

9. De d'Alembert à Cabri-Géomètre : le constructeur universel d'équations.

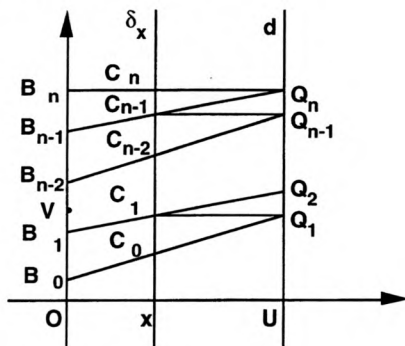
Michel CARRAL et Roger CUPPENS
IREM, IUFM et Université Paul Sabatier, Toulouse.

I. INTRODUCTION.

Dans un précédent article [1], R. Cuppens étudie les fondements informatiques et géométriques du logiciel Cabri-Géomètre. En particulier, il affirme que les "constructions avec glissement", utilisant les possibilités offertes par le logiciel pour modifier une figure tout en conservant les relations imposées au départ aux objets de la figure, permettent de simuler n'importe quel système articulé.

Pour illustrer ceci, nous présentons ici l'exemple du "constructeur universel d'équations", système présenté par d'Alembert dans l'Encyclopédie de Diderot et permettant a priori de trouver graphiquement les racines d'un polynôme situées dans l'intervalle $[0,1]$. Nous rappelons brièvement le principe de ce constructeur³ :

Étant donné un polynôme $P(X) = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n$, on considère un repère orthogonal (O, U, V) et les points $B_0, B_1, \dots, B_n$ de l'axe OV d'ordonnées respectives $a_0, a_0 + a_1, \dots, a_0 + a_1 + \dots + a_n$. Notons d (resp. δ_x) la verticale d'abscisse 1 (resp. x , où x est un nombre réel compris entre 0 et 1).



La parallèle à l'axe OU passant par B_n coupe δ_x et d aux points C_n et Q_n respectivement ; la droite $B_{n-1}Q_n$ coupe δ_x en C_{n-1} et la parallèle à l'axe OU passant par C_{n-1} coupe d en Q_{n-1} ; la droite $B_{n-2}Q_{n-1}$ coupe δ_x en C_{n-2} , et ainsi de suite... La mesure algébrique $\overline{x C_0}$ est égale⁴ à $P(x)$.

³ On trouvera dans l'Annexe 1 une reproduction de l'article de d'Alembert.

⁴ Nous donnons une démonstration de ce résultat dans les deux paragraphes qui suivent.
De d'Alembert à Cabri-Géomètre : le constructeur universel d'équations.

A l'époque, l'intérêt de ce système n'était que théorique. Il fut néanmoins réalisé (cf. la planche reproduite en Annexe), mais, en raison des frottements, le système ne fonctionnait correctement que pour des polynômes de degré inférieur ou égal à 2.

La simulation dans Cabri-Géomètre de ce constructeur lève cet obstacle et permet en outre de considérer des valeurs de x extérieures à l'intervalle $[0,1]$. On pourra utiliser le constructeur de deux manières différentes :

- en déplaçant l'un des points de base, on pourra "voir fonctionner" le constructeur ;
- en utilisant la possibilité de tracer des lieux géométriques, on obtiendra un traceur de polynômes et même (en ajoutant un dispositif supplémentaire) de fractions rationnelles assez précis.

II. THÉORIE ALGÈBRE DU CONSTRUCTEUR.

Dans ce paragraphe, nous montrons que les idées de d'Alembert se ramènent à une variante intéressante du schéma de Hörner. Rappelons que le schéma de Hörner qui permet de calculer les valeurs d'un polynôme

$$P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$$

repose sur le résultat suivant :

La suite $(c_k(x))$ définie par les relations

$$c_n(x) = a_n \quad (1)$$

$$c_k(x) = x c_{k+1}(x) + a_k \quad (2)$$

vérifie

$$c_k(x) = \sum_{j=k}^n a_j x^{j-k} \quad (3)$$

pour $k = 0, \dots, n$.

Démonstration. Si

$$c_{k+1}(x) = \sum_{j=k+1}^n a_j x^{j-k-1},$$

de (2), on obtient

$$c_k(x) = x \sum_{j=k+1}^n a_j x^{j-k-1} + a_k = \sum_{j=k}^n a_j x^{j-k}.$$

Puisque (1) nous donne (3) pour $k = n$, on obtient par récurrence le résultat.

Remarques.

1. Pour $n = 0$, on obtient $c_0(x) = P(x)$. On peut donc calculer les valeurs d'un polynôme en effectuant seulement n multiplications et n additions : l'algorithme fourni par le schéma de Hörner est de complexité minimale.

2. Ce résultat reste vrai si on remplace les constantes a_k par des fonctions de x .

Ce schéma qui est le plus simple pour le calcul algébrique, ne donne pas une construction géométrique simple. Pour en obtenir une, nous le modifierons de la manière suivante :

En posant $b_k = \sum_{j=0}^k a_j$, on obtient $a_0 = b_0$ et $a_k = b_k - b_{k-1}$ ($k = 1, \dots, n$), ce qui donne :

$$\begin{aligned}
P(x) &= \sum_{k=0}^n a_k x^k \\
&= a_0 + \sum_{k=1}^n (b_k - b_{k-1}) x^k \\
&= b_0 + \sum_{k=1}^n b_k x^k - \sum_{k=1}^n b_{k-1} x^k \\
&= \sum_{k=0}^n b_k x^k - \sum_{k=0}^{n-1} b_k x^{k+1} \\
&= b_n x^n + \sum_{k=0}^{n-1} b_k (1-x) x^k.
\end{aligned}$$

Le schéma de Hörner appliqué à cette représentation donne :

La suite $(c_k(x))$ définie par les relations

$$c_n(x) = b_n, \quad (4)$$

et

$$c_k(x) = x c_{k+1}(x) + (1-x) b_k \quad (5)$$

pour $k = 0, \dots, n-1$ est telle que $c_0(x) = P(x)$.

III. THÉORIE GÉOMÉTRIQUE DU CONSTRUCTEUR.

Nous supposons le plan rapporté à un repère orthogonal (O, U, V) et notons d la verticale d'abscisse 1, c'est à dire la parallèle à OV passant par U .

Soient

- n un entier naturel,
- x un nombre réel,
- $a_0, \dots, a_n$ des nombres réels,
- $b_k = \sum_{j=0}^k a_j$ ($k = 0, \dots, n$),
- $c_k(x)$ la suite définie à partir des b_k par les relations (4) et (5),
- B_k le point de l'axe OV d'ordonnée b_k pour $k = 0, \dots, n$,
- C_k le point d'abscisse x et d'ordonnée $c_k(x)$ pour $k = 0, \dots, n$,
- P_k (resp. Q_k) la projection de C_k sur OV (resp. d) pour $k = 0, \dots, n$.

Du paragraphe précédent, on déduit que C_0 est le point d'abscisse x et d'ordonnée

$$P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k, \text{ c'est à dire le "point courant" de la représentation graphique du polynôme}$$

$$P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k.$$

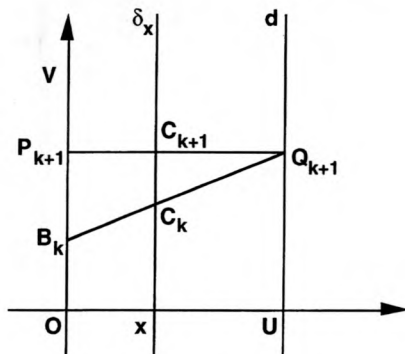
La relation (4) nous dit que C_n est la projection de B_n sur la droite verticale d'abscisse x et (5) peut se récrire sous la forme

$$c_k(x) - c_{k+1}(x) = (1-x)(b_k - c_{k+1}(x)),$$

c'est à dire

$$\overline{C_{k+1}C_k} = (1-x) \overline{P_{k+1}B_k}.$$

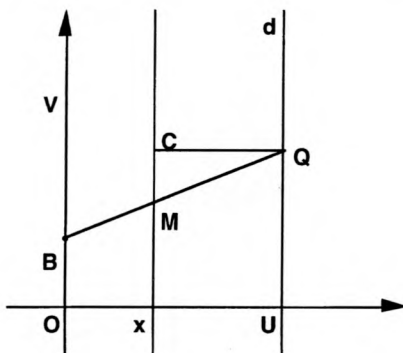
Du théorème de Thalès, on déduit que les points Q_{k+1} , C_k et B_k sont alignés : pour $k = 0, \dots, n-1$, C_k est le point d'abscisse x de la droite joignant B_k à la projection Q_{k+1} de C_{k+1} sur la droite d .



En notant P la projection sur la verticale d'abscisse x et A la fonction qui, à deux points B et C du plan, associe le point d'intersection⁵ M de la parallèle en C à OV avec la droite joignant le point B à la projection Q de C sur d , on obtient que les points C_k sont

définis par

$$\begin{cases} C_n = P(B_n), \\ C_k = A(B_k, C_{k+1}) \end{cases} \quad (k = 0, \dots, n-1).$$



Remarques. 1. La construction reste valable dans le cas où X se trouve en dehors du segment OU .

2. On peut donner la définition récursive suivante du constructeur : si on note c la fonction qui au $(n+1)$ -uplet $(B_0, \dots, B_n)$ associe le point C_0 , c est définie par :

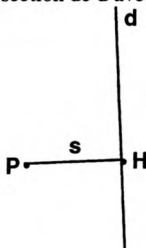
$$c((B_0, \dots, B_n)) = \begin{cases} \text{si } n = 0 & \text{alors } P(B_0) \\ \text{sinon} & A(B_0, c(B_1, \dots, B_n)). \end{cases}$$

⁵ Ce point est parfaitement défini dès que B n'appartient pas à la droite d .

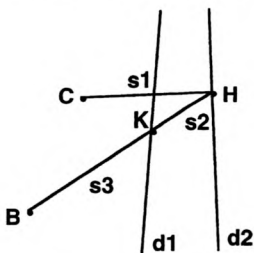
IV. RÉALISATION DE CE CONSTRUCTEUR.

Pour obtenir avec Cabri-Géomètre ce constructeur de polynômes, on utilisera deux macro-constructions de base : proj et alemb.

La première correspond à la fonction P du paragraphe précédent. Elle a pour objets initiaux un point P et une droite d et pour objet final le segment⁶ PH, H étant la projection de P sur d, c'est à dire le point d'intersection de d avec la perpendiculaire à d passant par P.



La deuxième devrait correspondre à la fonction A. Néanmoins, puisqu'il est commode qu'une macro-construction ait des objets initiaux indépendants et qu'un même objet ne soit pas construit plusieurs fois, nous la généraliserons un peu. La macro-construction alemb aura pour objets initiaux deux points C et B et deux droites d1 et d2 et pour objets finaux trois segments s1, s2 et s3 : s1 est le segment CH obtenu en appliquant la macro-construction précédente à C et à d2 tandis que s2 et s3 sont les segments HK et KB, K étant le point d'intersection de d1 avec la droite BH⁷.

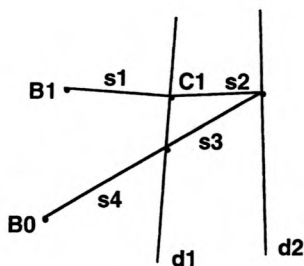


Comme une macro-construction de Cabri-Géomètre ne peut dépendre ni d'un nombre entier, ni d'un nombre variable d'objets initiaux, on construit ensuite une suite de macro-constructions, construc-1, construc-2, ..., de la manière suivante :

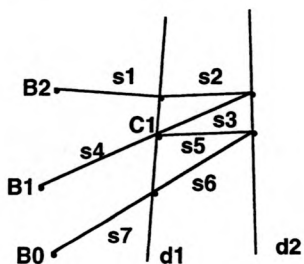
- construc-1 est une macro-construction ayant pour objets initiaux deux points B0, B1 et deux droites d1 et d2 et pour objets finaux quatre segments s1, s2, s3 et s4 : s1 est le segment B1C1 obtenu en appliquant proj à B1 et d1 tandis que les trois autres s'obtiennent en appliquant alemb à C1, B0, d1 et d2;

⁶ Dans tout ce paragraphe, on prend comme objectif de visualiser à l'écran le fonctionnement du constructeur. Si on veut seulement tracer des représentations graphiques, il suffit de remplacer comme objets finaux dans les macro-constructions les segments par un point unique.

⁷ Le fait d'utiliser les deux segments HK et KB au lieu du seul segment HB permet de traiter le cas où X est en dehors du segment OU.



- construc-2 est une macro-construction ayant pour objets initiaux trois points B_0, B_1 et B_2 et deux droites d_1 et d_2 et pour objets finaux sept segments $s_1, \dots, s_7$: les quatre premiers s'obtiennent en appliquant construc-1 à B_1, B_2, d_1 et d_2 tandis que les trois autres s'obtiennent en appliquant alemb à C_1, B_0, d_1 et d_2 où C_1 est l'une des extrémités du segment s_4 , l'autre étant B_1 ...



Remarque. Les limites du logiciel ne permettent pas d'aller au delà de construc-6.

Pour obtenir la représentation graphique d'un polynôme $a_0 + \dots + a_n X^n$ dans un système orthogonal, mais pas nécessairement orthonormé, les unités pouvant être modifiées à tout moment, on trace

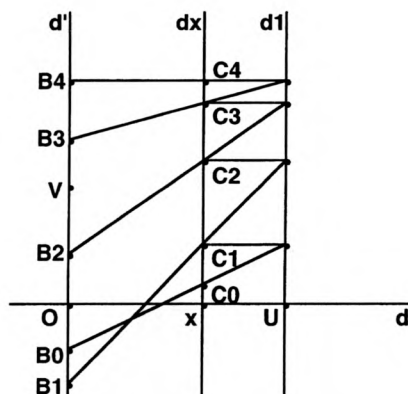
- une droite d ,
 - des points O et U sur d ,
 - la perpendiculaire d' en O à d et V un point de d' :
- d et d' seront les axes, OU étant l'unité des abscisses et OV l'unité des ordonnées⁸.

On trace alors

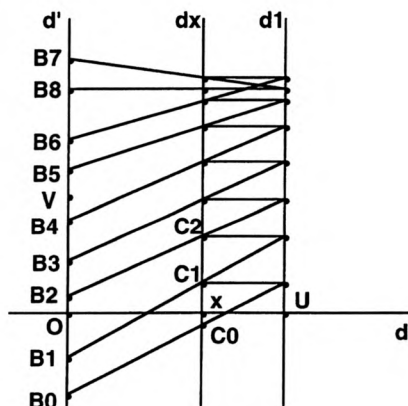
- un point x sur la droite d ,
- les perpendiculaires dx et d_1 à d en x et U
- sur d' les points $B_0, \dots, B_n$ dont les ordonnées sont $b_0 = a_0, \dots, b_n = a_0 + \dots + a_n$.

Enfin, si $n \leq 6$, on applique construc- n à $B_0, \dots, B_n, dx$ et d_1 .

⁸ On constate que les unités sur les deux axes peuvent être différentes. Il peut être intéressant de grader les droites d et d' .



Si $n > 6$, puisqu'on ne peut pas définir $\text{construc-}n$, on reviendra à la définition : on applique $\text{construc-}6$ à $B_{n-6}, \dots, B_n, dx$ et $d1$, ce qui donne le point C_{n-6} , puis on applique alemb à C_{n-6}, B_{n-7}, dx et $d1$, ce qui donne le point C_{n-7} , etc.



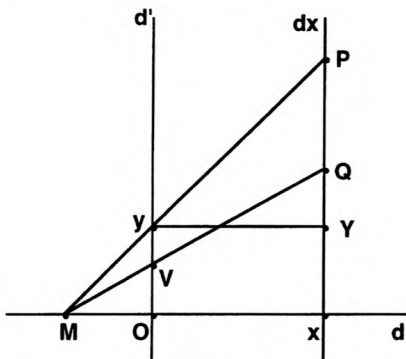
En déplaçant le point X, on voit le fonctionnement du constructeur tandis qu'en traçant le lieu de $C0$ quand X varie, on obtient la représentation graphique du polynôme : des exemples de telles représentations sont fournis dans l'annexe 2.

V. UN CONSTRUCTEUR DE FRACTIONS RATIONNELLES.

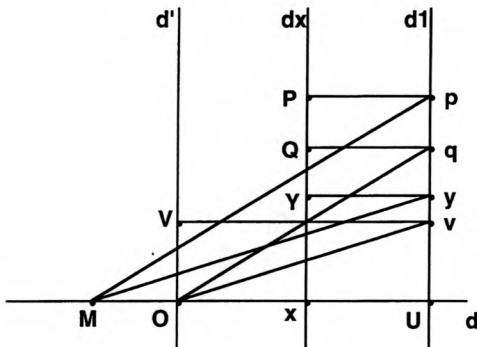
Pour obtenir la représentation graphique d'une fraction rationnelle, on applique le constructeur au numérateur et au dénominateur. Si P et Q sont les deux points de la droite dx tels que $\overline{XP}$ et $\overline{XQ}$ soient les valeurs du numérateur et du dénominateur, on cherche

le point Y de dx tel que $\frac{\overline{XY}}{\overline{OV}} = \frac{\overline{XP}}{\overline{XQ}}$.

La construction la plus simple serait la suivante : on trace la droite VQ qui coupe OX en M , puis la droite PM qui coupe OV en y ; le point Y est alors le point d'intersection de la droite XP avec la parallèle à OX passant par y .



Néanmoins, on constate que cette construction ne donne rien lorsque $\overline{XQ} = \overline{OV}$ = 1. Pour obtenir une construction valable également dans ce cas, nous utiliserons la méthode suivante : déterminer la projection p (resp. q , v) de P (resp. Q , V) sur $d1$, trouver l'intersection M de la parallèle en p au segment Oq avec d , puis l'intersection y de $d1$ avec la parallèle en M à Ov . Le point Y est alors la projection de y sur dx .



On trouvera dans l'annexe 3 des exemples de courbes représentatives obtenues avec ce constructeur.

VI. REPRÉSENTATION DES FONCTIONS RATIONNELLES SUR UN SEUL AXE.

Dans [2], G.V suggère de représenter avec Cabri-Géomètre des fonctions en utilisant un seul axe de coordonnées, ce qui est possible en déplaçant le point représentant l'abscisse avec la souris. Un des reproches que l'on peut faire à ce qui est présenté dans cet article est d'imposer automatiquement la même unité pour les points X et Y , ce qui peut nuire à la précision des études.

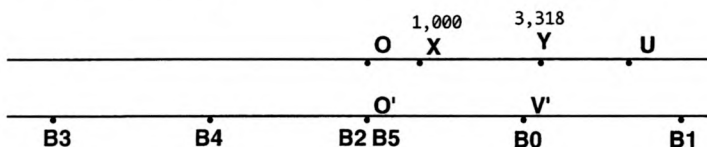
L'utilisation de notre système permet de lever cette critique : pour obtenir une telle représentation, il suffit de prendre le symétrique du point Y par rapport à la bissectrice de l'angle $\widehat{UOV}$. Pour la clarté de la figure, il peut être intéressant d'utiliser un deuxième axe

parallèle au premier et gradué où on déterminera l'unité des ordonnées et où l'on placera les coefficients des polynômes ou des fractions rationnelles.

En utilisant l'outil Mesurer, on peut déterminer ici avec une grande précision la valeur d'une fonction rationnelle en un point, les racines ou les extréma de cette fonction. Par exemple, pour le polynôme

$$P(X) = X^5 + X^4 - 2X^3 - 2X^2 + X + 1$$

dont on trouvera une représentation graphique dans l'annexe 2, on voit qu'il y a un maximum entre 0 et 1/2. La représentation linéaire fournit pour le maximum :



Avec l'outil Mesurer, on peut préciser et on obtient pour cette position :

$$\text{Abscisse}(O) = 0,000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000$$

$$\text{Abscisse}(U) = 5,000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000$$

$$\text{Abscisse}(O') = 0,000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000$$

$$\text{Abscisse}(V') = 3,000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000$$

$$\text{Abscisse}(X) = 1,000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000$$

$$\text{Abscisse}(Y) = 3,317\ 759\ 999\ 999\ 999\ 999$$

(on peut évidemment arrondir cette dernière valeur à 3,317 76) et pour des positions voisines

$$\text{Abscisse}(X) = 0,964\ 285\ 714\ 285\ 714\ 286$$

$$\text{Abscisse}(Y) = 3,317\ 320\ 073\ 871\ 749\ 866$$

et

$$\text{Abscisse}(X) = 1,035\ 714\ 285\ 714\ 285\ 714$$

$$\text{Abscisse}(Y) = 3,317\ 318\ 324\ 712\ 173\ 499$$

On a donc pour le maximum $x = 0,2$ et $y = 3,317\ 76/3 = 1,105\ 92$. Le calcul donne

$$P'(X) = 5X^4 + 4X^3 - 6X^2 - 4X + 1 = (X+1)^2(X-1)(5X-1)$$

qui a bien pour racine $X = 1/5 = 0,2$ et on a alors

$$P\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{1 + 5 - 50 - 250 + 625 + 3125}{5^5} = \frac{3456}{5^5} = \frac{3456 \mu 32}{10^5} = 1,105\ 92.$$

En utilisant les mêmes idées, mais deux axes de coordonnées (O, U, V) et un axe "des temps" (Ot, Ut), on peut construire les courbes paramétrées d'équation $x = f(t)$, $y = g(t)$ où f et g sont des fractions rationnelles. On trouvera dans l'annexe 4 la représentation obtenue pour la courbe $x = t - t^2$, $y = t^3$.

VII. CONCLUSION.

Il est évident que tout ce que nous venons de présenter se fait plus facilement avec un grapheur ou un système de calcul formel. Il semble néanmoins intéressant de montrer que la séparation entre analyse et géométrie n'est pas un mur étanche : certains problèmes de géométrie se ramènent à une étude de fonction et, comme nous le montrons ici sur un exemple, certains problèmes d'analyse peuvent se résoudre géométriquement. En outre, les outils mathématiques utilisés sont élémentaires : théorème de Thalès pour la géométrie,

manipulations algébriques sur les polynômes (ou suites récurrentes, mais elles ne sont pas indispensables) pour l'analyse. Ceci peut donc se faire dès la classe de seconde.

On peut remarquer plus précisément que l'on construit des représentations graphiques de fonctions comme des lieux géométriques. Ceci peut sembler surprenant dans notre enseignement où les lieux géométriques sont des droites, des cercles ou, à la rigueur, des coniques⁹. Mais cet obstacle culturel n'est pas un obstacle conceptuel : on constate que les lieux géométriques "constructibles", tout comme les représentations graphiques des fonctions "constructibles", peuvent être vus comme des ensembles de points vérifiant certaine(s) équation(s).

En d'autres termes, ce que trace le constructeur universel de d'Alembert, et plus généralement tout mobile articulé, peut être considéré comme le graphe d'une fonction ou le lieu géométrique d'un point : c'est le point de vue de l'utilisateur qui décidera.

Terminons en faisant remarquer combien les courbes fournies par le constructeur¹⁰ sont différentes de celles qu'un enseignant tracerait au tableau après une étude de fonction : comme les figures de la géométrie élémentaire, les graphes des fonctions sont munis d'un statut, statut implicite dans notre enseignement et trop peu souvent explicite.

Références

[1] Roger CUPPENS. Quelques réflexions sur le logiciel Cabri-Géomètre (à paraître)

[2] G. V. Une idée ... bizarre ! Représenter des fonctions sur un seul axe. Cabriole n° 2 (novembre 1992) p. 3.

⁹ Daniel Lacombe rappelle qu'il fut un temps où sévissait dans les classes préparatoires à Saint Cyr "l'axiome de Saint Cyr" s'énonçant "Tous les lieux géométriques sont des droites ou des cercles" et dont la "preuve" irréfutable était "Ce sont les seuls lieux géométriques au programme du concours".

¹⁰ On trouvera dans l'Annexe 5 la représentation de la même courbe fournie par le constructeur et celle que l'on trouve dans un vieux manuel scolaire.

110 Université d'été Cabri-géomètre-Grenoble 9-13 juillet 1993.

Le texte de d'Alembert

786

EQU

on prendra d'abord 15 degrés pour chaque heure, on prendra le quart des minutes de temps, on en fera des degrés; le quart des secondes, on en fera des minutes; le quart des tierces de temps, l'on en fera des secondes de degrés.

Ces règles aisées à retenir & à pratiquer, se peuvent faire sans le secours des tables; cependant on trouvera des tables propres à faire ces conversions de temps en parties de l'équateur, & des parties de l'équateur en temps, dans la *connaissance des temps*, &c. L'opération se réduit à multiplier par 15 le temps qu'on veut réduire en parties du cercle, ou à diviser par 15 les parties de l'équateur qu'il s'agit de convertir en temps.

La conversion du temps en parties de l'équateur est différente de la conversion en temps solaire moyen dans laquelle on prend $360^{\circ} 59' 8''$ pour vingt-quatre heures, ou $15^{\circ} 2' 27'' \frac{1}{3}$ pour chaque heure; c'est le nombre des parties de l'équateur qui passe par le méridien pendant la durée des heures solaires, marquées par une pendule du moyen mouvement; quand cette pendule a fini ses vingt-quatre heures, il a passé, non seulement 360° de l'équateur, mais encore les $59' 8''$ que le soleil a parcourues en sens contraire, & qui doivent passer par le méridien pour que le soleil y arrive. (M. DE LALANDE.)

EQUATION. *Construction & usage d'une machine pour trouver les racines de quelque équation que ce puisse être.* (Algebre. Machines.) M. Pascal s'est fait une réputation dans le monde pour avoir inventé sa machine arithmétique. Celle dont je vais donner la description n'est pas moins ingénieuse; & on peut l'appliquer à toutes les équations de quelque degré qu'elles soient. Avant que d'en donner la construction, il convient d'exposer en peu de mots la théorie sur laquelle elle est fondée: elle suppose, dans ceux qui liront cet article, quelque connoissance de l'Algebre.

Soit l'équation à résoudre $a + bx + cxx + dxx$, &c. $= 0$.

Tirez sur la ligne SS prise pour base dans la fig. 1 ou 2 de la pl. I. d'Algebre, des planches, supplément, les perpendiculaires SS & RR , éloignées l'une de l'autre de telle distance qu'il vous plaira. Prenez

EQU

ensuite sur la ligne SS de l'une ou de l'autre figure les parties OA , AB , BC , CD , &c. proportionnelles aux coefficients a , b , c , d , &c. de l'équation, observant de prendre chacune de ces lignes de bas en haut, à compter de l'extrémité de la dernière lorsque le coefficient qu'elle doit représenter est positif, & dans un sens contraire lorsqu'il est négatif. Cela fait, tirez par l'extrémité de la dernière des lignes OA , AB , BC , &c. savoir, par D , la ligne DC , parallèle à la base ZZ , & par le point C , où DC coupe RR , cC , & parallèlement à SS , & à telle distance qu'il vous plaira MM ; par le point où cC coupe MM , la ligne kb parallèle à DC ; par le point b , où la dernière coupe RR , la ligne bB ; par le point où celle-ci coupe MM , la parallèle à DC , & enfin par le point a , où bB coupe MM , la, & par le point a , où la coupe RR , la ligne aA . Supposons maintenant que les lignes SS , RR , Cc , représentent trois règles avec des rainures telles qu'on le voit figure 3, que vous fixerez dans leurs places respectives SS , RR & Cc sur un plan ou chassis de grandeur suffisante.

Soient Bb , Aa , d'autres règles de même forme, qui se meuvent sur les centres B , A , &c. lesquels se meuvent eux-mêmes en haut & en bas le long de la règle SS , mais de manière qu'on puisse placer les centres B & A l'un sur l'autre, ou sur C , si l'occasion le requiert, & les arrêter avec des écrous; savoir, le centre A en A , le centre B en B , &c. Soient $k b$ & la , d'autres règles mobiles, comme les premières, & disposées de façon qu'elles se meuvent toujours parallèlement les unes aux autres, & à la ligne DC & MM , une autre règle de pareille forme. On assemblera les règles $k b$ & MM avec la règle fixe Cc au moyen d'une pointe couante qui passe par le point a , où leurs rainures se coupent. On assemblera de même les règles $k b$, Bb , la & Aa ensemble, & avec MM & RR , avec de pareilles pointes qui les traversent dans les points b , r , a & a . La dernière de ces pointes doit être faite de manière à pouvoir porter un crayon. Je dis maintenant que si l'on avance ou recule la règle MM de SS , en sorte qu'elle

lui soit toujours parallèle, le crayon s décrira la courbe qu'on demande; que les distances à compter du point O où le crayon coupera la base ZZ , à droite de SS , marqueront les racines positives de l'équation; celles qui seront à gauche, les racines négatives; & les endroits où il approchera de la base sans la toucher, les racines impossibles ou imaginaires. Ces distances doivent être prises sur une échelle, sur laquelle la ligne DC sera prise pour l'unité.

Démonstration. Puisque les lignes OA , AB , BC , &c. sont proportionnelles aux coefficients a , b , c , &c. Supposons que la première OA soit égale au premier coefficient a , ou à telle de ces parties qu'on voudra, n , par exemple, seroit $\frac{1}{n}$; alors

pour conserver la proportion ci-dessus, la suivante AB sera égale à $\frac{b}{n}$, BC à $\frac{c}{n}$ & cD à $\frac{d}{n}$, &c. Si l'on nomme OQ ou son égale DPx , pour lors Dc étant prise égale à l'unité, Pc sera égale à $1-x$; & comme Dc est égale à $\frac{c}{n}$, on aura, à cause des triangles semblables, DCc & Pqc , cette proportion $1 : 1-x :: \frac{c}{n} : \frac{c-dx}{n} = Pq$ ou DK ; mais $KB = BC + CD - DK$, c'est-à-dire, à $\frac{c}{n} + \frac{d-dx}{n}$; favoir à $\frac{c+dx}{n}$.

Les mêmes triangles semblables donnent $Kb : qb :: KB : qr$, c'est-à-dire, $1 : 1-x :: \frac{c+dx}{n} : \frac{c+dx-cx-dxx}{n} = qr$ ou Kl ; mais $Al = AD - DK - Kl$, ou $\frac{b}{n} + \frac{c}{n} + \frac{c}{n} + \frac{d-dx}{n} - \frac{c+dx-cx-dxx}{n}$ ou à $\frac{b+cx+dx}{n}$. Les mêmes triangles donnent

encore $la : ra :: Al : rs$, ou $1 : 1-x :: \frac{b+cx+dx}{n} : \frac{b+cx+dx-bx-cxx-dxxx}{n} = rs$.

Or, Qs , qui par la figure est égale à $QP - Pq - qr - rs = \frac{a+b+c+d-dx}{n} - \frac{c+dx-cx-dxx}{n} - \frac{b+cx+dx-bx-cxx-dxxx}{n}$

favoir à $\frac{a-bx+cx+dx}{n}$; & par conséquent, lorsque $Qs = 0$, c'est-à-dire, lorsque la courbe décrite par S coupe la base,

$\frac{a-bx+cx+dx}{n} = 0$, ou à $\frac{a-bx+cx+dx}{n}$, qui par l'équation même est égale à 0. Qs , dans ces circonstances, sera donc aussi égale à $a + bx + cx + dxxx$, & par conséquent toute valeur de x ou de OQ , qui rend $a + bx + cx + dxxx = 0$, rend pareillement Qs égale à zéro. Or, toute valeur de x qui rend $a + bx + cx + dxxx = 0$, est une racine de l'équation proposée $a + bx + cx + dxxx = 0$, dont la courbe coupera la base ZZ pour chaque racine réelle de cette équation, soit positive ou négative, & ne la touchera point lorsqu'elle sera imaginaire, comme le savent ceux qui connoissent les propriétés des courbes. C. Q. F. D.

Cette démonstration est applicable à toute autre équation que l'on voudra.

Nota. Pour avoir les racines négatives, on placera les règles à gauche de SS figure 2, où elles sont marquées par les mêmes lettres que dans la première figure. Par exemple, on posera la règle Cc de c ou q , la règle Bb de b ou r , la règle Aa de n ou s , vers la gauche, en sorte que les centres A , B , des deux dernières se trouvent sur la ligne fixe SS .

Il n'est pas nécessaire que la courbe soit décrite avec exactitude, ni même qu'elle tombe sur le plan, excepté lorsqu'elle coupe la base, & par conséquent on ne risque rien à faire les lignes OA , AB , &c. fort longues. Mais les règles fixes OD & Tc , doivent être si près l'une de l'autre, que leur distance Dc ou OT , étant prise pour l'unité, la base OT qui s'étend à droite jusqu'à l'extrémité du plan, puisse contenir toutes les racines positives, & à gauche toutes les négatives.

Il y a encore une chose à observer : c'est que si l'on a une équation comme celle-ci $xxx - Sxx + 1200x + 9000 = 0$, dont les coefficients S , 1200 & 9000 sont différents l'un de l'autre, qu'il seroit difficile de les prendre sur la ligne OD , on peut les réduire de la manière suivante : c'est de mettre dans l'équation à la place de chaque x , 10 x , 20 x , ou 100 x . Je suppose qu'on mette 20 x ; pour lors, au lieu de xxx , on aura 8000 xxx , au lieu de Sxx — 2000 xx , &c., & l'équation

Ggggg 2

lera changée en celle-ci $8000xx - 1000xx + 24000x + 9000 = 0$. Divisant chaque terme par 100, on aura cette autre $8xx - 2x + 24x + 9 = 0$, dont la réduction sera plus aisée. Mais on se souviendra pour lors, que faisant x 20 fois plus petit qu'il n'est, les racines que vous trouverez seront pareillement vingt fois plus petites, & qu'il faudra par conséquent les multiplier par 20 pour qu'elles aient leur juste valeur.

Voici quelques observations sur l'application de ces regles, qui peuvent avoir leur utilité.

1°. Les racines d'une *équation* peuvent être de trois sortes, positives, négatives & impossibles ou imaginaires.

2°. Toute *équation* contient autant de racines qu'elle a de degrés.

3°. Les racines imaginaires sont toujours au nombre de deux.

Par exemple, si une *équation* a une racine imaginaire comme celle-ci $a = b\sqrt{-1}$, elle en aura une autre; savoir, $a = b\sqrt{1}$, qui la suit toujours. Il suit de là que toute *équation* qui a des racines imaginaires, en contient 2, 4, 6, &c.; c'est-à-dire, qu'elles sont toujours en nombre pair. Toutes les fois que la courbe, que les regles décrivent, approche de la base sans la couper, c'est une marque qu'il y a deux racines impossibles; de sorte que si elle en approche trois fois, l'*équation* contient six racines imaginaires. C'est tout ce que ces regles peuvent faire par rapport à ces sortes de racines; elles marquent leur nombre, & non leur nature. J'enseignerai plus bas le moyen de connoître celle-ci. Puis donc que les racines imaginaires sont toujours en nombre pair, & que leur nombre est égal aux degrés de l'*équation*, il s'ensuit:

4°. Que toute *équation* dont le nombre des degrés est impair, doit contenir au moins une racine réelle.

5°. Que toute *équation* dont le premier & le dernier termes après avoir été transposés, ont des signes contraires, contient au moins une racine réelle. Lorsque cela arrive, & que le nombre de ses dimensions est pair, de même que celui des ra-

cines impossibles, celui des racines réelle doit l'être pareillement.

6°. Que si l'on divise une *équation* par l'inconnue, moins une de ses racines, on la réduira à une dimension plus bas; comme toute *équation* contient autant de racines qu'elle a de degrés, il s'ensuit encore:

7°. Que retranchant le nombre des racines imaginaires de celui de ses racines, je veux dire, du nombre de ses dimensions, le restant sera celui des racines réelles.

8°. Après avoir trouvé, par le moyen des regles, les racines réelles, faites la quantité inconnue x égale à chacune: transcrivez les termes d'un côté: multipliez les *équations* les unes par les autres, & divisez l'*équation* proposée par le produit qui en résultera. Faites le quotient égal à zéro, & vous aurez une *équation* qui renfermera toutes les racines impossibles, sans en avoir aucune de réelle. On trouvera ensuite les racines impossibles par la méthode qu'enseigne M. de Bougainville, dans son *traité du calcul intégral*, dans les cinquième & sixième chapitres de son introduction. C'est la meilleure que je connoisse.

Elle consiste à partager l'*équation* donnée en deux autres du même nombre de dimensions, mais qui ne contiennent que des racines réelles que vous trouverez par le moyen des regles, ou autrement, au moyen de quoi vous aurez toutes les racines impossibles de votre *équation*.

Comme peu de gens connoissent cette méthode, il convient de la donner ici.

L'auteur commence par donner la démonstration des deux propositions suivantes.

Prop. 1. Lorsqu'une quantité est égale à zéro, & composée de plusieurs termes, dont quelques-uns sont réels, & les autres multipliés par $\sqrt{-1}$, la somme de tous les termes réels est égale à zéro; & celle de tous ceux qui sont multipliés par $\sqrt{-1}$, égale pareillement à zéro. C'est le soixante-neuvième article de son *Introduction*.

Prop. 2. Lorsqu'une *équation* ne contient que des racines imaginaires, on peut toujours supposer la quantité inconnue égale

à $m + n \sqrt{-1}$, dans laquelle m & n sont des quantités réelles. C'est le huitième article de la même introduction.

Par conséquent, pour trouver les racines d'une équation telle que celle dont il s'agit, il faut mettre à la place de chaque inconnue, x ; par exemples, $m + n \sqrt{-1}$, & l'on aura une nouvelle équation qui contiendra des termes réels & les termes multipliés par $\sqrt{-1}$, dont le premier & le dernier sont égaux à zéro par la proposition 1. Faites-le donc, & vous aurez deux équations dont il vous sera facile de découvrir les deux quantités m & n , de même que celle de x , qui par la deuxième proposition est égale à $m + n \sqrt{-1}$.

Voici un exemple qui fera comprendre ce que j'ai dit dans la première partie de cet article. Supposons que les racines réelles, découvertes par le moyen des règles dont j'ai parlé, soient a , $b - c$, &c. Faites $x = a$, $x = b$, $x = c$, &c. Transposez les termes, & vous aurez $x - a = 0$, $x - b = 0$, $x - c = 0$, &c. multipliez ces dernières équations les unes par les autres, divisez l'équation donnée par leur produit, & procédez comme j'ai dit ci-dessus.

9°. Le plus grand coefficient négatif d'une équation quelconque, considéré comme positif, & augmenté de l'unité, excède toujours la plus grande racine positive de l'équation. Par conséquent,

10°. Si en place de la quantité inconnue x de l'équation, vous mettez le coefficient, pris comme positif & augmenté de l'unité, moins x , toutes les racines deviendront positives. Dans ce cas, vous n'aurez besoin que des règles de la figure 1, dont les centres sont à leurs extrémités, & elles vous suffiront pour tous les cas possibles; car vous devez avoir observé que les centres de celles de la deuxième figure sont autrement disposés.

11°. Si après avoir rendu toutes les racines de votre équation positive, vous voulez vous éviter la peine de transporter la règle MM à la droite de RR ; ce qui est sujet à quelque inconvénient, je veux dire, si vous voulez que toutes les racines de votre équation se trouvent entre O & T , ou entre zéro & l'unité, au lieu de la quantité inconnue x de la dernière équation,

mettez x , multipliée par le plus grand coefficient négatif, considéré comme positif & augmenté de l'unité. Par exemple, si le plus grand coefficient négatif de l'équation, est -9 , mettez $10x$ à la place de chaque x , & vous aurez une nouvelle équation, dont toutes les racines se trouveront sur la ligne OT , sans qu'il soit besoin de la prolonger, car elles seront moindres que l'unité, je veux dire, que DC ou OT ; mais après avoir ainsi trouvé les racines, il faut les multiplier par le coefficient augmenté de l'unité, c'est-à-dire, dans l'exemple ci-dessus, par 10 , parce qu'ayant mis $10x$ pour x , on rend chaque racine dix fois plus petite qu'elle n'étoit.

Ces propositions sont reçues de tous les algébriques, & n'ont pas besoin d'être démontrées.

Voici la description d'une machine pour régler le mouvement des règles dont j'ai parlé: elle n'est que pour les équations du deuxième degré; mais on peut également l'employer pour toutes les autres.

$ABCD$, figure 4, est un châssis de fer ou d'acier, composé de quatre barres de fer assemblées par leurs extrémités, qui forment un parallélogramme rectangle de douze pouces de long sur huit de large, aux quatre coins duquel sont des appuis EF , GH , IK , & LM , sur lesquels il porte. Sur le côté A , est un coulant N , qu'on peut arrêter avec une vis dans tel endroit qu'on veut, & sur lequel la traverse NO tourne sur son centre. Son autre extrémité tient par le moyen d'une vis avec son écrou à la traverse PQ , qui est pareillement arrêtée sur le châssis aux endroits P & Q , mais de manière qu'on peut l'approcher ou l'éloigner à volonté de l'extrémité A . Cette traverse est représentée par la ligne RR de la première figure. Les quatre appuis EF , GH , IK , LM , portent trois traversans ST , UX & YZ , sur le premier desquels est une boîte coulante o , qui sert de centre au traversant $a b$. Le second & le troisième, savoir, UX & YZ , sont pareillement garnis de deux noix coulantes e & f , qu'on arrête où l'on veut par le moyen d'une vis, & auxquelles la soie $e f$ est attachée. Les trois traversans ST ,

UX, *A*, ou plutôt la ligne tracée sur celui d'en haut représente la ligne *SS* de la figure 1, & la soie *ef*, la bafe *ZZ* de la même figure.

g h i k est un autre parallélogramme environ deux fois plus long que le premier, dont les côtés *g k* & *h i* coulent dans des supports attachés par des vis au châssis *ABCD*, dont trois sont marqués par les lettres *l*, *m*, *n*, & ont des dents triangulaires par dessous, depuis *g* jusqu'à *d*, & depuis *h* jusqu'à *o*, lesquelles s'engrènent avec celles des deux roues *x* & *t* de même diamètre, dont l'axe *pr* est soutenu dans deux endroits, savoir, *u*, & un autre qu'on ne peut voir dans la figure. Ces dents servent à régler le mouvement des traversans *g k* & *h i*, lorsqu'on fait mouvoir la machine; au moyen de quoi, les barres *n x* & *y z*, qui coulent dans deux pièces 1 & 2 sont toujours parallèles. Elles sont représentées par la ligne *MM* de la première figure. Celle de dessous *n x* est garnie d'une pointe 3, dont l'extrémité supérieure passe dans la rainure de la barre 4, 5, & inférieure par celle de l'alidade *NO*. Sur la barre de dessus *y z*, est attachée une pointe perpendiculaire 6, 7, dont on peut ôter la pointe pour y mettre un crayon; cette pointe représente le point *s* & la première 3, le point *r* de la première figure. Sur la barre 4, 5 est un boulon rivé 8, qui est placé directement au dessus de la rainure de la barre *PQ*, & qui représente *t e*, le point *a* de la première figure. Les deux traversans 9, 10, 11, & 12, coulent dans les supports 13, 14, 15 & 16, sont garnis de dents triangulaires, qui engrènent avec celles des roues 17 & 18, dont l'axe est marqué par les nombres, 19, 20. Ces roues règlent le mouvement des barres, & sont que celle qui est marquée par les chiffres 4, 5, se meut toujours parallèlement; elle est représentée par la ligne *l a* de la première figure. Les coulans *e, f, c, N* & *R*, étant arrêtés avec des vis dans les endroits convenables selon les coefficients de l'équation, ainsi qu'on le verra dans l'article suivant, en avançant ou reculant la barre *g h*, on fera mouvoir la machine, & la pointe 6, 7 décrira une courbe qui sera le lieu de l'équation. Les endroits où

elle passera sous la soie *ef*, à compter de la ligne ponctuée, qui est marquée sur la traverse *UX*, indiquera les racines réelles; & le nombre de fois qu'elle approchera & s'éloignera de la même soie sans passer dessous, marquera celui des racines imaginaires. Au dessus des montans *EF*, *GH*, *IK* & *LM*, sont de petites pièces 21, 22 & 23, qui empêchent les barres qui coulent dessous de sortir de leurs places. Voici maintenant la manière de redifier la machine pour une équation donnée.

Arrêtez les noix *e f*, auxquelles la soie est attachée à égales distances des soutiens *EF* & *LM*; avancez ensuite la noix *c*, qui porte l'extrémité de la barre *a b*, de sorte qu'elle soit plus éloignée du soutien *EF*, que l'endroit où vous avez arrêté la noix *e*, d'un nombre de divisions prises sur une échelle de parties égales. Égal au terme connu de l'équation, s'il est positif, & plus près s'il est négatif; & arrêtez-la dans cet endroit. Faites ensuite couler la noix *N*, qui porte la barre *NO*, l'éloignant ou l'approchant du soutien *EF*, plus que ne l'est la noix *c*, d'un nombre de divisions prises sur la même échelle égal au coefficient de l'équation, je veux dire, celui où la quantité inconnue n'a qu'une dimension, plus loin si le coefficient est positif, & plus près s'il est négatif. Faites ensuite couler la noix *R*, qui fixe l'autre extrémité de la barre *NO*, jusqu'à ce qu'elle soit plus éloignée d'une ligne tirée du soutien *EF* au soutien *LM*, je veux dire, du côté *D* du châssis, que la noix *N*, d'autant de divisions que le coefficient du terme de l'équation, où l'inconnue à deux dimensions l'indique, plus loin s'il est positif, & plus près s'il est négatif. Pour cet effet, on doit graduer le côté *A* du châssis, les barres *ST*, *UX*, *YZ*, & le traversant *PQ*, à commencer du front *D*. Ces gradations sont marquées différemment sur la machine, mais d'une manière moins commode. Si l'on observe les endroits où la pointe, où le crayon 6, 7, coupe la soie *ef*, à commencer de la ligne ponctuée marquée sur la traverse *UX*; & qu'on les mesure sur une échelle, sur laquelle la distance du traversant *PQ*, prise depuis une ligne tirée du milieu de l'extrémité *A* de *EF*

à GH représente l'unité (on peut en voir la raison dans la démonstration ci-dessus, où Dc ou OT , figure 1, qui marque la distance de cette ligne PQ de la barre A , est prise pour l'unité), on aura les racines que l'on cherche. Si l'on ôte la soie ef , & qu'on mette un carton sur la machine, sur les deux traversans supérieurs UX & YZ , après avoir tracé dessus une ligne qui représente la soie ef , & mis un crayon en place de la pointe 7; ce dernier décrira une courbe, qui, avec la ligne droite dont je viens de parler, construira l'équation donnée. Plus les coefficients seront grands (on peut les augmenter autant qu'on veut sans changer les racines, en les multipliant par tel nombre qu'on voudra), plus les angles, que la courbe & la ligne formeront, seront grands; ce qui est avantageux dans la construction des équations. Comme il paroît par la démonstration précédente, qu'en augmentant les barres de cette machine, on peut l'employer généralement pour toutes les équations de quelque degré qu'elles puissent être, on peut l'appeller, à juste titre, un *constructeur universel d'équations*. (V)

ÉQUATIONS DÉTERMINÉES. (*Algebre.*) Je me bornerai dans cet article à exposer ce qui a été fait jusqu'ici sur la solution générale des équations, dont on n'avoit pas parlé dans ce *Dictionnaire*, parce que lorsque l'article ÉQUATION fut imprimé, les analystes ne s'étoient pas encore occupés de cet objet, comme ils l'ont fait depuis.

Le premier qui ait fait quelques pas dans cette recherche, est le célèbre Tchirinaus, géometre Allemand, à qui l'on doit la découverte des caustiques. Il proposa une méthode pour faire disparaître autant de termes qu'on voudroit d'une équation proposée par le moyen d'une substitution; & il trouva que si on vouloit la réduire à deux termes, le premier & le dernier, & faire disparaître les intermédiaires, on seroit dépendre la solution de la proposée, de celle d'une équation $x^n + A = 0$, n étant le degré de la proposée, & A dépendant d'une équation du degré $n-1$; $n-2$... 2. 1.

M. Euler & M. Bezout, l'un dans le

tome XI des *mémoires de Pétersbourg*, l'autre dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences*, pour l'année 1765, ont pris une autre méthode. Ils ont supposé que la racine d'une équation du degré n , étoit

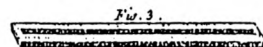
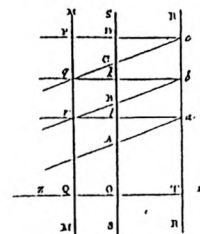
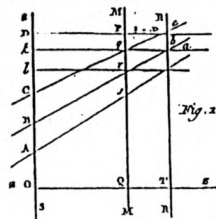
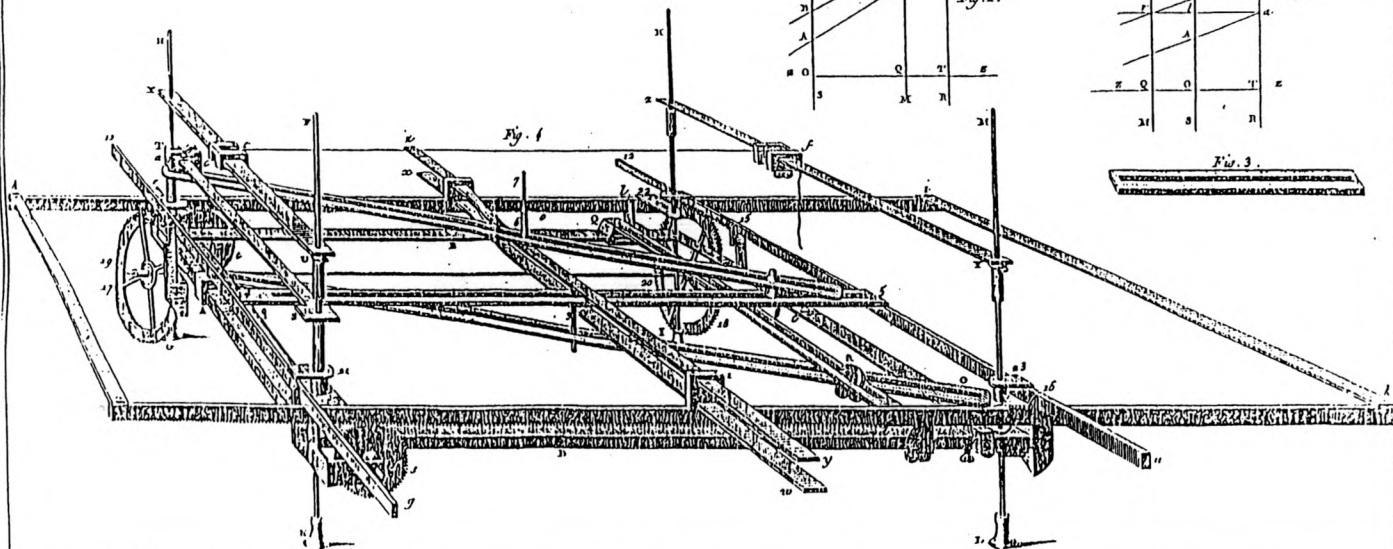
de la forme $\sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B}$... le nombre des A , B , &c. étant $n-i$; & ils ont trouvé que l'on avoit A par une équation aussi du degré $n-1$, $n-2$, $n-3$... 2. 1.

La solution d'une équation du 5^e degré se trouvoit donc réduire à celle d'une équation du vingt-quatrième. Et quoique (*Voyez les recherches de M. de la Grange & de M. de Wanderinge*, sur cet objet) cette équation soit réductible à une du sixième, l'équation du cinquième degré n'est pas rabaisée par ce moyen, & celle du sixième le seroit encore moins.

Il reste donc ici deux objets à considérer; l'un, la possibilité de parvenir à cet abaissement, auquel les équations semblent se refuser; l'autre, les moyens de rendre praticables les calculs immenses où cette méthode générale doit nécessairement conduire.

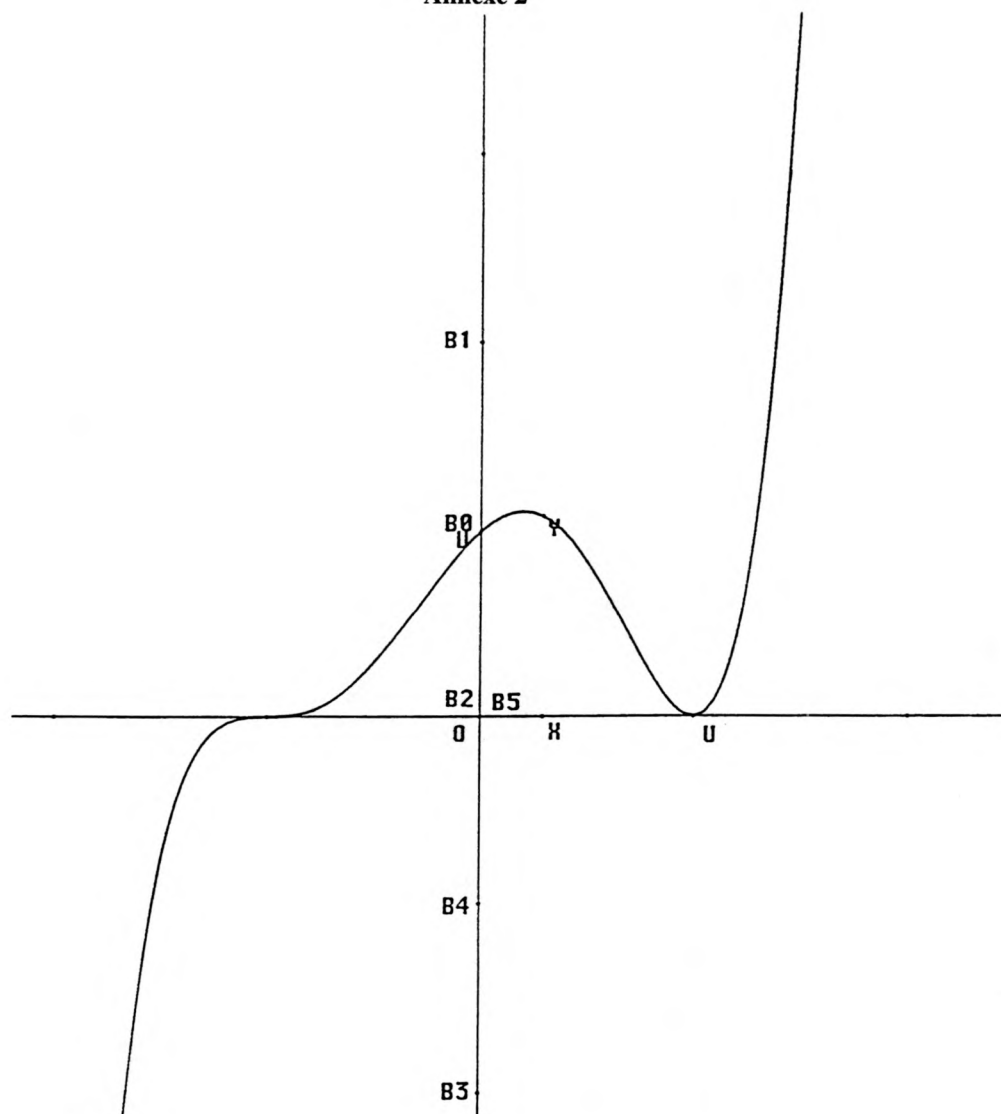
MM. Waring & Wanderinge se sont occupés avec beaucoup de succès du second objet. On fait que le second terme d'une équation est égal à la somme des racines; le troisième à celle de leurs produits deux à deux, & ainsi de suite. On fait aussi que ces fonctions qui sont continues, puisqu'elles sont les coefficients de la proposée, étant données, on peut en tirer la valeur d'une fonction quelconque des racines, pourvu que toutes y entrent d'une manière semblable; mais les formules des coefficients de la proposée qui expriment ces fonctions semblables de racines, sont difficiles à exprimer sous une forme générale & commode, lorsque le nombre des racines ou les exposans de ces fonctions sont des quantités indéterminées. Si les fonctions semblables de toutes les racines sont rationnelles, les fonctions des coefficients de la proposée le sont aussi: mais si elles sont irrationnelles; si au lieu de fonctions semblables de toutes les racines, on cherche des fonctions semblables de deux, de trois racines seule-

Constructeur Universel d'Équations



Algèbre

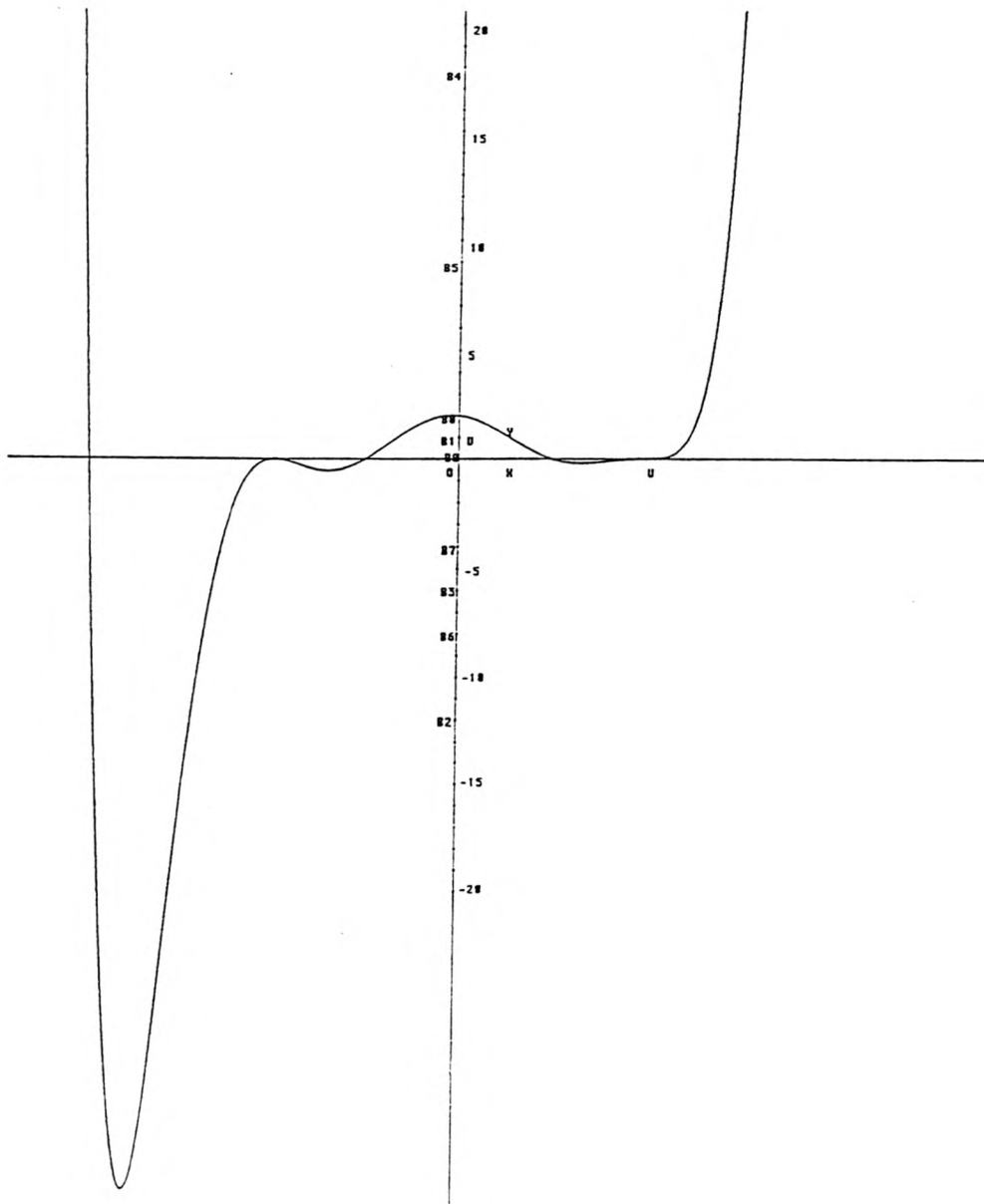
Annexe 2



L'équation

$$X^5 + X^4 - 2X^3 - 2X^2 + X + 1 = 0$$

a une racine triple en -1 et une racine double en +1.

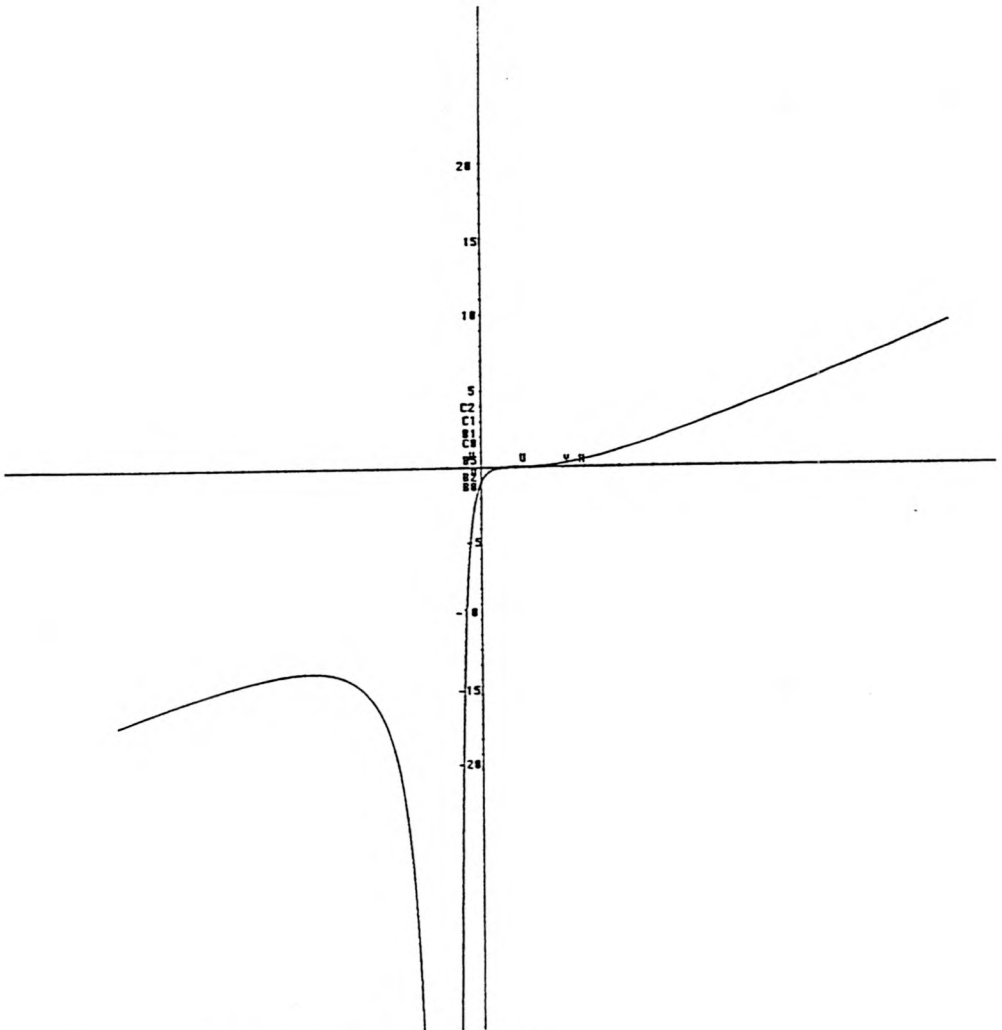


es racines de l'équation

$$X^8 - 4X^7 - 17X^6 - 9X^5 + 24X^4 + 6X^3 - 13X^2 - X + 2 = 0$$

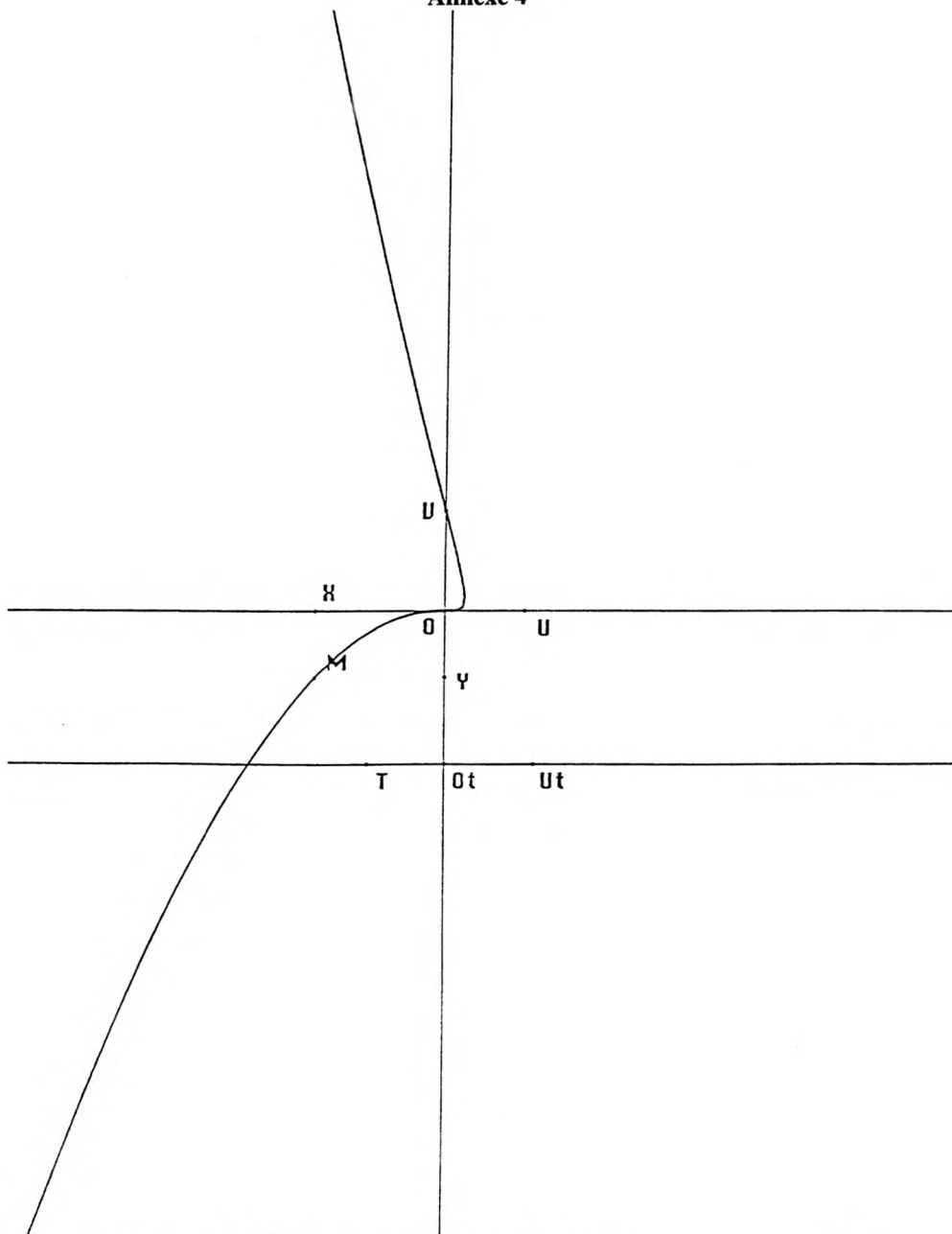
sont : 1 (triple), -1 (double), $\pm 1/2$ et -2.

Annexe 3

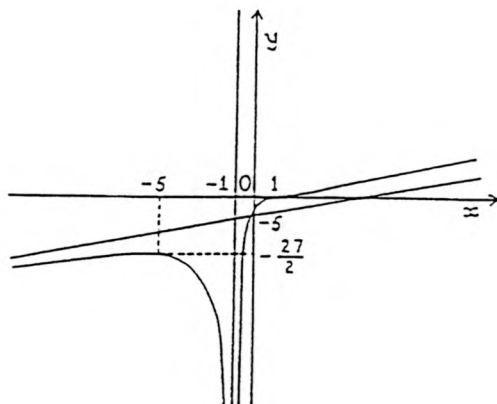
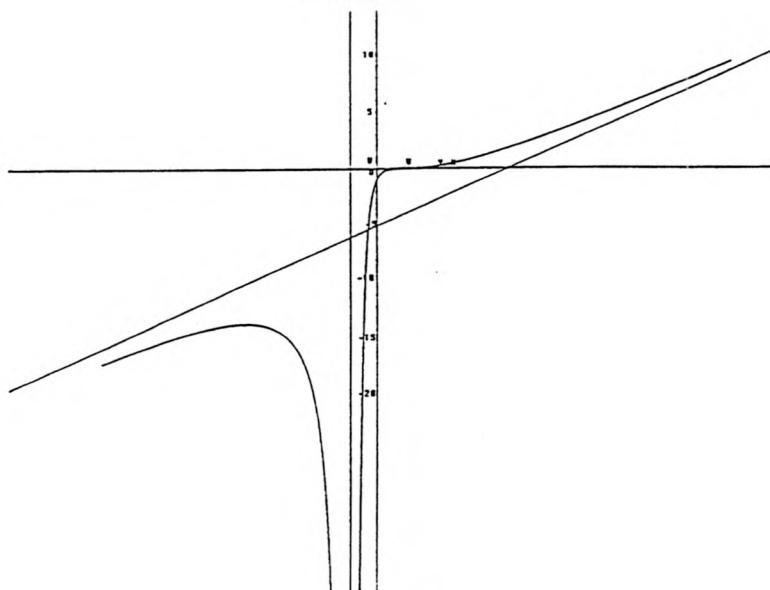


Courbe représentative de $(x - 1)^3 / (x + 1)^2$

Annexe 4



Annexe 5



Comparaison de la courbe représentative de l'annexe 3 avec celle fournie dans le manuel "Mathématiques M.P.C. et Spéciales B" de Léonce Lesieur publié en 1964 par la librairie Armand Colin.