

Franck Bellemain
de couvrant la surface de Schwarz
pendant
ses
vacances
en Chine !



Archives LSDZ

8. Apprendre à voir et manier l'objet géométrique au delà du tracé dans Cabri-géomètre

Colette LABORDE

DidaTech - LSD2 IMAG-CNRS, Université Joseph Fourier

La didactique des mathématiques a consacré une partie importante de ses travaux à l'étude des situations problème dans lesquelles l'apprenant doit construire des outils de solution (présentant un caractère de nouveauté pour lui) pour résoudre le problème qui lui est posé. La théorisation proposée par Brousseau (1986) décrit ces situations comme celles d'une interaction entre un milieu et l'apprenant. En termes de système, si le système didactique est celui construit autour du triangle enseignant, savoir, apprenants, le milieu est au sein de ce système, le sous-système antagoniste de l'apprenant. C'est par des actions sur le milieu, par l'interprétation de rétroactions du milieu susceptibles de fournir des éléments de validation de sa solution (Margolinas 1993, chap.1 & 2), dans la répétition d'essais de résolution d'un même problème, que l'apprenant élabore des adaptations nouvelles à la situation qui lui pose problème. Ces adaptations peuvent être la source de connaissances nouvelles. Une hypothèse importante en didactique postule que le milieu doit être organisé pour permettre de telles adaptations de l'apprenant.

Les EIAO (environnements interactifs d'apprentissage avec ordinateur) peuvent servir à la constitution de milieux organisés pour l'apprentissage et être analysés de ce point de vue. En effet, ils offrent particulièrement cette possibilité de confrontation longue et répétée à une situation problème et cette dualité d'actions et de retours du dispositif aux productions des élèves, comme le confirme un grand nombre d'observations d'élèves travaillant sur ordinateur (Gras 1987, Artigue 1991, Bellemain et Capponi 1992). Les spécificités des EIAO tiennent en particulier à ce que :

- un EIAO contient des connaissances (mathématiques en l'occurrence) ;
- ces connaissances en raison de contraintes de représentations en machine et à l'interface peuvent avoir un fonctionnement particulier, différent en certains aspects de celui des connaissances de référence.

La première spécificité entraîne en particulier que :

- des actions conceptuellement complexes peuvent être rendues directement possibles à l'utilisateur du dispositif ;
- la machine est susceptible d'offrir des rétroactions fondées sur des connaissances
- la machine a un comportement en partie autonome de l'apprenant.

L'objectif de cet article est d'analyser les spécificités d'un EIAO et leur rôle sur la conception et le fonctionnement de situations adidactiques. L'exemple choisi est le logiciel Cabri-géomètre en tant que constituant d'un milieu organisé pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. Cet apprentissage est en effet un point clé de l'apprentissage de la géométrie au collège, comme nous chercherons à le montrer au paragraphe I. Nous présenterons ensuite le logiciel (§II) et le reste de l'article sera consacré à l'étude du milieu adidactique susceptible d'être organisé autour du logiciel et au caractère adidactique de situations mettant en jeu les rapports entre dessin et objet géométrique (§III et IV).

I. LES RAPPORTS ENTRE DESSIN ET OBJET GÉOMÉTRIQUE

La géométrie enseignée traite d'objets théoriques mais met aussi en jeu des représentations graphiques dont le rôle dans l'apprentissage de la géométrie n'est plus à souligner.

A. - La figure en tant que rapport entre dessin et objet géométrique

En tant qu'entité matérielle sur un support, le dessin peut être considéré comme un signifiant d'un référent théorique (objet d'une théorie géométrique comme celle de la géométrie euclidienne, ou de la géométrie projective). La figure géométrique consiste en l'appariement d'un référent donné à tous ses dessins, elle est alors définie comme l'ensemble des couples formés de deux termes, le premier terme étant le référent, le

deuxième étant un des dessins qui le représente; le deuxième terme est pris dans l'univers de tous les dessins possibles du référent. Le terme figure géométrique renvoie dans cette acception à l'établissement d'une relation entre un objet géométrique et ses représentations possibles. Dans cette approche, les rapports entre un dessin et son référent construits par un sujet, lecteur ou producteur du dessin, constituent le signifié de la figure géométrique associé pour ce sujet. Ce signifié correspond à ce que Fishbein (1993) appelle *figural concept*

Les rapports entre dessin et objet géométrique peuvent être grossièrement caractérisés par le fait que des propriétés de l'objet géométrique se traduisent graphiquement par des relations spatiales. Par exemple, une trait rectiligne qui touche un tracé circulaire peut être interprété dans une théorie géométrique comme une droite tangente à un cercle.

Il importe cependant de souligner la complexité des rapports entre dessin et objet géométrique; en effet le passage du dessin à l'objet géométrique est l'objet d'une interprétation par un sujet humain. Il s'ensuit que :

(i) d'une part, un dessin géométrique n'est pas nécessairement interprété par son lecteur comme renvoyant à un objet géométrique,

(ii) d'autre part les interprétations d'un même dessin en tant que signifiant d'un objet géométrique sont multiples pour deux raisons : la première tient à ce que les interprétations dépendent du lecteur et de ses connaissances ainsi que du contexte, la deuxième tient à la nature même du dessin ; à lui seul il ne peut caractériser un objet géométrique.

Précisons ces affirmations qui servent de points de départ à notre cadre théorique.

Un dessin renvoie aux objets théoriques de la géométrie dans la mesure où celui qui le lit décide de le faire, l'interprétation est évidemment dépendante de la théorie avec laquelle le lecteur choisit de lire le dessin ainsi que des connaissances de ce lecteur. Le contexte joue un rôle fondamental dans le choix du type d'interprétation. La figure 1 peut ainsi être interprétée comme le dessin d'une pomme à laquelle reste attaché un bout de tige. Dans un contexte de mathématiques, un mathématicien y reconnaîtra sans nul doute un cercle.

Mais il sera plus réticent pour le faire pour le dessin de droite (Fig.2) alors que l'ensemble des marques d'encre sur le papier du dessin de droite est probablement une meilleure approximation aux moindres carrés d'un cercle.

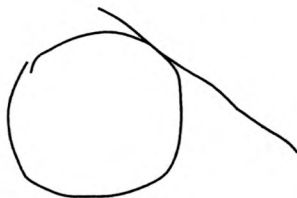


Fig. 1

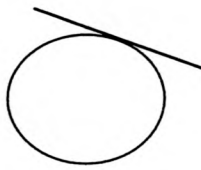


Fig. 2

Ce comportement trouve une explication si l'on prend en compte le choix du type d'interprétation du lecteur. Le mathématicien dans son contexte de travail considère ces dessins dans une interprétation totalement géométrique et parce que dans cette interprétation les dessins doivent renvoyer à des objets établis de la théorie, tenant compte du tracé à main levée, il cherchera à voir un cercle dans le premier, tandis qu'il hésitera entre une ellipse et un cercle dans le second, compte tenu de l'exactitude apparente du tracé.

Un dessin même géométrique peut être interprété de multiples façons et en particulier la perception intervient dans la construction d'une interprétation lorsque le lecteur ne dispose pas de fortes connaissances théoriques géométriques qui lui permettent de dépasser la première lecture perceptive. On a pu ainsi montrer que les aspects perceptifs (Duval, 1988, Mesquita, 1989, Padilla, 1990) du dessin peuvent gêner ou au contraire favoriser la lecture géométrique par des élèves de collège, en attirant l'attention sur des éléments du dessin non pertinents pour cette lecture. La configuration de Thalès n'est ainsi pas reconnue avec le

même degré de facilité par des élèves de troisième dans les deux dessins ci-dessous (Fig. 3) (Cordier & Cordier, 1991).

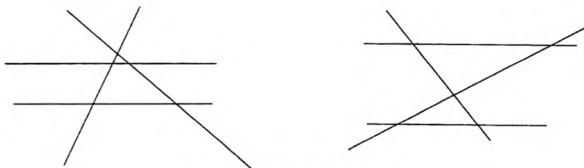


Fig.3

Des dessins prototypiques d'objets géométriques (Noirfalise, 1991) se sont constitués au fil du temps, résultant d'influences à la fois perceptives et culturelles (au sens large et scolaire). Certains sont bien connus (carré/losange), d'autres moins comme celui du parallélogramme : le dessin prototypique d'un parallélogramme est, du moins en France, celui où la diagonale AC est perpendiculaire au côté AD (Fig.4) ; nous avons justement débusqué ce cas de typicalité en utilisant Cabri-géomètre.

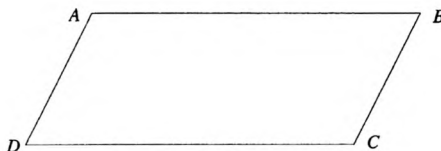


Fig.4

En tant que signifiant, d'un objet géométrique, le dessin rend compte de propriétés de cet objet mais ne le fait que partiellement. On peut attacher un *domaine de fonctionnement* au dessin (ensemble des propriétés géométriques représentées par certaines des propriétés spatiales du dessin). Ainsi un dessin ne rend-il pas compte du domaine de variation des éléments de l'objet géométrique. A partir d'un dessin, il est impossible d'inférer si un point d'un segment appartient au seul segment ou à la droite support du segment, si deux cercles sécants le sont par hypothèse ou peuvent être dans une position relative quelconque. Une *description discursive caractérisant l'objet géométrique est nécessaire* pour lever les ambiguïtés inhérentes au dessin (Duval 1988, Parzysz 1988).

Inversement toutes les propriétés spatiales du dessin ne peuvent être interprétées comme renvoyant à des propriétés de l'objet, au dessin est attaché un *domaine d'interprétation*. La position du dessin dans la feuille de papier par exemple est en dehors du domaine d'interprétation des dessins en tant que signifiants d'objets de la géométrie euclidienne. Certains des problèmes rencontrés par des élèves tiennent justement à ce qu'ils fonctionnent avec un domaine d'interprétation différent de celui de la géométrie euclidienne.

B. - Les rapports entre dessin et objet géométrique dans l'enseignement de la géométrie

L'enseignement de la géométrie ignore les rapports entre objet géométrique et dessin en passant sous silence la distinction entre les deux, ou en faisant comme si un lien naturel les unissait. Nous voudrions reprendre la thèse défendue par Berthelot et Salin (1992) et le cadre théorique afférent développé à propos des rapports entre connaissances spatiales et connaissances géométriques : l'écrasement des connaissances spatiales au profit des connaissances géométriques aboutit à ce que la géométrie enseignée s'appuie sans contrôle sur un rapport privilégié à l'espace réservé au traitement de petits objets ou de tracés tenant sur une feuille de papier, sur l'évidence perceptive : "on voit bien que..." (Bessot, 1993).

Apprendre à voir et manier l'objet géométrique au delà du tracé dans Cabri-géomètre

Nous interprétons l'ignorance par l'enseignement des rapports entre dessin et objet géométrique en liaison avec cet écrasement : l'enseignement néglige la possibilité d'une lecture spatiale du dessin et ne considère que la seule lecture géométrique du dessin, il méconnaît l'existence du domaine d'interprétation d'un dessin : l'évidence perceptive y est naturellement et immédiatement interprétée en termes géométriques. Il faut dire que le langage facilite cette confusion spatiale géométrique, souvent le même terme désigne la propriété spatiale et celle géométrique qui lui est attachée. De par cette indifférenciation, l'enseignement méconnaît la spécificité des rapports entre dessin et géométrie et ne les prend pas pour objet d'apprentissage.

On pourrait décrire brièvement ces rapports en disant que d'une part la géométrie peut être considérée comme le résultat d'une modélisation du dessin, et qu'ainsi elle peut servir d'instrument de production et de contrôle du dessin, ou même de prédiction. Mais inversement, le dessin en géométrie peut être considéré comme modèle de l'objet géométrique (Laborde, 1992), en cela il offre un lieu d'expérimentation graphique (Chevallard, 1990). Parce que l'enseignement ignore les rapports entre dessin et objet géométrique, ce caractère d'expérimentation n'est pour ainsi dire pas perçu par les élèves et encore moins utilisé (ajouter à un dessin des éléments non mentionnés par l'énoncé ou l'enseignant ne relève pas de décisions prises spontanément par les élèves mais nécessite un apprentissage). En tant que modèle de la géométrie, le dessin se prête à des expérimentations rendant compte de questions posées à la théorie, traduites ensuite dans le dessin dont la réponse dans le dessin ne donne pas une réponse dans la théorie mais fournit des suppositions, des pistes pour le travail théorique. On peut ainsi tracer un grand nombre de triangles et remarquer l'inclination au concours de ses hauteurs.

Ces rapports sont subtils et cela signifie que pour que les élèves en prennent conscience, il faudrait développer dans l'enseignement des situations problème

- portant sur les dessins dans lesquelles la géométrie est un outil efficace de modélisation et de solution, par exemple dans lesquelles elle permet de produire de dessins satisfaisant à des contraintes données, de façon moins coûteuse que le tâtonnement contrôlé par la perception et elle garantit la correction du résultat : par exemple, la géométrie assure du caractère tangent d'une droite à un cercle lorsque celle-ci est perpendiculaire au rayon.
- des situations en géométrie, où le recours et l'expérimentation sur le dessin évitent de se fourvoyer dans des solutions théoriques trop longues.

C'est dans cet esprit qu'ont été développés depuis quelques années des environnements informatisés offrant un système de représentation d'objets géométriques par des dessins à l'écran de l'ordinateur qui peuvent être produits par l'intermédiaire de commandes données dans un langage géométrique. Ces objets à l'écran présentent un domaine de fonctionnement plus étendu que les dessins en papier crayon et permettent de disqualifier certaines interprétations illicites. Cabri-géomètre est l'un d'eux. Il est présenté dans le paragraphe suivant.

II. CARACTÉRISTIQUES DE L'ENVIRONNEMENT CABRI-GÉOMÈTRE

Deux caractéristiques importantes de cet environnement informatique (pour une description de l'environnement cf. Bellemain & Capponi 1992 et Laborde & Straesser 1990) résident dans la coexistence de *primitives de dessin pur* et de *primitives géométriques* et dans la manipulation directe du dessin. Si l'on déplace à l'aide de la souris un des éléments de base du dessin, celui-ci se déforme en respectant les propriétés géométriques qui ont servi à son tracé et celles qui en découlent ; par suite si un dessin a été réalisé à l'aide de primitives de dessin pur c'est-à-dire au jugé, il perd ses propriétés spatiales apparentes dans son état original lors du déplacement d'un de ses éléments. La figure 5 présente un parallélogramme obtenu par le tracé de 4 segments posés au jugé sur l'écran (les sommets sont des points de base) à l'état original à gauche, puis après déplacement de A à droite.

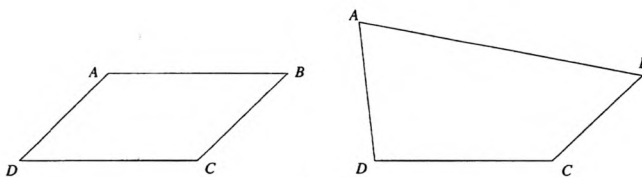


Fig. 5

Le tracé à l'écran d'un dessin attaché à un objet géométrique doit garder au cours du déplacement ses propriétés spatiales rendant compte des propriétés géométriques de cet objet, il nécessite donc d'être produit par les primitives géométriques (telles milieu, médiatrice, droite parallèle, droite perpendiculaire etc.). L'exigence de communiquer au logiciel un procédé géométrique de construction permet ainsi de caractériser l'objet géométrique (on retrouve la nécessité que nous avons mentionnée plus haut de la description discursive de l'objet géométrique pour sa caractérisation).

Dans le tracé à l'écran du dessin d'un objet géométrique, c'est donc l'interaction entre les deux caractéristiques du logiciel qui entraîne le recours aux primitives géométriques, comme l'indique le schéma ci-dessous (Fig.6). Le logiciel a été conçu avec l'idée que ce passage par des primitives géométriques devrait favoriser l'usage de connaissances géométriques.

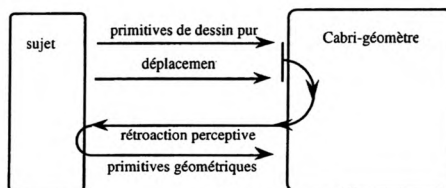


Fig. 6

L'environnement répond donc à l'intention d'offrir un système de signifiants ayant un plus grand domaine de fonctionnement par rapport à la géométrie et rendant plus apparentes les limites du domaine d'interprétation. Parce que le déplacement du dessin est contrôlé par une théorie géométrique (*grosso modo* celle de la géométrie euclidienne), l'environnement rend compte en particulier de la variabilité des éléments de l'objet géométrique et de leur domaine de variation (extension du domaine de fonctionnement) et permet de disqualifier des interprétations non pertinentes (mise en évidence des limites du domaine d'interprétation) ; en effet les propriétés attribuées à l'objet parce que lues sur un dessin statique le représentant ont de fortes chances de n'être apparemment plus vérifiées lors de la déformation du dessin.

Le champ d'expérimentation offert par le dessin dans le dessin papier crayon est limité pour des raisons matérielles (imprécision du tracé, impossibilité de rendre temporairement invisible une partie du dessin, limitation du nombre d'éléments à gérer). L'environnement Cabri-géomètre, non seulement par ses fonctionnalités d'éditeur graphique mais aussi par les connaissances géométriques qu'il intègre, élargit le champ d'expérimentation possible. Les actions possibles autant que les retours tout en étant étendus sont de nature différente puisque fondés sur des connaissances géométriques. Le type de représentation graphique fourni par l'environnement diffère donc du dessin papier crayon. Pour marquer cette différence, dans la suite on appellera *Cabri-dessin* une représentation graphique sur l'écran de Cabri-géomètre.

On peut s'attendre à de nouvelles possibilités d'organisation pour des situations adidactiques et à des modifications de conduites des élèves.

III. LES RÉTROACTIONS DE L'ENVIRONNEMENT INFORMATIQUE

Le déplacement par manipulation directe est une des composantes importantes de Cabri-géomètre offrant une rétroaction aux actions de l'élève.

A. - L'importance du caractère extérieur des rétroactions

C'est parce que le déplacement est fondé sur des connaissances de géométrie, qu'il permet une rétroaction extérieure plus riche sur une même production du sujet. Prenons l'exemple d'un élève ayant à résoudre une tâche que nous décrirons en termes classiques comme une tâche de construction d'une figure satisfaisant à des conditions données (dans nos termes, ce serait une tâche de tracé d'un dessin d'un objet géométrique donné issu d'un procédé contrôlé par des connaissances géométriques). Dans un contexte papier crayon l'élève peut tourner sa feuille de papier et voir le dessin dans différentes positions mais il ne peut faire varier les éléments variables qu'en traçant à nouveau un dessin, c'est-à-dire en engageant une nouvelle action fondée sur des connaissances.

Il n'y a pas alors rétroaction extérieure sur la *même* production du sujet qui peut très bien changer de façon implicite, voire inconsciente, son procédé de tracé dans la production de nouvelles occurrences du dessin. Le recours au déplacement contient en lui-même l'usage de connaissances ; l'avantage est que ces rétroactions sont issues d'un dispositif externe au sujet et indépendant de l'enseignant : elles sont ainsi susceptibles de faire évoluer le sujet.

B. - L'interprétation des rétroactions

La richesse des rétroactions dues au déplacement permet des interprétations à différents niveaux par le sujet utilisateur du logiciel. Citons ci-dessous les niveaux que nous distinguons *a priori* dans une tâche de construction d'un Cabri-dessin satisfaisant à des conditions données, dans un ordre qui correspond à un contrôle croissant par les connaissances géométriques du sujet :

- par le déplacement on place le Cabri-dessin dans une position particulière (prototypique par exemple) qui permet de reconnaître si l'apparence du dessin recherchée a été obtenue ; à ce niveau l'interprétation relève essentiellement de la perception

- on s'assure que le Cabri-dessin reste solidaire dans le déplacement

Remarquons que l'interprétation d'une absence de liaison entre constituants d'un Cabri-dessin peut elle-même être interprétée à deux niveaux différents :

- comme une absence de liaison de type physique ou mécanique au niveau du Cabri-dessin, l'interrogation du sujet ne porte pas sur l'objet géométrique mais sur le Cabri-dessin, la rectification se fera certes par l'usage de primitives géométriques du logiciel mais pour satisfaire une finalité liée à l'apparence du Cabri-dessin ;
- comme une absence de relation géométrique entre éléments de l'objet géométrique représenté par le Cabri-dessin ; la rectification se fera aussi par l'usage de primitives géométriques mais pour satisfaire à une finalité géométrique.

- on cherche à analyser géométriquement la trajectoire de certains éléments du Cabri-dessin dans le déplacement ;

- pour valider ou invalider la construction par rapport à la satisfaction des conditions demandées ;
- ou pour chercher les erreurs dans les cas où la production serait reconnue comme invalide.

C. - Utilisation en interaction des possibilités d'action et de rétroaction

Comme dans toute situation, les rétroactions du milieu peuvent être sollicitées par le sujet qui décide de se livrer à certaines actions dont la sanction par le milieu fournira des éléments d'information sur sa production. Il s'agit en quelque sorte d'une *expérimentation dans le modèle* fourni par l'environnement informatique.

L'environnement Cabri-géomètre permet ce genre d'expérimentation par la conjugaison de l'usage des primitives géométriques et du déplacement : pour vérifier ainsi que deux

droites sont perpendiculaires, on trace la perpendiculaire à l'une des droites et l'on vérifie que dans le déplacement elle reste confondue avec l'autre droite.

Le sujet peut même se livrer à une expérimentation fondée sur un calcul inférentiel : il montre l'équivalence de la propriété P à vérifier et d'une autre propriété P' qu'il peut vérifier par le procédé présenté ci-dessus. Par exemple, pour vérifier qu'il a bien construit un losange, il peut tracer la médiatrice d'une diagonale et vérifier la coïncidence de cette médiatrice avec l'autre diagonale au cours du déplacement.

Dans une analyse d'un Cabri-dessin donné ayant pour finalité de repérer les dépendances géométriques entre propriétés de l'objet géométrique, un autre type d'expérimentation possible consiste à supprimer des relations géométriques entre éléments et à vérifier si les relations qu'on supposait dépendantes ne sont plus satisfaites.

D. - La répétition

Margolinas a mis en évidence l'importance de la répétition du problème dans les travaux d'ingénierie, qui jusqu'alors n'avait pas été prise en compte au plan théorique (*op. cit.*, p.117). Elle montre bien qu'il ne s'agit nullement d'une conséquence d'une option behavioriste dans laquelle la répétition de la confrontation à des stimuli permettrait un apprentissage par renforcement mais bien d'une conséquence d'une option constructiviste : la répétition de la confrontation au même problème permet à l'élève de construire un sens au problème (processus de dévolution), le "rend de plus en plus conscient de ce qui le pousse à agir". La répétition est intéressante quand les rétroactions ne sont pas simplement en juste ou faux mais sont de nature riche. C'est justement ce que tendait à montrer l'analyse des deux paragraphes précédents. Dans l'usage régulier de Cabri-géomètre sur un long terme dans des classes de 4ème et de 3ème d'un des auteurs (B. Capponi), on a pu constater lors de résolution de problèmes une absence de renoncement de la part des élèves, presque toujours un engagement important fait de la succession de nombreuses tentatives de solutions, et - certes un peu moins souvent - une évolution des solutions.

IV. UN NOUVEL APPRENTISSAGE ?

Les situations didactiques en géométrie visent à ce que :

- les stratégies de solution fondées sur des connaissances géométriques apparaissent comme plus efficaces que des stratégies empiriques ou fondées sur la perception. "La géométrie résulte d'une ruse, d'un détour dont la route indirecte permet d'accéder à ce qui dépasse une pratique immédiate" (Serres 1993, p.196).
- ces stratégies ne soient pas la réponse à des attentes externes au problème que l'élève croit deviner par exemple chez l'enseignant ou l'auteur du problème.

Notre attention se porte ici sur les situations qui donnent sens à la notion de figure géométrique; ces situations mettent donc en jeu un dessin qui peut être interprété comme représentant un objet géométrique à l'aide d'une analyse géométrique. Pour que cette interprétation ait lieu, il faut qu'elle soit sollicitée par le problème à résoudre, c'est-à-dire que la résolution du problème conduise à un traitement géométrique. Nous cherchons dans le paragraphe suivant à déterminer les modifications apportées par Cabri-géomètre dans les caractéristiques des situations : quels nouveaux types de démarches un environnement comme Cabri-géomètre est-il susceptible de favoriser chez les élèves ? Quel nouveau type de situations didactiques est-il rendu possible ?

A. - Quels problèmes dans l'environnement Cabri-géomètre ?

On peut distinguer deux types de problèmes suivant la production demandée aux élèves :

- des problèmes de production de Cabri-dessins,
- des problèmes de preuve.

Dans le premier type de problèmes, la production demandée est, comme on l'a vu, de nature nouvelle : il ne s'agit pas de fournir un tracé mais un dessin à l'écran gardant certaines propriétés spatiales imposées lors du déplacement d'un des points de base du dessin. La tâche consiste donc pour l'élève à élaborer un procédé de production du Cabri-dessin fondé sur les primitives géométriques disponibles.

Outre le caractère nouveau de la production demandée, le déplacement introduit de plus des nouveaux types de problème :

- production de Cabri-dessins ayant un comportement contraint au niveau de leur déplacement
- la recherche de la généralité du procédé de construction
- la reproduction d'un Cabri-dessin donné à l'écran que l'on peut explorer grâce au déplacement.

Un Cabri-dessin est un dessin dynamique; outre l'invariance de propriétés spatiales, on peut imposer des contraintes spécifiques de mouvement. Par exemple, on peut demander de produire un triangle équilatéral tournant autour de son centre. Cela revient à imposer les points fixes, les points mobiles du Cabri-dessin, et certaines trajectoires. On joue ici sur la nature nouvelle du Cabri-dessin, c'est un dessin dont les éléments décrivent des trajectoires, ces trajectoires étant soit réduites à un point du plan, un sous-ensemble de points du plan, ou le plan tout entier. La géométrie devient dans ce problème un outil de modélisation des relations spatiales du dessin au cours du mouvement. Ce type de situation requiert donc une analyse en termes géométriques.

Certains procédés de construction dépendent des positions respectives de certains éléments de base et sont profondément modifiés si ces positions changent. Que l'on pense par exemple au procédé d'obtention d'une tangente à un cercle de centre O passant par un point P donné; le procédé habituel diffère suivant que le point est sur le cercle ou à l'extérieur : dans le premier cas, on trace la perpendiculaire au rayon, dans le deuxième un cercle de diamètre PO. Si l'on déplace P, la tangente obtenue reste tangente au cercle jusqu'à disparaître lorsque P est amené sur le cercle. La production de Cabri-dessins conduit donc à un nouveau type de problèmes celui de la généralité d'un procédé de construction.

Dans la reproduction de dessins en papier crayon, les connaissances géométriques sont susceptibles d'être un outil efficace mais l'on sait aussi que le tracé empirique contrôlé simplement par la perception peut fournir un tracé visuellement satisfaisant. La reproduction de Cabri-dessins disqualifie le tracé empirique contrôlé par la visualisation. Elle exige de plus la reconnaissance d'invariants géométriques de ce Cabri-dessin lors du déplacement, ou à proprement parler elle nécessite que l'on reconnaisse des propriétés géométriques à l'aide des invariants spatiaux du dessin dans le déplacement. Ce type de problème met donc particulièrement l'accent sur la correspondance entre visualisation d'invariants spatiaux et leur description géométrique. Nous appelons *boîte noire* ces situations problèmes dans laquelle les élèves ont à reproduire un Cabri-dessin donné à l'écran de façon à obtenir un Cabri-dessin ayant un comportement identique lors du déplacement (pour la validation d'une telle production, cf. § IV.3). De telles activités peuvent être utilisées dans l'apprentissage des transformations géométriques.

La preuve est susceptible de prendre un autre statut dans Cabri-géomètre en ce qu'elle permet d'expliquer des phénomènes visuels ou même l'impossibilité de phénomènes visuels. Ainsi des élèves de 5ème (Bergue 1992) se sont demandés si un triangle pouvait avoir deux angles obtus. La précision du logiciel et le déplacement continu assure aux yeux des élèves de l'impossibilité d'obtenir un tel triangle. Ils sont alors en mesure de s'approprier la question de l'explication d'une telle impossibilité. Il y a dévolution (Brousseau 1986) du problème de la preuve mathématique de l'inexistence de tels triangles. La preuve prend de ce fait un autre statut, celui d'expliquer des propriétés spatiales en contradiction avec les attentes des élèves. Une autre source de problèmes menant à une preuve consiste à demander de trouver les conditions auxquelles doit satisfaire un objet géométrique pour obtenir à l'écran un cas particulier résistant au déplacement. Par exemple, A, B, C étant trois points fixes, à quelles conditions sur D les médiatrices du quadrilatère ABCD se coupent-elles en un même point ? (Fig.7). Les élèves ont la possibilité d'obtenir manuellement la trace du point D en essayant de satisfaire visuellement aux contraintes d'intersection des 4 médiatrices. Ils obtiennent ce qu'un de nos collègues J.F. Bonnet appelle un *lieu mou*. A nouveau, la démonstration apparaît comme un moyen de s'assurer de la nature de ce lieu mou.

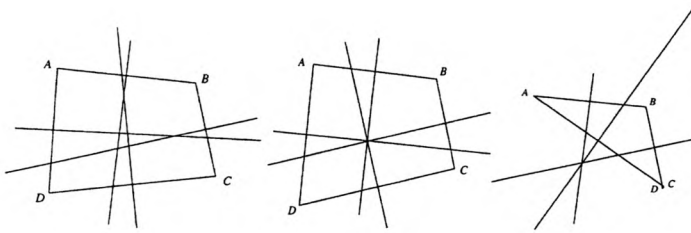


Fig. 7

B. Discussion du caractère adidactique de situations de production de Cabri-dessins

Le caractère adidactique de production de Cabri-dessin peut paraître plus facile à satisfaire pour deux raisons

- il s'agit de faire faire et non de faire un dessin ; les élèves doivent communiquer un procédé de tracé au dispositif et non faire le tracé eux mêmes. Le dispositif oblige à la distinction entre tracé et procédé de tracé. D'autre part l'enseignant est absent du processus de communication au dispositif.

- un Cabri-dessin est par définition un dessin qui garde au cours du déplacement les propriétés spatiales rendant compte des propriétés géométriques attachées à l'objet géométrique qu'il représente ; les procédés de tracé au jugé sont disqualifiés par le dispositif même. Le logiciel par le déplacement offre une invalidation des tracés au jugé et les élèves sont conduits à effectivement utiliser des primitives géométriques pour obtenir le tracé à l'écran d'un Cabri-dessin d'un objet géométrique.

Mais est-il possible à partir de cette constatation de faire deux hypothèses supplémentaires selon lesquelles

- (i) demander aux élèves de produire un Cabri-dessin en fixant l'ensemble de primitives géométriques disponibles n'ouvrirait pas la possibilité à une recherche des attentes de l'enseignant et par là favoriserait la recherche par les élèves de procédés s'appuyant sur des connaissances géométriques ?

- (ii) le recours à des primitives géométriques s'appuierait nécessairement sur un traitement géométrique ?

Evidemment non !

Nous voudrions nuancer ces hypothèses qui fournissent un tableau trop contrasté des rapports entre élèves et machine.

D'une part, des phénomènes de contrat sont susceptibles de se produire, ainsi certaines primitives géométriques peuvent apparaître aux yeux des élèves comme d'utilisation plus souhaitée que d'autres par l'enseignant.

D'autre part, nous faisons l'hypothèse que les stratégies empiriques des élèves sont renforcées par le fait que les commandes de construction sont en nombre restreint ; il leur est loisible de chercher à construire le Cabri-dessin demandé par l'essai successif de diverses combinaisons de menus, et cela d'autant plus que le nombre de primitives géométriques est réduit. Ce n'est pas l'usage de connaissances géométriques qui contrôle le processus de tracé mais la recherche d'une suite de menus conduisant à un Cabri-dessin qui sera validé par le déplacement. La conception de situations adidactiques de construction géométrique avec Cabri-géomètre doit prendre en compte l'accentuation de cette dimension empirique, en choisissant des tracés à réaliser pour lesquels de telles stratégies sont coûteuses et ne conduisent pas au succès.

On a pu de plus constater qu'un jeu s'établit entre une activité perceptive favorisée par le déplacement, une stratégie combinatoire et l'usage de connaissances de géométrie dans les situations où les élèves ont à produire un Cabri-dessin à partir d'une caractérisation discursive. Les élèves abordent le problème par des combinaisons systématiques de menus

sur les objets existants mais il peut arriver qu'ils découvrent lors du déplacement un des invariants géométriques demandés mais reliant d'autres objets que ceux souhaités. Ils se placent alors dans une problématique géométrique en cherchant à réobtenir cet invariant entre les objets souhaités et à cette fin, ils analysent géométriquement ce qu'ils ont fait de façon empirique : la géométrie devient un moyen qui leur permet de contrôler la reproduction d'un invariant obtenu de façon aléatoire.

C. - Validation de la production d'un Cabri-dessin

L'environnement offre aussi une validation pragmatique d'un Cabri-dessin satisfaisant à des conditions données. Il suffit pour cela que l'enseignant crée une macro-construction d'arguments les objets donnés du problème et réalisant la construction donnée. Par exemple dans le problème du tracé d'un carré de côté donné [AB], l'élève voulant vérifier sa production appelle une macro-construction préenregistrée de la construction d'un carré de côté donné, l'applique à [AB] et peut vérifier si sa production reste en coïncidence avec le carré solution lors du déplacement de A ou de B. La superposition de deux dessins identiques du papier crayon est remplacée ici par la superposition lors du déplacement de deux Cabri-dessins, superposition qui assure très probablement de l'identité des objets géométriques associées. Cette possibilité de validation s'est avérée relancer les élèves dans l'activité lorsque leurs productions ne satisfont pas aux conditions demandées.

V. CONCLUSION

La reconnaissance visuelle est donc susceptible de jouer un rôle important dans l'environnement Cabri-géomètre. Or la reconnaissance visuelle de propriétés spatiales associées aux propriétés géométriques n'est pas spontanée et doit être l'objet d'un apprentissage. L'association entre visuel et géométrie prend difficilement du sens dans l'environnement papier crayon qui écrase la distinction entre visuel et géométrie (étroitesse du domaine de fonctionnement et absence de limites apparentes du domaine d'interprétation). Comme il a été dit, l'environnement Cabri-géomètre a été conçu pour permettre la distinction entre visuel et géométrie. L'observation des élèves montre que de plus le géométrique peut apparaître dans Cabri-géomètre comme un *moyen de reproduire du visuel ou de l'expliquer* (explication du comportement d'un Cabri-dessin). Le géométrique ne serait pas seulement construit dans cet environnement pour pallier les limites du visuel mais aussi en lien avec le visuel ; le géométrique est un *outil de modélisation du visuel*. C'est une dimension qui nous paraît intéressante dans la mesure où la géométrie trouve son origine dans le contrôle des phénomènes spatiaux.

Entre d'une part l'écrasement entre visuel et géométrie et d'autre part la rupture entre ces aspects, une voie différente nous semble possible dans laquelle l'apprentissage de la géométrie dans ses débuts consisterait en *l'apprentissage du contrôle des rapports entre visuel et géométrie*. L'environnement Cabri-géomètre offre des possibilités d'organisation d'un milieu pour l'apprentissage de ce contrôle pour trois raisons :

- les phénomènes visuels prennent de l'importance de par la dimension dynamique du Cabri-dessin ;
- ces phénomènes sont contrôlés par la théorie puisqu'ils sont le résultat d'une modélisation graphique d'un modèle analytique de propriétés géométriques ;
- les possibilités sans fin de situations géométriques qui peuvent être visualisées avec un grand nombre d'objets et de façon précise.

Références

- ARTIGUE M. (1991) Analyse de processus en environnement informatique *Petit x*, n° 26, 5-27
- BELLEMAIN F., CAPPONI B. (1992) Spécificité de l'organisation d'une séquence d'enseignement lors de l'utilisation de l'ordinateur, *Educational Studies in Mathematics* 23, 1, 59-97
- BERGUE D. (1992) Une utilisation du logiciel "Géomètre" en 5ème, *Petit x*, IREM de Grenoble, n°29, pp.5-13
- BERTHELOT R. & SALIN M.H. (1992) *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire*, Thèse de l'Université Bordeaux 1

- BROUSSEAU G. (1986) Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, *Recherches en didactique des mathématiques*, 7. 2, 33-115
- BESSOT A. (1993) Représentations graphiques et maîtrise des rapports avec l'espace, *Publications du CIRADE*, Montréal, Canada : Université du Québec à Montréal
- CAPPONI B. (1993) Modifications de menus dans Cabri-géomètre : des symétries comme outils de construction, *Petit x*, 33, 37-68
- CHEVALLARD Y. (1990) Autour de l'enseignement de la géométrie, *Petit x*, 27, 41-76
- CORDIER F. & CORDIER J. (1991) L'application du théorème de Thalès. Un exemple du rôle des représentations typiques comme biais cognitifs, *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol. 11, n°1, 45-64
- DUVAL R. (1988) Pour une approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence, *Annales de didactique et de sciences cognitives*, Université Louis Pasteur et IREM de Strasbourg, Vol 1, 57-74
- FISHBEIN E. (1993) The theory of figural concepts, *Educational Studies in Mathematics*, Vol.24, n°2, 139-162
- FISHER (1978) Visual Influences of figure orientation on concept formation in geometry, In : *Recent Research concerning the development of spatial and geometric concepts*, (pp. 307-21), Columbus, Ohio : ERIC Center for Sciences, Mathematics and Education, The Ohio State University
- GRAS R. (1987) Une situation de construction géométrique avec assistance logicielle, *Recherches en didactique des mathématiques*, 8.3, 195-230
- LABORDE C. (1992) Enseigner la géométrie : permanences et révolutions, Conférence plénière au 7^{ème} congrès international sur l'enseignement des mathématiques, ICME 7, Québec, Canada, août 1992
- LABORDE J.M., STRÄSSER R.(1990) Cabri-Géomètre, a microworld of geometry for guided discovery learning. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*. 90/5, 171-90.
- MARGOLINAS C. (1993) *De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques*, La Pensée Sauvage éditions, 256p.
- MARIOTTI A. (1991) Age variant and invariant elements in the solution of unfolding problems, *Proceedings of PME XV*, Furinghetti F. (ed.), (Vol. II, pp.389-396), Assisi, Italie
- MESQUITA A.L. (1989) *L'influence des aspects figuratifs dans l'argumentation des élèves: éléments pour une typologie*, Thèse de doctorat, Université Louis Pasteur, Strasbourg
- NOIRFALISE R. (1991) Figures prégnantes en géométrie ? *Repères - IREM*, n°2, 51-58
- PADILLA V. (1990) Les figures aident-elles à voir en géométrie ? *Annales de didactique et de sciences cognitives*, ULP, IREM de Strasbourg, Vol.3, 223-252
- PARZYSZ B. (1988) Knowing vs Seeing, Problems of the plane representation of space geometry figures, *Educational Studies in Mathematics*, 19.1, 79-92
- SERRES M. (1993) *Les origines de la géométrie*, Paris : Flammarion