10. Macros logiques

Yves MARTIN
Ravine des cabris
LA REUNION

L'exposé, tel qu'il est rédigé ici ne correspond pas exactement à ce qui a été exposé lors de l'Université d'été. En effet, on y avait présenté beaucoup de figures basées sur les techniques développées dans l'introduction. Ces figures n'ont de l'intérêt que si on les voit effectivement, ou si on désire les reconstruire. On a préféré proposer ici un exposé un peu plus complet que ce qui avait été fait sur les macros logiques avec référence aux figures présentées. Toutes les figures proposées sur les macros logiques lors de la séances sont fournies sur disquette, et quelques unes de la suite de l'exposé, sur les macros CLFC et les macros externes.

Les macro-constructions que l'on va aborder dans cet exposé sont assez différentes de celles que l'on réalise d'ordinaire. L'utilisation de Cabri-géomètre qu'elles permettent nous éloigne un peu de l'aspect originel de Cahier du BRouillon Interactif, pour nous approcher davantage de la *programmation* des figures.

Pourtant, paradoxalement, avec ces macros logiques, il va être question de se donner les outils nécessaires à l'utilisation de tout le dynamisme de Cabri, en particulier pour réaliser des figures correctes dans tous les cas de figure.

I. INTRODUCTION

En fait, on peut voir les macros logiques sous deux aspects, un premier, de tests conditionnels avant la réalisation d'une figure, et un second aspect, de dessin d'un objet : une macro logique étant alors une macro qui *dessinera* un objet dans *certaines conditions* au lieu de le *construire* dans tous les cas. La distinction est purement pratique, en réalité, c'est la même technique qui est utilisée dans les deux cas, seul le type des objets finaux diffère, compte tenu de l'utilisation que l'on veut en faire. Mais avant de réaliser des macros assez théoriques, commençons par une illustration de ces deux aspects.

A. Exemple 1 : Objets conditionnels à l'existence d'une figure.

Étant donné un segment [AB] et un point M en dehors de ce segment, on se propose de construire un point C tel que M soit le centre du cercle inscrit du triangle ABC. Une première idée qui vient à l'esprit consiste à dire que (AM) et (BM) étant deux bissectrices, le point C est à l'intersection des droites (AB') et (BA') On construit ainsi le point C et le triangle ABC. En traçant également le cercle inscrit de centre M, à partir de la perpendiculaire à [AB] issue de M - le segment plutôt que la droite - on remarque sans peine que, quand M se déplace, ce cercle n'est pas toujours à l'intérieur du triangle ABC, et plus précisément que le cercle est *parfois* le cercle inscrit, *parfois* le cercle exinscrit associé au troisième sommet. On aimerait modifier la figure pour que le tracé du triangle ABC *n'apparaisse que* s'il y a une solution, c'est-à-dire que si M peut être réellement le centre du cercle inscrit à un triangle de sommets A et B.

Pour cela, on va introduire, dans la construction même du triangle ABC, la condition nécessaire et suffisante (CNS) pour qu'il y ait une solution. Il est facile de voir, par des considérations sur les angles, que cette CNS est tout simplement l'appartenance de M au cercle de diamètre [AB].

Nous allons donc créer notre première macro logique nommée *M intérieur au cercle*. Cette macro aura comme objets initiaux un cercle de base et un point de base M,

que l'on placera à l'intérieur du cercle pour la construction. Elle rendra un point M', sur M, si et seulement si M est à l'intérieur du cercle.

On prend donc un cercle *de base* et M un point *de base* à l'intérieur. Soit O le centre du cercle. M est à l'intérieur du cercle si et seulement si (ssi) la perpendiculaire en M à [OM] coupe le cercle. Soit K un point d'intersection et I le milieu de [MK]. M est à l'intérieur du cercle ssi I existe, et donc ssi M', le symétrique de K par rapport à I existe. Cette technique du symétrique par rapport au milieu du point M et d'un point d'existence conditionnelle est la base de toutes ces méthodes, on la rencontrera systématiquement.

M' est donc un point sur M qui n'existe que si M est à l'intérieur du cercle. On peut nommer le point M' et enlever le nom du point M. On vérifie alors à l'écran que M' existe seulement à l'intérieur du cercle. En replaçant M dans le cercle, pour que M' existe, on transforme facilement cette figure en macro logique : objets initiaux le cercle de base et le point de base M, objet final, le point M'.

On peut alors revenir à la figure de départ, et appliquer la macro au cercle de diamètre [AB] et au point M. À ce stade, deux attitudes sont possibles : soit supprimer les deux droites (AM) et (BM), et reprendre la construction à partir des droites (AM') et (BM'), alors le point C construit sera bien le point cherché puisqu'il est conditionnel à l'existence de M' sur M. Une méthode plus rapide est, après la suppression du triangle ABC, construire sur C un point conditionnel C' lié à l'existence de M'. Pour cela il suffit d'utiliser la même technique que la fin de la construction précédente : on prend le milieu de [M' C] et le symétrique de M' par rapport à ce milieu est un point C' sur C dont l'existence est conditionnée par celle de M'. Il suffit alors de tracer le triangle ABC', et d'effacer le point C pour que le triangle soit correctement construit.

La technique de base peut être placée en macro, puisqu'elle sera toujours - ou presque - appelée en fin de réalisation : prendre deux points de base M et X, et construire sur M le symétrique M' de X par rapport au milieu de M et X. Appeler cette macro *Existence conditionnelle 1 pt*, les objets initiaux étant - dans l'ordre - M et X, l'objet final M'. (figure ML1.a sur la disquette)

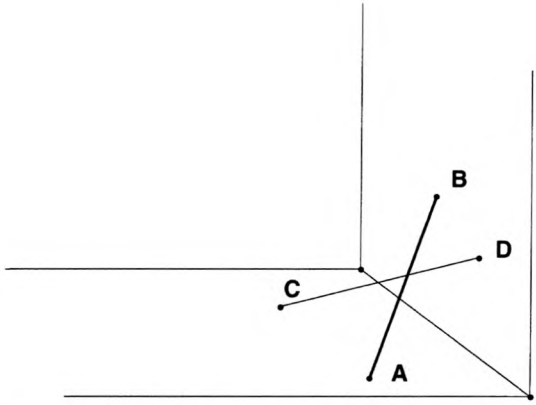
Avant d'entamer la réalisation de différentes macros logiques fondamentales, donnons un second exemple d'utilisation.

B. Exemple 2 : Position de deux droites dans l'espace.

On considère, sur deux plans orthogonaux symbolisants le sol et un mur vertical, deux segments [AB] et [CD], A et C étant sur le mur du sol, B et D sur le mur vertical. Le but de la figure est de représenter de manière particulière - en couleur, ou en gras - celui des deux segments qui est au dessus de l'autre.

Le principe va être de les projeter orthogonalement sur le sol et de regarder la position sur les deux segments des points dont la projection est à l'intersection des deux projections.

On commence par réaliser la figure suivante, [AB] étant en trait ordinaire. Soient B' et D' les projection orthogonales de B et D sur le plan du sol, et I l'intersection des segments [CD'] et [AB']. L'intersection des segments suffit ici, il s'agit surtout d'exposer la démarche.



La droite verticale, c'est-à-dire orthogonale au plan du sol issue de I coupe les segments [AB] et [CD] respectivement en M et N. Alors le segment [AB] est au dessus du segment [CD] si et seulement si N est entre I et M. En classe on peut commenter en remarquant que I est l'ombre au soleil de midi des deux points M et N ...

Il reste donc à faire une macro d'appartenance à un segment. Soit, alors, sur une autre page, une droite définie par deux points (AB) et un point sur objet M - choisi entre A et B - de cette droite. Alors M est entre A et B ssi la perpendiculaire à la droite (AB) passant par M coupe le segment [AB]. En notant M' cette intersection, on vérifie bien que M' existe ssi M est entre A et B. Il ne reste plus qu'à transformer cette figure en une macro *M intérieur à [AB],* avec comme objets initiaux A, B et M. La macro renvoyant le point M' ssi M est bien intérieur au segment.

On peut alors revenir à la figure initiale, et se placer dans le cas où N est entre I et M. En appliquant la macro précédente, on a un point N' prouvant que la condition est réalisée. On peut alors utiliser la macro *Existence conditionnelle 1 pt* pour construire sur A un point A' ssi N' existe et tracer le segment [A'B] en gras.

Pour que la figure soit complète, on applique à nouveau la macro dans le cas où cette fois M est entre I et N, et on termine de même sur [CD]. Ainsi, sur cette figure, est en gras le segment qui se situe au dessus de l'autre. (figure ML1.b sur la disquette)

Après ces deux exemples, on conçoit bien qu'il existe toute une série de situations types de base qui reviennent régulièrement dans ce genre de problèmes où il ne s'agit pas tant de *construire* à l'aide d'une macro que de *dessiner* une construction donnée *selon certaines contraintes*. C'est ce que nous allons détailler maintenant.

II. MACROS LOGIQUES DE POSITION SUR UNE DROITE

1) *Existence conditionnelle 1 pt* : Déjà construite, rappelée ici car c'est une macro logique de base, très souvent employée.

2) *M à l'intérieur de [AB]* : déjà construite. On verra plus loin des variantes selon que l'on accepte ou non les bornes. On peut facilement construire M Œ [AB[ou M Œ]AB[. Rappelons que le point M appartient à priori à la droite (AB).

Proposition d'utilisation : troncature *complète* du cube par les sommets.

On part d'un cube en perspective cavalière, et on le tronque par les sommets (sur les faces qui ne sont pas en vraie grandeur, on utilise les parallèles aux diagonales). On notera, pour la description écrite ici, ABCD la face avant du cube, dans le plan frontal, la troncature étant effectuée à partir d'un point M sur le segment [AB]. On note I le milieu de [AB]. On sait qu'il y a deux méthodes de construction différentes, selon que l'on tronque,

disons autour de A, à une distance AM inférieure ou supérieure à la moitié de [AB]. En faisant la construction sans prendre de précaution, on obtient une figure qui est correcte dans la première moitié du segment et fausse dans la suivante. (figure ML3.a1 : problème sans utilisation des macros logiques)[11]

Pour obtenir une figure correcte, on prend toujours M sur objet de [AB] mais on construit les points M' et M" sur M selon que M est sur [IB] ou sur [AI]. À partir des parallèles aux diagonales des faces, on construite les segments correspondant à la troncature selon que M' ou M" existe. Si la figure est correctement réalisée, on peut même transformer le cas du parallélogramme en macro-construction que l'on appliquera aux deux autres faces visibles, les autres faces étant complétées par la symétrie centrale du cube. (figure ML3.a2 : avec macros logiques).

3) *A, B, M dans cet ordre* : une autre utilisation de la macro précédente est une légère variante où l'on rend vrai sur M ssi B est entre A et M. C'est une variante qui intervient naturellement dans plusieurs situations, en particulier dans des figures de représentation dans l'espace (utilisée dans figure ML2.b par exemple)

4) *M à l'extérieur de [AB]* : soit I le milieu de [AB]. M est à l'extérieur de [AB] ssi le segment [MI] coupe le cercle de diamètre [AB].

III. MACROS LOGIQUES DE POSITION DANS LE PLAN.

A. Régionnement par rapport à une droite.

Deux macros sont très utiles dans ce contexte *M et A du même côté de* D où D est une droite, A un point fixe et M un point mobile, et la macro réciproque *M et A de chaque côté de* D .

Les points M et A sont du même côté de la droite D ssi le symétrique M' de M par rapport à la droite et A sont de part et d'autre de cette droite, c'est-à-dire ssi [AM'] coupe la droite. On termine par une *existence conditionnelle 1 pt*. Des variantes de dessin sont utiles, comme par exemple rendre un segment [AB] visible ssi un point variable M et un point fixe O sont d'un même côté de la droite (AB). Éventuellement s'y entraîner. (exemple classique d'utilisation ML7.a : la commode - Terracher 1°S)

Un exemple d'utilisation simple est la mise en place *d'interrupteurs*, pour passer d'une situation à une autre. Pour le principe, deux points *Ch1* et Ch2 sont de part et d'autre d'une droite de base. Un point de base *Chx* permet de placer un point d'encrage sur *Ch1* ou *Ch2* selon que *Chx* est du même côté que ce point. La suite de la figure est liée à l'existence de l'un de ces deux points d'encrage sur *Ch1* et *Ch2*. À chacun ensuite d'améliorer la présentation de son interrupteur.

Exemples d'interrupteurs : choix de présentation (ML2.b déjà citée, et ML2.c : diagramme en bâton/histogramme. Autre figure ML6.a : choix d'un exercice à chercher). On remarquera, dans ses premiers essais de telles constructions, le problème du point Chx placé sur la droite de base qui donne les deux orientations possibles simultanément, ce qui peut être fâcheux. On y reviendra plus loin.

B. Intérieur d'un triangle.

Étant donnés un triangle ABC et un point M, on réalise une macro qui renvoie un point M' sur M ssi M est à l'intérieur du triangle. Il ne faut surtout pas appliquer trois fois

[11] On notera qu'une construction exposée le dimanche matin par les collègues suisses proposait une autre approche du passage du cube à l'octaèdre, à priori sans avoir à faire cette distinction, mais le point à déplacer *n'était pas sur une arête du cube*, probablement pour cette raison.

des macros de positionnement d'un point par rapport à une droite, on peut y arriver en 6 objets intermédiaires seulement, en utilisant les céviennes (droites joignant les sommets au point M). Dans les objets initiaux, on donnera plutôt les trois points A, B et C que le triangle, cela évite de construire le triangle dans les cas où il est inutile.

Différents types d'applications sont possibles, d'abord la finition de figures dans l'espace ou apparaît des faces triangulaires. On peut ainsi travailler avec des sections qui disparaissent quand le point n'est plus sur la face. Si vous disposez de sections du tétraèdre, vous pouvez les retravailler à partir de cette macro.

Remarque importante : Quand on propose dans la suite de reprendre des figures qui ont pu être longues à construire, il ne s'agit pas de les reconstruire, mais simplement de les modifier. Dans le cas de figure avec des points *de base* sur les faces, la tâche est très facile. Par exemple dans le cas d'un point I qui devrait être intérieur à une face ABC, à côté de ce point I on prend un point *de base*, disons R, de lui appliquer la macro M intérieur triangle, on obtient le point R'. Il suffit alors de redéfinir le point I comme étant le point R' pour que l'existence du point I soit attachée à l'intérieur de la face.

Un autre type d'application, plus pédagogique, consiste à réaliser une figure pour faire *observer* les élèves sur un thème précis. Avec la macro M intérieur triangle, il est facile de construire un triangle qui a une couleur par défaut, et prend une autre couleur quand tous les angles sont aigus. On peut, dans de petites classes faire observer les angles, et au lycée demander, sachant que la figure est construite selon qu'un point ou non est intérieur au triangle, quelles sont les méthodes possibles de réalisation de cette figure. (figure ML4.a)

C. Intérieur d'un parallélogramme.

S'obtient de façon semblable à l'intérieur d'un triangle, en 6 objets aussi : ce sont les mêmes. Là encore indispensable pour la gestion correcte des sections d'un cube avec des points sur les faces. (figures ML7.c1 et ML7.c2)

D. Intérieur d'un quadrilatère convexe.

C'est une autre application intéressante de la macro M intérieur triangle. Soit un quadrilatère ABCD. Alors ABCD est convexe ssi ses diagonales [AC] et [BD] sont sécantes. Soit I l'intersection de ces deux segments. L'existence de I est équivalente à la convexité du quadrilatère. Soit alors un point M
à l'intérieur de ABCD. On veut une macro qui rendra M' sur M ssi le quadrilatère est convexe et M est à l'intérieur.

Les macros logiques sont efficaces sur des *ET* logiques - on prend le milieu, il faut donc arriver à penser les problèmes en termes d'intersection plutôt que d'union. Ici, M appartient au triangle ABC ou au triangle ACD est inefficace, à cause du *OU*. On va au contraire considérer ABCD comme l'intersection de deux triangles.

Soient alors D_1 la parallèle au segment [BI] passant par A et D_2 celle passant par C. Ces deux droites ont donc une existence conditionnée à celle de I, donc toute la suite des constructions sur elles aussi.

La droite D_2 est coupée par (AD) en E et par (AB) en F. La droite D_1 est coupée par (CD) en E et par (BC) en H. Alors M est à l'intérieur du quadrilatère ABCD ssi il est à l'intérieur des deux triangles AEF et CGH. On applique une première fois au point M et un seconde fois au point que l'on vient de créer, c'est le point M', dont l'existence est directement liée au point I donc à la convexité du quadrilatère.

E. Intérieur d'un cercle.

La macro a déjà été construite. Elle peut avoir une utilisation très différente des précédentes, comme macro d'approximation du genre *M est en A à e prés*, e étant le rayon d'un cercle. Il suffit de se donner e par un segment, un point A, et un point M. Alors M sera en A à e prés s'il est à l'intérieur du cercle de centre A de rayon e.

Cette macro peut être très utile pour proposer certaines constructions conditionnelles, approchées certes, mais suffisamment de l'ordre du pixel - pour être acceptable à' l'écran. Une autre application possible, et la validation d'une réponse donnée par l'élève, lorsqu'une réponse est correcte, lors de *figures-exercices* (exemple figure ML6.a sur les vecteurs)

Autre utilisation ludique : le jeu du Tic Tac Toe (figure ML8.a)

IV. MACROS LOGIQUES DE RELATIONS

A. L'appartenance

Appartenance à une droite de base : On considère une droite *de base* - la choisir horizontale - et deux *points sur objet* A et B sur cette droite. En construisant les deux sommets des triangles équilatéraux ABI et ABJ, on dispose de deux points fixes, I et J, respectivement au dessus et en dessous de la droite.

Soit M un point de base, par des intersections de [IM] et [JM] avec la droite, on peut construire sur cette droite deux points P et Q selon que M est au dessus ou en dessous. L'existence simultanée de P et Q assure que M est sur la droite : on fait une existence conditionnelle de M par rapport au milieu de [PQ][12].

On remarquera qu'un point *de base* n'a de chance d'appartenir, par cette macro, à une droite *de base* que si celle-ci est horizontale, verticale ou de pente ±1. Mais cela peut être utile dans ces cas là.

D'autre part, un point *de base* a peu de chance d'être un point d'une droite construite par le logiciel. Pour cette raison, le problème de bord rencontré plus haut sur la construction des interrupteurs disparaît si au lieu de prendre une droite de base comme droite de départ on prend la médiatrice de deux points verticaux distants d'un nombre *impair* de pixels. Alors le point *Chx* du choix ne sera jamais sur cette droite qui ne contient aucun point de la grille des points de base.

Appartenance à un cercle : Il est facile de faire une macro M extérieur cercle, et en appliquant une démarche analogue à celle ci-dessus, on peut penser construire une macro M sur cercle. On remarquera alors que les deux points qui jouent les rôles de P et Q ci-dessus n'apparaissent simultanément à l'écran qu'aux 4 points cardinaux et à l'intersection du cercle avec les bissectrices du repère formé par ces points. En pratique une telle macro d'appartenance est inutilisable sans se donner une marge d'incertitude.

---

12 Peut s'améliorer grandement en considérant une droite de base et un point de base A *n'appartenant pas à la droite* (5 objets intermédiaires).

B. Les différences

Ce sont les macros les plus faciles à obtenir. Par exemple deux points sont différents pour Cabri ssi leur médiatrice existe. Cela permet de renvoyer un point sur l'un des deux ssi ils sont différents.

Une autre utilisation est le traitement des bornes dans l'appartenance à un segment. Si M' est renvoyé sur M entre A et B, on peut construire une macro M est sur]AB] - ouvert en A - en renvoyant sur M' le symétrique de A par rapport à la médiatrice de [AM']. Faire aussi une macro M est sur]AB[, ouvert de chaque côté.

Autre exemple d'apprentissage : on pourrait construire de même une macro qui , étant donné deux segments, renvoie un segment sur le plus petit.

C. Les affirmations

Il faut déployer plus d'astuce pour obtenir un test d'égalité de deux points avec Cabri, ou un test de parallélisme de deux droites. Après tous les détails donnés pour les tests précédents, il est intéressant de chercher soit même:

- une macro qui renvoie sur l'un des deux points A et B, un troisième point s'ils sont confondus : *réalisable en 5 objets intermédiaires.*
- une macro qui, étant donnés deux droites *de base* - les choisir horizontales - et un *point sur objet* sur la première, renvoie un point sur celui-ci ssi elles sont parallèles : se trouve facilement en un peu moins de 15 objets intermédiaires, nombre que l'on peut abaisser à *5 objets intermédiaires.* Indication : expérimenter des figures simples de non parallélisme.

Il est facile de vérifier en quelques manipulations que le test de parallélisme, s'il fonctionne théoriquement, en pratique a peu de chance de donner des résultats en dehors de droites à pentes facilement reproductibles.

Ce type de test n'est pourtant pas purement gratuit. On peut par exemple l'utiliser pour tracer des centres d'homothétie de segments ssi ces segments sont parallèles (figure ML3.b). On peut aussi l'utiliser pour une présentation dynamique du théorème du toit par exemple (figure ML5.a)

V. Les différents champs d'utilisation des macros logiques

- *Amélioration d'une figure* : ce sont les situations dans lesquelles ont veut une figure correcte dans tous les contextes possibles. Dans ce cas, on conditionne le résultat obtenu en fonction des différentes contraintes, ce qui se ramène à des considérations d'appartenance à des régions particulières du plan.

- *Construction de situations d'observation* : on en a parlé à propos de ML4.a utilisant l'intérieur d'un triangle. Il s'agissait de changer l'aspect d'un triangle dès qu'il a un angle obtus. Dans le même genre d'idée, on peut aussi réaliser des figures de Cabri qui marquent un angle seulement quand il est aigu. On peut également construire une figure qui étant donné un triangle ABC, C étant variable, trace d'une couleur précise *le plus petit* des deux côtés [AC] et [BC], et dégager ainsi la notion de médiatrice quand ils sont tous les deux de cette couleur[13]. (ML4.b)

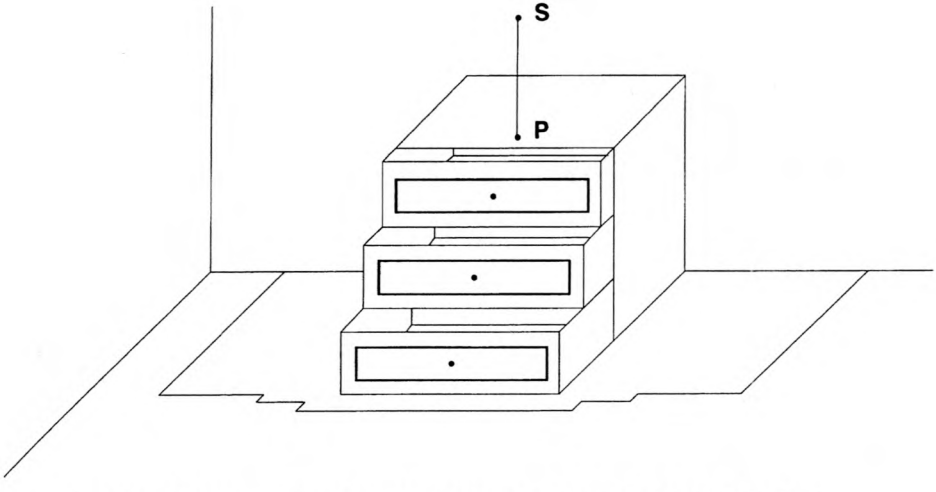
[13] Il faut alors un nombre de pixels *impair* pour [AB] pour qu'un point *de base* ait quelques chances d'être sur la médiatrice.

- *Film de démonstration* : une démonstration du théorème de Pythagore par la méthode des aires (Euclide) particulièrement visuelle a été proposée, méthode utilisant fortement le thème des macros logiques.

- *Présentation de choix* : les interrupteurs peuvent être utilisées à différentes fins pédagogiques de choix, mais aussi de masques partiels d'information. (ML2.b, ML2.c et ML6.a)

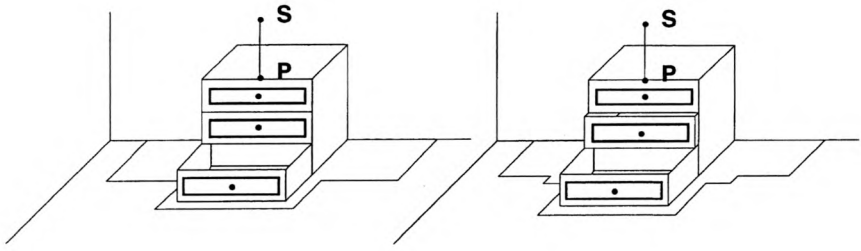
- *Gestion des parties cachées d'un solide en rotation.* Il ne s'agit ici - quand les solides n'ont que des faces convexes, ce qui est toujours le cas en classe - que d'une gestion de position d'un point par rapport à une droite, ce qui peut donner quelques visions de l'espace assez saisissantes de part le dynamisme de Cabri, comme la rotation d'un cube - ou d'une troncature de cube - dans l'espace, avec gestion des parties cachées, et choix (interrupteur) de l'axe de rotation.

- *Simulation* : réalisations de figures, en particulier de l'espace, qui peuvent éventuellement être longues à réaliser.

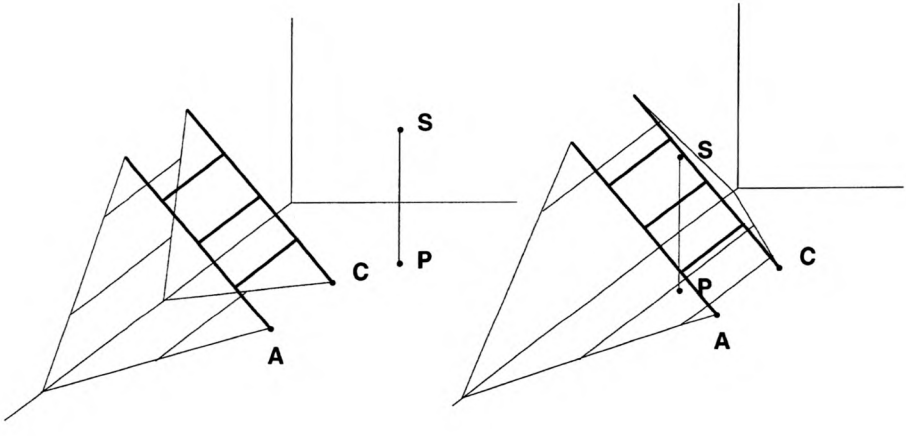


Ont été présentées l'ombre d'une commode éclairée par un abat-jour (ML7.a), l'ombre sur trois murs d'une échelle éclairée par un réverbère (ML7.b) et le découpage d'un cube selon sa section par un plan passant par trois points de ses faces visibles (ML7.c1 et c2)

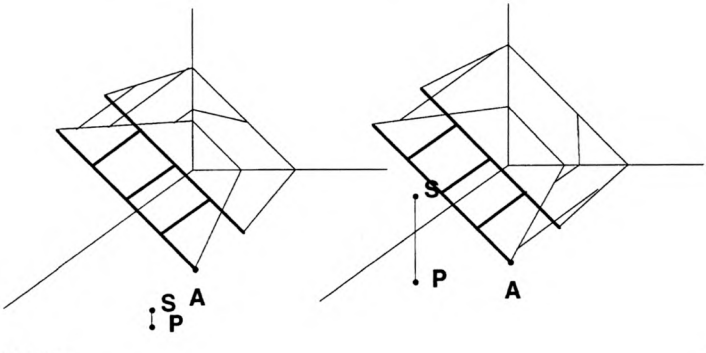
Ci dessus, exemple de l'ombre d'une commode, ici avec les trois tiroirs ouverts. S est la source lumineuse, P le pied de l'abat-jour. On remarquera la gestion du fond du tiroir. Même construction, avec gestion des parties cachées dans la partie gauche de l'ombre.



Exemple de l'ombre d'une échelle sur trois murs. S est la source lumineuse, P le pied du lampadaire. L'échelle est mobile par le point A.



Ombres ordinaire, exercice classique de 1°S.



Autres positions de l'éclairage, réalisée dans la même construction.

VI. AUTRES TECHNIQUES PRÉSENTÉES

L'exposé s'est poursuivi sur la présentation de macros dites *macros-CLFC* pour *Combinaisons Linéaires de Fonctions Caractéristiques*.

L'idée est que les macros logiques, si elles permettent de nombreuses réalisations, ne permettent pas le OU logique, par construction même. Or on peut avoir parfois besoin de ce OU. La question est de savoir si le OU de deux points est réalisable à la règle et au compas, par une Cabri-construction.

Plus précisément, étant donnés deux points I et J construits, mais pouvant être inexistants, comme l'intersection de segments, d'une droite et d'un cercle par exemple, peut-on construire à la règle et au compas un point M qui existe ssi l'un des deux points I ou J existe ?

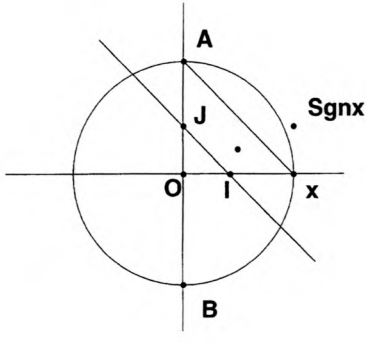
Il est intéressant de savoir qu'effectivement, le ou existentiel de deux points est bien constructible à la règle et au compas. La technique n'a pas été décrite en détail, seules les premières démarches ont été détaillées, mais elles suffisent pour arriver au résultat.

La première chose à faire est de construire la fonction caractéristique d'un intervalle, c'est-à-dire un point qui prend, quand on le projettera sur un axe, deux positions distinctes selon d'un autre point, variable, appartient ou non à un intervalle [AB]. Une façon de réaliser cela, est par exemple de construire une fonction Signe(x) qui prend deux valeurs opposées selon que l'on est à gauche ou à droite d'un point choisi comme origine.

Pour cela, on considère un cercle de centre O passant par un *point sur objet* x d'une droite. Ce cercle coupe l'axe des ordonnées en A et B.

L'intérêt de la figure est que, quand x passe de part et d'autre de O, A et B ne sont pas inversés. Alors à partir d'une unité arbitraire I sur l'axe des abscisses, la parallèle à (-x A) passant par I coupe l'axe des ordonnées en un point qui est le signe de x (soit +1 ou -1 en pratique)

On réalise ainsi une fonction Signe(x) en 8 objets intermédiaires , et 6 objets seulement si on ne s'intéresse qu'à sa projection en ordonnée.



Une fois transformée en macro, cette technique, appliquée deux fois à un intervalle [AB] donne un point *qui existe toujours*[14] mais prend des positions différentes selon que x est entre A et B ou à l'extérieur (20 objets intermédiaires).

En multipliant ensuite cette fonction caractéristique par un coefficient k - *qui lui aussi doit toujours exister, sinon on retombe dans les macros logiques* - on réalise une macro kc_{AB} . Cette macro est réalisable en 26 objets, et peut être améliorée encore de quelques objets probablement.

Ensuite des macros de somme permettent de réaliser de véritables combinaisons linéaires de fonctions caractéristiques, à coefficients variables ce qui permet certes de tracer des fonctions de style E(x), $(-1)^{E(x)}$ et toutes les variantes que l'on imagine facilement (figures CLFC3.a à 3.d) mais aussi de *lier* des lieux de point (figure CLFC 2.a sans cette liaison, pour comparer, et 2.b avec la liaison).

L'exposé s'est poursuivi sur des considérations plus techniques : en multipliant correctement ces CLFC entre elles, on arrive à des drapeaux d'appartenance à des régions (cercles, parallélogrammes, triangles) et, en réintroduisant par dessus des macros logiques en dernière couche, on peut alors construire des points qui existent ssi un point variable appartient à la réunion de deux ou plusieurs régions. C'est bien entendu *le même point* qui existe dans les deux régions, c'est la nouveauté de cette démarche par macro CLFC par rapport aux macros logiques.

Enfin, pour conclure cette partie, en multipliant autrement les CLFC - avant la dernière couche de macros logiques - on peut, plus ou moins facilement selon le cas à traiter, réaliser des OU existentiels sur des points d'intersection, de segment, de cercles, ou de droites.

En pratique ces constructions sont très gourmandes en objets, d'où l'idée de les programmer. Pour cela l'exposé s'est terminé par une spécificité d'une version de développement de Cabri sur Macintosh - la version dite 2.5ß, qui permet la programmation de macros directement en C.

Avant la dernière partie de l'exposé, quelques exemples d'utilisation de telles *macros externes* ont été montrées rapidement pour familiariser l'auditoire, comme ME1.a l'ombre d'une conique sur 5 murs, ou encore ME2.a la figure *x ->Cos(x)* sur Cabri, avec manipulation directe sur les axes et les unités. Ces macros externes permettent aussi la constructions de macros *numériques* avec appel d'une boite à dialogue qui demande une valeur numérique à l'utilisateur (la macro ME3.a est une macro d'homothétie qui à partir de 2 points demande le rapport (entier ou fractionnaire). Faire Option+déplacement d'un point pour modifier le rapport.

Ensuite, une technique particulière, pour répondre au trop grand nombre d'objets que nécessitent effectivement les OU existentiels de points, a été présentée.

Elle a été développée par Éric Hakenholz, collègue de La Réunion, et permet de réaliser toute opération logique sur des points en très peu d'objets, mais en utilisant les macros externes.

La démarche se réalise en quatre étapes : création d'un point rafraîchi dès que l'un de ceux dont dépend le résultat étudié est modifié, initialisation booléenne de ce point à faux, liaison entre les points logiques de la figure et ce point booléen, et enfin, à partir d'un point de base quelconque, création d'un point symétrique de celui-ci à partir du point booléen, mais avec la particularité que l'on fait le symétrique ssi le point booléen est à vrai. C'est ce dernier point qui sert d'encrage booléen[15].

En pratique, c'est plus facile à utiliser qu'à décrire. De plus, dans certains cas, on peut réaliser des OU le plus naturellement possible en liant deux fois de suite des points logiques différents au même point booléen. Le rafraîchissement de l'arbre de parcourt de Cabri fait lui-même le OU.

Sur la disquette se trouvent les macros nécessaires, avec commentaires détaillés et exemples. Rappelons que ces techniques ne sont pour le moment, disponibles que sur Macintosh.

---

[14] C'est la différence *essentielle* d'avec les macros logiques. Dans le cas des macros logiques, un point M' n'existait que si on était sur le segment [AB]. Ici, on a vrai drapeau, au sens informatique du terme, d'où le nom de macros *booléennes*.

[15] Réellement booléen, alors que les point logiques sont semi-booléens.