur des images explicites. Qu'en est-il pour l'élève ? Se retrouverait-t-il confronté à des enseignements plus différenciés selon les années ? Que retirerait-il de cette diversité si elle existait ?

Enfin une définition des objectifs à partir des représentations, si elle permet, croyons-nous, une meilleure lecture de son travail par l'enseignant, laisse encore dans l'ombre beaucoup des apprentissages de l'élève. Au travers des pratiques que nous choisissons pour être au service de nos objectifs clairement énoncés, qu'est-ce que l'élève apprend, sur les mathématiques ou non, et qui n'est pas dit ? Quels comportements, non prévus, favorisons-nous avec tel type d'évaluation, telle gestion de la classe ? C'est une autre entrée possible pour une recherche de cohérence qui s'appuierait sur un projet ne se déclinant pas seulement en termes mathématiques comme nous l'avons fait, mais qui ne peut en être indépendant.

Bibliographie

ARSAC A.

L'origine de la démonstration : essai d'épistémologie didactique

in Recherches en didactiques des mathématiques, vol. 8/3

Ed. La pensée sauvage, Grenoble 1987

ARSAC G., CHAPIRON G., COLONNA A., GERMAIN G., GUICHARD Y.

Initiation au raisonnement déductif au collège

Ed. IREM de Lyon 1992

ARSAC G.

Vérité des axiomes et des théorèmes en géométrie

Vérification et démonstration

in Petit x n°37

Ed. IREM de Grenoble 1994/95

ASTOLFI J.P., PETERFALVI B.

Obstacles et constructions de situations didactiques en sciences expérimentales

in Aster recherches en didactique des sciences expérimentales n° 16

Ed. INRP 1993

BALACHEFF N.

Preuve et démonstration en mathématiques au collège

Recherches en didactique des mathématiques, vol. 3/3

Ed. La pensée sauvage, Grenoble 1982

BALACHEFF N.

Une étude des processus de preuve en mathématique chez des élèves de collège

Thèse, Université J. Fourier, Grenoble 1988

BARBIN E.

Quelles conceptions épistémologiques de la démonstration, pour quels apprentissages ?

in Repères IREM n° 12

Ed. Topiques 1993

BAREIL H., ZEHREN C.

Méthodes générales pour résoudre des problèmes

in Classe de seconde : un outil pour des changements

Ed. APMEP 1990

BKOUCHE R.

De la démonstration

Ed. IREM de Lille 1989

BKOUCHE R.

Considérations sur l'enseignement des mathématiques

Ed. IREM de Lille 1989

BONAFE F.

Les narrations de recherches

in Repères n° 12

Ed. Topiques 1993

CHARLOT B., BAUTIER E.

Rapport à l'école, rapport au savoir et enseignement des mathématiques

in Repères IREM n°10

Ed. Topiques 1993

CHARLOT B., BAUTIER E, ROCHEX J.Y.

Ecole et savoir dans les banlieues... et ailleurs

Armand Colin, Paris 1992

CHEVALLARD Y.

Le concept de rapport au savoir

Rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel

IREM d'Aix-Marseille

COMISSION INTER IREM HISTOIRE ET EPISTEMOLOGIE DES MATHEMATIQUES

La démonstration mathématique dans l'histoire

Ed. IREM de Lyon et de Besançon 1989

DANIEL J.C., DUPPERET J.C.

La démonstration en géométrie en quatrième et en troisième

in Repères IREM n° 15

Ed. Topiques 1994

DOUADY R.

Ingiénérie didactique et évolution du rapport au savoir

in Repères IREM n° 15

Ed. Topiques 1994

DURRAND-GUERRIER V.

Logique et raisonnement mathématique : exemples d'analyse de tâches à l'aide de la logique formelle

in Didatech, séminaires 94-95

Ed. CNRS, IMAG, UJF

DUVAL R.

Pour une approche cognitive de l'argumentation

in Annales de didactique et de sciences cognitives n° 3

Ed. IREM de Strasbourg 1990

DUVAL R., EGRET M.A.

L'organisation déductive du discours

in Annales de didactique et de sciences cognitives n° 2

Ed. IREM de Strasbourg 1989

EGRET M.A., DUVAL R.

Comment une classe de quatrième a pris conscience de ce qu'est une démarche de démonstration

in Annales de didactique et de sciences cognitives n° 2

Ed. IREM de Strasbourg 1989

FAVRE D. , RANCOULE Y.

Peut-on décontextualiser la démarche scientifique ?

in Aster recherches en didactique des sciences expérimentales n° 16

Ed. INRP 1993

GAUD D., GUICHARD J.P., MAROT M., ROBIN C., ROBIN M.

Géométrie de quatrième Initiation à la démonstration

Ed. IREM de Poitiers 1988

GLAESER G.

Analyse et synthèse

Ed. APMEP 1990

HAUG P.

Introduction à la logique

Ed. IREM de Grenoble 1985

KLEENE S.C.

Logique mathématique

Ed. A.Colin, Paris 1971

LAKATOS I.

Preuves et réfutations, la logique de la découverte mathématique

Ed. Hermann, Paris 1984

LEGRAND. M.

Débat scientifique en cours de mathématiques

in Repères IREM n° 10

Ed. Topiques 1993

LEGRAND M.

Deux regards sur l'enseignement des mathématiques : la problématique des situations fondamentale et l'approche anthropologique.

in Repères IREM n°27

LEGRAND M..

Mathématiques : mythe et réalité

in Repères IREM n°20 et n°21

LEHMANN D.

La démonstration

Ed. IREM de Lille 1989

LUBCZANSKI J.L.

Enseigner l'art de la démonstration

in Quadrature n°7 nov-déc 90

MARGOLINAS C.

De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématique

Ed. La pensée sauvage, Grenoble 1995

MULET-MARQUIS R.

Contraposée et réciproque

in Autour de THALES, p. 221

Ed. Comission inter-IREM Premier Cycle, 1995

NOIRFALISE R.

Contribution à l'étude didactique de la démonstration

Recherches en didactique des mathématiques, vol.13/3

Ed. La pensée sauvage, Grenoble 1993

PERRIN GLORIAN M.J.

Questions didactiques soulevées à partir de l'enseignement des mathématiques dans les classes faibles

in Recherches en didactiques des mathématiques, vol. 13/12

Ed. La pensée sauvage, Grenoble 1993

POLYA G.

Les mathématiques et le raisonnement plausible

Gauthier Villars, Paris 1958

REYNES F.

L'équivalence logique en collège : fantasme didactique ou impératif catégorique ?

in Petit x n° 37

Ed. IREM de Grenoble 1994/95

SERRES M.

Les origines de la géométrie

Ed. Flammarion 1993