

7. Résoudre des problèmes avec Cabri-géomètre

Gilles MOUNIER & Gérard VIVIER :
IREM de Grenoble

Comment la pratique de CABRI amène-t-elle à changer sa propre façon d'aborder un problème et d'en chercher une solution ?

Nous essaierons de voir, à travers différents exemples de problèmes, des aspects tels que :

- l'aide à la visualisation du problème à partir de l'énoncé
- l'activité d'observation active de "phénomène"
- la création d'un paramétrage dynamique dans la représentation, permettant d'introduire la "variation" correspondant aux deux quantificateurs (existentiel et universel) souvent implicites dans les problèmes
- le travail du type "conjecture", essai, erreur, conviction ...
- l'aide à l'abstraction et la mise en évidence d'invariants avec la question : *Comment créer des constructions "fructueuses" qui permettront de "voir" la solution du problème ?*
- le recours particulier à divers outils de visualisation ou "vérification"
- la comparaison entre "formalisation sous Cabri" et "mise en équation" traditionnelle
- la question du travail de recherche au brouillon et de ces représentations soit mentales, soit sur papier, soit avec Cabri, avec leurs spécificités et leur complémentarité.

Pour cela nous décrirons des activités de recherche de solution sur deux problèmes :

- le problème du "carré inscrit dans un triangle"

- le problème du "pont entre deux villes"

Sur le premier problème, nous relatons une activité personnelle face au problème et sur le second une activité menée en classe de 1ère Scientifique.

I. LE PROBLÈME DU "CARRÉ INSCRIT DANS UN TRIANGLE"

Nous reprenons ici certains éléments en partie abordés dans le journal Cabriole n°4.

Enoncé du problème :

Etant donné un triangle ABC et un point P sur [AB], comment construire un carré PQRS avec Q sur [AC] et avec R et S sur [BC] ?

Quelle construction faire sous Cabri pour représenter le problème à partir de l'énoncé ?

Une construction "naturelle" semble être de créer un triangle libre ABC et un point P semi-libre sur [AB], à partir duquel on construit le rectangle PQRS avec Q sur [AC] et R et S sur [BC].

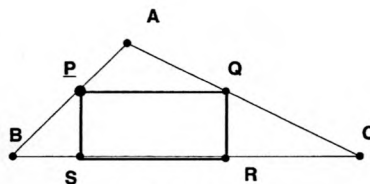
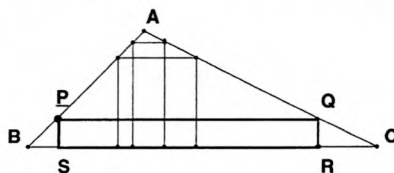


fig. Cabri : Carentril

Remarque :

La lettre P est soulignée et le point est grossi pour indiquer qu'il est "manipulable"

On voit qu'en déplaçant P sur [AB], on donne au rectangle PQRS toutes les formes possibles par variation continue et qu'il y a un carré (et un seul) parmi elles.



Cela permet de visualiser le problème de manière dynamique en mettant à jour un paramétrage du problème et l'existence d'une solution.

Réaliser une telle représentation est déjà un objectif appréciable, notamment par rapport à l'attitude de nombreux élèves qui négligent souvent l'observation et l'analyse de la figure pour se polariser sur une "solution" hasardeuse ou pire sur la recherche de la page du cours à "appliquer".

Nous avons remarqué que certains élèves, simplement mis en face d'une telle "figure cabri", sont parfois gênés par le trop grand nombre d'éléments variables accessibles au même instant. C'est une réelle et intéressante difficulté, car cela pose la difficile question des différents types et niveaux de paramétrage, dans la démarche de **formalisation** (ou de mise en équation) d'un problème.

On peut en effet remarquer qu'il y a dans notre figure deux niveaux de paramétrage et donc de variation :

- 1- le paramétrage du contexte du problème : ici le triangle qui est quelconque et à la variation duquel est attaché implicitement un quantificateur universel.
- 2- le paramétrage d'une solution éventuelle : ici, grâce au point P, le paramétrage du rectangle inscrit PQRS, à la variation duquel est attaché implicitement un quantificateur existentiel associé à une condition "être un carré".

Ce n'est pas Cabri qui crée cette difficulté. Comme c'est souvent le cas avec un outil informatique, Cabri ne fait que la rendre explicite, là où elle est souvent masquée et implicite (comme ici cette notion de quantificateur).

En effet bien comprendre le problème, c'est observer que quel que soit le triangle, il existe un "carré inscrit", et qu'il faudra le caractériser (en indiquer une construction) quel que soit le triangle.

Attardons nous un instant sur cette démarche fondamentale de "paramétrage d'une solution éventuelle" que Cabri rend particulièrement explicite :

On est à la recherche d'un (ou plusieurs) objet-solution *S* défini a priori, dans l'énoncé du problème, par une caractérisation "statique" sous la forme d'un ensemble de conditions imposées. (ici 2 conditions : C1 "être carré" et C2 "être un rectangle inscrit").

On va traiter de manière dissymétrique ces 2 conditions, l'une étant prise comme "principale" et l'autre comme "secondaire".

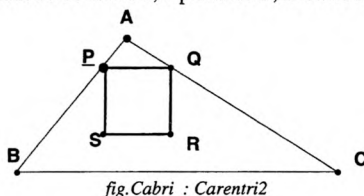
En levant provisoirement la contrainte dite "secondaire" (ici "être carré"), on dispose pour la contrainte "principale" d'une famille F de solutions (ici la famille des "rectangles inscrits") que Cabri permet de paramétrer par un objet libre ou semi-libre (ici le point P) dont la manipulation directe engendre la visualisation dynamique de la famille F .

En reprenant maintenant en considération la condition secondaire, l'objet-solution S apparaît comme le (ou l'un des) élément de la famille F qui vérifie cette condition, et la manipulation directe permet de le faire apparaître comme le résultat d'un "cabri-ajustement" manuel.

L'ensemble donne ainsi ce qu'on pourrait appeler une "cabri-formalisation" du problème qu'il serait intéressant de comparer très systématiquement à la "mise en équation" traditionnelle en géométrie analytique.

Ceci dit, avec cette figure et sa variation "tous azimuts", on voit bien le problème et l'existence d'une solution, mais on est incapable de la caractériser en terme de construction. C'est peut être que la construction n'est pas porteuse des "bonnes images". On va en faire une autre.

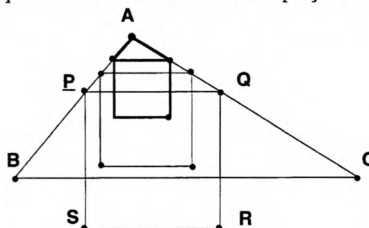
On choisit maintenant de construire, à partir de P , le carré $PQRS$ avec Q sur $[AC]$.



En déplaçant P , on voit qu'on peut agrandir le carré de manière continue et qu'à un moment (unique) son coté $[SR]$ est sur $[BC]$.

Si l'on reprend la description précédente de la démarche de "paramétrage d'une solution éventuelle", on voit que, par rapport à la construction précédente, on a simplement permuté les deux conditions "principale" et "secondaire" : au lieu de chercher un "carré" parmi une famille de (rectangles) "inscrits", on cherche maintenant un (rectangle) "inscrit" parmi une famille de "carrés".

Or, avec cette nouvelle construction, oh chance ! ..., non seulement on visualise le problème, mais on rend quasi évidente la solution en déplaçant le point P :



En effet, les "petites maisons" $PAQRS$ sautent aux yeux comme homothétiques. Il suffira donc de construire l'un quelconque des carrés $PQRS$, la droite (AR) et son intersection avec $[BC]$ qui nous donnera le point R cherché sur $[BC]$.

Un "mal-voyant" aurait pu en plus tracer le lieu de R, mais ici c'est presque "de la triche".

Qu'est-ce qui fait que contrairement à la précédente, cette deuxième construction est fructueuse et nous donne de "bonnes images" ?

C'est qu'elle permet (en reprenant ici et poursuivant la description "méthodologique" de notre démarche) de :

mettre en évidence, pour la famille F, une nouvelle propriété invariante I (ici l'homothétie), dont la conjonction avec la condition "secondaire" donne, pour l'objet cherché, une caractérisation en terme de construction.

Mais comment créer ces constructions fructueuses, qui visualisent de tels invariants ? Voilà une question à creuser ... ultérieurement.

Notons ici que cette notion de construction "fructueuse" est très relative car, en "regardant de plus près", on aurait pu voir que la première construction elle-aussi permettait de visualiser la solution. Il "suffisait" (!) de construire la droite (AS), son intersection E avec la perpendiculaire en B à (BC) et enfin le rectangle BCDE.

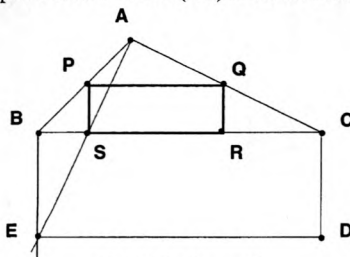


fig. Cabri : Carentri3

Quand on déplace P, les 2 rectangles PQRS et BCDE se déforment conjointement en restant (nouvel invariant !) toujours homothétiques l'un de l'autre. Ainsi PQRS sera un carré si et seulement si BCDE en est un. D'où à nouveau une construction rigoureuse, rejoignant en partie la précédente.

II. LE PROBLÈME DU PONT ENTRE DEUX VILLES

Ce problème a donné lieu dans une classe de 1ère Scientifique, à une activité étalée sur deux fois deux heures. Les élèves ne connaissaient pas Cabri, qui a été utilisé avec un grand écran et un ordinateur "collectif" dans la classe.

Nous décrivons en partie cette activité, mais notre objectif n'est pas ici d'en faire un compte-rendu détaillé et par ailleurs, nous aborderons aussi des questions qui n'ont pas été soulevées dans cette activité en classe.

Énoncé du problème :

Étant donné une rivière aux berges rectilignes et parallèles, et deux villes V1 et V2 situées de part et d'autre de la rivière, où faut-il placer un pont P1P2 perpendiculaire à la rivière pour rendre minimal le trajet V1P1P2V2 ?

Représentation du problème

Là encore posons nous la question : Quelle construction faire sous Cabri pour représenter le problème à partir de l'énoncé ? (On verra plus loin que cette question n'est pas du tout triviale)

La construction qui semble a priori la plus "naturelle" est sans doute :

- d'abord, créer une droite d (ici horizontale), un point libre $R2$ par lequel on trace la parallèle à (d) et enfin 2 points libres $V1$ et $V2$ (voilà pour le paramétrage du contexte du problème, ici : la rivière et les deux villes)
- ensuite, créer un point $P1$ semi-libre sur (d) et construire sa projection orthogonale $P2$ sur l'autre berge ainsi que les segments du trajet $V1P1P2V2$ (voilà pour le paramétrage d'une solution éventuelle, ici : une position du pont).

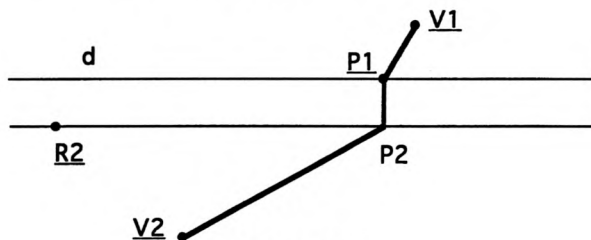


fig. Cabri : Pont1

Remarquons à nouveau l'aspect distinct des 2 étapes mentionnées ci-dessus dans la construction qui correspondent à 2 niveaux distincts de paramétrage et donc de variation.

C'est seulement une fois fixé le contexte, que l'on fait varier la position du pont pour découvrir la position optimale, mais cette position "solution" devra (autant que possible) être caractérisée en termes généraux valables pour n'importe quel choix du contexte.

On retrouve, pour la variation du contexte du problème, une quantification de type universel et, pour la variation de la position du pont, une quantification de type existentiel associée à une condition de minimisation.

C'est cette construction "naturelle" que nous avons faite devant la classe, en montrant simplement comment les diverses possibilités de variation donnent une bonne représentation de l'énoncé.

Notons la tendance quasi unanime des élèves à proposer immédiatement une "solution définitive" plutôt que d'avancer des remarques "partielles" de bon sens issues de l'observation. Nous aurions aimé par exemple qu'on remarque que la solution pour $P1$ est forcément dans l'intervalle des projections sur (d) de $V1$ et $V2$. En effet, dès que $P1$ sort de cet intervalle, il y a augmentation à la fois de $V1P1$ et de $V2P2$. Au contraire dans cet intervalle, pour un déplacement de $P1$, si $V1P1$ augmente alors $V2P2$ diminue et réciproquement, d'où l'incertitude à l'intérieur de cet intervalle.²

²en note de bas de page

1/ Une meilleure approximation

Peut-on montrer facilement et directement que la solution pour $P1$ est entre les 2 projections sur (d) des intersections de la droite $V1V2$ avec chacune des 2 berges ?

2/ Une approche différentielle

Une question judicieuse mais difficile serait de se demander autour de quel point $P1$, un déplacement infinitésimal de $P1$ provoque des variations (opposées) de $V1P1$ et $V2P2$ qui se compensent. Une étude "différentielle" pourrait ainsi conduire à la solution de l'égalité des angles d'incidence sur la berge (en remarquant que pour un déplacement infinitésimal dx de $P1$ sur (d) , le différentiel sur $V1P1$ ne dépend que de l'angle de $[V1P1]$ avec (d) et non de la longueur $V1P1$).

Une approche par conjecture et cas particulier

Les élèves ne doutent pas de l'existence d'une réponse générale et chacun propose "sa" solution. On peut ainsi recenser plusieurs **"conjectures"** :

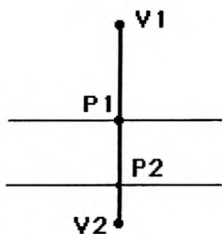
- 1- pont sur l'intersection de [V1V2] et de l'axe médian de la rivière
- 2- pont au milieu des projections de V1 et V2 sur leur berge
- 3- pont tel que [V1P1] et [V2P2] soient parallèles
- 4- pont à "hauteur" de la ville la plus proche de sa berge
- 5- pont entre les projections de V1 et V2 sur leur berge, *mais "plutôt du côté de la ville la plus proche de sa berge" ... et plus précisément ...* dans un rapport de distances à ces projections égal à celui de V1 et V2 à leur berge.

A travers des déplacements provoquant la variation du contexte du problème, on peut montrer l'aspect exigeant d'une solution générale et installer un certain doute ("*ma conjecture est-elle vraie pour tous les cas ?*"). La concurrence aidant, on ne tarde pas voir surgir la recherche de "**cas particuliers**" servant de **contre-exemples** pour "détruire" les conjectures "adverses".

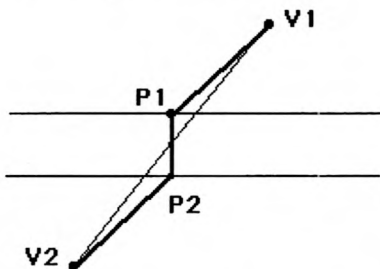
On s'attarde sur cette notion de "cas particulier". Comment la définir ici ? C'est un **contexte** particulier du problème, pour lequel la solution (la position optimale du pont) est clairement établie.

On énumère ainsi après ... discussion, 4 "**cas particuliers**", et on visualise chacun d'eux avec la solution associée :

V1 et V2 sur la même perpendiculaire à la rivière

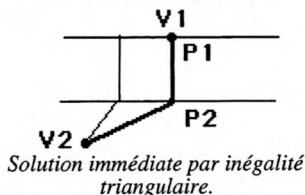


V1 et V2 à égale distance de la rivière

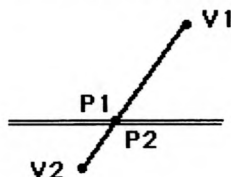


Ici la solution associée est intuitive mais demande à être démontrée.

V1 ou V2 sur une berge



La rivière de largeur nulle



On passe chacune des conjectures "au crible" de ces 4 cas particuliers et seules "résistent" les conjectures numérotées ci-dessus 3 et 5, dont on peut d'ailleurs montrer qu'elles sont "équivalentes".

On pourrait à ce stade essayer de démontrer cette conjecture 3-5.

Cependant nous préférons prolonger la phase de recherche en proposant à la classe une visualisation originale du problème grâce à Cabri.

Une approche par visualisation immédiate de la fonction à minimiser

On construit, "au dessus et à la verticale" de P1, le point L tel que la longueur P1L soit la somme des longueurs V1P1 et V2P2. (Cela ne demande que des reports de longueurs très simples). Il suffit alors de tracer le lieu de L quand P1 varie sur sa berge pour voir apparaître la **courbe représentative de la fonction** que l'on souhaite minimiser.

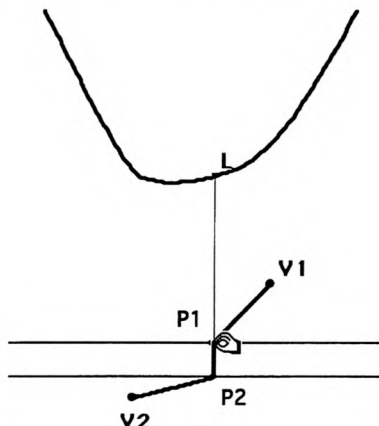


fig.Cabri : Pont1-L (Lieu)

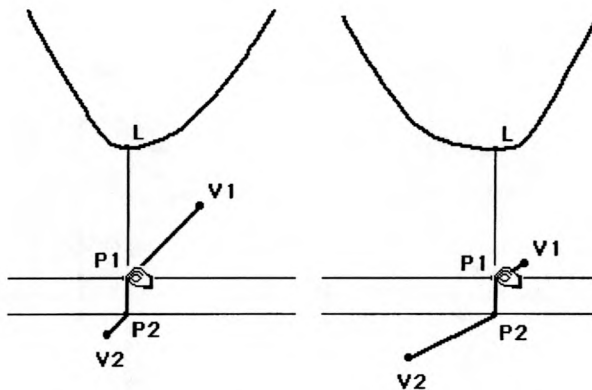
Ce type d'utilisation des lieux est aujourd'hui familier pour de nombreux utilisateurs de Cabri. Arrêtons-nous cependant un instant sur un point très remarquable dans ce type de travail.

Cette courbe, on peut l'obtenir bien sûr sans Cabri, mais beaucoup plus tard : en réalisant la formalisation analytique du problème qui donnera une expression algébrique de la fonction "longueur du chemin" que l'on pourra étudier (elle n'est pas triviale) et dont un grapheur nous donnera la courbe.

L'apport remarquable de Cabri est de fournir très simplement cette courbe à partir de sa cabri-formalisation, et surtout de juxtaposer, au même instant et sur la même figure, 2 niveaux très différents de représentation du problème :

- en bas, le niveau très "concret" du pont que l'on déplace manuellement
- en haut, le niveau habituellement considéré comme "abstrait" de la représentation graphique de la fonction.

Remarquons notamment que le tracé du lieu en mode manuel, permet de visualiser la position du pont associée au minimum sur la courbe, et ainsi de renforcer la conjecture déjà avancée ($V1P1$ parallèle à $V2P2$). D'autant que l'on pourra tracer plusieurs lieux, chacun associé à un contexte différent (du problème) caractérisé par la rivière et les 2 villes.



Cette juxtaposition et cette intégration de niveaux différents de représentation est un des apports reconnus de l'informatique, et ici en particulier de Cabri, qui aide à prendre du recul par rapport à un problème.

Cependant, il est clair que tout cela ne nous donne toujours pas une démonstration de notre conjecture.

La suite du travail effectué en classe

Dans le travail effectué en classe, nous sommes alors passés à l'attaque précise d'une démonstration de la conjecture.

Une seconde séance a ensuite été consacrée, très classiquement, à la formalisation analytique du problème, puis à l'étude de la fonction dont on a ensuite tracé la courbe avec un grapheur.

Notons que la grosse difficulté pour les élèves réside dans cette **formalisation**, avec le choix des axes, des "paramètres" (ceux qu'on note $a, b, c \dots$ associés au contexte : la rivière et les 2 villes) et de la variable (celle qu'on note x) associée à la position du pont. L'approche Cabri aura aidé en donnant du sens à ces 2 niveaux de variation (d'une part le contexte, d'autre part la position du pont pour un contexte donné) et à la courbe, déjà familière, finalement obtenue.

Remarquons enfin que l'étude du minimum de la fonction, donne une expression algébrique de la position optimale du pont en fonction des paramètres du contexte, mais n'en donne pas de caractérisation géométrique. Ainsi encore faut-il disposer de la bonne conjecture (segments $[V_1P_1]$ et $[V_2P_2]$ parallèles) pour pouvoir la vérifier analytiquement.

Les éléments qui suivent dans cet article n'ont pas été abordés dans l'activité en classe.

Une approche par recherche d'invariant dans la famille des solutions possibles

Dans l'esprit de la méthode utilisée pour le "carré inscrit dans le triangle", comment pourrait-on raisonner ?

On a déjà réalisé le "paramétrage d'une solution éventuelle" donnant une famille F décrite par la manipulation du point P_1 . La question est désormais : Comment dégager un invariant dans cette famille ? Grâce à quelle construction complémentaire ?

L'idée de "mettre bout à bout" les longueurs V_1P_1 et V_2P_2 est naturelle, mais la première idée est de le faire sous forme de segments colinéaires, et cela ne semble pas très productif.

L'idée productive, mais honnêtement pas spontanément immédiate, est de "mettre bout à bout les segments-vecteurs", c'est à dire de construire le segment $[P_1V_2']$ tel que les vecteurs $\vec{P_1V_2'}$ et $\vec{P_2V_2}$ soient égaux.

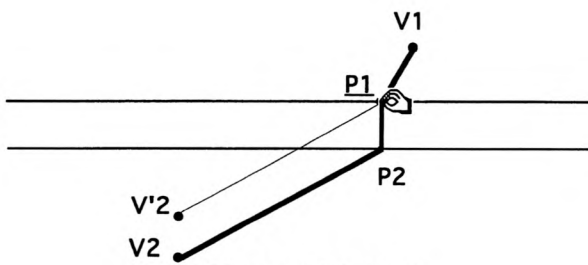


fig.Cabri : Pont1-I (Invariant)

Dans le déplacement manuel de P1, il saute alors aux yeux, que le point V'2 ainsi construit reste fixe (voilà l'invariant !) et la démonstration en est immédiate. Dès lors, il est clair que la position optimale de P1 est sur l'alignement de V1 et de V'2.

Une approche par recherche d'invariant dans la variation du contexte

A défaut d'avoir la "bonne idée" précédente, on peut envisager de faire varier non plus la position du pont, mais le contexte (la rivière et les 2 villes) pour rechercher un invariant (au second degré) portant sur la comparaison entre 2 positions du pont.

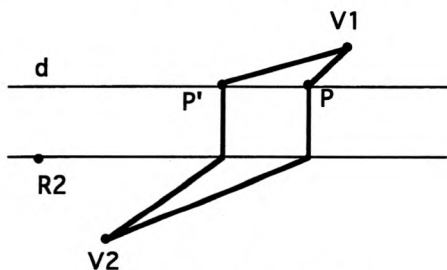


fig.Cabri : Pont1-C (Comparaison)

Sur une telle figure "comparative" entre deux positions P et P', on peut faire varier le contexte du problème, en déplaçant les points libres V1, V2 et R2, mais ces manipulations ne sont pas très productives.

Ainsi la variation de la largeur de la rivière par la manipulation du point R2 donne la "dynamique" ci-dessous assez stérile.

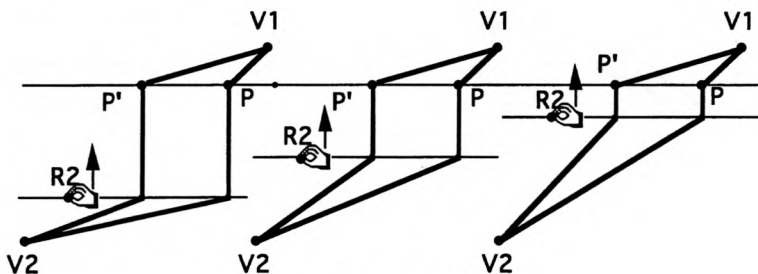


fig.Cabri : Pont1-C

On peut alors remarquer que l'on a commis une légère erreur dans la représentation du problème.

En effet, quels sont les paramètres qui déterminent le contexte du problème ? Ils sont au nombre de quatre : la distance de chaque ville à sa berge, la largeur de la rivière et l'écartement entre les projections des villes sur une même horizontale.

Ces 4 paramètres, que l'on retrouve dans la formalisation analytique du problème, sont a priori indépendants. Or, dans notre construction, ils ne le sont plus. En effet, quand on déplace R2 pour faire varier la largeur de la rivière, V2 qui est libre ne bouge pas, et ainsi la distance de V2 à la berge se trouve modifiée.

Le souci de pouvoir faire varier indépendamment les 4 paramètres du contexte du problème va donc nous amener à réaliser une autre construction pour la représentation du problème.

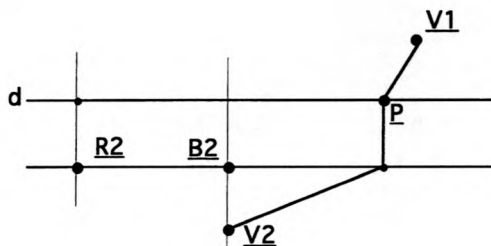


fig.Cabri : Pont2

Le point V1 est libre, ainsi que la droite (d) représentant la berge supérieure. R2 semi-libre sur une perpendiculaire à (d) permet de construire la berge inférieure. V2 n'est plus libre mais semi-libre sur une perpendiculaire à la berge inférieure, passant par un point B2, lui-même semi-libre sur cette berge. Ainsi V2 est directement déplaçable verticalement et déplaçable horizontalement par B2, mais il "suit" sa berge quand on fait varier la largeur de la rivière par R2.

Avec cette construction, moins "naturelle" que la précédente, on peut faire varier les 4 paramètres du contexte, en toute indépendance.

Et cette fois, la variation de la largeur de la rivière par la manipulation du point R2 donne la "dynamique" ci-dessous très éclairante.

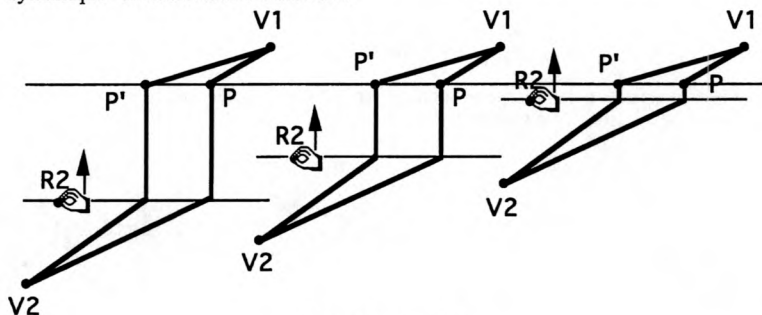


fig.Cabri : Pont2-C

On voit en effet apparaître un invariant "de comparaison" que l'on peut exprimer ainsi :

P et P' étant deux points quelconques de la berge supérieure, si, dans un contexte donné, le chemin par P est meilleur que celui par P', alors cela reste vrai après une opération de translation de l'ensemble "berge inférieure et ville V2", orthogonalement à la rivière

(c'est-à-dire en ne modifiant que la largeur de la rivière et en laissant inchangés les 3 autres paramètres).

Ainsi le résultat de la comparaison reste inchangé jusqu'au cas limite où la rivière est de "largeur nulle". Or, dans ce cas limite, la position optimale de P est évidemment dans l'alignement de V1 et V2.

D'où l'on retrouve, pour un contexte quelconque, la construction de P dans l'alignement de V1 et de l'image V'2 de V2 dans la translation "vers le haut" correspondant à la largeur de la rivière.

Un "méta-problème" intéressant est ainsi de chercher, face à un problème donné, quelle est la construction Cabri dont la manipulation permettra de mettre en évidence des invariants et une solution. Retenons sur ce point cette idée générale d'indépendance des paramètres, même si, certaines fois, ce sera au contraire leur non-indépendance qui fera apparaître un invariant.

III. EN GUISE DE CONCLUSION PROVISoire

Ces deux exemples montrent, parmi bien d'autres, comment CABRI permet de "pétrir" une figure représentant la donnée du problème, comme un "phénomène" que l'on observe de manière active et sur lequel on expérimente dynamiquement à travers plusieurs constructions, dans une recherche très heuristique.

Au delà de cet aspect heuristique, et sans vouloir figer la recherche dans des "recettes", on peut dégager la méthode de "paramétrage dynamique d'une solution éventuelle" et de recherche d'un invariant. Cette "méthode" n'est pas nouvelle, ni spécifique à l'utilisation de Cabri, mais le logiciel l'illustre et la soutient très bien. En effet comment représenter un paramétrage et mettre en évidence un invariant, sans un outil pour organiser la variation.

Certains diront peut-être que cette manipulation dynamique peut se faire mentalement à partir d'un simple dessin (brouillon) à la main sans CABRI. C'est vrai, heureusement, et c'est typique de l'opération fondamentale d'abstraction que réalisera spontanément le "bon élève". Mais beaucoup d'élèves ne le feront pas "spontanément" et notre pari (qui reste à démontrer) c'est justement qu'un travail régulier avec Cabri doit aider à se créer de "bonnes images mentales" et à développer ce mécanisme d'abstraction.